

Teoría de juegos

Jesús López Fidalgo

Esta teoría está íntimamente relacionada con la teoría de la decisión. Lo que diferencia una de otra es el rival contra el que se entra en juego. En la teoría de la decisión el rival es la naturaleza, que se manifiesta de modo más o menos aleatorio y por tanto su influencia en las consecuencias de la decisión tomada no es interesada. En la teoría de juegos sin embargo participan decisores (jugadores) que tienen intereses encontrados. Por ejemplo diversas empresas han de tomar decisiones sobre las prestaciones, precio, publicidad, ... que han de desarrollarse para determinado producto. Supondremos siempre que un jugador se pone en la peor situación.

1. Juegos de suma cero con dos jugadores

Denominaremos a uno *jugador fila* y al otro *jugador columna*. El primero ha de elegir una de m estrategias y el jugador columna una de n estrategias. Se supondrá que si el primero elige i y el segundo j habrá una *ganancia* de a_{ij} para el primero y una *pérdida* de a_{ij} para el segundo. Esto se conoce como juego de suma cero. Se podría decir que en un juego de suma cero con dos jugadores lo que gana uno proviene del otro sin posibilidad de cooperación entre ellos. Cuando uno gana el otro pierde la misma cantidad. Todo esto puede representarse mediante una *matriz de ganancias* del jugador fila:

Jugador fila	Jugador columna			
	Estrategia 1	Estrategia 2	...	Estrategia n
Estrategia 1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
Estrategia 2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...
Estrategia m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Hipótesis básica (condición de punto silla): Un juego de suma cero que cumpla:

$$\max_{i=1,\dots,m} \left\{ \min_{j=1,\dots,n} a_{ij} \right\} = \min_{j=1,\dots,n} \left\{ \max_{i=1,\dots,m} a_{ij} \right\}.$$

Se dice que el juego tiene **punto silla** y a este número se le llama **valor** (v) del juego para el jugador fila. Una forma sencilla de determinar este punto es buscar un número de la matriz que sea el menor en su fila y el mayor en su columna.

Ejemplo: Supongamos que los dos grandes productores de agendas electrónicas se proponen sacar al mercado un modelo nuevo con teléfono móvil incorporado. Pueden establecer un convenio con cuatro de las compañías telefónicas y uno de los dos productores podría desarrollar una compañía telefónica propia. La matriz de ganancias sería:

CASIE	PAM				Mínimo
	Movisun	Entfone	Underhill	Windtel	
Movisun	10	-20	-5	-10	-20
Entfone	15	10	-5	-5	-5
Underhill	30	40	-10	-5	-10
Windtel	25	25	-30	-20	-30
PhoneCasie	10	-20	15	-5	-20
Máximo	30	40	15	-5	

Vemos que en -5 hay un punto silla y corresponde a la elección de Entfone por parte de la compañía CASIE y de Windtel por parte de la compañía PAM. Este es un **punto de equilibrio** en el que ninguno de los jugadores puede beneficiarse con un cambio unilateral de estrategia. En este caso el equilibrio se logra asumiendo CASIE una pérdida de 5 como mal menor y PAM una ganancia segura de 5.

La siguiente tabla no tendría punto silla:

CASIE	PAM				Mínimo
	Movisun	Entfone	Underhill	Windtel	
Movisun	10	-20	-5	-1	-20
Entfone	15	10	-5	-10	-10
Underhill	30	40	-10	5	-10
Windtel	25	25	-30	-20	-30
PhoneCasie	10	-20	15	-5	-20
Máximo	30	40	15	5	

Este tipo de problema ha de resolverse por otros medios.

2. Juegos de suma constante con dos jugadores

Ahora la suma de los beneficios de los dos jugadores es constante. Correspondería a la idea de una cantidad fija que se ha de repartir entre ambos. Los juegos de suma cero son un caso particular de este. El procedimiento anterior es aplicable ahora con ligeros cambios.

Ejemplo: Dos empresas de catering van a ofrecer sus servicios durante un congreso al que asistirán 3000 personas que comerán necesariamente en uno de ellos. Han de ofrecer el menú y la publicidad simultáneamente y con antelación a la celebración del congreso. La empresa WEESNACK podría optar por tres modalidades distintas, mientras que la empresa DRYHAM tiene dos posibilidades. La matriz de beneficios ahora estará formada por una estimación del número de comensales en WEESNACK según las diversas estrategias:

WEESNACK	DRYHAM		Mínimo
	Modalidad A	Modalidad B	
Modalidad 1	1500	2400	1500
Modalidad 2	1400	2600	1400
Modalidad 3	1500	1400	1400
Máximo	1500	2600	

En este juego se satisface también la condición de punto silla ya que:

$$\max_{i=1,\dots,m} \{ \min_{j=1,\dots,n} a_{ij} \} = 1500 = \min_{j=1,\dots,n} \{ \max_{i=1,\dots,m} a_{ij} \}.$$

Y por tanto la Modalidad A para DRYHAM y la Modalidad 1 para WEESNACK producen un punto silla y ningún jugador conseguirá una ganancia mayor si cambia de estrategia.

3. Juegos de suma cero para dos jugadores con estrategias aleatorizadas

Se analizarán ahora aquellos juegos que no tienen punto silla, que de hecho son mucho más frecuentes en la práctica. Para ello supongamos que dos personas van a jugar a pares o impares solamente con la posibilidad de sacar uno o dos dedos cada uno. Si la suma de ambos es par el jugador A pagará un euro al jugador B. En caso contrario será B el que pague a A. Por tanto la matriz de beneficios se puede expresar de la forma siguiente:

Jugador A	Jugador B		Mínimo
	1 dedo	2 dedos	
1 dedo	-1	1	-1
2 dedos	1	-1	-1
Máximo	1	1	

No hay punto silla. Eso significa que para cualquier decisión de estrategias hay un jugador que puede beneficiarse cambiando de estrategia unilateralmente. Si por ejemplo los dos sacan dos dedos el resultado sería par y ganaría B. Pero al cambiar A de estrategia pasaría a ganar A y por tanto a perder B.

Se determinarán ahora estrategias óptimas y el valor de este juego. Para ello se amplía el conjunto de estrategias posibles. Hasta ahora se ha supuesto que cada vez que un jugador participa en un juego utilizará la misma estrategia. Ahora se permitirá que un jugador opte por una estrategia concreta en una proporción determinada de casos, que llamaremos *probabilidad*. Este tipo de estrategias se denominan *estrategias aleatorizadas* o *mixturas*. En general podríamos representar una estrategia aleatorizada de A de la forma (x_1, x_2) y una de B de la forma (y_1, y_2) . Esto quiere decir que si el jugador A utiliza la estrategia (x_1, x_2) sacará un dedo en el $100x_1\%$ de las veces que juegue y dos en el resto ($100x_2\%$). Por supuesto ha de verificarse que $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 + x_2 = 1$, $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$ y $y_1 + y_2 = 1$. Si A opta por la estrategia $(1/2, 1/2)$ entonces antes de tomar la decisión en cada juego lanzará, por ejemplo, una moneda. Si sale cara sacará un dedo y en caso contrario dos dedos.

En general, si una estrategia aleatorizada del jugador fila (x_1, x_2, \dots, x_m) , es tal que $x_i = 1$ entonces la estrategia del jugador fila es una *estrategia pura*, de modo que siempre elige la estrategia i . Por tanto las estrategias puras tienen como representación los vectores de la base canónica.

3.1. Solución gráfica

En el ejemplo anterior la ganancia esperada de A cuando B escoge 1 será:

$$(-1) \times x_1 + 1 \times (1 - x_1) = 1 - 2x_1$$

y en el caso de que B elija 2 la ganancia esperada de A será:

$$1 \times x_1 + (-1) \times (1 - x_1) = 2x_1 - 1.$$

En la Figura 1 se representan gráficamente ambas ganancias esperadas. Por tanto, suponiendo que el jugador B conoce la decisión de A, $(x_1, 1 - x_1)$, la ganancia esperada de A vendrá determinada por la línea gruesa. De este modo el punto de corte ofrece a A garantías de una ganancia media mínima de cero. Este punto proporciona la mejor estrategia para A, $(1/2, 1/2)$. El caso de B es totalmente simétrico produciendo ahora la Figura 2.

Ambas gráficas representan las ganancias medias de A. Por ese motivo B buscará minimizar la ganancia esperada de A, que conociendo de antemano la estrategia de B vendrá representada por la línea gruesa en la Figura 2. Se puede decir por tanto que en este juego el techo o nivel superior del jugador A coincide con el suelo o nivel inferior de B. Esto es algo general, de modo que siempre el suelo del jugador fila coincide con el techo del jugador columna. El valor común de ambos se denomina *valor* del juego para el jugador fila. Así, cualquier estrategia del jugador fila que garantice una ganancia esperada al menos igual al valor es una *estrategia óptima* para este jugador. Del mismo modo cualquier estrategia del

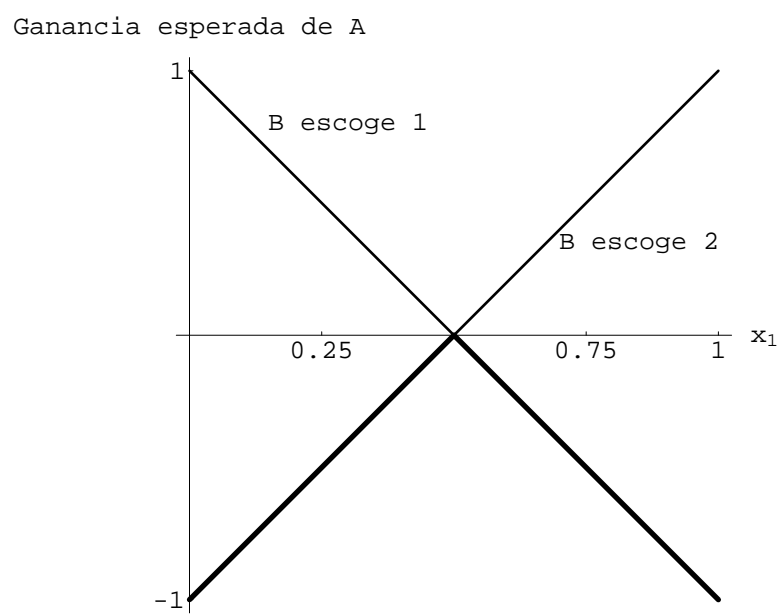


Figura 1: Selección de la estrategia de A

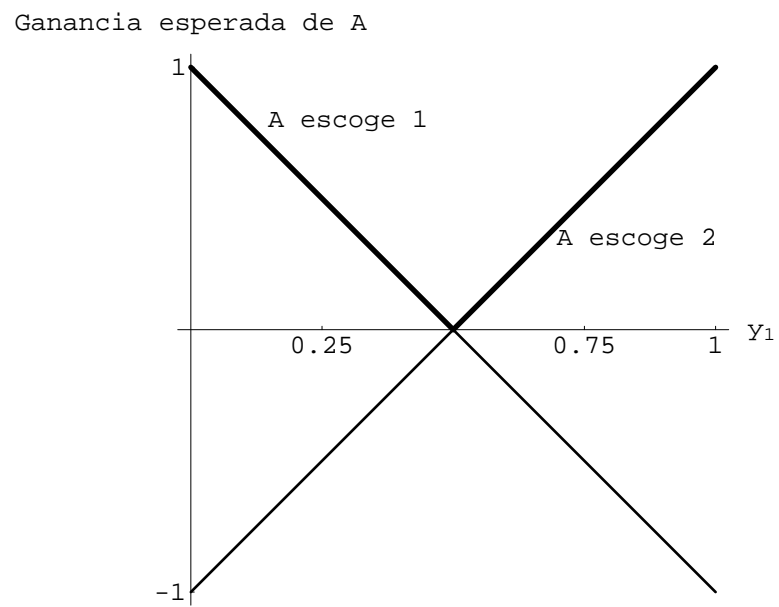


Figura 2: Selección de la estrategia de B

jugador columna que garantice una pérdida esperada a lo sumo igual al valor es una *estrategia óptima* para el jugador columna. En el ejemplo el valor es cero y $(1/2, 1/2)$ será una estrategia óptima para ambos. Además es única.

Supongamos que el jugador A escoge la estrategia $(1/3, 2/3)$. Entonces escogiendo B dos dedos garantiza que la ganancia media de A es negativa y por tanto su ganancia esperada es positiva. Sería una estrategia óptima para B, pero no para A.

Ejemplo más complicado: Se lanza al aire una moneda y se enseña el resultado al jugador H. Este puede pasar o apostar. Si pasa ha de dar 1 al jugador K. Si sigue, el jugador K puede pasar o apostar. Si pasa y había salido cara ha de pagar 2 a H, pero si había salido cruz es H el que ha de pagar 2 a K. Si ambos jugadores siguen el jugador K ha de pagar 1 a H.

Las estrategias posibles de H son cuatro:

1. Pasar siempre: P
2. Apostar siempre: A
3. Pasar si sale cara y apostar si sale cruz: PA
4. Apostar si sale cara y pasar si sale cruz: AP

Por su parte H solamente tiene dos decisiones posibles: Pasar (P) o Apostar (A). Existen por tanto cuatro consecuencias posibles para la ganancia de H:

1. Ganancia de 1 si los dos deciden apostar.
2. Ganancia de -1 si H pasa.
3. Ganancia de 2 si H apuesta, K pasa y sale cara.
4. Ganancia de -2 si H apuesta, K pasa y sale cruz.

Teniendo en cuenta que la probabilidad de obtener cara (respectivamente cruz) es $1/2$, la tabla de ganancias de H será:

Jugador H	Jugador K		Mínimo
	P	A	
P	-1	-1	-1
PA	$(-1)\frac{1}{2} + (-2)\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$	$(-1)\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 0$	$-\frac{3}{2}$
AP	$2\frac{1}{2} + (-1)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2} + (-1)\frac{1}{2} = 0$	0
A	$2\frac{1}{2} + (-2)\frac{1}{2} = 0$	1	0
Máximo	$\frac{1}{2}$	1	

Este juego no tiene punto silla. Al tener cuatro estrategias posibles la representación gráfica que se hizo en el ejemplo anterior resulta imposible. No obstante, se observa que tanto la estrategia P como la estrategia PA del jugador H producen peores ganancias que las estrategias A y AP, sea cual sea la decisión del jugador K. Se dice que las estrategias P y PA están *dominadas* por las estrategias A y AP. Por tanto se pueden eliminar del conjunto de estrategias, ya que nunca pueden ser elegidas por el jugador H. De este modo la matriz de ganancias de H se puede reducir a la siguiente:

Jugador H	Jugador K		Mínimo
	P	A	
AP	$\frac{1}{2}$	0	0
A	0	1	0
Máximo	$\frac{1}{2}$	1	

Ahora sí, al tener solamente dos estrategias posibles cada jugador, la representación gráfica vuelve a ser posible. Suponiendo de nuevo que $(x_1, 1 - x_1)$ es una estrategia genérica de H e $(y_1, 1 - y_1)$ es una estrategia genérica de K, la ganancia esperada de H vendrá dada por:

- Si K decide pasar: $\frac{1}{2}x_1 + 0(1 - x_1) = \frac{x_1}{2}$
- Si K decide apostar: $0x_1 + 1(1 - x_1) = 1 - x_1$
- Si H se decide por AP: $\frac{1}{2}y_1 + 0(1 - y_1) = \frac{y_1}{2}$
- Si H se decide por A: $0y_1 + 1(1 - y_1) = 1 - y_1$

Todo esto se puede observar en las Figuras 3 y 4 donde la ganancia esperada del jugador H se representa frente a x_1 e y_1 respectivamente de acuerdo a las posibles elecciones de H y K. En el primer caso las ganancias de las posibles estrategias de H, $(x_1, 1 - x_1)$, suponiendo que K actúa sabiendo la elección que ha hecho H se resaltan en trazo grueso y tienen su máximo en el punto de corte de ambas rectas. Del mismo modo si nos ponemos del lado de K, la ganancia esperada de H de acuerdo a las posibles decisiones de K, $(y_1, 1 - y_1)$, se señalan también con trazo grueso en la Figura 4. El jugador K buscará la mínima ganancia de H, que se alcanza en el punto de corte de las dos rectas. De nuevo el suelo de K coincide con el techo de H. La estrategia óptima para H será por tanto $(2/3, 1/3)$, que significa “apostar si sale cara y pasar si sale cruz” dos de cada tres veces y “apostar siempre” una de cada tres. Para K la estrategia óptima será $(2/3, 1/3)$, que significa “pasar” dos de cada tres veces y “apostar” una de cada tres. El valor del juego para H será de $1/3$.

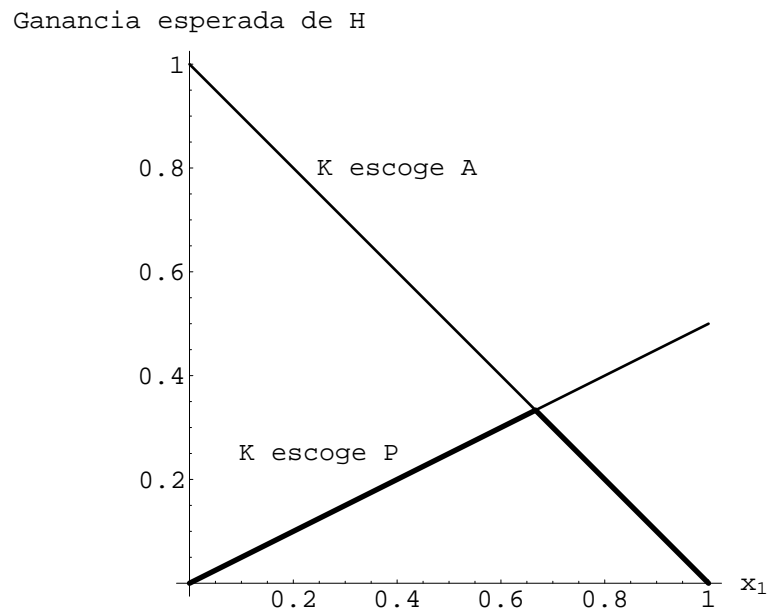


Figura 3: Selección de la estrategia de H

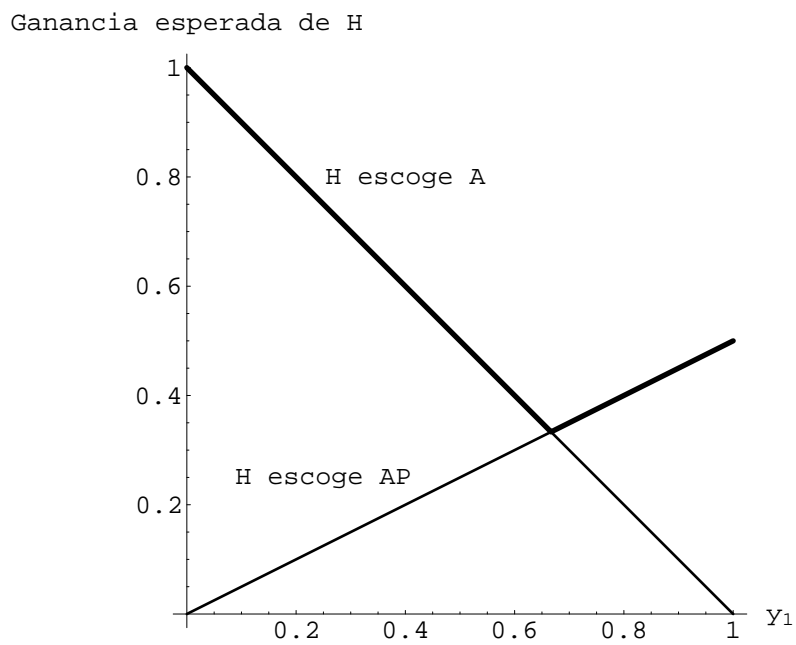


Figura 4: Selección de la estrategia de K

3.2. Solución con programación lineal

En general podríamos dar el siguiente procedimiento de resolución:

1. Verificar si hay un punto silla. Si existe esa es la solución óptima y hemos terminado. En caso contrario se continuará con el siguiente paso.
2. Eliminar las estrategias dominadas por el jugador fila. Una vez eliminadas las filas correspondientes se eliminarán las estrategias dominadas por el jugador columna. De nuevo se eliminarán las estrategias dominadas por el jugador fila y se continúa el proceso hasta que no queden estrategias dominadas.
3. Si la matriz de ganancias del juego es 2×2 se resolverá gráficamente. En caso contrario se resolverá con programación lineal:

- Para el jugador fila:

$$\begin{aligned}
 \text{máx } z &= \nu \\
 \text{s.a. } \nu &\leq a_{11}x_1 + \cdots + a_{m1}x_m \\
 &\dots \\
 \nu &\leq a_{1n}x_1 + \cdots + a_{mn}x_m \\
 1 &= x_1 + \cdots + x_m \\
 0 &\leq x_i, \quad i = 1, \dots, m.
 \end{aligned}$$

- Para el jugador columna:

$$\begin{aligned}
 \text{máx } z &= \omega \\
 \text{s.a. } \omega &\leq a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_m \\
 &\dots \\
 \omega &\leq a_{m1}y_1 + \cdots + a_{mn}y_m \\
 1 &= y_1 + \cdots + y_m \\
 0 &\leq y_i, \quad i = 1, \dots, m.
 \end{aligned}$$

Observaciones:

1. El dual del problema de programación lineal del jugador fila es el problema del jugador columna.
2. El valor óptimo de ambos problemas es el mismo (*Teorema del minimax*) y es el valor del juego.

Ejemplo: Supongamos que dos empresas concursan en la adjudicación de un proyecto de construcción. Para ello cada una de ellas puede ofertar uno de tres tipos posibles P1, P2 y P3. La matriz de ganancias se muestra a continuación. Obsérvese que la ganancia será 1 si su proyecto vence, -1 si pierde y 0 si resulta desierto y ha de repetirse la convocatoria.

Empresa F	Empresa C			Mínimo
	Proyecto P1	Proyecto P2	Proyecto P3	
Proyecto P1	0	-1	1	-1
Proyecto P2	1	0	-1	-1
Proyecto P3	-1	1	0	-1
Máximo	1	1	1	

- Para el jugador fila el problema será:

$$\begin{aligned}
\text{máx } z &= \nu \\
\text{s.a. } \nu &\leq x_2 - x_3 \\
\nu &\leq -x_1 + x_3 \\
\nu &\leq x_1 - x_2 \\
1 &= x_1 + x_2 + x_3 \\
0 &\leq x_1, x_2, x_3.
\end{aligned}$$

- Para el jugador columna:

$$\begin{aligned}
\text{máx } z &= \omega \\
\text{s.a. } \omega &\leq -y_2 + y_3 \\
\omega &\leq y_1 - y_3 \\
\omega &\leq -y_1 + y_2 \\
1 &= y_1 + y_2 + y_3 \\
0 &\leq y_1, y_2, y_3.
\end{aligned}$$

Se aprecia claramente que uno es dual del otro. La solución óptima será: $\nu = 0, x_1 = 1/3, x_2 = 1/3, x_3 = 1/3$ para el primero y $\omega = 0, y_1 = 1/3, y_2 = 1/3, y_3 = 1/3$.

4. Juegos no cooperativos entre dos personas con suma no constante

Es la situación más frecuente en los negocios. En la práctica es muy difícil que dos empresas estén en conflicto total entre sí.

Dilema del prisionero Un juez no tiene pruebas claras para condenar a dos personas por un robo llevado a cabo conjuntamente. Les hace la siguiente propuesta: Si no confiesa ninguno de los dos, les condenará a un año de prisión por mal comportamiento. Si confiesa solamente uno de los dos será liberado y el otro pasará 20 años en la cárcel. Si confiesan los dos, serán condenados a 5 años de cárcel. Qué decisión tomará cada uno?

Suponiendo que ambos están incomunicados podríamos representar las ganancias de ambos prisioneros mediante una tabla de pares donde el primer elemento representa la ganancia del primer prisionero y el segundo la ganancia del prisionero 2:

Prisionero 1	Prisionero 2	
	Confiesa	No confiesa
Confiesa	$(-5,-5)$	$(0,-20)$
No confiesa	$(-20,0)$	$(-1,-1)$

Obsérvese que ahora las ganancias han de venir expresadas con pares ya que la suma no es constante. Para cada prisionero la estrategia “confesar” domina a la estrategia “no confesar”. Sin embargo si ambos decidieran no confesar el resultado sería mucho mejor (1 año) que si ambos deciden confesar (5 años).

Entenderemos por *punto de equilibrio* una combinación de estrategias tal que ningún jugador pueda sacar provecho con un cambio unilateral. En este sentido $(-5,-5)$ es un punto de equilibrio. Sin embargo, es claro que ambos están mejor en la situación $(-1,-1)$, que no es un punto de equilibrio. Cada prisionero podría salir ganando (0 años) traicionando a su compañero. Pero si ambos se traicionan, ambos estarían en peor situación que en la de *cooperación*. Esta no podría darse en juegos de suma constante.

Si representamos este juego con ganancias genéricas:

Prisionero 1	Prisionero 2	
	Cooperación	No cooperación
Cooperación	(C, C)	(T, S)
No cooperación	(S, T)	(G, G)

Comparando ambas tablas se puede deducir que para que (C, C) sea punto de equilibrio ha de ser $C > S$. Para que (G, G) no sea un punto de equilibrio ha de ser $T > G$. El juego solamente es razonable si $G > C$. Por tanto solamente se produce el dilema del prisionero cuando $T > G > C > S$. Este dilema explica por qué con frecuencia dos adversarios no pueden cooperar entre sí.

Además un juego sin suma constante no tiene por qué tener alguna combinación de estrategias puras donde se alcance el equilibrio. Por ejemplo, en el juego determinado por la tabla siguiente:

Jugador 1	Jugador 2	
	Estrategia 1	Estrategia 2
Estrategia 1	$(2, -1)$	$(-2, 1)$
Estrategia 2	$(-2, 1)$	$(2, -1)$

ninguna de las cuatro combinaciones de estrategias puras es de equilibrio. En todos los casos un cambio unilateral de estrategia de alguno de los jugadores resulta ventajoso. Sin embargo, si ambos jugadores utilizan una estrategia aleatorizada del tipo $(1/2, 1/2)$ se alcanza un punto de equilibrio. En efecto, el jugador 1 buscará maximizar su ganancia esperada:

- Si el jugador 2 opta por la estrategia 1: $2x_1 - 2(1 - x_1) = 4x_1 - 2$

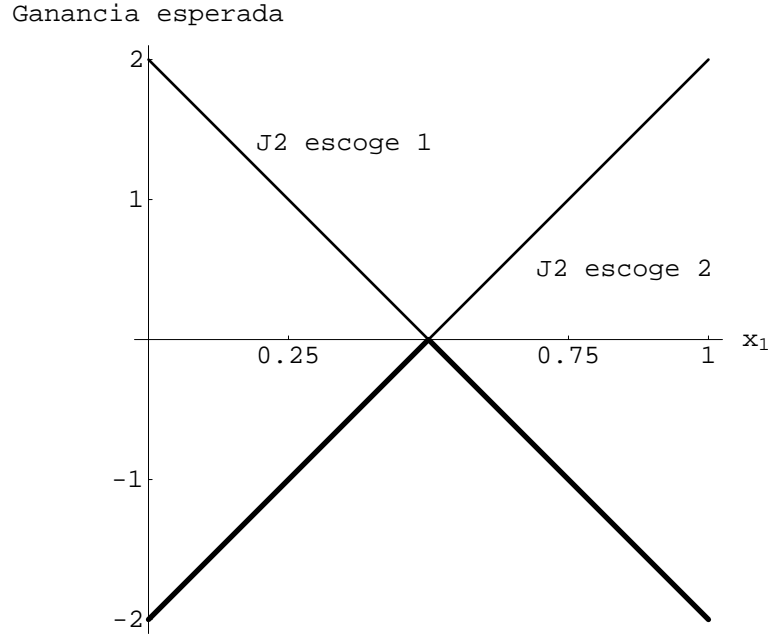


Figura 5: Ganancia esperada del jugador 1 frente a su estrategia aleatorizada

- Si el jugador 2 opta por la estrategia 2: $-2x_1 + 2(1 - x_1) = 2 - 4x_1$

En la Figura 5 se muestra con trazo grueso la ganancia segura esperada del jugador 1 para cada valor posible de x_1 .

Por otro lado el jugador 2 buscará también maximizar su ganancia esperada:

- Si el jugador 1 opta por la estrategia 1: $-1y_1 + (1 - y_1) = 1 - 2y_1$
- Si el jugador 1 opta por la estrategia 2: $1y_1 - 1(1 - y_1) = 2y_1 - 1$

En la Figura 6 se muestra con trazo grueso la ganancia segura esperada del jugador 2 para cada valor posible de y_1 .

Por tanto la mayor ganancia esperada para ambos se alcanzará en la combianción de estrategias aleatorizadas $(1/2, 1/2)$ y $(1/2, 1/2)$ para cada jugador.

5. Juegos n jugadores

Sea $N = \{1, 2, \dots, n\}$ un conjunto de jugadores. Se define la función característica como una función que asigna a cada subconjunto S de N la cantidad $\nu(S)$ que los jugadores de ese

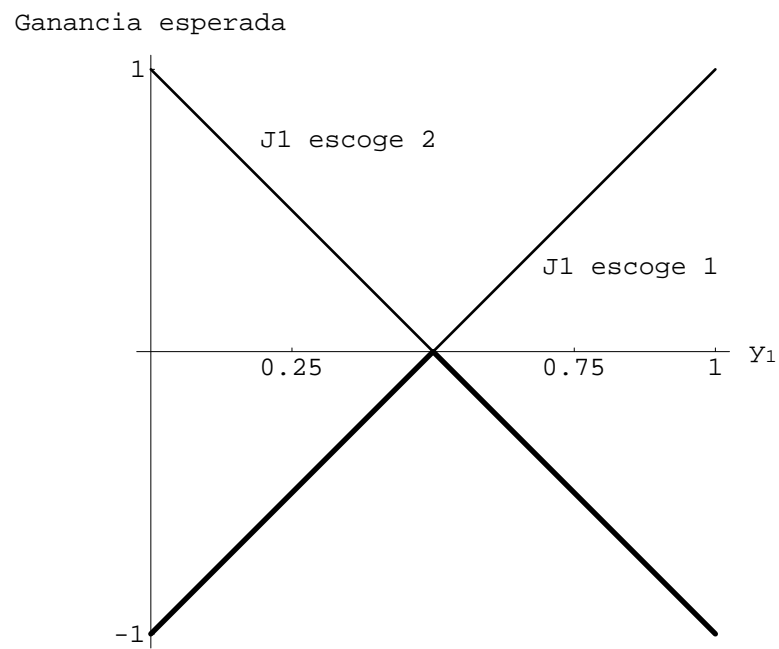


Figura 6: Ganancia esperada del jugador 2 frente a su estrategia aleatorizada

subconjunto pueden estar seguros de recibir si forman una coalición.

Ejemplo: Una persona (1) ha inventado un producto, pero no puede fabricarlo el sólo a gran escala. Hay dos fábricas posibles (2 y 3) que podrían comercializarlo y repartir una ganancia de 2 millones de Euros con el inventor. La función característica será entonces:

$$\nu(\emptyset) = \nu(\{1\}) = \nu(\{2\}) = \nu(\{3\}) = \nu(\{2, 3\}) = 0, \quad \nu(\{1, 2\}) = \nu(\{1, 3\}) = \nu(\{1, 2, 3\}) = 2.$$

Supongamos que en general se tienen dos subconjuntos A y B de N sin jugadores en común ($A \cap B \neq \emptyset$). La función característica ha de satisfacer la condición de superaditividad:

$$\nu(A \cup B) \geq \nu(A) + \nu(B).$$

Esto quiere decir que una coalición conjunta ($A \cup B$) es por lo menos tan ventajosa como la suma de dos coaliciones disjuntas (A y B). Esto es razonable ya que esta última posibilidad es un caso particular de la coalición conjunta. Una *imputación* de este juego será una solución dada por un vector de ganancias (x_1, \dots, x_n) tal que verifique las condiciones siguientes:

1. La suma de todas las ganancias ha de ser igual a la ganancia segura que resulta de formar una coalición de todos los jugadores: $\nu(N) = \sum_{i=1}^n x_i$ (*racionalidad de grupo*).
2. La ganancia de i ha de ser al menos tan grande como la ganancia segura que alcanzaría jugando él solo sin coalición: $x_i \geq \nu(\{i\})$ (*racionalidad individual*).

Diremos que la imputación $y = (y_1, \dots, y_n)$ *domina* a la imputación $x = (x_1, \dots, x_n)$ a través de una coalición S ($y >^S x$) si:

1. Los miembros de S pueden alcanzar la ganancia que da la suma de las ganancias de y en S : $\sum_{i \in S} y_i \leq \nu(S)$
2. Cada miembro de S prefiere la ganancia que le proporciona y antes que la que le proporciona x : $y_i > x_i, i \in S$.

Siendo así, la imputación x no debe ser considerada como posible solución del juego. Se denominará *núcleo* del juego a las soluciones no dominadas.

En el ejemplo anterior $(0, 0, 0)$ no sería una imputación, pero sí lo serían $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ y $(2/3, 2/3, 2/3)$. Además si se considera la coalición $S = \{1, 2\}$ entonces $(1, 1, 0)$ domina a $(2/3, 2/3, 2/3)$, pero no a $(1, 0, 1)$. Para la coalición $S = \{1, 3\}$ la imputación $(1, 0, 1)$ domina a $(2/3, 2/3, 2/3)$, pero no a $(1, 1, 0)$. Por último para la coalición $S = \{1, 2, 3\}$ ninguna de las imputaciones domina o otra.

Encontrar el núcleo es una tarea complicada. Para ello nos serviremos del teorema siguiente:

Teorema: Una imputación $x = (x_1, \dots, x_n)$ estará en el núcleo si y sólo si para cada subconjunto S de N verifica:

$$\sum_{i \in S} x_i \geq \nu(S).$$

En el ejemplo anterior solamente hemos de fijarnos en las coaliciones $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ y $\{1, 2, 3\}$, que tienen un valor característico de 2. Por tanto una imputación $x = (x_1, x_2, x_3)$ solamente estará en el núcleo si $x_1 + x_2 + x_3 = 2$, $x_1 + x_2 = 2$ y $x_1 + x_3 = 2$. Pero esto solamente es posible si $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$. Por tanto el núcleo estará por una única imputación: $(2, 0, 0)$. Esto resalta la importancia del jugador 1, que es el que tiene la patente del nuevo producto. Cualquier otra imputación estará dominada.

Esta solución no parece viable. Ninguna fábrica estará de acuerdo en producir el nuevo artículo si no tiene beneficios. Para resolver este tipo de juegos se presenta ahora el concepto del *valor de Shapley*, que proporcionará soluciones más equitativas.

Lloyd Shapley demostró que para cualquier función característica existe siempre una única solución $x = (x_1, x_2, x_3)$, valor de Shapley, que satisface los axiomas siguientes:

- *Axioma 1:* Si se intercambian los valores de la función característica de dos jugadores, también se intercambiarán las ganancias.
- *Axioma 2:* Racionalidad de grupo.
- *Axioma 3:* Si el jugador i no añade valor a ninguna coalición ($\nu(S - \{i\}) = \nu(S)$ para todo S) entonces $x_i = 0$.
- *Axioma 4:* El valor Shapley de una suma de funciones características (dos juegos con los mismos jugadores) será la suma de los valores de Shapley de cada juego.

En estas condiciones se cumple el teorema siguiente:

Teorema: Existe un único valor de Shapley, que viene dado de la forma siguiente:

$$x_i = \sum_{S | i \notin S} P_n(S) [\nu(S \cup \{i\}) - \nu(S)],$$

donde

$$p_n(S) = \frac{s!(n-s-1)!}{n!},$$

siendo s en número de jugadores en S .

La interpretación de esta fórmula no es complicada. El valor de $p_n(S)$ es la probabilidad de que se forme la coalición S y a continuación el jugador i se incorpore el último a la coalición. En efecto, las posibilidades de llegada de los miembros de la coalición S son $s!$. Suponiendo que a continuación llega i la cantidad anterior ha de multiplicarse por las posibilidades de llegada posterior de los $n - s - 1$ restantes. Los casos posibles de llegada serán obviamente $n!$. Por otro lado $\nu(S \cup \{i\}) - \nu(S)$ será la contribución de i a la coalición. Por tanto x_i así calculado será la cantidad esperada con la que el jugador i contribuye a la coalición.

En el ejemplo del nuevo producto para el inventor se pueden formar las siguientes coaliciones en las que no está él:

S	$p_3(S)$	$\nu(S \cup \{1\}) - \nu(S)$
\emptyset	2/6	0
$\{2\}$	1/6	2
$\{2, 3\}$	2/6	2
$\{3\}$	1/6	2

Por tanto el valor Shapley para el inventor será

$$x_1 = \frac{2}{6}0 + \frac{1}{6}2 + \frac{2}{6}2 + \frac{1}{6}2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

Por simetría el valor Shapley para ambas empresas será el mismo. Se puede realizar un tabla parecida a la anterior:

S	$p_3(S)$	$\nu(S \cup \{1\}) - \nu(S)$
\emptyset	2/6	0
$\{1\}$	1/6	2
$\{3\}$	1/6	0
$\{1, 3\}$	2/6	0

El valor de Shapley para las empresas será entonces $x_2 = x_3 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ y el valor Shapley general es $(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Más fácilmente se podría decir que por simetría para cada empresa ha de ser $(2 - 4/3)/2 = 1/3$.

Observaciones:

- El reparto con este procedimiento es más equitativo que el proporcionado por el núcleo, en el que el inventor se llevaba hipotéticamente toda la ganancia.
- El valor de Shapley puede utilizarse también para valorar el poder o la influencia de cada jugador en una organización política o de negocios.

Cuestiones

1. Respecto del punto silla de un juego:
 - a) Un juego tiene un punto silla si existe una ganancia del jugador columna que es la menor en su fila y la mayor en su columna.
 - b) En todos los juegos hay al menos un punto silla.
 - c) Un juego es de suma cero si tiene al menos un punto silla.
 - d) Ninguna de las anteriores es cierta
2. En un juego de suma constante:
 - a) Todos los jugadores cooperan entre sí.
 - b) Es un caso particular de suma cero.
 - c) Hay una cantidad fija en juego.
 - d) Ninguna de las anteriores es cierta.
3. Una mixtura:
 - a) Es una estrategia en la que todos los jugadores cooperan entre sí.
 - b) Es una estrategia aleatorizada.
 - c) Se basa en la distribución gaussiana.
 - d) Ninguna de las anteriores es cierta.
4. Una estrategia A está dominada por otra B, si:
 - a) A no produce mayor beneficio que B, sea cual sea la decisión de los otros jugadores.
 - b) Al menos una de las posibles consecuencias para B es estrictamente mejor que para A.
 - c) La estrategia B es óptima para todos los jugadores.
 - d) Ninguna de las anteriores es cierta.
5. Una *imputación* en un juego con varios jugadores ha de verificar:
 - a) La suma de todas las ganancias ha de ser igual a la ganancia segura que resulta de formar una coalición de todos los jugadores.
 - b) La ganancia de cda jugador ha de ser al menos tan grande como la ganancia segura que alcanzaría jugando él solo sin coalición.

- c)* Las dos anteriores.
- d)* Ninguna de las anteriores es cierta.

Soluciones 1a, 2c, 3b, 4a, 5c