目次

1　ベクトルとその演算

1.1　ベクトルの定義

ベクトルとは、いくつかの実数を順序付けて並べたものです。これらの数を**成分**と呼びます。n 個の成分を持つベクトルを n **次元ベクトル**といい、縦に並べた**列ベクトル**として表します。

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

ここで $v_1, v_2, \ldots, v_n$ は実数です。

例 1.1. 2 次元ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ は、第 1 成分が 3、第 2 成分が 2 であることを示します。

定義 1.2 (ベクトルの等しさ)**.** 2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ が等しいとは、それらの対応するすべての成分が等しいことをいいます。すなわち、$a_i = b_i$ がすべての $i = 1, \ldots, n$ について成り立つとき、$a = b$ と定義します。

例 1.3. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ ならば、$x = 5$ かつ $y = -\ 3$ です。

定義 1.4 (零ベクトル)**.** すべての成分が 0 のベクトルを**零ベクトル**といい、$\mathbf{0}$ で表します。

例 1.5. 2 次元の零ベクトルは $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ベクトルの幾何学的解釈: ベクトルは、その代数的な定義（成分の羅列）とは別に、**空間内の点の位置や原点からその点へ向かう有向線分（矢印）**として直感的に理解することができます。**この矢印の長さがベクトルの大きさを、矢印の方向がベクトルの向きを表します。**

例 1.6. ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ は、原点 $(0, 0)$ から点 $(3, 2)$ へ向かう矢印として図示できます。この図示によって、ベクトルの持つ「移動」や「方向」といった意味合いを視覚的に捉えることができます。

1.2　ベクトルの演算の定義と性質

1.2.1　ベクトルの和（足し算）

定義 1.7 (ベクトルの和)**.** 同じ次元のベクトル $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ の和 $a + b$ は、対応する成分同士を足し合わせることで定義されます。

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

例 1.8. $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

幾何学的解釈: ベクトルの和は、「移動の連続」として考えることができます。一方のベクトルの終点に他方のベクトルの始点を置いたとき、最初の始点から最後の終点への矢印が和になります（三角形の法則）。また、始点をそろえて平行四辺形を作ったときの対角線が和のベクトルになります（平行四辺形の法則）。

定理 1.9 (ベクトルの和の性質)**.** ベクトルの和は、以下の性質を持ちます。

1. 交換法則: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$
2. 結合法則: $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$
3. 零ベクトルの存在: 任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して、$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$ となる零ベクトル $\boldsymbol{0}$ が存在する。
4. 逆ベクトルの存在: 任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して、$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ となるベクトル $-\boldsymbol{a}$ が存在する。ここで、$-\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}$ の各成分に -1 を掛けたベクトル $\begin{pmatrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}$ です。

証明. ここでは、交換法則の証明を示します。その他の性質は、同様の方法で成分計算によって証明できます（一部は練習問題とします)。

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ とする。定義 1.3 より、$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$。実数の足し算は交換法則を満たす（$x + y = y + x$）ので、各成分について $a_i + b_i = b_i + a_i$ が成り立つ。よって、$\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ \vdots \\ b_n + a_n \end{pmatrix}$。再び定義 1.3 より、これは $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ に等しい。したがって、$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ が成り立つ。(証明終)

1.3 スカラー倍（定数倍）

定義 1.10. ベクトルのスカラー倍ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ と実数 k（**スカラー**）の積 $k\boldsymbol{a}$ は、ベクトルの各成分に k を掛けることで定義されます。

$$k\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix}$$

例 1.11. $2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 3 \\ 2\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

幾何学的解釈: スカラー倍は、ベクトルの**長さを伸縮させたり、向きを反転させたり**する操作です。

- $k > 0$ なら、元のベクトルと同じ向きで長さが k 倍になります。
- $k < 0$ なら、元のベクトルと逆向きで長さが $|k|$ 倍になります。
- $k = 0$ なら、すべての成分が 0 になるため、**零ベクトル $\mathbf{0}$** になります。

定理 1.12 (スカラー倍の性質)**.** スカラー倍は、以下の性質を持ちます。

1. **結合法則**: $k(l\boldsymbol{a}) = (kl)\boldsymbol{a}$
2. **分配法則（スカラーについて）**: $(k+l)\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{a}$
3. **分配法則（ベクトルについて）**: $k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}$
4. **単位元**: $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$
5. **零元**: $0\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$

証明. ここでは、**分配法則（ベクトルについて）**の証明を示します。その他の性質は、同様の方法で成分計算によって証明できます（一部は練習問題とします)。

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ とスカラー k とする。定義 1.3 より、$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}$。次に、定義 1.4 より、$k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = k\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(a_1+b_1) \\ \vdots \\ k(a_n+b_n) \end{pmatrix}$。実数の掛け算は分配法則を満たす（$x(y+z) = xy+xz$）ので、各成分について $k(a_i+b_i) = ka_i + kb_i$ が成り立つ。よって、$\begin{pmatrix} k(a_1+b_1) \\ \vdots \\ k(a_n+b_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1+kb_1 \\ \vdots \\ ka_n+kb_n \end{pmatrix}$。この式は、ベクトルの和の定義（定義 1.3）により、$\begin{pmatrix} ka_1 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} kb_1 \\ \vdots \\ kb_n \end{pmatrix}$ と書ける。そして、定義 1.4 より、これは

$k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}$ に等しい。したがって、$k(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}$ が成り立つ。(証明終)

1.4　ベクトルの差（引き算）

ベクトルの差 $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ は、ベクトルの和とスカラー倍（逆ベクトル）を組み合わせて定義されます。すなわち、$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$ です。これを成分で書くと、

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{pmatrix}$$

例 1.13. $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

幾何学的解釈:$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ は、$\boldsymbol{b}$ の終点から $\boldsymbol{a}$ の終点へ向かうベクトルと解釈できます。（これは $\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}$ という関係から理解できます。）

1.5　練習問題

問題 1.1. 次のベクトルを計算しなさい。

1. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき、$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$
2. $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ のとき、$\boldsymbol{c} - \boldsymbol{d}$
3. $\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ のとき、$\boldsymbol{e} + \boldsymbol{f}$
4. $k = 3,\ \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ のとき、$k\boldsymbol{a}$
5. $k = -2,\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき、$k\boldsymbol{b}$
6. $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ のとき、$2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$

問題 1.2 (定理の証明演習)**.** 定理 1.1 と 定理 1.2 の残りの性質を、成分計算を用いて各自で証明しなさい。特に、以下の証明に挑戦してみましょう。

1. 定理 *1.1* の *2.* 結合法則: $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$
2. 定理 *1.2* の *2.* 分配法則（スカラーについて）: $(k + l)\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{a}$

2　ベクトルの大きさと内積

この章では、ベクトルの「長さ」を測る**大きさ（ノルム）**と、2 つのベクトルがどれくらい「同じ方向を向いているか」を示す**内積（ドット積）**について学びます。

2.1　ベクトルの大きさ（ノルム）

ベクトルの**大きさ**は、そのベクトルの「長さ」を表す量です。数学的には**ノルム**とも呼ばれ、ベクトル空間における距離の概念の基礎となります。

定義 2.1 (ベクトルの大きさ - ノルム)**.** n 次元ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ の大きさ（ノルム）は、記号 $|\boldsymbol{a}|$ または $||\boldsymbol{a}||$ で表され、各成分の 2 乗の和の正の平方根として定義されます。

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

幾何学的解釈: この定義は、2 次元や 3 次元の空間では、**三平方の定理（ピタゴラスの定理）**を一般化したものです。

例 2.2.

- $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ の大きさ:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

これは、直角三角形の斜辺の長さと一致します。

- $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ の大きさ:

$$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

2.2　単位ベクトル

定義 2.3 (単位ベクトル)**.** 大きさが 1 であるベクトルを**単位ベクトル**と定義します。

定理 2.4 (単位ベクトルの正規化)**.** 零ベクトルでない任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して、$\boldsymbol{a}$ と同じ向きを持つ単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ は、$\boldsymbol{a}$ をその大きさで割ることで得られます。この操作を**正規化**と呼びます。

$$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$$

証明. $\boldsymbol{e}$ の大きさを計算してみます。$|\boldsymbol{e}| = \left|\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}\right|$。スカラー倍の性質（定理 1.2 の $|k\boldsymbol{v}| = |k||\boldsymbol{v}|$ に相当する性質）より、$|\boldsymbol{e}| = \left|\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\right||\boldsymbol{a}|$。$|\boldsymbol{a}|$ は大きさであり常に正の値なので、$|\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}| = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}$ です。よって、$|\boldsymbol{e}| = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}| = 1$ となり、確かに単位ベクトルです。(証明終)

例 2.5. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ と同じ向きの単位ベクトルを求めます。まず $|\boldsymbol{a}| = 5$ です。

$$\boldsymbol{e} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

この $\boldsymbol{e}$ の大きさは $\sqrt{(3/5)^2 + (4/5)^2} = \sqrt{9/25 + 16/25} = \sqrt{25/25} = \sqrt{1} = 1$ となり、定義通り大きさが 1 です。

2.3 内積（ドット積）

内積は、2 つのベクトルから**スカラー（数）**を求める計算です。ベクトル同士の「掛け算」と考えることができますが、結果がベクトルではなく数になる点が重要です。

定義 2.6 (内積 - 成分による計算)**.** n 次元ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ の**内積（またはドット積）**は、記号 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ で表され、対応する成分同士を掛けて全て足し合わせることで定義されます。

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

例 2.7.

- $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ の内積:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (3 \times 1) + (2 \times 4) = 3 + 8 = 11$$

- $\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の内積:

$$\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{f} = (1 \times 5) + (0 \times 2) + ((-3) \times 1) = 5 + 0 - 3 = 2$$

2.4 内積の性質と幾何学的意味

内積は、2 つのベクトルのなす角と密接な関係があります。

定理 2.8 (コーシー＝シュワルツの不等式)**.** 任意の n 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に対して、以下の不等式が成り立つ。

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 \leq |\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{b}|^2$$

等号が成り立つのは、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が線形従属（一方が他方のスカラー倍で表せる、すなわち平行である）である場合に限る。

証明. 実数 t を用いてベクトル $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ を考えます。ベクトルの大きさは常に非負なので、$|\boldsymbol{v}|^2 \geq 0$ です。

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{v}|^2 = |\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|^2 &= (\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}) \\ &= \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) + t(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}) + t^2(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}) \\ &= |\boldsymbol{a}|^2 + 2t(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) + t^2|\boldsymbol{b}|^2\end{aligned}$$

この式は t に関する二次関数 $f(t) = |\boldsymbol{b}|^2t^2 + 2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})t + |\boldsymbol{a}|^2$ であり、常に $f(t) \geq 0$ を満たします。これは、t に関する二次方程式 $f(t) = 0$ が実数解を持たないか、または重解を持つことを意味します。したがって、判別式 D が $D \leq 0$ でなければなりません。

$$\begin{aligned}D &= (2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}))^2 - 4|\boldsymbol{b}|^2|\boldsymbol{a}|^2 \\ &= 4(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 - 4|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 \leq 0 \\ 4(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 &\leq 4|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 \\ (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 &\leq |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\end{aligned}$$

等号が成り立つのは、判別式が 0 になる場合、すなわち $\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ となる実数 t が存在する場合であり、これは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が線形従属であることを意味します。(証明終)

定義 2.9. 零ベクトルでない 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ は、コーシー＝シュワルツの不等式（定理 2.2）によって $\left|\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\right| \leq 1$ が保証されるため、その値を $\cos\theta$ として、以下のように定義されます。

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

定理 2.10 (内積とベクトルのなす角の関係)**.** 零ベクトルでない 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすると、内積は次の式で表すことができる。

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

証明. 定義 2.4 $\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$ の両辺に $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ を掛けることで、直ちに得られる。

幾何学的解釈（*2* 次元の余弦定理との整合性）: この定義は、2 次元における直感的な幾何学（余弦定理）と矛盾しません。実際、2 次元のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して、これらのベクトルと原点で構成される三角形に余弦定理を適用すると、定義 2.3 の成分計算による内積が $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ と一致することが確認できます。

定理 2.11 (ベクトルの直交条件)**.** 零ベクトルでない 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交する（垂直に交わる）ための必要十分条件は、それらの内積が 0 であることです。

$$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$$

証明. 定理 2.2 より $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ です。

- ($\Rightarrow$) $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ ならば $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$ であることの証明:
  $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するとき、それらのなす角は $\theta = \pi/2$ です。このとき $\cos\pi/2 = 0$ となるため、$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \times 0 = 0$ が成り立ちます。
- ($\Leftarrow$) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$ ならば $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ であることの証明:
  $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$ と仮定します。零ベクトルでないと仮定しているので、$|\boldsymbol{a}| \neq 0$ かつ $|\boldsymbol{b}| \neq 0$ です。定理 2.2 の式 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ に代入すると、$0 = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ $|\boldsymbol{a}| \neq 0$ かつ $|\boldsymbol{b}| \neq 0$ なので、$\cos\theta = 0$ でなけ

ればなりません。$0 \le \theta \le \pi$ の範囲で $\cos\theta = 0$ となるのは $\theta = \pi/2$ のときのみです。したがって、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は直交します。

(証明終)

例 2.12. $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ が直交するかを確認します。

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (2 \times 1) + ((-1) \times 2) = 2 - 2 = 0$$

内積が 0 なので、定理 2.3 により $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ は直交します。

2.5 練習問題

問題 2.1. 次のベクトルの大きさ（ノルム）を求めなさい。

1. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$
2. $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

問題 2.2. 次の内積を求めなさい。

1. $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$
2. $\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

問題 2.3. 次の 2 つのベクトルは直交するかどうか、内積を計算して答えなさい。

1. $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$
2. $\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

問題 2.4. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と同じ向きを持つ単位ベクトルを求めなさい。

3　行列とその演算

この章では、線形代数におけるもう一つの主役である**行列**の定義と、基本的な演算について学びます。行列は、複数のベクトルをまとめて扱ったり、ベクトルの変換を表現したりするのに使われます。

3.1　行列の定義

行列とは、数や文字を長方形に並べたものです。

定義 3.1 (行列)**.** m 行 n 列の行列 $\boldsymbol{A}$ は、実数（または複素数）の要素 a_{ij} を m 個の行と n 個の列に並べたもので、次のように表されます。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ここで、a_{ij} は行列 $\boldsymbol{A}$ の i 行 j 列目の要素（成分）を表します。m を**行数**、n を**列数**と呼び、行列のサイズを $m \times n$ 行列と表します。

例 3.2.

- 2×3 行列: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ （2 行 3 列）
- 3×1 行列: $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ （これは 3 次元の列ベクトルと見なせます）
- 1×2 行列: $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 10 & 11 \end{pmatrix}$ （これは 2 次元の行ベクトルと見なせます）

定義 3.3 (行列の等しさ)**.** 2 つの $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ と $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ が**等しい**とは、それらの対応するすべての要素が等しいことをいいます。すなわち、$a_{ij} = b_{ij}$ がすべての $i = 1, \ldots, m$ および $j = 1, \ldots, n$ について成り立つとき、$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ と定義します。

例 3.4. $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ならば、$x = 1,\ y = 2,\ z = 3,\ w = 4$ です。

定義 3.5 (零行列)**.** すべての要素が 0 である $m \times n$ 行列を**零行列**といい、$\boldsymbol{O}$（または $\boldsymbol{O}_{m \times n}$）で表します。

例 3.6. 2×2 零行列: $\boldsymbol{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3.2　行列の基本的な演算と性質

行列には、ベクトルの演算と同様に、和、スカラー倍、そして特有の積（掛け算）が定義されます。

3.2.1　行列の和（足し算）

定義 3.7 (行列の和)**.** 同じサイズの 2 つの行列 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ と $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ の和 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ は、対応する要素同士を足し合わせることで定義されます。和の行列の (i, j) 要素は $a_{ij} + b_{ij}$ です。

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (a_{ij} + b_{ij})$$

注意. 行列の和は、同じ行数と同じ列数を持つ行列同士でしか定義できません。

例 3.8. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$

定理 3.9 (行列の和の性質)**.** 行列の和は、ベクトルの和と同様に以下の性質を持ちます。

1. 交換法則: $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$
2. 結合法則: $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$
3. 零行列の存在: 任意の行列 $\boldsymbol{A}$ に対して、$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{O} = \boldsymbol{A}$ となる零行列 $\boldsymbol{O}$ が存在する。
4. 逆行列（加法逆元）の存在: 任意の行列 $\boldsymbol{A}$ に対して、$\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$ となる行列 $-\boldsymbol{A}$ が存在する。ここで、$-\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{A}$ の各要素に -1 を掛けた行列 $(-a_{ij})$ です。

証明. ここでは、**交換法則**の証明を示します。その他の性質は、同様の方法で要素計算によって証明できます（一部は練習問題とします）。

$\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ と $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ とする。定義 3.4 より、$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ の (i, j) 要素は $a_{ij} + b_{ij}$ である。実数の足し算は交換法則を満たす（$x + y = y + x$）ので、$a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$ がすべての i, j について成り立つ。よって、$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ の (i, j) 要素は $\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$ の (i, j) 要素と等しい。定義 3.2（行列の等しさ）より、$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$ が成り立つ。(証明終)

3.2.2　行列のスカラー倍（定数倍）と行列の差

定義 3.10 (行列のスカラー倍)**.** 行列 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ と実数 k（スカラー）の積 $k\boldsymbol{A}$ は、行列の各要素に k を掛けることで定義されます。積の行列の (i, j) 要素は ka_{ij} です。

$$k\boldsymbol{A} = (ka_{ij})$$

例 3.11. $2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 & 2 \times 2 \\ 2 \times 3 & 2 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

定理 3.12 (行列のスカラー倍の性質)**.** 行列のスカラー倍は、以下の性質を持ちます。

1. 結合法則: $k(l\boldsymbol{A}) = (kl)\boldsymbol{A}$
2. 分配法則: $(k + l)\boldsymbol{A} = k\boldsymbol{A} + l\boldsymbol{A}$ および $k(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = k\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{B}$
3. 単位元: $1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$
4. 零元: $0\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$, $k\boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}$

証明. ここでは、**分配法則（行列について）** の証明を示します。その他の性質は、同様の方法で要素計算によって証明できます（一部は練習問題とします）。

$\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ と $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ とスカラー k とする。定義 3.4 より、$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ の (i,j) 要素は $a_{ij}+b_{ij}$ である。定義 3.5 より、$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$ の (i,j) 要素は $k(a_{ij}+b_{ij})$ である。実数の掛け算は分配法則を満たすので、$k(a_{ij}+b_{ij}) = ka_{ij}+kb_{ij}$ が成り立つ。一方、$k\boldsymbol{A}$ の (i,j) 要素は ka_{ij}、 $k\boldsymbol{B}$ の (i,j) 要素は kb_{ij} である。したがって、$k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$ の (i,j) 要素は $ka_{ij}+kb_{ij}$ である。両者の (i,j) 要素が等しいため、定義 3.2 より $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$ が成り立つ。(証明終)

行列の差 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ は、行列の和とスカラー倍（加法逆元）を組み合わせて定義されます。すなわち、$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$ です。これを要素で書くと、$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} = (a_{ij}-b_{ij})$ です。

例 3.13. $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-1 & 6-2 \\ 7-3 & 8-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

3.2.3 行列の積（掛け算）

行列の積は、これまでの和やスカラー倍とは異なり、少し複雑な定義を持ちます。しかし、その定義には深い意味があり、線形変換の合成などを自然に表現できます。

定義 3.14 (行列の積)**.** $m \times l$ 行列 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ と $l \times n$ 行列 $\boldsymbol{B} = (b_{jk})$ の積 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ は、$m \times n$ 行列として定義されます。積の行列 $\boldsymbol{C}$ の (i,k) 要素 c_{ik} は、$\boldsymbol{A}$ の i 行目の要素と $\boldsymbol{B}$ の k 列目の要素をそれぞれ掛け合わせて足し合わせたものです。

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{l} a_{ij}b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{il}b_{lk}$$

注意. 行列の積 $\boldsymbol{AB}$ は、$\boldsymbol{A}$ の列数と $\boldsymbol{B}$ の行数が一致する場合にのみ定義されます。結果として得られる行列の行数は $\boldsymbol{A}$ の行数、列数は $\boldsymbol{B}$ の列数になります。

$$(\mathrm{m} \times \underline{\mathrm{l}}) \times (\underline{\mathrm{l}} \times \mathrm{n}) = (\mathrm{m} \times \mathrm{n})$$

例 3.15. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $(2 \times 2$ 行列$)$ と $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ $(2 \times 2$ 行列$)$ の積を計算してみましょう。

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$
$$c_{11} = (1 \times 5) + (2 \times 7) = 5 + 14 = 19$$
$$c_{12} = (1 \times 6) + (2 \times 8) = 6 + 16 = 22$$
$$c_{21} = (3 \times 5) + (4 \times 7) = 15 + 28 = 43$$
$$c_{22} = (3 \times 6) + (4 \times 8) = 18 + 32 = 50$$

よって、

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

定理 3.16 (行列の積の性質)**.** 行列の積は、以下の性質を持ちます。

1. 結合法則: $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ （積が定義される限り、計算の順序は問わない）
2. 分配法則: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$ および $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$ （和と積の間には分配法則が成り立つ）

3. スカラー倍との結合法則: $k(\boldsymbol{AB}) = (k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$ （スカラー倍は積のどこに適用しても結果は同じ）

証明. ここでは、**分配法則**の一部である $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$ の証明を示します。その他の性質も同様に、積の定義と実数の演算法則を用いて要素ごとに証明できます（一部は練習問題とします)。

$\boldsymbol{A}$ を $m \times l$ 行列、$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{C}$ を $l \times n$ 行列とする。$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$ の (j,k) 要素は $b_{jk}+c_{jk}$ である（定義 3.4)。積 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$ の (i,k) 要素を考えると、定義 3.6 より、

$$(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}))_{ik} = \sum_{j=1}^{l} a_{ij}(b_{jk}+c_{jk})$$

実数の分配法則より $a_{ij}(b_{jk}+c_{jk}) = a_{ij}b_{jk}+a_{ij}c_{jk}$ なので、

$$\sum_{j=1}^{l}(a_{ij}b_{jk}+a_{ij}c_{jk})$$

実数の和の結合法則と交換法則（および分配法則）を適用すると、

$$= \sum_{j=1}^{l} a_{ij}b_{jk} + \sum_{j=1}^{l} a_{ij}c_{jk}$$

右辺の各項は、それぞれ $\boldsymbol{AB}$ の (i,k) 要素と $\boldsymbol{AC}$ の (i,k) 要素の定義（定義 3.6）に他ならない。したがって、

$$(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}))_{ik} = (\boldsymbol{AB})_{ik} + (\boldsymbol{AC})_{ik}$$

これは、行列の和の定義（定義 3.4）により、$(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC})$ の (i,k) 要素と等しい。すべての要素が等しいため、定義 3.2 より $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$ が成り立つ。(証明終)

注意. 行列の積は、一般に**交換法則が成り立ちません**。つまり、$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$ であることがほとんどです。

例 3.17 (交換法則が成り立たない例). 例 3.15 で $\boldsymbol{BA}$ を計算してみましょう。

$$\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
$$c'_{11} = (5 \times 1) + (6 \times 3) = 5 + 18 = 23$$
$$c'_{12} = (5 \times 2) + (6 \times 4) = 10 + 24 = 34$$
$$c'_{21} = (7 \times 1) + (8 \times 3) = 7 + 24 = 31$$
$$c'_{22} = (7 \times 2) + (8 \times 4) = 14 + 32 = 46$$

よって、

$$\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

先ほどの $\boldsymbol{AB}$ とは明らかに異なるため、$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$ です。

3.3 特殊な行列

行列の中には、特に重要な性質を持つものがあります。

定義 3.18 (正方行列)**.** 行数と列数が等しい行列を**正方行列**と呼びます。$n \times n$ 行列の場合、「n 次正方行列」といいます。

例 3.19. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ は 2 次正方行列です。

定義 3.20 (単位行列)**.** 正方行列であり、対角成分（$i = j$ の要素）がすべて 1 で、その他の成分がすべて 0 である行列を**単位行列**と呼び、$\boldsymbol{I}$（または $\boldsymbol{I}_n$）で表します。

$$\boldsymbol{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

定理 3.21 (単位行列の性質)**.** 任意の $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ に対して、以下の関係が成り立ちます。

1. $\boldsymbol{I}_m \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$
2. $\boldsymbol{A} \boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{A}$

これは、単位行列が数の掛け算における 1 のような役割を果たすことを意味します。

証明. ここでは、$\boldsymbol{I}_m \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ の証明を示します。

$\boldsymbol{I}_m$ を $m \times m$ 単位行列、$\boldsymbol{A}$ を $m \times n$ 行列とする。積 $\boldsymbol{I}_m \boldsymbol{A}$ の (i, k) 要素を考える。定義 3.6 より、

$$(\boldsymbol{I}_m \boldsymbol{A})_{ik} = \sum_{j=1}^{m} (\boldsymbol{I}_m)_{ij} a_{jk}$$

ここで、単位行列の定義（定義 3.8）より、$(\boldsymbol{I}_m)_{ij}$ は $i = j$ のとき 1、それ以外のとき 0 である。したがって、和の中の j について、 $j = i$ の項のみが残り、それ以外の項は 0 になる。

$$\sum_{j=1}^{m} (\boldsymbol{I}_m)_{ij} a_{jk} = (\boldsymbol{I}_m)_{ii} a_{ik} = 1 \cdot a_{ik} = a_{ik}$$

これは行列 $\boldsymbol{A}$ の (i, k) 要素に等しい。すべての要素が等しいため、定義 3.2 より $\boldsymbol{I}_m \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ が成り立つ。(証明終)

3.4 練習問題

問題 3.1. 次の行列を計算しなさい。

1. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ のとき、$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$
2. $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ のとき、$\boldsymbol{C} - \boldsymbol{D}$

問題 3.2. 次のスカラー倍を計算しなさい。

1. $k = 3,\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ のとき、$k\boldsymbol{A}$

2. $k = -0.5,\ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 4 \\ -2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ のとき、$k\boldsymbol{B}$

問題 3.3. $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ とするとき、次の行列を計算しなさい。

1. $2\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}$
2. $\boldsymbol{X} - 3\boldsymbol{Y}$

問題 3.4. 次の行列の積を計算しなさい。

1. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき、$\boldsymbol{AB}$ と $\boldsymbol{BA}$
2. $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ のとき、$\boldsymbol{CD}$ と $\boldsymbol{DC}$
3. $\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ のとき、$\boldsymbol{EF}$

問題 3.5 (定理の証明演習)**.** 定理 3.1、定理 3.2、定理 3.3、定理 3.4 の残りの性質を、要素計算を用いて各自で証明しなさい。

4　線形結合と線形独立・従属

これまでの章では、具体的な数の並びとしてのベクトルとその計算、そして行列の基本的な性質を学びました。これらは線形代数の「計算」の基盤です。この章では、これらの計算が成り立つ「舞台」である**ベクトル空間**について定義し、その上で線形代数の「考え方」の核心に迫る概念、**線形結合**、そしてそれに続く**線形独立**と**線形従属**を深掘りします。

4.1　ベクトル空間の定義

ベクトル空間は、数学において特定の性質を満たすベクトルの集合のことです。線形代数の概念が成り立つ「舞台」となります。

定義 4.1 (ベクトル空間)**.** 集合 V が**ベクトル空間（または線形空間）である**とは、以下の条件を満たすときに言います。

1. V の任意の 2 つの要素（ベクトル）$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対して、和 $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ が定義されており、その結果も V の要素である。（V は**加法について閉じている**）
2. V の任意の要素（ベクトル）$\boldsymbol{u}$ と、実数（スカラー）k に対して、スカラー倍 $k\boldsymbol{u}$ が定義されており、その結果も V の要素である。（V は**スカラー倍について閉じている**）

さらに、これらの演算が以下の 8 つの**公理**を満たさなければなりません。

加法に関する公理:

(A1) **交換法則:** $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$

(A2) **結合法則:** $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$

(A3) **零ベクトルの存在:** V の任意の要素 $\boldsymbol{u}$ に対して、$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{u}$ となる要素 $\boldsymbol{0}$（零ベクトル）が V の中に存在する。

(A4) **逆ベクトルの存在:** V の任意の要素 $\boldsymbol{u}$ に対して、$\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=\boldsymbol{0}$ となる要素 $-\boldsymbol{u}$（逆ベクトル）が V の中に存在する。

スカラー倍に関する公理:

(S1) **結合法則:** $k(l\boldsymbol{u})=(kl)\boldsymbol{u}$

(S2) **分配法則（スカラーについて）:** $(k+l)\boldsymbol{u}=k\boldsymbol{u}+l\boldsymbol{u}$

(S3) **分配法則（ベクトルについて）:** $k(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=k\boldsymbol{u}+k\boldsymbol{v}$

(S4) **単位元:** $1\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$ （ここで 1 は実数 1）

例 4.2.
- **n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$:** これまで扱ってきた数の羅列の集合は、これらの公理を全て満たすため、最も基本的なベクトル空間です。
- **多項式の集合:** 例えば、2 次以下の多項式 $P(x)=ax^2+bx+c$ 全体の集合もベクトル空間になります。
- **行列の集合:** 例えば、2×2 行列全体の集合もベクトル空間です。

4.2 線形結合

線形結合は、複数のベクトルを足し合わせたり、スカラー倍したりする操作を組み合わせたものです。これまでに学んだベクトルの基本演算の応用と言えます。

定義 4.3 (線形結合)**.** n 次元ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ と、スカラー $c_1, c_2, \ldots, c_k$ が与えられたとき、これらのベクトルとスカラーを用いて作られる以下の式を、**線形結合**と呼びます。

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k$$

例 4.4. 2 つのベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ を考えます。スカラー $c_1 = 2,\ c_2 = -1$ を用いた線形結合は、

$$2\boldsymbol{v}_1 + (-1)\boldsymbol{v}_2 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

となります。

定義 4.5 (生成する空間 / 線形包)**.** ベクトルの集合 $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ のすべての可能な線形結合によって形成されるベクトル全体の集合を、S によって**生成される空間**と呼び、$\mathrm{span}(S)$ または $\mathrm{span}\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ と表記します。これは**線形包**とも呼ばれます。

幾何学的解釈:

- 1 つの零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{v}_1$ の線形結合 $c_1\boldsymbol{v}_1$ は、原点を通る直線を表します。
- 2 つの平行でない零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の線形結合 $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2$ は、原点を通る平面を表します。

例 4.6. $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ によって生成される空間 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ は、2 次元平面上のすべてのベクトルを表現できます。これは、任意のベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と書けるからです。

4.3 線形独立と線形従属

線形結合の概念を用いることで、ベクトルの集合が持つ「冗長性」を数学的に定義できます。これが**線形独立**と**線形従属**の概念です。

定義 4.7 (線形独立)**.** ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ が**線形独立である**とは、以下の条件を満たすときに言います。

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k = \mathbf{0} \text{ ならば } \forall i.c_i = 0$$

定義 4.8 (線形従属)**.** ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ が**線形従属である**とは、線形独立ではない、つまり，以下の条件を満たすときに言います。

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k = \mathbf{0} \text{ かつ } \exists i.c_i \neq 0$$

幾何学的解釈:

- **線形独立**: どのベクトルも、他のベクトルの線形結合で表せない（つまり、集合内のベクトルがそれぞれ新しい「方向」を持っている)。
- **線形従属**: 少なくとも 1 つのベクトルが、他のベクトルの線形結合で表せる（つまり、集合内のベクトルに「冗長性」がある)。例えば、2 つのベクトルが線形従属なら、それらは平行です。3 つのベクトルが線形従属なら、それらは同一平面上にあるか、あるいは互いに平行です。

定理 4.9 (線形従属の判定条件)**.** ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ が線形従属であることと、集合内の少なくとも 1 つのベクトルが他のベクトルの線形結合で表せることは同値である。

証明.
- *(⇒)* **線形従属ならば、少なくとも** *1* **つのベクトルが他のベクトルの線形結合で表せることの証明:**
  集合が線形従属であると仮定します。定義 4.4 より、
  $$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0} \text{ かつ } \exists i.c_i \neq 0$$
  が成り立つようなスカラー $c_1, \ldots, c_k$ が存在します。このとき、少なくとも 1 つの $c_m \neq 0$ である m が存在します。その $c_m\boldsymbol{v}_m$ の項を左辺に残し、他の項を右辺に移項すると、
  $$c_m\boldsymbol{v}_m = -c_1\boldsymbol{v}_1 - \cdots - c_{m-1}\boldsymbol{v}_{m-1} - c_{m+1}\boldsymbol{v}_{m+1} - \cdots - c_k\boldsymbol{v}_k$$
  $c_m \neq 0$ なので、両辺を c_m で割ることができます。
  $$\boldsymbol{v}_m = -\frac{c_1}{c_m}\boldsymbol{v}_1 - \cdots - \frac{c_{m-1}}{c_m}\boldsymbol{v}_{m-1} - \frac{c_{m+1}}{c_m}\boldsymbol{v}_{m+1} - \cdots - \frac{c_k}{c_m}\boldsymbol{v}_k$$
  これは、$\boldsymbol{v}_m$ が他のベクトル $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{m-1}, \boldsymbol{v}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ の線形結合で表せることを示しています。
- *(⇐)* **少なくとも** *1* **つのベクトルが他のベクトルの線形結合で表せるならば、線形従属であることの証明:**
  集合内の少なくとも 1 つのベクトル、例えば $\boldsymbol{v}_m$ が、他のベクトルの線形結合で表せると仮定します。
  $$\boldsymbol{v}_m = d_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + d_{m-1}\boldsymbol{v}_{m-1} + d_{m+1}\boldsymbol{v}_{m+1} + \cdots + d_k\boldsymbol{v}_k$$
  ここで d_i はスカラーです。この式を移項すると、
  $$d_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + d_{m-1}\boldsymbol{v}_{m-1} + (-1)\boldsymbol{v}_m + d_{m+1}\boldsymbol{v}_{m+1} + \cdots + d_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$$
  この線形結合において、$\boldsymbol{v}_m$ の係数は -1 であり、0 ではありません。したがって、定義 4.4 により、このベクトルの集合は線形従属であると言えます。

(証明終)

例 4.10 (線形独立・従属の判定)**.**

1. **線形独立の例:**
   $$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
   $c_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ が成り立つのは $c_1 = 0$ かつ $c_2 = 0$ の場合に限られるため、$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ は線形独立です。

2. 線形従属の例:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

この 2 つのベクトルは $\boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{v}_1$ という関係があります。これを移項すると $2\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$ となります。この線形結合において、$\boldsymbol{v}_1$ の係数は $2 \neq 0$、$\boldsymbol{v}_2$ の係数は $-1 \neq 0$ です。すべての係数が 0 ではないにもかかわらず零ベクトルとなる線形結合が存在するため、$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ は線形従属です。

4.4 練習問題

問題 4.1. 次の問いに答えなさい。

1. $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ を、$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の線形結合で表しなさい。
2. $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ を、$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ の線形結合で表しなさい。（もし表せない場合はその理由も教えてください。）

問題 4.2. 次のベクトルの集合が線形独立であるか、線形従属であるかを判定しなさい。

1. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$
2. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
3. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
（ヒント：2 次元空間では、2 つより多いベクトルは常に線形従属になります。その理由を考えてみましょう。）

5　基底と次元

この章では、ベクトル空間の構造を理解するための核心的な概念である**基底**と**次元**について学びます。基底は、ベクトル空間内の全てのベクトルを表現するための「最小限の構成要素」であり、次元はその空間の「大きさ」を示します。

5.1　基底（Basis）

これまでに、いくつかのベクトルを線形結合することで、様々なベクトルを表現できることを学びました。基底は、この「表現」を最も効率的に行うための特別なベクトルの集まりです。

定義 5.1 (基底)**.** ベクトル空間 V のベクトルの集まり $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が**基底である**とは、以下の 2 つの条件を満たすときに言います。

1. B が**線形独立である**。
2. B が V を**生成する**（つまり、$\mathrm{span}(B) = V$ である)。

幾何学的解釈:

- **線形独立であること**: 基底を構成するベクトルは、それぞれが新しい「方向」を示しており、どれも他のベクトルの組み合わせで表すことができません。これにより、無駄なベクトルが含まれていないことが保証されます。
- **生成すること**: 基底を構成するベクトルを組み合わせることで、そのベクトル空間内の**すべての**ベクトルを表現できます。これは、空間内のどこへでも「到達できる」ことを意味します。

簡単に言えば、基底とは「**最小限の数のベクトルで、その空間のあらゆるベクトルを表せる集まり**」です。

例 5.2.

- *2* **次元空間** $\mathbb{R}^2$ **の標準基底:**$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
  この集まり $B = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ は $\mathbb{R}^2$ の基底です。
  - **線形独立性**: $c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{0}$ ならば $c_1 = 0,\ c_2 = 0$ の場合に限られるため、線形独立です。
  - **生成性**: 任意の 2 次元ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ は $x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$ と書けるため、$\mathbb{R}^2$ を生成します。
- **別の基底の例** *(*$\mathbb{R}^2$*)*:$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
  この集まり $B' = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ も $\mathbb{R}^2$ の基底です。
  - **線形独立性**: $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ を解くと $c_1 = 0,\ c_2 = 0$ しか解がないため、線形独立です。
  - **生成性**: 任意の $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ に対して $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{x}$ を満たす c_1, c_2 が一意に存在するため、生成します。

定理 5.3 (基底の存在と一意性)**.** 任意の有限次元ベクトル空間には基底が存在します。また、あるベクトル空間の基底を構成するベクトルの個数は、どの基底を選んだとしても常に同じです。

証明 (アイデア（個数の一意性）)**.** この定理の「基底を構成するベクトルの個数は常に同じ」という部分が、次に定義する「次元」の概念を可能にします。その証明のアイデアは、以下に基づきます。もし、あるベクトル空間に、異なる個数のベクトルを持つ 2 つの基底 $B_1 = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$ と $B_2 = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が存在すると仮定します。このとき、$m \neq n$ だとすると、例えば $m < n$ の場合、基底 B_1 のベクトルを使って基底 B_2 のベクトルを全て線形結合で表そうとすると、ある段階で線形従属な関係が生じてしまい、矛盾が生じることを示します。これにより、$m = n$ でなければならない、と結論づけます。

5.2 次元（Dimension）

基底を構成するベクトルの個数が常に同じであるという定理 5.1 の性質は、ベクトル空間の「大きさ」を定量的に表すことを可能にします。

定義 5.4 (次元)**.** ベクトル空間 V の**次元** *(dimension)* は、その基底を構成するベクトルの個数として定義されます。V の次元は $\dim(V)$ と表記されます。

例 5.5.

- *2* **次元空間** $\mathbb{R}^2$: 標準基底 $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ は 2 つのベクトルからなるので、$\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ です。
- *3* **次元空間** $\mathbb{R}^3$: 標準基底 $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ は 3 つのベクトルからなるので、$\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ です。
- n **次元空間** $\mathbb{R}^n$: 標準基底は n 個のベクトルからなるので、$\dim(\mathbb{R}^n) = n$ です。
- **零ベクトル空間** $\{\mathbf{0}\}$: この空間の基底は空集合（ベクトルを一つも持たない集合）であると定義されます。そのため、その次元は 0 です。

5.3 基底と次元に関する重要な定理

基底と次元の概念は、ベクトル空間内のベクトルの数や線形独立性・生成性と密接に関わっています。

定理 5.6. n 次元ベクトル空間 V において、以下のことが言えます。

1. n 個のベクトルからなる線形独立な集まりは、必ず V の基底である。
2. n 個のベクトルからなる V を生成する集まりは、必ず V の基底である。
3. V 内の n 個より多いベクトルは、必ず線形従属である。
4. V 内の n 個より少ないベクトルは、決して V を生成しない。

証明 (アイデア (定理 5.2 の 3. と 4.))**.** これらの定理は、基底の持つ性質（線形独立性と生成性、そして個数の一意性）から論理的に導かれます。例えば、3.「n 個より多いベクトルは必ず線形従属」は、もしそれらが線形独立であると仮定すると、次元が n であることと矛盾することを示すことで証明できます。

5.4 練習問題

問題 5.1. 次のベクトルの集まりが、与えられたベクトル空間の基底であるかどうかを判定しなさい。

1. 空間 $\mathbb{R}^2$ に対して、$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\}$

2. 空間 $\mathbb{R}^3$ に対して、$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

3. 空間 $\mathbb{R}^3$ に対して、$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

問題 5.2. ベクトル空間 $V = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ の次元を求めなさい。

6 線形写像と表現行列

この章では、ベクトル空間間の「変換」である**線形写像**と、その変換を具体的な数値で表す**表現行列**について学びます。これは、行列が単なる数の集まりではなく、空間を動かす「働き」を持つことを理解する上で非常に重要です。

6.1 線形写像の定義

線形写像は、ベクトル空間の構造（和とスカラー倍）を保つ特別な種類の関数です。

定義 6.1 (線形写像)**.** 2 つのベクトル空間 V と W が与えられたとき、写像（関数）$f : V \to W$ が**線形写像** *(linear map)* であるとは、以下の 2 つの条件を満たすときに言います。

1. **加法性**: 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対して、$f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$
2. **斉次性**: 任意の $\boldsymbol{u} \in V$ と任意のスカラー c に対して、$f(c\boldsymbol{u}) = cf(\boldsymbol{u})$

これらの 2 つの条件は、まとめて以下の 1 つの条件で表すこともできます。

$$\text{任意の } \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V \text{ と任意のスカラー } c_1, c_2 \text{ に対して } f(c_1\boldsymbol{u} + c_2\boldsymbol{v}) = c_1 f(\boldsymbol{u}) + c_2 f(\boldsymbol{v})$$

幾何学的解釈: 線形写像は、空間を「まっすぐ」かつ「原点を原点に写す」変換だと考えることができます。具体的には、

- 直線を直線に写します。
- 原点を通る平面を、原点を通る直線や平面に写します。
- ベクトルの平行性や等間隔性を保ちます。

線形写像の例としては、回転、拡大・縮小、射影（影を落とすような変換）などがあります。

例 6.2.

1. *2* **次元の回転**:
   $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を、ベクトルを角度 θ だけ反時計回りに回転させる写像とします。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ としたとき、$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$ と表されます。この写像が線形写像であることを確認してみましょう。
   - **加法性**: $f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$ と $f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$ が等しいことを示します。
   - **斉次性**: $f(c\boldsymbol{u})$ と $cf(\boldsymbol{u})$ が等しいことを示します。

   これは定義 6.1 の 2 つの条件を満たすので、回転写像は線形写像です。
2. **スカラー倍（拡大・縮小）**: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を、$f(\boldsymbol{x}) = k\boldsymbol{x}$（$k$ は定数スカラー）と定義する写像は線形写像です。これは、ベクトルのスカラー倍の性質（定理 1.2 の 2 と 1.2 の 3）から明らかです。

定理 6.3 (線形写像の性質)**.** 線形写像 $f : V \to W$ は、以下の性質を持ちます。

1. 零ベクトルを零ベクトルに写す: $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ （ここで $\mathbf{0}_V$ はベクトル空間 V の零ベクトル、$\mathbf{0}_W$ は W の零ベクトル）
2. 線形結合を線形結合に写す: $f(c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k) = c_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + c_k f(\boldsymbol{v}_k)$

証明. ここでは、零ベクトルを零ベクトルに写すことの証明を示します。2. の証明は、線形写像の定義を繰り返し適用することで証明できます（練習問題とします）。

V の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ を考える。V における零ベクトルの性質（定理 1.1-3）より、$\boldsymbol{v} + \mathbf{0}_V = \boldsymbol{v}$ である。この両辺に f を作用させると、$f(\boldsymbol{v} + \mathbf{0}_V) = f(\boldsymbol{v})$ となる。線形写像の加法性（定義 6.1-1）より、$f(\boldsymbol{v} + \mathbf{0}_V) = f(\boldsymbol{v}) + f(\mathbf{0}_V)$ となる。したがって、$f(\boldsymbol{v}) + f(\mathbf{0}_V) = f(\boldsymbol{v})$ が成り立つ。W における零ベクトルの性質（定理 1.1-3）により、$f(\mathbf{0}_V)$ は W の零ベクトルである $\mathbf{0}_W$ でなければならない。よって、$f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ が成り立つ。(証明終)

6.2　表現行列

線形写像の素晴らしい点の 1 つは、それを**行列**を使って表現できることです。これにより、抽象的な写像の操作を、具体的な行列計算に落とし込むことができます。

定義 6.4 (表現行列)**.** n 次元ベクトル空間 V の基底を $B_V = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ とし、m 次元ベクトル空間 W の基底を $B_W = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$ とする。線形写像 $f : V \to W$ の**表現行列** *(representation matrix)* $\boldsymbol{A}$ とは、各基底ベクトル $f(\boldsymbol{v}_j)$ の W の基底 B_W による線形結合の係数を列ベクトルとして並べた $m \times n$ 行列のことです。

具体的には、V の各基底ベクトル $\boldsymbol{v}_j$ の像 $f(\boldsymbol{v}_j)$ を W の基底 B_W で表すと、

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}_1) &= a_{11}\boldsymbol{w}_1 + a_{21}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{w}_m \\ f(\boldsymbol{v}_2) &= a_{12}\boldsymbol{w}_1 + a_{22}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{m2}\boldsymbol{w}_m \\ &\vdots \\ f(\boldsymbol{v}_n) &= a_{1n}\boldsymbol{w}_1 + a_{2n}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{w}_m \end{aligned}$$

このとき、これらの係数 a_{ij} を並べた行列が表現行列 $\boldsymbol{A}$ です。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

この行列 $\boldsymbol{A}$ の j 列目は、$f(\boldsymbol{v}_j)$ の B_W に関する座標ベクトルになります。

定理 6.5 (線形写像の行列による表現)**.** 線形写像 $f : V \to W$ の基底 B_V と B_W に関する表現行列を $\boldsymbol{A}$ とする。このとき、任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ を基底 B_V で表した座標ベクトルを $[\boldsymbol{x}]_{B_V}$ とし、$f(\boldsymbol{x}) \in W$ を基底 B_W で表した座標ベクトルを $[f(\boldsymbol{x})]_{B_W}$ とすると、以下の関係が成り立ちます。

$$[f(\boldsymbol{x})]_{B_W} = \boldsymbol{A}[\boldsymbol{x}]_{B_V}$$

証明 (アイデア)**.** この定理の証明は、線形写像の線形性（定義 6.1）と、基底によるベクトルの表現の一意性（定義 5.1 と定理 5.1）に基づいて行われます。ベクトル $\boldsymbol{x}$ を基底 B_V の線形結合で表し、それに f を作用させると、線形性により $f(\boldsymbol{x})$ が基底ベクトルの像 $f(\boldsymbol{v}_j)$ の線形結合になります。そして、これらの $f(\boldsymbol{v}_j)$ を基底 B_W で表し直すことで、結果的に行列の積の形にまとめられることを示します。

例 6.6 (2 次元平面上の回転写像の表現行列)**.** $\theta = \pi/2$ （90 度）の回転写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を考えます。標準基底 $B = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ を使います。

1. 基底ベクトル $\boldsymbol{e}_1$ の像を計算します: $f(\boldsymbol{e}_1) = f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cos(\pi/2) - 0\sin(\pi/2) \\ 1\sin(\pi/2) + 0\cos(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ これを基底 B で表すと、$0\boldsymbol{e}_1 + 1\boldsymbol{e}_2$ となるので、座標ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。
2. 基底ベクトル $\boldsymbol{e}_2$ の像を計算します: $f(\boldsymbol{e}_2) = f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cos(\pi/2) - 1\sin(\pi/2) \\ 0\sin(\pi/2) + 1\cos(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ これを基底 B で表すと, $-1\boldsymbol{e}_1 + 0\boldsymbol{e}_2$ となるので、座標ベクトルは $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ です。

これらの座標ベクトルを列として並べると、回転写像の表現行列 $\boldsymbol{A}$ が得られます。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

この行列を使えば、任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を回転させた結果を、単に行列の積で計算できます。

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

これは確かに、(x, y) を 90 度回転させた結果と一致します。

6.3 練習問題

問題 6.1. 次の写像が線形写像であるかどうかを判定しなさい。線形写像である場合は、その証明も簡潔に示しなさい。

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}$
2. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2$
3. $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $h \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ z \end{pmatrix}$

問題 6.2. 線形写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が、標準基底 $\left\{ \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ に対して、$f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$、$f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ を満たすとき、この線形写像の表現行列を求めなさい。また、この行列を使って $f \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ を計算しなさい。

問題 6.3. 線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ が、$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y-z \end{pmatrix}$ で与えられるとき、$\mathbb{R}^3$ の標準基底から $\mathbb{R}^2$ の標準基底への表現行列を求めなさい。