



אוניברסיטת בן גוריון
הפקולטה למדעי ההנדסה
מחלקה להנדסת מכונות

מספר קבוצה 11
מספר פרויקט 2
מספר משימה 1

דו"ח אישי – שיטות נומריות הנדסיות

מגיש:
אושר אזולאי
203099247

Assignment: Solve the unsteady equation linearized by Picard method with Multi Grid scheme, assume $k(T) = T^2$, Present the solution for $t=1,5,10$ and discuss the convergence rate.

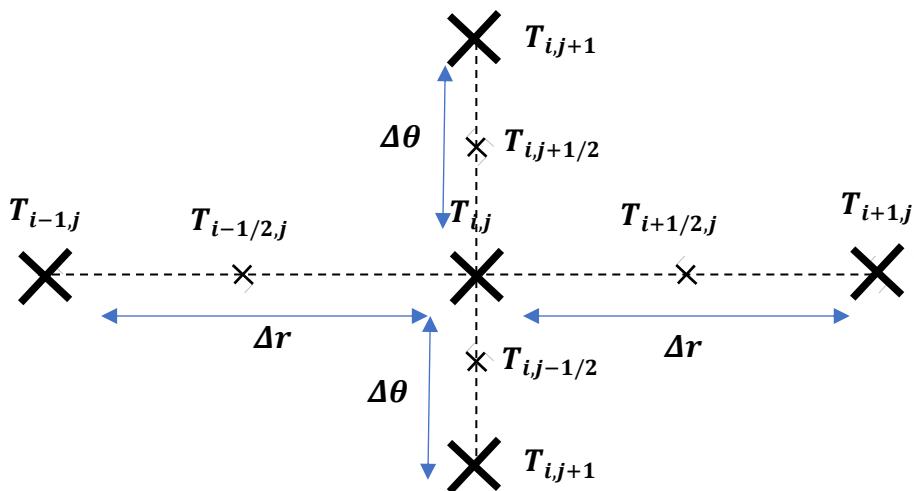
1. פיתוח תיאורטי

לשם פתרון הבעיה, ראשית אציג את פיתוח המשווהה בעזרת Picard grid ורשת Staggered grid, בעזרת שיטת Picard אקח את משטנה $k(T) = T^2$ בצד זמן אחד אחריה ואת שאר הפרמטרים בצד זמן הווה, לשם נוחות, אציג את הפיתוח בשלושה חלקים כאשר מהינו אינדקס הזמן:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(k(T) r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k(T) \sin(\theta) \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

$$k(T) = T^2, T_{r=0.5,\theta} = 0, T_{r=1,\theta} = 1, \frac{\partial T}{\partial \theta}_{r,\theta=\pi/6} = \frac{\partial T}{\partial \theta}_{r,\theta=5\pi/6} = 0$$

$$\overbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(T^{2^{n-1}} r^2 \frac{\partial T^n}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(T^{2^{n-1}} \sin(\theta) \frac{\partial T^n}{\partial \theta} \right)}^1 = \overbrace{\frac{\partial T}{\partial t}}^3$$



איור 1 : תיאור חלוקת הרשת לצורכי פיתוח בשיטת Stagger Grid

על מנת לפתח את המשוואת החום, איעזר בשיטת Stagger Grid על פייה משתמש בפתרון סכמת הפרשנים עבור נקודות בין אינדקסי הרשת (נקודות החיצי בין אינדקסים $j, j+1$) ולאחר מכן פיתוח סכמת הפרשנים סופיים נוספת בין הביניינים על מנת לקבל את הפיתוח עבור נקודה הרציפה, בצורה זו ניתן לפתח את המשוואת החום בצורה ישירה ולרובה מהירה יותר מנגזרות ישירות.

פיתוח משווהה 1 חלק א' :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(T^{2^{n-1}} r^2 \frac{\partial T^n}{\partial r} \right) = \frac{2}{r} T^{2^{n-1}} \frac{\partial T^n}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(T^{2^{n-1}} \frac{\partial T^n}{\partial r} \right)$$

$$\frac{2}{r} T^{2^{n-1}} \frac{\partial T^n}{\partial r} = \frac{2}{r} T_{i,j}^{2^{n-1}} \left(\frac{T_{i+1,j}^n - T_{i-1,j}^n}{2\Delta r} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(T^{2^{n-1}} \frac{\partial T^n}{\partial r} \right) = \frac{1}{\Delta r} \left(\frac{T_{i+1,j}^{2^{n-1}} + T_{i,j}^{2^{n-1}}}{2} \cdot \frac{T_{i+1,j}^n - T_{i,j}^n}{\Delta r} - \frac{T_{i,j}^{2^{n-1}} + T_{i-1,j}^{2^{n-1}}}{2} \cdot \frac{T_{i,j}^n - T_{i-1,j}^n}{\Delta r} \right)$$

פיתוח משווהה 1 חלק ב' :

$$\frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(T^{2^{n-1}} \sin(\theta) \frac{\partial T^n}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r^2 \tan(\theta)} \left(T^{2^{n-1}} \frac{\partial T^n}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(T^{2^{n-1}} \frac{\partial T^n}{\partial \theta} \right)$$

$$\frac{1}{r^2 \tan(\theta)} \left(T^{2^{n-1}} \frac{\partial T^n}{\partial \theta} \right) = \frac{T^{2^{n-1}}}{r^2 \tan(\theta)} \left(\frac{T_{i,j+1}^n - T_{i,j-1}^n}{2\Delta\theta} \right)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(T^{2^{n-1}} \frac{\partial T^n}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r^2 \cdot \Delta\theta} \left(\frac{T_{i,j+1}^{2^{n-1}} + T_{i,j}^{2^{n-1}}}{2} \cdot \frac{T_{i,j+1}^n - T_{i,j}^n}{\Delta\theta} - \frac{T_{i,j}^{2^{n-1}} + T_{i,j-1}^{2^{n-1}}}{2} \cdot \frac{T_{i,j}^n - T_{i,j-1}^n}{\Delta\theta} \right)$$

פיתוח משווהה 1 חלק ג' :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{3T_{i,j}^{n+1} - 4T_{i,j}^n + T_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t}$$

סכמת שלושת הפיתוחים וסימון איברים :

$$\overbrace{\left(\frac{T_{i,j}^{2^{n-1}}}{\Delta r \cdot r_{i,j}} + \frac{T_{i+1,j}^{2^{n-1}} + T_{i,j}^{2^{n-1}}}{2\Delta r^2} \right)}^b T_{i+1,j}^n + \overbrace{\left(-\frac{T_{i,j}^{2^{n-1}}}{\Delta r \cdot r_{i,j}} + \frac{T_{i,j}^{2^{n-1}} + T_{i-1,j}^{2^{n-1}}}{2\Delta r^2} \right)}^c T_{i-1,j}^n +$$

$$\overbrace{\left(\frac{T_{i,j}^{2^{n-1}}}{2\Delta\theta \cdot r_{i,j}^2 \tan(\theta)} + \frac{T_{i,j+1}^{2^{n-1}} + T_{i,j}^{2^{n-1}}}{2\Delta\theta^2 \cdot r_{i,j}^2} \right)}^d T_{i,j+1}^n + \overbrace{\left(-\frac{T_{i,j}^{2^{n-1}}}{2\Delta\theta \cdot r^2 \tan(\theta)} + \frac{T_{i,j}^{2^{n-1}} + T_{i,j-1}^{2^{n-1}}}{2\Delta\theta^2 \cdot r_{i,j}^2} \right)}^e T_{i,j-1}^n +$$

$$\overbrace{\left(-\frac{T_{i+1,j}^{2^{n-1}} + T_{i,j}^{2^{n-1}}}{2\Delta r^2} - \frac{T_{i,j}^{2^{n-1}} + T_{i-1,j}^{2^{n-1}}}{2\Delta r^2} - \frac{T_{i,j+1}^{2^{n-1}} + T_{i,j}^{2^{n-1}}}{2\Delta\theta^2 \cdot r^2} - \frac{T_{i,j}^{2^{n-1}} + T_{i,j-1}^{2^{n-1}}}{2\Delta\theta^2 \cdot r^2} - \frac{3}{2dt} \right)}^a T_{i,j}^n = \overbrace{\frac{-4T_{i,j}^{n-1} + T_{i,j}^{n-2}}{2\Delta t}}^{RHS}$$

ולכן את הסכמת המתקבלת ניתן לרשום بصورة הבא :

$$a_{i,j}^{n-1}T_{i,j}^n + b_{i,j}^{n-1}T_{i+1,j}^n + c_{i,j}^{n-1}T_{i-1,j}^n + d_{i,j}^{n-1}T_{i,j+1}^n + e_{i,j}^{n-1}T_{i,j-1}^n = RHS^{n-1,n-2} \quad (2)$$

בנוסף לעבור תנאי שפה נוימן אדרוש קיומ נגורות קדומות ואחוריות בהתאם :

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial \theta} = -T_{i,j+2} + 4T_{i,j+1} - 3T_{ij} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial \theta} = -T_{i,j-2} + 4T_{i,j-1} - 3T_{ij} = 0 \quad (4)$$

1.1 סכמת פתרון : Multi Grid

לשם הצגת סכמת הפתרון בשיטת Multi Grid ראשית אציג מספר הגדרות.
את הבעה ניתן להציג באופן הבא עבור כל צעד זמן :

$$AT^n = b^{n-1,n-2} \quad (5)$$

כאשר T הינו הפתרון המדויק של המשוואת הלינארית, ולכן ניתן להגיד את השגיאה עbor בכל צעד זמן
בצורה הבאה, כאשר k הינו אינדקס לאיטרציה :

$$e^{k+1} = T^{k+1} - T^k \quad (6)$$

$$A(T^k + e^{k+1}) = b^{n-1,n-2} \quad (7)$$

ולכן אגידיך את השאריות بصورة הבא :

$$Ae = b - AT^k = \text{Res} \quad (8)$$

סכמת הפתרון בשיטת Multi Grid פועלת על עקרון של פתרון הבעה של הרשות העדינה בראשת גסה ובעזרת אינטראפלציה לפתרון זה פותרת את הבעה בראשת העדינה. בעזרת הגדרת השגיאה بصورة זו ניתן להציגה כתור של הרמוניות ובכל שלב נפותר את הבעה עד אשר השארית חלקה וזה נבצע מעבר לרשף אחרית עד שנתקבל פתרון. הסכמה מתבססת על כך שהשגיאה במספרי גל נמכרים קשה לפתרון בראשת עדינה אך בראשת גסה נפתרת بصورة מהירה.

1.1.1 סכמת הפתרון של N רשותות :

שלב א': תחילת נגדיר את הבעה עבור הרשות עדינה ונבצע מספר איטרציות של פתרון לצורך חילקה, שלב זה נקרא Relaxation, כאשר h הינו אינדקס לרשות עדינה, $h+i$ רשות גסה יותר :

$$AT_h^n = b_h^{n-1,n-2} \rightarrow T_h^{k+1} = f(T_h^{k,k+1}, b_h^{n-1,n-2}) \quad (9)$$

שלב ב': הינו חישוב השארית והעברת השגיאה בעזרת אינטרפולציה (Restriction) לרשות גסה יותר :

$$r_h = b_h - AT_h^k \rightarrow r_{h+1} = \mathfrak{R}(r_h) \quad (10)$$

שלב ג': נניח שהגיאה התחלתית 0 ונבצע שוב מספר שלבי חילקה :

$$Ae_{h+1} = r_{h+1} \rightarrow e_{h+1}^{k+1} = f(T_h^{k,k+1}, r_{h+1}) \quad (11)$$

שלב ד': עבור מספר רשותות גדול מ-2 ניתן לחשב שוב את השארית ולבצע שוב מספר שלבי חילקה :

$$r_{h+2} = r_{h+1} - Ae_{h+1}^k \rightarrow e_{h+2}^{k+1} = f(e_{h+1}^{k,k+1}, r_{h+2}) \quad (12)$$

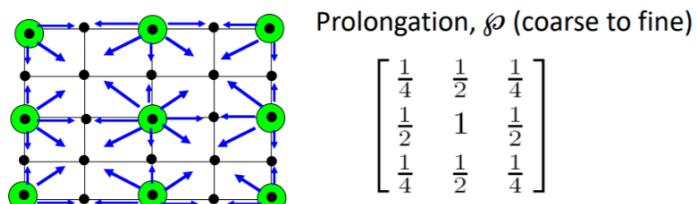
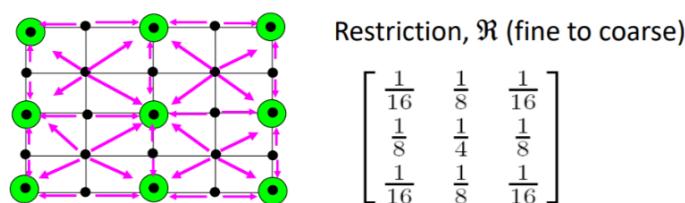
כעת ניתן לבצע שוב את שלב ד' עד למספר הרשות N הגסה ביוצר הרצואה.

שלב ח': העברת התיקון מהרשתות הגסות עד לרשות העדינה, נתחיל ברשות הגסה ביותר עד לרשות העדינה. בפתרון שנבחר בשלב זה בוצע חילקה נוספת לפני העברת מידע מרשת פנימית לחיצונית יותר. שלב זה נקרא Prolongation .

$$e_{h+i}^{k+1} = e_{h+i}^k + \wp e_{h+i+1}^k \quad (13)$$

⋮

$$T_h^{k+1} = T_h^k + \wp e_{h+1}^k$$



איור 2 : אינטרפולציה מסוג Relaxation & Prolongation

סכמת הפתרון שנבחר לבעה שלנו הוא פתרון בשיטת Multi Grid בצורת V cycle עבור 5 רשתות [193, 97, 49, 25, 13]. תחילת מתבצע אתחול תנאי התחלת ושפה עבור רשות עדינה 193X193 ופתרון לפי אלגוריתם Multi Grid בכל צעד זמן (שלבים א'-ה') עבור חמשה רשותות כאשר הפנימיות ביוטר בעלת 13X13 תאים. עבור כל צעד זמן מתבצע ח' מחזוריים של V cycle עד אשר מתקבל נורמה הקטנה מתנאי סף.

המחליק (Smoother) שנבחר עבור שלב ה Relaxation הינו יעקובי ולכן עבור הסכמה שלנו :

$$T_{i,j}^{n-k+1} = \left[\frac{RHS^{n-1,n-2} - (b_{i,j}^{n-1} T_{i+1,j}^n + c_{i,j}^{n-1} T_{i-1,j}^n + d_{i,j}^{n-1} T_{i,j+1}^n + e_{i,j}^{n-1} T_{i,j-1}^n)}{a_{i,j}^{n-1}} \right]^k \quad (14)$$

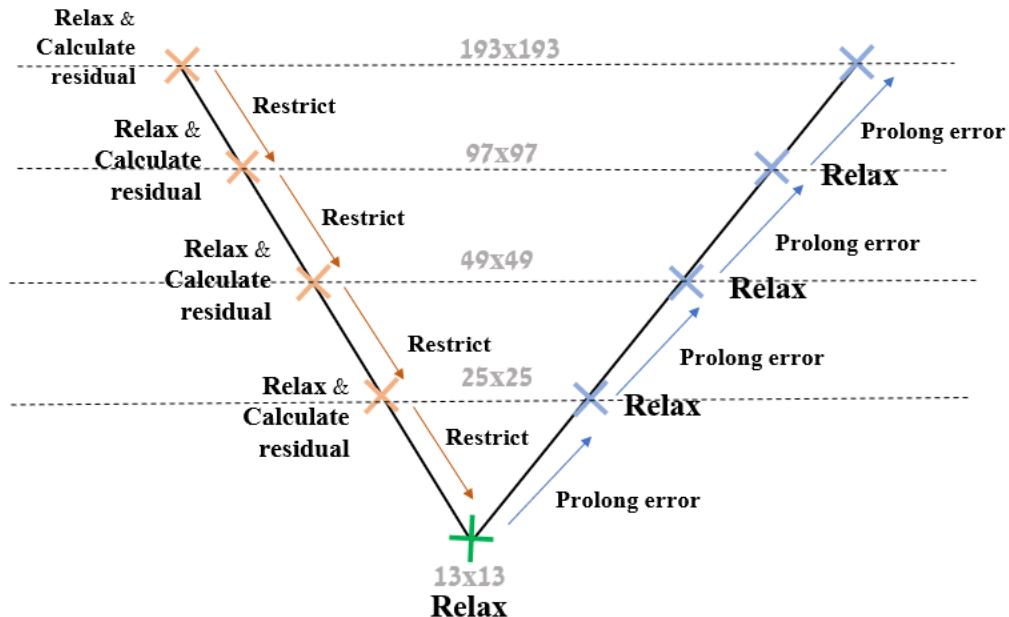
$$i, j = 1 : n$$

ועבור הרשותות הפנימיות :

$$e_{i,j}^{n-k+1} = \left[\frac{\Re(r_h)^k - (b_{i,j}^{n-1} e_{i+1,j}^n + c_{i,j}^{n-1} e_{i-1,j}^n + d_{i,j}^{n-1} e_{i,j+1}^n + e_{i,j}^{n-1} e_{i,j-1}^n)}{a_{i,j}^{n-1}} \right]^k \quad (15)$$

חישוב הנורמה מתבצע באופן הבא :

$$Norm = \max_{i,j} \left| \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^k}{T_{i,j}^{k+1}} \right| \quad (16)$$



איור 3 : סכמת הפתרון בשיטת Multi Grid עבור 5 רשתות.

2. פיתוח סימולציה

לצורך פתרון הבעיה השתמשתי בתוכנת MATLAB, הפקציות שכתבתי לפתרון הבעיה:

- .1 MG_Create_Grids - פונקציה מקבלת את מספר הרשות שיש ליצור עבור תנאי רדיוס וזווית.
- .2 MG_Picard_Linearization - פונקציה המייצרת את מקדמים a,b,c,d,e (באלגוריתם סימון Picard המקדמים שונים ל one,two,three,four,five בהתאם לפתרון הבעיה לפי שיטת Picard), פונקציה זו נכתבה במטרה לבדוק קבועי K שונים וכן נסחה באופן כללי.
- .3 MG_jacobi - פונקציה הפותרת את הבעיה הליניארית בשיטת יעקובי.
- .4 MG_calc_Res - פונקציה המחשבת את השארית בהתאם לסכמת Multi Grid.
- .5 Restriction - פונקציה האחראית על ביצוע אינטראפלציה מרשת עדינה לגסה יותר בהתאם לאיוור 2 (פונקציה קיימת).
- .6 Prolongation - פונקציה האחראית על ביצוע אינטראפלציה מרשת גסה לרשת עדינה יותר בהתאם לאיוור 2 (פונקציה קיימת).

2.1 פסאודו קוד

1. אתחול תנאי הבעיה, יצירת משתנים ומספר רשות מתאים.
2. מ-0 עד t_{end} :
 - 2.1. שמירת מטריצת הטמפל' בזמן $2-m-n$
 - 2.2. חישוב וקטור איברים RHS
 - 2.3. כל עוד הנורמה גדולה מ 10^{-7} , בצע:
 - 2.3.1. איפוס שגיאה התחלתית ברשות פנימיות
 - 2.3.2. שמירת טמפל' באיטרציה ראשונה
 - 2.3.3. עבר כל רשות מחיצונית פנימית, בצע:
 - 2.3.3.1. חישוב מקדמים שוואות החום לפי שיטת Picard
 - 2.3.3.2. ביצוע k איטרציות של פתרון שוואות החום בשיטת יעקובי לצורך החלקה.
 - 2.3.3.3. קיום תנאי שפה נוימן בדפנות הרשות
 - 2.3.3.4. חישוב השארית
 - 2.3.3.5. אם איןך ברשות הפנימית ביותר, בצע:
 - 2.3.3.5.1. חשב את וקטור איברים צד ימין בעזרת $\mathcal{R}(r_{h-i})$.
 - 2.3.3.5.2. בצע אינטראפלציה למציאת הטמפל' ברשות פנימית בעזרת $\mathcal{R}(T^{n-1}_h)$.
 - 2.3.4. עבר כל רשות פנימית לחיצונית, בצע:
 - 2.3.4.1. ביצוע אינטראפלציה מרשת גסה לעדינה (Prolongate error)
 - 2.3.4.2. ביצוע k איטרציות של פתרון שוואות החום בשיטת יעקובי לצורך החלקה.
 - 2.3.4.3. קיום תנאי שפה נוימן בדפנות הרשות.
 - 2.3.5. חישוב נורמה וערכו מונה מחזורי V cycle.

טבלה 1 : סימון משתנים בקוד MATLAB

גודל	סימון	משתנה
-	i, j	אינדקס מיקום במטריצה
-	GridNumb	מספר רשת
-	inx	אינדקס רשת
-	dt	זמן
-	norm	נורמה של שגיאת הטמפל' מאייטרציה קודמת
-	counter	V cycle מספר מחזורי
193x193x5	r	מטריצת הרדיוס - עברו
193x193x5	θ	מטריצת הזווית
1x5	dr	וקטור הפרש רדיוס
1x5	$d\theta$	וקטור הפרש זווית
193x193x5	T_grid	מטריצת הטמפל' (שגיאה עברו רשותות פנימיות)
193x193x5	RHS	מטריצת איברים צד ימין (רשות עדינה b , רשות גסה $(R(r_h))$)
193x193x5	Res	מטריצת השארית
193x193x5	One, two...five	מקדמי פיתוח Picard
193X193	T_grid_check	V cycle מטריצת הטמפרטורה לפני ההליך
193x193x5	T_grid_old	מטריצת הטמפל' עברו צעד זמן קודם (שגיאה עברו רשותות פנימיות)
193x193	T_grid_old_old	מטריצת הטמפל' עברו 2 צעדי זמן קודמים (שגיאה עברו רשותות פנימיות)

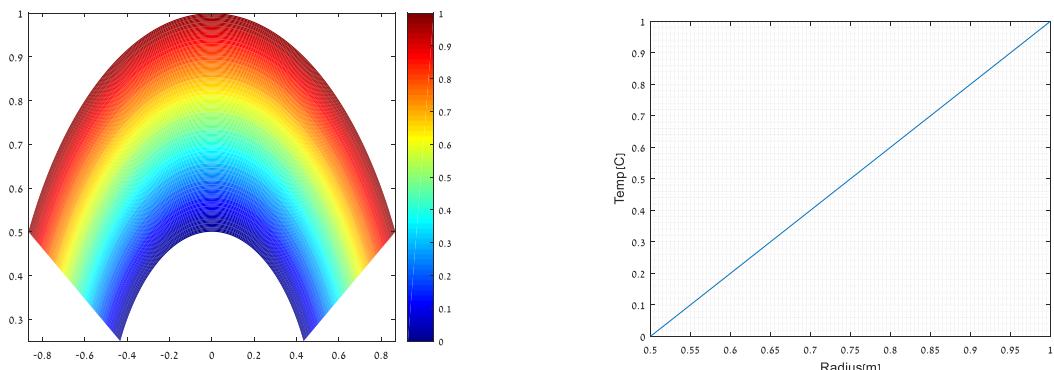
מקרה לאינדקסים j, i :

$$\begin{aligned}
 T(i,j) &= T_grid(2:n(inx)-1, 2:n(inx)-1, inx) \\
 T(i-1,j) &= T_grid(1:n(inx)-2, 2:n(inx)-1, inx) \\
 T(i+1,j) &= T_grid(3:n(inx), 2:n(inx)-1, inx) \\
 T(i,j-1) &= T_grid(2:n(inx)-1, 1:n(inx)-2, inx) \\
 T(i,j+1) &= T_grid(2:n(inx)-1, 3:n(inx), inx)) \\
 RHS &= b \text{ (inx=1)} \% RHS = (R(r(inx-1)))
 \end{aligned}$$

3. דיוון ועיבוד תוצאות

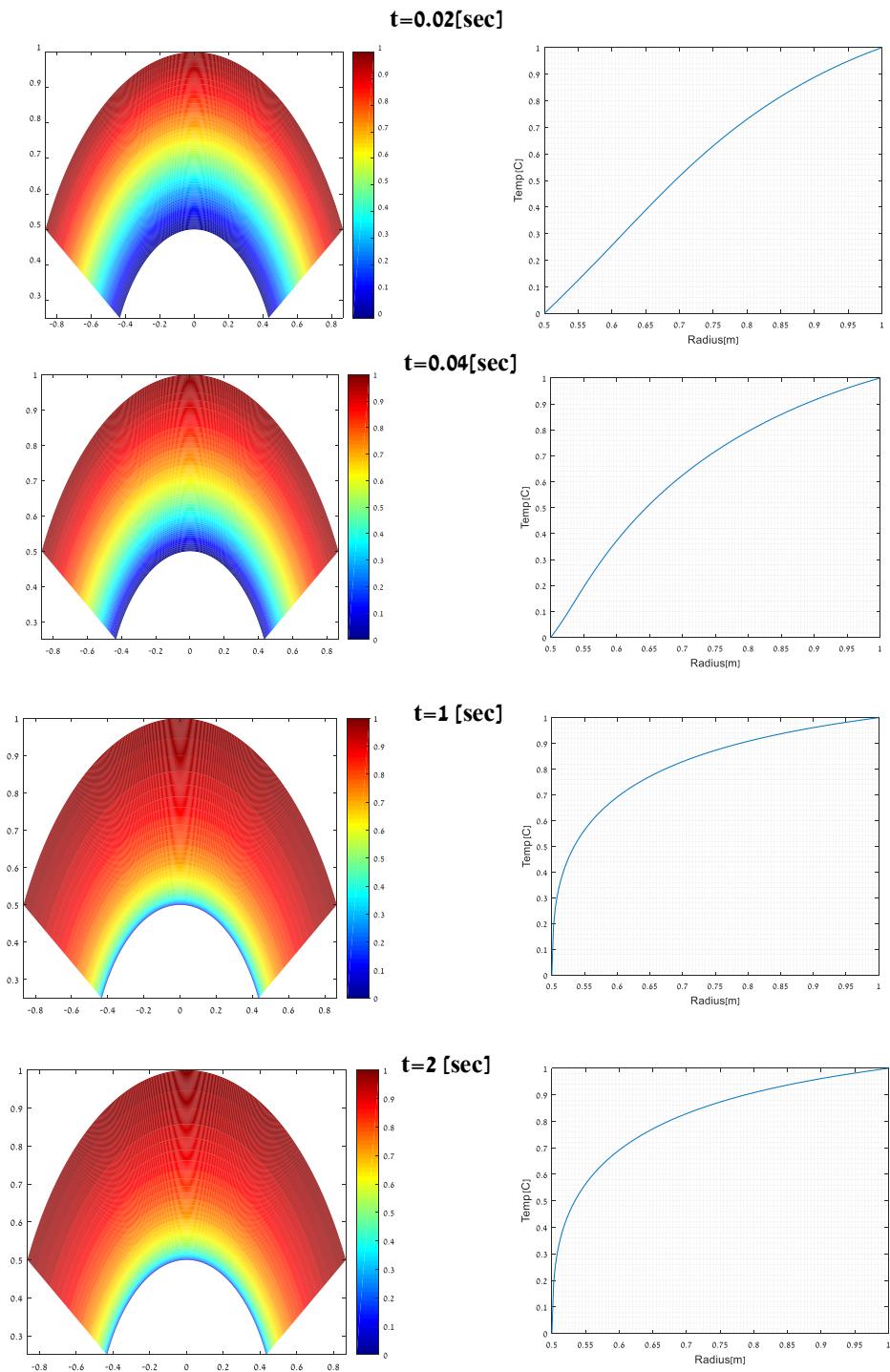
בפרק זה אציג את עיבוד ודיוון בתוצאות פתרון משווה החום באמצעות השיטה המוצגת. לצורך בחינת תנאי התכנסות וייעילות פתרון בשיטת Multi Grid אבחן רשותות שונות וצעדי זמן שונים ואדון במסקנות. ראשית אציג את פתרונות המערכת ברשות העדינה עברו 5 רשותות [193,97,49,25,13] צעד זמן של אלף השניות עברו זמינים שונים:

תנאי התחלה ראשון שנבחן:



איור 4: התפלגות הטמפרטורה ברשות העדינה עברו $t=0$ sec כאשר $dt=0.001$ sec

בנוסף אציג את השתנות הטמפרטורה ברשע העדינה לאורך התקדמות בזמן :



איור 5 : התפלגות הטמפרטורה ברשע העדינה עבור $t=0.02, 0.04, 1, 2[\text{sec}]$ כאשר $\text{dt}=0.001[\text{sec}]$

ניתן לראות כי שינוי הטמפי בכל צעד זמן במערכות מתכניות התחילה פוחת עם התקדמות הזמן בצורה ניכרת עד לכדי שינוי מאד קטן, מכאן אסיק כי הגעה למצב המתמיד מותקבלת בשלב די מוקדם. בנוסף ניתן לראות כי הפתרון המותקבל איינו לינארי וזאת בהתאם עם מקדם מכפלת המשווה $k(T) = T^2$. הטמפי עולה עם עליית הרדיוס עם סימטריה סביב הזווית. בנוסף ניתן לראות כי מעבר החום מהשפה החיצונית גדול יותר משפה הפנימית וזה עולה בהתאם עם מקדם המכפלת $k(T) = T^2$ (k מכיוון שהטמפי גבואה יותר ככל שהרדיוס גדול יותר).

עבור כל צעד זמן מתבצעות מספר איטרציות של מחזורי cycle V עד להגעה להתקנסות לנורמה שנקבעה. בבדיקה שביצעת, חילצתי את מספר האיטרציות שבוצעו סה"כ עד לזמן מסוים עבור כל צעד זמן בהשוויה לצעדי זמן שונים כפי שניתן לראות בטבלה 2. ניתן לראות כי מספר המחוורים בצעד הזמן הראשון גדול עם עליית גודל צעדי הזמן. בנוסף ניתן לראות כי עבור כלל צעדי הזמן קצב עליית האיטרציות פוחת עם התקדמות הזמן, דבר התואם לתוצאות איור 5.

טבלה 2 : מספר מחזורי cycle V כתלות בצעדי הזמן וזמן שלף.

	0.01	0.05	0.1	צעד זמן [sec] זמן [sec]
זמן איטרציה	55	-	-	0.01
	163	95	-	0.05
	288	144	116	0.1
	460	310	309	0.5
	510	311	354	1

בהתאם לנתוני טבלה 2 מותקבל כי המערכת מתכנסת ללא תנאי, אך מאחר ולא ניתן לבדוק את תנאי הייציבות בעזרת הכלים שנלמדו בקורס מאוחר ותנאי השפה אינם מוחזוריים, לא ניתן להוכיח זאת בצורה חד משמעית. עבור שיטת החלוקת שנבחרה, שיטת יעקובי, על מנת שתובטח התקנסות (תנאי מספיק) עבור כל ניחוש ההתחלתי חייב להתקיים :

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad (17)$$

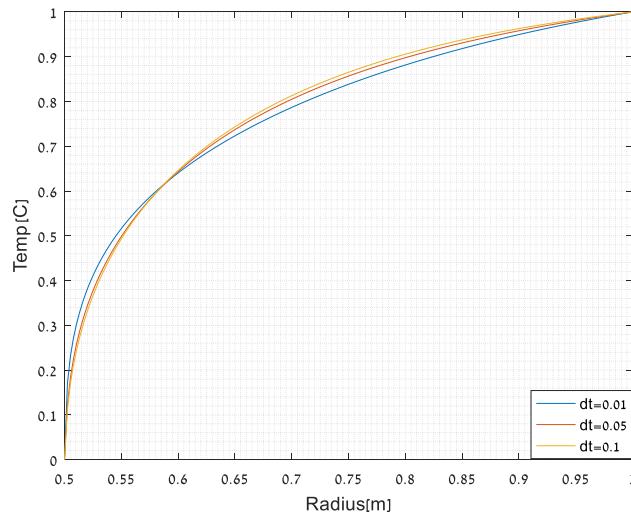
במידה והתנאי אינם מתקיימים, לא ניתן לקבוע התקנסו הסכימה. אבחן את התנאי המותקבל עבור מספר אינטראולי זמן שונים עבור הרשות העדינה :

טבלה 3 : בחינת תנאי התקנסות יעקובי באיטרציות הזמן הראשונה עבור אינטראולי זמן שונים.

צעד זמן [שניות]	0.0001	0.01	0.01	
	0.9536	0.994	0.995	$\max \left(\sum_{j \neq i} a_{ij} / a_{ii} \right)$

טבלה 3 נותן לנו לראות כי תנאי מספיק להתקנסות מתקיים והוא קטן ככל שצעדי הזמן קטנים.

בנוסף אבצע השוואה בין רמת הדיקט המתקבל לפתרון משווהות החום באמצעות צעדי זמן שונים , לצורך כך אתאנו את פילוג הטמפ' לאורך הרדיוס במרכז הרשת עבור זמן של 0.1 שניות באינטרוול זמן של 0.05, 0.01, 0.01, שנייה, לפי אייר 6 ניתן לראות כי שינוי הפרש רמת הדיקט המקסימלי בחישוב טמפ' הרשת גדול עם הגדלת אינטרוול הזמן ועבור אינטרוול הזמן 0.1, 0.01 מתקבל הפרש מקסימלי של 0.014 מעלות.



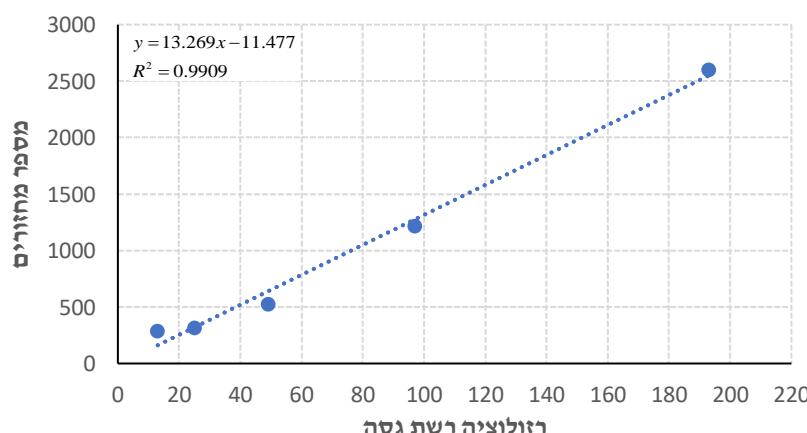
אייר 6 : פילוג הטמפ' לאורך הרדיוס במרכז הרשת עבור זמן של 0.1 שניות באינטרוול זמן של 0.01, 0.05, 0.1 שנייה

על מנת לאמוד את יעילותה של שיטת Multi Grid אבצע ניתוח לקבב התוכנות הסכמה בעזרת מדידת זמני ההתכנסות ומספר האיטרציות הדרושות לצורך פתרון בעיה עבור מספר מחזורי זמן מסוימים :

טבלה 3 : תיאור קצב ההתכנסות עבור עשרה מחזורי זמן בעלי $dt=0.01$ [sec]

זמן [שניות]	מספר האיטרציות	רשות הבי גסה	מספר רשותות
20.01	2600	193	1
16.76	1216	97	2
11.93	527	49	3
16.69	314	25	4
20.36	288	13	5

בעזרת טבלה 3 ניתן לנתח את הקשר בין מספר המחזורים לרזולוציית הרשת ולאפיין את יעילותה של הסכמה :



אייר 7 : תלות מספר המחזורים ברזולוציות הרשת הגסה

לפי איור 7 ניתן לראות כי קיים קשר דיילינארי בין מספר המחזוריים לבין רזולוציית הרשת הגדולה. קיימת צניחה דרמטית בין מספר המחזוריים שיש לבצע עם רשות אחת לעומת חמייה רשותות זו זאת כתוצאה מטירת אלגוריתם Multi Grid אשר מקטין את השפעת שגיאה בעל תדריות נמוכה ברשת העדינה (אשר יצריך מספר איטרציות רב לפתרון ברשת זו) בעזרת אינטראפלציה לרשת גסה יותר.

מנגד ניתן לראות כי מתkowski שזמן התכנסות המערכת המינימלי דווקא מתkowski כאשר קיימים שלושה רשותות, אבחן זאת על ידי מדידת זמני התכנסות עבור אינטראול זמן שונים :

טבלה 4 : תיאור קצב התכנסות עבור עשרה מחזורי זמן בעלי $dt=0.1$ [sec]

מספר איטרציות	זמן [שניות]	רזולוציה גסה	מספר רשותות
30.68	4328	193	1
31.13	2181	97	2
19.80	1030	49	3
25.72	503	25	4
25.577	354	13	5

טבלה 4 ניתנת לראות כי קיימת מגמה זהה להתנהגות המערכת עבור אינטראול זמן שונה, קיימת ירידת במספר האיטרציות הדורשות לפתרון עם עלייה במספר הרשותות אך מנגד הזמן המהיר ביותר מתkowski כאשר קיימים שלושה רשותות. טבלאות 4,3 ניתנת להסיק כי קיים מספר רשותות אופטימלי עבור בעיה ספציפית, וכי למרות שמספר האיטרציות הנעשית בפרק זמן מסוים קטן ככל שמספר הרשותות גדול, קיים מספר אופטימלי של רשותות אשר מוביל לפחות התכנסות מינימאלי.

אצינו כי נעשה בבדיקה עם אינטראול זמן נוספים $dt = 0.001, 0.0001$ [sec] והתקבל מגמת התנהגות זהה (זמן התכנסות מינימאלי כאשר קיים שלושה רשותות) אך לצורך בדיקת מספר הרשותות האופטימלי עבור בעיה ספציפית יש לבצע בדיקה של כלל הגורמים המשפיעים כדוגמת איטרציות החלוקת, אינטראול הזמן, זמן המדיידה ועוד.

4. מסקנות וסיכום

בדוח זה בוצע פתרון לביעית משווהות החום הלינארית בעזרת Picard Method כאשר $k(T) = T^2$ בשיטת Multi Grid. תחילת הוצג פיתוח תיאורטי נומרי הקשור לפתרון משווהות החום הכלל את ביצוע הלינאריזציה בשיטת Picard Method. לאחר מכן הוצג הרקע התיאורטי הקשור לסכמת Multi Grid הכוללת המוטיבציה, עקרונות וסכמת התהילה.

החלק השני של הדוח עוסק באופן פיתוח הסימולציה אשר כלל את הצגת הרקע לפונקציות שנכתבו לצורך פתרון הבעיה, הצגת המשתנים פסאודו קוד המתאר את האלגוריתם אותו ישמש.

החלק השלישי עוסק בעיבוד ודיאן בתוצאות המתקבלות, בחינת זמני התכנסות והשוויה בין יעילות המערכת כתלות במספר הרשותות. פרק זה הועל במספר מסקנות:

- מתקובל כי שינוי הטמפרטורה מתקדם בזמן בצורה ניכרת וההגעה לנקודת מומסיד מתקבלת בשלב דיבי מוקדם, בהתאם מספר איטרציות cycle V קטנה עם התקדמות הזמן.
- הפתרון אליו מתכנסת המערכת מתאר פילוג טמפרטורה שאינו לינארי, מתקובל כי קצב מעבר החום מהשפה החיצונית גדול יותר מהשפה הפינמית וככל שהרשות העדינה גדולה יותר נקבל פתרון בעל שיפוע גדול יותר.
- מספר מחזורי cycle V באיטרציה הראשונה הינו גדול ביותר, כאשר מספר המחזוריים קטן ככל שמספר הרשותות גדול יותר. פעולה איטרציות Multi Grid מקטין את השפעת שגיאה בעל תדריות נמוכה ברשות העדינה (אשר נדרש איטרציות רב לפתרון ברשות זו) בעזרת אינטראפלציה לרשת גסה יותר.
- ככל שאינטראול הזמן קטן יותר מתקובל פתרון מדויק יותר עבור זמן ספציפי.
- קיים מספר רשותות אופטימלי עבור בעיה ספציפית, וכי למרות שמספר האיטרציות הנעשה בפרק זמן מסוים קטן ככל שמספר הרשותות גדול, קיים מספר אופטימלי של רשותות אשר מוביל בזמן התכנסות מינימאלי.

מקורות

.1 הרצאות מתוך הקורס "שיטת נומריות מתקדמות", 2019.

Anderson, D., Tannehill, J. C. & Plecher, R.H. , "Computational fluid mechanics and .2
heat transfer" (2016).