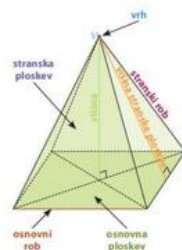


Učenci 9. razreda boste pri matematiki na daljšavo predelali poglavje PIRAMIDE. V učbeniku se snov začne na strani 155.

Vsi že poznate piramide iz nižjih razredov. Če povežete z znanjem o prizmah, lahko vidite, da se piramide od prizem razlikujejo v tem, da imajo piramide le eno osnovno ploskev, stranske ploskve pa so trikotniki, ki se stikajo v eni točki, vrhu. (slika v učbeniku na str. 156)

Osnovni pojmi v piramidi



Če imate možnost natisniti spodnji opis, ga nalepite v zvezek, v nasprotnem primeru prepišite.

OPIS PIRAMIDE

PIRAMIDA je oglato geometrijsko telo, ki ga omejuje n -kotnik in n -trikotnikov, ki se stikajo v točki V . Točka V je **vrh** piramide.

Osnovna ploskev je n -kotnik. Vse **stranske ploskve** so trikotniki in sestavljajo **plašč** piramide.

Osnovni rob (a) je stranica n -kotnika, ki predstavlja osnovno ploskev.

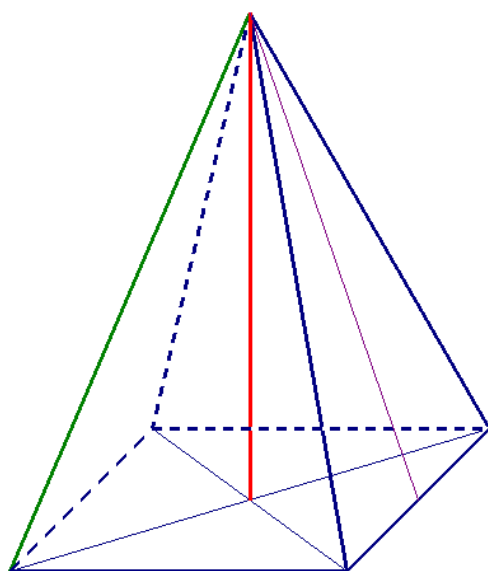
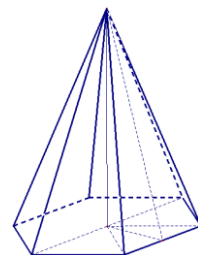
Stranski rob (s) je rob, ki povezuje osnovno ploskev in vrh piramide.

Višina (v) je razdalja med osnovno ploskvijo in vrhom piramide.

Stranska višina (v_1) je višina stranske ploskve (višina trikotnika).

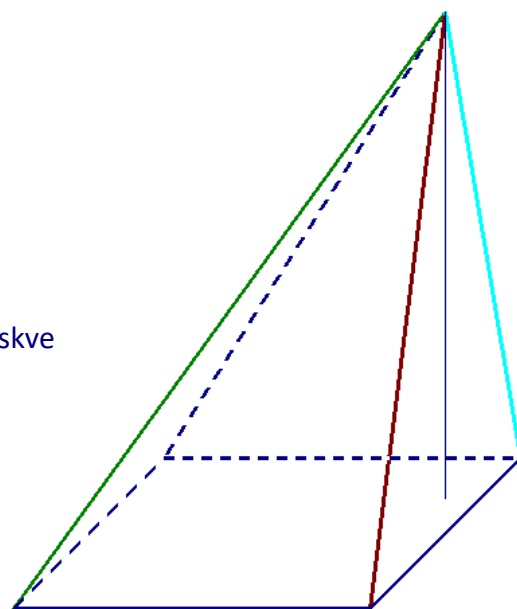
Po številu robov osnovne ploskve ločimo tristrane, štiristrane, ..., n -strane piramide.

Piramido, ki ima za osnovno ploskev trikotnik, imenujemo **tristrana piramida** ali **četverec** ali **tetraeder**. Če je četverec enakorob, ga imenujemo **pravilni četverec** ali **pravilni tetraeder**.



POKONČNA_PIRAMIDA

- V – vrh piramide
- a – osnovni rob
- s – stranski rob
- v – višina
- v_1 – višina stranske ploskve



POŠEVNA_PIRAMIDA

Na zgornji sliki označite oglišča, robove, višine.

Pri pokončni piramidi so vse stranske ploskve skladni trikotniki.

Pazi, pri piramidi imamo različne višine: eno je višina piramide (razdalja med osnovno ploskvijo in vrhom – na zgornji sliki je rdeče barve), drugo je pa višina stranske ploskve (višina trikotnika – na zgornji sliki vijolične barve).

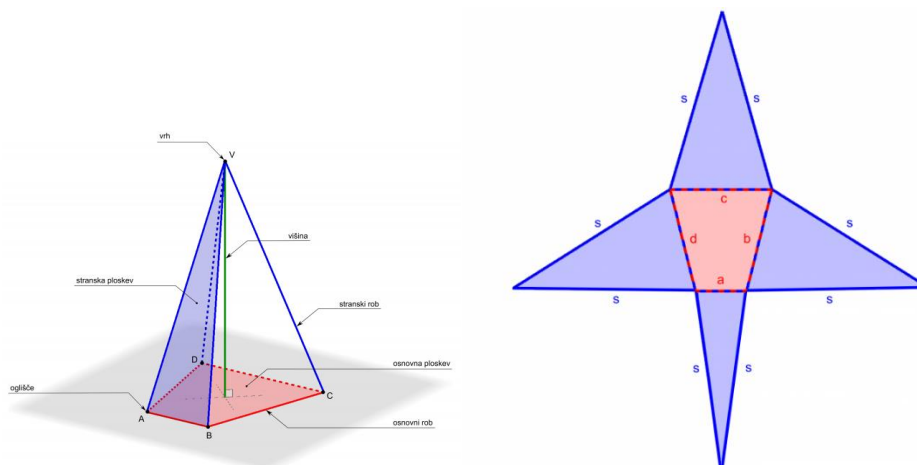
V učbeniku rešite 1. in 2. nalogo na strani 162.

Razlago, zglede in naloge najdete tudi na spletni strani www.eucbeniki.sio.si --- matematika - --- oglata telesa --- piramide (poglavja izbiraš, če klikneš na zavihek KAZALO)

Če je kje kakšna težava, me lahko kontaktiraš na mail marjeta.krasovec@guest.arnes.si ali prek eAsistenta. Vesela bom tudi kakšne druge povratne informacije, kako vam gre reševanje.

2. ura **MREŽA, POVRŠINA IN PROSTORNINA PIRAMIDE**

Mejne ploskve prizme so večkotnik (osnovna ploskev) in trikotniki (stranske ploskve). Če mejne ploskve piramide razgrnemo na ravnino, dobimo mrežo piramide.



Mreža štiristrane piramide

Površino izračunamo tako, da seštejemo ploščine vseh njenih mejnih ploskev, osnovne ploskve in plašča.

Osnovna ploskev (O) piramide je poljuben večkotnik. Ploščino osnovne ploskve izračunamo po obrazcu za računanje ploščin likov. Pomagate si lahko z listom s formulami.

Plašč pokončne piramide (pl) je sestavljen iz enakokrakih trikotnikov.

Splošna formula za površino (P) piramide je:

$$P = O + pl$$

Če bi imeli piramido in prizmo z enako višino in enako osnovno ploskvijo, bi s prelivanjem vode lahko ugotovili, da ima prizma trikrat večjo prostornino kot piramida. Poskus si lahko ogledate na <https://eucbeniki.sio.si/mat9/914/index2.html>

Splošna formula za izračun prostornine (V) piramide je:

$$V = \frac{O \cdot v}{3}$$

V zvezek reši rešena primera na strani 159.

Reši še 5. nalogo na strani 162.

3. ura **PRAVILNA ŠTIRISTRANA PIRAMIDA**

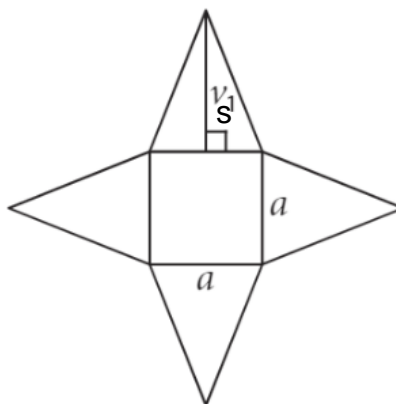
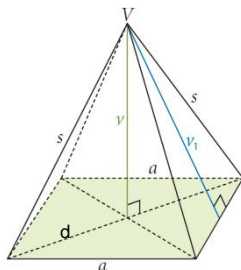
Pravilna štiristrana pokončna piramida ima za osnovno ploskev kvadrat:

V zvezek skiciraj pravilno pokončno 4- strano piramido v poševni projekciji, zraven z ravnilom nariši še mrežo te piramide.

4-strana piramida

$a = 3 \text{ cm}$

$v_1 = 4 \text{ cm}$



a – osnovni rob

s – stranski rob

v – višina piramide

v_1 – višina stranske ploskve (enakokrakega trikotnika)

d – diagonala osnovne ploskve (diagonala kvadrata $d = a\sqrt{2}$)

$$O = a^2$$

ploščina ene stranske ploskve: $\frac{a \cdot v_1}{2}$

$$pl = 4 \cdot \frac{a \cdot v_1}{2}$$

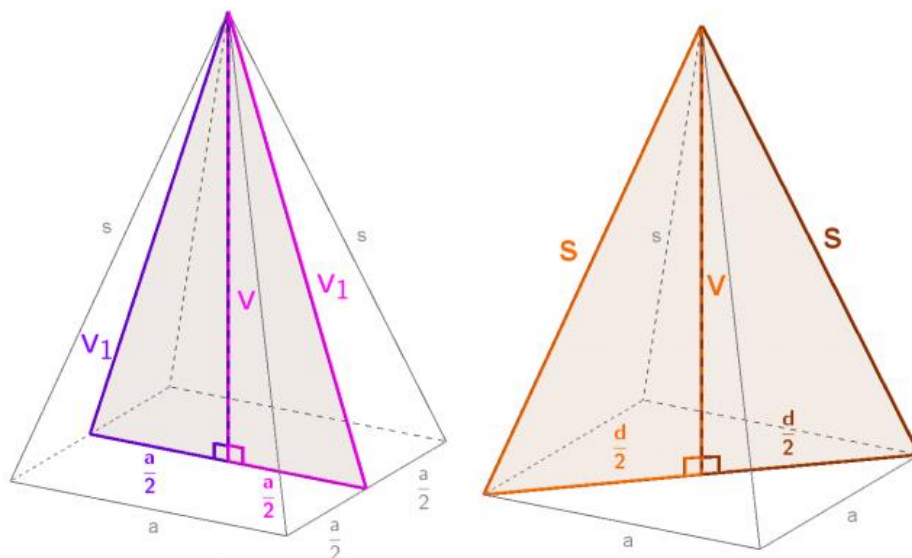
$$P = a^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot v_1}{2} \text{ površina pravilne 4-strane piramide}$$

$$V = \frac{a^2 \cdot v}{3} \text{ prostornina pravilne 4-strane piramide}$$

Kot vidiš, za izračun površine in prostornine pravilne 4-strane piramide potrebuješ 3 podatke: a , v in v_1 . Če v nalogi nimaš znanih dovolj podatkov, si pomagaš s enakokrakimi trikotniki, ki jih dobiš, če piramido prerežeš skozi vrh. Tako dobiš osni presek piramide.

Prilepi v zvezek oz. preiši in prepši:

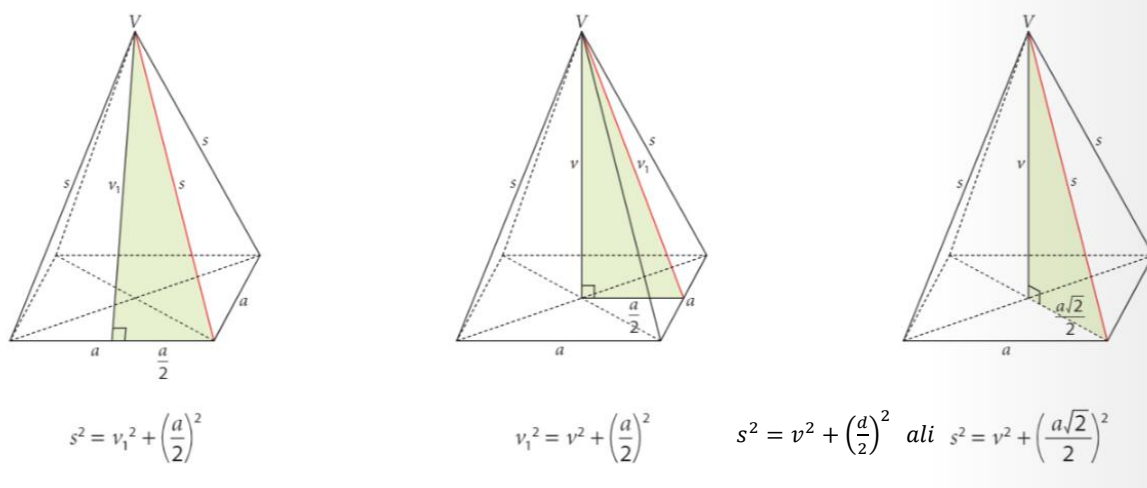
OSNI PRESEK PIRAMIDE:



Piramido lahko prerežeš na dva načina:

- skozi vrh in razpoloviš dva nasprotna osnovna robova (leva slika)
- skozi vrh in po diagonali osnovne ploskve (desna slika)

UPORABA PIRAGOROVEGA IZREKA V PRAVILNI 4-STRANI PIRAMIDI



Reši rešen primer 2. a in 3 na strani 160, 161

Reši še 6. a, 8. in 10 nalogo na strani 162, 163

4. ura Vaje pravilna 4-strana piramida (rešuj v zvezek, pri vsaki nalogi nariši skico in na njej pobarvaj ustrezen pravokotni trikotnik)

1. naloga

pravilna 4-strana piramida

$$a = 24 \text{ cm}$$

$$v_1 = 20 \text{ cm}$$

$$O = ?$$

$$s = ?$$

$$v = ?$$

$$pl = ?$$

$$P = ?$$

$$V = ?$$

Rešujemo postopno:

osnovna ploskev je kvadrat, zato:

$$O = a^2$$

$$O = (24 \text{ cm})^2$$

$$\underline{O = 576 \text{ cm}^2}$$

Stranski rob izračunamo s pomočjo Pitag. izreka:

$$s^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + v_1^2$$

$$s^2 = (12 \text{ cm})^2 + (20 \text{ cm})^2$$

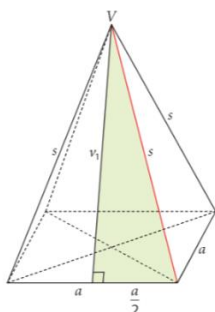
$$s^2 = 144 \text{ cm}^2 + 400 \text{ cm}^2$$

$$s^2 = 544 \text{ cm}^2$$

$$s = \sqrt{544 \text{ cm}^2}$$

$$\underline{s = 23,3 \text{ cm}}$$

skica:



$$v^2 = v_1^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$v^2 = (20 \text{ cm})^2 - (12 \text{ cm})^2$$

$$v^2 = 400 \text{ cm}^2 - 144 \text{ cm}^2$$

$$v^2 = 256 \text{ cm}^2$$

$$v = \sqrt{256 \text{ cm}^2}$$

$$\underline{v = 16 \text{ cm}}$$

$$pl = 4 \cdot \frac{a \cdot v_1}{2}$$

$$pl = 4 \cdot \frac{24 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm}}{2}$$

$$\underline{pl = 960 \text{ cm}^2}$$

$$P = O + pl$$

$$P = 576 \text{ cm}^2 + 960 \text{ cm}^2$$

$$\underline{P = 1536 \text{ cm}^2}$$

$$V = \frac{O \cdot v}{3}$$

$$V = \frac{576 \text{ cm}^2 \cdot 16 \text{ cm}}{3}$$

$$\underline{V = 9216 \text{ cm}^3}$$

2. naloga

Pravilna 4-str. piramida

$$v_1 = 17 \text{ cm}$$

$$\underline{v = 15 \text{ cm}}$$

$$a = ?$$

$$O = ?$$

$$pl = ?$$

$$P = ?$$

$$V = ?$$

3. naloga

Pravilna 4-str. piramida

$$a = 40 \text{ cm}$$

$$\underline{v = 21 \text{ cm}}$$

$$v_1 = ?$$

$$d = ?$$

$$O = ?$$

$$pl = ?$$

$$P = ?$$

$$V = ?$$

4. naloga

Prostornina pravilne 4-strane piramide z osnovnim robom je 1280 cm^2 . Koliko meri njena površina?

5. naloga

Izračunaj površino in prostornino sestavljenega telesa, če veš, da je telo visoko 42 cm in meri osnovni rob 20 cm.



5. ura

Za ponovitev najprej v zvezek reši dve nalogi. Izpiši podatke, nariši skico in na skici označi potrebne pravokotne trikotnike.

1. Pravilna štiristrana piramida je visoka 18 cm, njen osnovi rob pa meri 13 cm. Kolikšna je prostornina te piramide?

2. Osnovni rob pravilne 4-strane piramide meri 6 cm, višina stranske ploskve pa 5 cm. Izračunaj višino piramide, površino piramide in prostornino piramide.

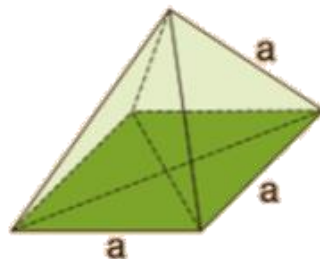
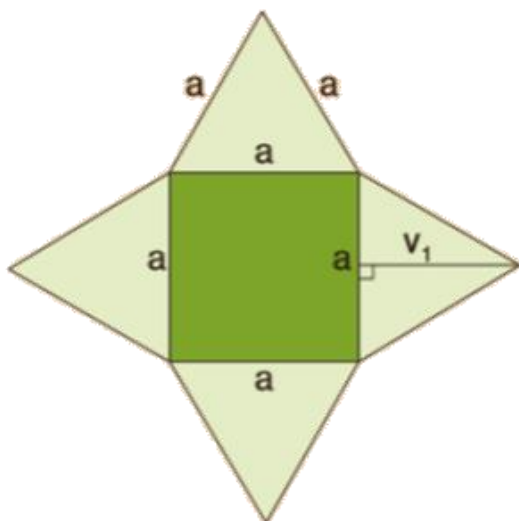
Zapis v zvezek:

ENAKOROBA ŠTIRISTRANA PIRAMIDA

Enakoroba piramida ima vse robove enako dolge ($a = s$).

Stranske ploskve so enakostranični trikotniki. Višina stranske ploskve je višina enakostraničnega trikotnika ($v_1 = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$)

V zvezek nariši mrežo enakorobe štiristrane piramide. Osnovni rob naj meri 4 cm. Skiciraj to piramido še v poševni projekciji.



Ploščina osnovne ploskve

$$O = a^2$$

Ploščina plašča piramide

$$pl = 4 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$
$$pl = a^2 \cdot \sqrt{3}$$

Ploščina enakostraničnega trikotnika (stranske ploske)

$$p = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

Površina enakorobe štiristrane piramide

$$P = O + pl$$

$$P = a^2 + 4 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$P = a^2 + a^2 \sqrt{3}$$

Prostornina enakorobe štiristrane piramide

$$V = \frac{1}{3} \cdot O \cdot v$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}$$

$$V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{6}$$

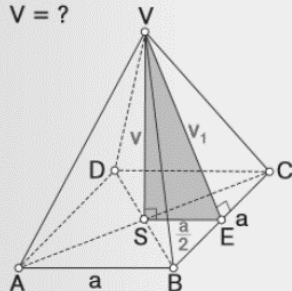
Reši spodnji primer v zvezek.

Izračunaj prostornino pravilne enakorobe štiristrane piramide, če meri višina stranske ploskve $9\sqrt{3}$ dm.

Enakoroba štiristrana piramida

$$v_1 = 9\sqrt{3} \text{ dm}$$

$$V = ?$$



Narišemo skico piramide in na njej označimo podatke, ki jih potrebujemo za izračun prostornine.

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} \\ \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} &= v_1 / 2 \\ a \cdot \sqrt{3} &= 2 \cdot v_1 / : \sqrt{3} \\ a &= \frac{2 \cdot v_1}{\sqrt{3}} \\ a &= \frac{2 \cdot 9 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ a &= 18 \text{ dm} \end{aligned}$$

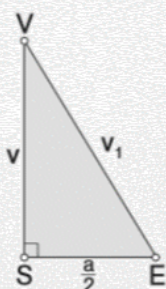
Levo in desno stran enačbe zamenjamo, da je produkt z neznanko na levi strani enačaja.

Odpravimo ulomek, in sicer tako, da levo in desno stran enačbe pomnožimo z 2.

Obe strani enačbe delimo s $\sqrt{3}$ in izrazimo osnovni rob a.

Vstavimo podatke, okrajšamo ulomek in izračunamo dolžino osnovnega roba piramide.

Za izračun prostornine potrebujemo še dolžino višine piramide, ki jo dobimo z uporabo Pitagorevega izreka.



$$\begin{aligned} v^2 &= v_1^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ v^2 &= (9\sqrt{3})^2 - \left(\frac{18}{2}\right)^2 \\ v^2 &= 81 \cdot 3 - 9^2 \\ v^2 &= 243 - 81 \\ v^2 &= 162 \\ v &= \sqrt{162} \\ v &= \sqrt{81 \cdot 2} \\ v &= 9 \cdot \sqrt{2} \text{ dm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{O \cdot v}{3} \\ V &= \frac{a^2 \cdot v}{3} \\ V &= \frac{18^2 \cdot 9\sqrt{2}}{3} \\ V &= 324 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \\ V &= 972 \cdot \sqrt{2} \text{ dm}^3 \end{aligned}$$

Reši še 2 nalogi.

1. Vsota robov pravilne štiristrane piramide je 20 cm. Načrtaj mrežo te piramide in izračunaj na kvadratni centimeter natančno vsoto ploščin likov, ki sestavljajo mrežo.

2. Izračunaj ploščino plašča in površino pravilne enakorobe štiristrane piramide z robom 20 cm. Rezultat naj bo točen (to pomeni, da korene pustiš v rezultatu in ne računaš s približki).

6.,7. in 8. ura **PRAVILNA TRISTRANA PIRAMIDA** – naslov v zvezek

Pozorno preberi spodnjo razlago in v zvezek nariši pravilno tristrano piramido. Izpiši obrazce za O, pl, P in V.

Ana je na trši papir narisala mrežo pravilne tristrane piramide z osnovnim robom 6 cm in višino stranske ploskve 4 cm, nato pa je mrežo zlepila v model piramide. Najmanj koliko kvadratnih centimetrov papirja je porabila za model te piramide?

Mreža

Osnovna ploskev pravilne tristrane piramide je enakostranični trikotnik.

Ploščino izračunamo po obrazcu

$$O = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

Plašč je sestavljen iz treh skladnih enakokrakih trikotnikov.

Stranska ploskev piramide je enakokraki trikotnik, zato ploščino izračunamo po obrazcu

$$S = \frac{a \cdot v_1}{2}$$

Površina piramide je vsota ploščin osnovne ploskve in plašča.

$$P = O + pl$$

$$P = 15,59 + 36$$

$$P = 51,59 \text{ cm}^2$$

Ana je za izdelavo modela pravilne tristrane piramide porabila najmanj 51,59 cm² papirja.

Površina pravilne tristrane piramide

$$P = O + pl$$

$$P = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{a \cdot v_1}{2}$$

Prostornina pravilne tristrane piramide

$$V = \frac{O \cdot v}{3} = \frac{1}{3} \cdot O \cdot v$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot v$$

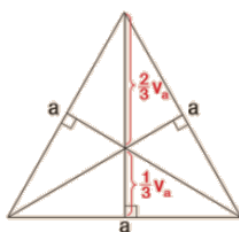
$$V = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3} \cdot v}{12}$$

Pozorno preberi še razlago uporabe Pitagorovega izreka. Preriši piramido, pobarvaj pravokotne trikotnike in zapiši Pitagorov izrek za vse tri trikotnike.

PITAGOROV IZREK V PRAVILNI TRISTRANI PIRAMIDI – naslov v zvezek

Osnovna ploskev pravilne tristrane piramide je enakostranični trikotnik. Presečišče višin enakostraničnega trikotnika je višinska točka, ki razdeli višino v razmerju 1 : 2.

enakostranični trikotnik

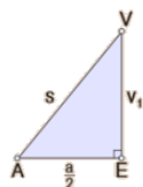
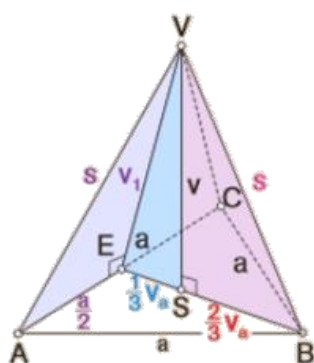


$$\frac{1}{3} \cdot v_a = \frac{1}{3} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{6}$$

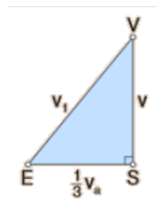
$$\frac{2}{3} \cdot v_a = \frac{2}{3} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{3}$$

V pravilni tristrani piramidi so trije različni pravokotni trikotniki. Z uporabo

Pitagorovega izreka pri znanih dolžinah dveh stranic izračunamo tretjo.

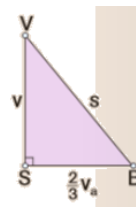


$$s^2 = v_1^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$



Dolžina katete ES je enaka $\frac{1}{3}$ višine osnovne ploskve

$$v_1^2 = v^2 + \left(\frac{1}{3}v_a\right)^2$$

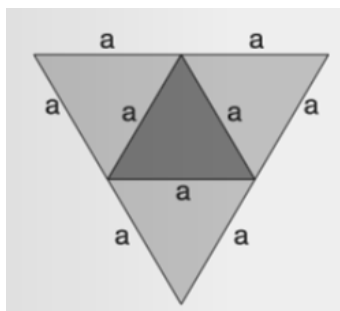
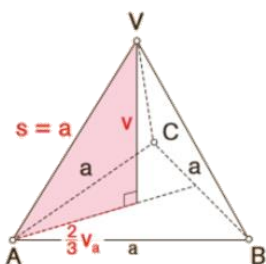


Dolžina katete SB je enaka $\frac{2}{3}$ višine osnovne ploskve

$$s^2 = v^2 + \left(\frac{2}{3}v_a\right)^2$$

ENAKOROKA TRISTRANA PIRAMIDA (ČETVEREC, TETRAEDER) – naslov v zvezek

Ker je piramida enakoroka, ima vse mejne ploskve enako velike, to so štirje enakostranični trikotniki.



$$O = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$pl = 3 \cdot O$$

$$P = O + pl$$

$$P = O + 3 \cdot O$$

$$P = 4 \cdot O$$

$$P = 4 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$P = a^2 \cdot \sqrt{3}$$

Prostornina enakoroke tristrane piramide

$$V = \frac{1}{3} \cdot O \cdot v$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{6}}{3}$$

$$V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$$

Višina enakoroke tristrane piramide

$$v^2 = a^2 - \left(\frac{2}{3}v_a\right)^2$$

$$v^2 = a^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$v^2 = a^2 - \frac{a^2}{3}$$

$$v = \sqrt{\frac{2a^2}{3}}$$

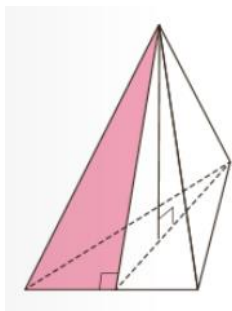
$$v = \frac{a \cdot \sqrt{6}}{3}$$

»Uspešnejši« učenci rešujate spodnje naloge. Ostali iz palčk, slamic, žice... izdelajte modele geometrijskih teles: 4-strana prizma, 4-strana piramida, pravilna 3-strana prizma, pravilna 3-strana piramida... V piramidah poskusite označiti tudi višine, da prikazete pravokotne trikotnike. Za svoje modele izdelajte mreže iz papirja.

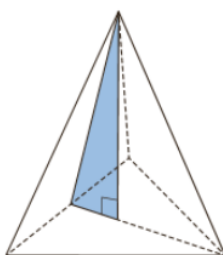
Naloge:

1. Oglej si (preriši) sliko pravilne tristrane piramide, na njej označi stranice obarvanega pravokotnega trikotnika in izračunaj neznano količino. Izpiši podatke.

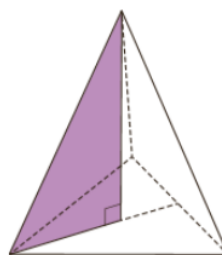
$$\begin{aligned} \text{a) } s &= 13 \text{ m} \\ \underline{v_1 &= 12 \text{ m}} \\ a &= ? \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{b) } v &= 4 \text{ m} \\ \underline{v_a &= 9 \text{ m}} \\ v_1 &= ? \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{c) } s &= 17 \text{ m} \\ \underline{v_a &= 12 \text{ m}} \\ v &= ? \end{aligned}$$



2. Ploščina osnovne ploskve pravilne tristrane piramide meri $49\sqrt{3} \text{ dm}^2$, stranski rob pa 2,5 m. Izračunaj površino piramide.

3. Izračunaj površino pravilne tristrane piramide z osnovnim robom $8\sqrt{3} \text{ cm}$ in višino 3 cm.

4. Izračunaj prostornino pravilne tristrane piramide, če meri ploščina njene osnovne ploskve $4\sqrt{3} \text{ m}^2$, plašč pa $8\sqrt{3} \text{ m}^2$.

5. Tina želi izdelati škatlo v obliki četrca z robom 3 cm.

a) Načrtaj škatlo četrca.

b) Koliko kvadratnih centimetrov papirja je porabila za izdelavo škatle.

6. Plašč enakorobe tristrane piramide meri $27\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Izračunaj površino piramide.