目次

1　ベクトルとその演算

1.1　ベクトルの定義

ベクトルとは、いくつかの実数を順序付けて並べたものです。これらの数を**成分**と呼びます。n 個の成分を持つベクトルを **n 次元ベクトル**といい、縦に並べた**列ベクトル**として表します。また、横に並べた**行ベクトル**として表すこともあります。

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad (v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R})$$

$$\boldsymbol{w} = (w_1 \ w_2 \ \ldots \ w_n) \quad (w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{R})$$

例 1. 2 次元ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ は、第 1 成分が 3、第 2 成分が 2 であることを示します。また、2 次元の行ベクトル $\boldsymbol{b} = (1 \ 5)$ は、第 1 成分が 1、第 2 成分が 5 であることを示します。

定義 1.1 (ベクトルの等しさ)**.** 2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ が等しいとは、それらの対応するすべての成分が等しいことをいいます。すなわち、$a_i = b_i$ がすべての $i = 1, \ldots, n$ について成り立つとき、$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ と定義します。

例 2. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ ならば、$x = 5$ かつ $y = -\ 3$ です。

定義 1.2 (零ベクトル)**.** すべての成分が 0 のベクトルを**零ベクトル**といい、$\mathbf{0}$ で表します。

例 3. 2 次元の零ベクトルは $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ベクトルの幾何学的解釈: ベクトルは、その代数的な定義（成分の羅列）とは別に、**空間内の点の位置や原点からその点へ向かう有向線分（矢印）**として直感的に理解することができます。**この矢印の長さがベクトルの大きさを、矢印の方向がベクトルの向きを表します。**

例 4. ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ は、原点 $(0, 0)$ から点 $(3, 2)$ へ向かう矢印として図示できます。この図示によって、ベクトルの持つ「移動」や「方向」といった意味合いを視覚的に捉えることができます。

1.2 ベクトルの演算の定義と性質

1.2.1 ベクトルの和（足し算）

定義 1.3 (ベクトルの和)**.** 同じ次元のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ の和 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ は、対応する成分同士を足し合わせることで定義されます。

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

例 5. $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

幾何学的解釈: ベクトルの和は、**「移動の連続」**として考えることができます。一方のベクトルの終点に他方のベクトルの始点を置いたとき、最初の始点から最後の終点への矢印が和になります（**三角形の法則**）。また、始点をそろえて平行四辺形を作ったときの対角線が和のベクトルになります（**平行四辺形の法則**）。

定理 1.4 (ベクトルの和の性質)**.** ベクトルの和は、以下の性質を持ちます。

1. **交換法則**: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$
2. **結合法則**: $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$
3. **零ベクトルの存在**: 任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して、$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$ となる零ベクトル $\boldsymbol{0}$ が存在する。
4. **逆ベクトルの存在**: 任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して、$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ となるベクトル $-\boldsymbol{a}$ が存在する。ここで、$-\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}$ の各成分に -1 を掛けたベクトル $\begin{pmatrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}$ です。

証明. ここでは、**交換法則**の証明を示します。その他の性質は、同様の方法で成分計算によって証明できます（一部は練習問題とします)。

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ とする。定義 1.3 より、$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$。実数の足し算は交換法則を満たす（$x + y = y + x$）ので、各成分について $a_i + b_i = b_i + a_i$ が成り立つ。よって、$\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ \vdots \\ b_n + a_n \end{pmatrix}$。再び定義 1.3 より、これは $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ に等しい。したがって、$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ が成り立つ。(証明終)

1.3　スカラー倍（定数倍）

定義 1.5 (ベクトルのスカラー倍)**.** ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ と実数 k（**スカラー**）の積 $k\boldsymbol{a}$ は、ベクトルの各成分に k を掛けることで定義されます。

$$k\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix}$$

例 6. $2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 3 \\ 2 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

幾何学的解釈: スカラー倍は、ベクトルの**長さを伸縮させたり**、**向きを反転させたり**する操作です。

- $k > 0$ なら、元のベクトルと同じ向きで長さが k 倍になります。
- $k < 0$ なら、元のベクトルと逆向きで長さが $|k|$ 倍になります。
- $k = 0$ なら、すべての成分が 0 になるため、**零ベクトル $\mathbf{0}$** になります。

定理 1.6 (スカラー倍の性質)**.** スカラー倍は、以下の性質を持ちます。

1. **結合法則**: $k(l\boldsymbol{a}) = (kl)\boldsymbol{a}$
2. **分配法則（スカラーについて）**: $(k + l)\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{a}$
3. **分配法則（ベクトルについて）**: $k(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}$
4. **単位元**: $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$
5. **零元**: $0\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$

証明. ここでは、**分配法則（ベクトルについて）**の証明を示します。その他の性質は、同様の方法で成分計算によって証明できます（一部は練習問題とします）。

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$ とする。定義 1.3 より、$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$。次に、定義 1.5 より、$k(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = k\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(a_1 + b_1) \\ \vdots \\ k(a_n + b_n) \end{pmatrix}$。実数の掛け算は分配法則を満たす（$x(y + z) = xy + xz$）ので、各成分について $k(a_i + b_i) = ka_i + kb_i$ が成り立つ。よって、$\begin{pmatrix} k(a_1 + b_1) \\ \vdots \\ k(a_n + b_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 + kb_1 \\ \vdots \\ ka_n + kb_n \end{pmatrix}$。この式は、ベクトルの和の定義（定義 1.3）により、$\begin{pmatrix} ka_1 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} kb_1 \\ \vdots \\ kb_n \end{pmatrix}$ と書ける。そして、定義 1.5 より、これは

$k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}$ に等しい。したがって、$k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}$ が成り立つ。(証明終)

1.4 ベクトルの差（引き算）

ベクトルの差 $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ は、ベクトルの和とスカラー倍（逆ベクトル）を組み合わせて定義されます。すなわち、$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$ です。これを成分で書くと、

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{pmatrix}$$

例 7. $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

幾何学的解釈: $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ は、$\boldsymbol{b}$ の終点から $\boldsymbol{a}$ の終点へ向かうベクトルと解釈できます。（これは $\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}$ という関係から理解できます。）

1.5 練習問題

問題 1.1. 次のベクトルを計算しなさい。

1. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき、$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$
2. $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ のとき、$\boldsymbol{c} - \boldsymbol{d}$
3. $\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ のとき、$\boldsymbol{e} + \boldsymbol{f}$
4. $k = 3,\ \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ のとき、$k\boldsymbol{a}$
5. $k = -2,\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき、$k\boldsymbol{b}$
6. $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ のとき、$2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$

問題 1.2 (定理の証明演習)**.** 定理 1.4 と定理 1.6 の残りの性質を、成分計算を用いて各自で証明しなさい。特に、以下の証明に挑戦してみましょう。

1. 定理 *1.4* の *2.* 結合法則: $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$
2. 定理 *1.6* の *2.* 分配法則（スカラーについて）: $(k + l)\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{a}$

2　ベクトルの大きさと内積

この章では、ベクトルの「長さ」を測る**大きさ（ノルム）**と、2 つのベクトルがどれくらい「同じ方向を向いているか」を示す**内積（ドット積）**について学びます。

2.1　ベクトルの大きさ（ノルム）

ベクトルの**大きさ**は、そのベクトルの「長さ」を表す量です。数学的には**ノルム**とも呼ばれ、ベクトル空間における距離の概念の基礎となります。

定義 2.1 (ベクトルの大きさ - ノルム)**.** n 次元ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ の大きさ（ノルム）は、記号 $|\boldsymbol{a}|$ または $||\boldsymbol{a}||$ で表され、各成分の 2 乗の和の正の平方根として定義されます。

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

幾何学的解釈: この定義は、2 次元や 3 次元の空間では、**三平方の定理（ピタゴラスの定理）**を一般化したものです。

例 1.

- $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ の大きさ:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

これは、直角三角形の斜辺の長さと一致します。

- $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ の大きさ:

$$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

2.2　単位ベクトル

定義 2.2 (単位ベクトル)**.** 大きさが 1 であるベクトルを**単位ベクトル**と定義します。

定理 2.3 (単位ベクトルの正規化)**.** 零ベクトルでない任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して、$\boldsymbol{a}$ と同じ向きを持つ単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ は、$\boldsymbol{a}$ をその大きさで割ることで得られます。この操作を**正規化**と呼びます。

$$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$$

証明. $|\boldsymbol{e}| = \left|\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}\right|$ であり, スカラー倍の性質（定理 1.6 の $|k\boldsymbol{v}| = |k||\boldsymbol{v}|$ に相当する性質）より、$|\boldsymbol{e}| = \left|\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\right| |\boldsymbol{a}|$。$|\boldsymbol{a}|$ は大きさであり常に正の値なので、$\left|\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\right| = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}$ です。よって、$|\boldsymbol{e}| = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}| = 1$ となり、確かに単位ベクトルです。(証明終)

例 2. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ と同じ向きの単位ベクトルを求めます。まず $|\boldsymbol{a}| = 5$ です。

$$\boldsymbol{e} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

この $\boldsymbol{e}$ の大きさは $\sqrt{(3/5)^2 + (4/5)^2} = \sqrt{9/25 + 16/25} = \sqrt{25/25} = \sqrt{1} = 1$ となり、定義通り大きさが 1 です。

2.3 内積（ドット積）

内積は、2 つのベクトルから**スカラー（数）**を求める計算です。ベクトル同士の「掛け算」と考えることができますが、結果がベクトルではなく数になる点が重要です。

定義 2.4 (内積 - 成分による計算)**.** n 次元ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ の**内積（またはドット積）**は、記号 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ で表され、対応する成分同士を掛けて全て足し合わせることで定義されます。

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

例 3.

- $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ の内積:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (3 \times 1) + (2 \times 4) = 3 + 8 = 11$$

- $\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の内積:

$$\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{f} = (1 \times 5) + (0 \times 2) + ((-3) \times 1) = 5 + 0 - 3 = 2$$

2.4 内積の性質と幾何学的意味

内積は、2 つのベクトルのなす角と密接な関係があります。

定理 2.5 (コーシー＝シュワルツの不等式)**.** 任意の n 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に対して、以下の不等式が成り立つ。

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 \leq |\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{b}|^2$$

等号が成り立つのは、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が線形従属（一方が他方のスカラー倍で表せる、すなわち平行である）である場合に限る。

証明. 実数 t を用いてベクトル $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ を考えます。ベクトルの大きさは常に非負なので、$|\boldsymbol{v}|^2 \geq 0$ です。

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{v}|^2 &= |\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}) \\ &= \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) + t(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}) + t^2(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}) \\ &= |\boldsymbol{a}|^2 + 2t(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) + t^2|\boldsymbol{b}|^2\end{aligned}$$

この式は t に関する二次関数 $f(t) = |\boldsymbol{b}|^2t^2 + 2(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})t + |\boldsymbol{a}|^2$ であり、常に $f(t) \geq 0$ を満たします。これは、t に関する二次方程式 $f(t) = 0$ が実数解を持たないか、または重解を持つことを意味します。したがって、判別式 D が $D \leq 0$ でなければなりません。

$$\begin{aligned}D &= (2(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}))^2 - 4|\boldsymbol{b}|^2|\boldsymbol{a}|^2 \\ &= 4(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 - 4|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 \leq 0 \\ 4(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 &\leq 4|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 \\ (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 &\leq |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\end{aligned}$$

等号が成り立つのは、判別式が 0 になる場合、すなわち $\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ となる実数 t が存在する場合であり、これは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が線形従属であることを意味します。(証明終)

定義 2.6. 零ベクトルでない 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ は、コーシー＝シュワルツの不等式（定理 2.5）によって $\left|\frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\right| \leq 1$ が保証されるため、その値を $\cos\theta$ として、以下のように定義されます。

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

定理 2.7 (内積とベクトルのなす角の関係)**.** 零ベクトルでない 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすると、内積は次の式で表すことができる。

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

証明. 定義 2.6 の $\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$ の両辺に $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ を掛けることで、直ちに得られる。

幾何学的解釈（*2* 次元の余弦定理との整合性）: この定義は、2 次元における直感的な幾何学（余弦定理）と矛盾しません。実際、2 次元のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して、これらのベクトルと原点で構成される三角形に余弦定理を適用すると、定義 2.4 の成分計算による内積が $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ と一致することが確認できます。

定理 2.8 (ベクトルの直交条件)**.** 零ベクトルでない 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交する（垂直に交わる）ための必要十分条件は、それらの内積が 0 であることです。

$$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$$

証明. 定理 2.7 より $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ です。

- **($\Rightarrow$) $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ ならば $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ であることの証明:**
  $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するとき、それらのなす角は $\theta = \pi/2$ です。このとき $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ となるため、$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \times 0 = 0$ が成り立ちます。
- **($\Leftarrow$) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ ならば $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ であることの証明:**
  $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ と仮定します。零ベクトルでないと仮定しているので、$|\boldsymbol{a}| \neq 0$ かつ $|\boldsymbol{b}| \neq 0$ です。定理 2.7 の式 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ に代入すると、

$$0 = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

$|\boldsymbol{a}| \neq 0$ かつ $|\boldsymbol{b}| \neq 0$ なので、$\cos\theta = 0$ でなければなりません。$0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲で $\cos\theta = 0$ となるのは $\theta = \pi/2$ のときのみです。したがって、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は直交します。

(証明終)

例 4. $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ が直交するかを確認します。

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (2 \times 1) + ((-1) \times 2) = 2 - 2 = 0$$

内積が 0 なので、定理 2.8 により $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ は直交します。

2.5 練習問題

問題 2.1. 次のベクトルの大きさ（ノルム）を求めなさい。

1. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$
2. $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

問題 2.2. 次の内積を求めなさい。

1. $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$
2. $\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

問題 2.3. 次の 2 つのベクトルは直交するかどうか、内積を計算して答えなさい。

1. $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$
2. $\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

問題 2.4. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と同じ向きを持つ単位ベクトルを求めなさい。

3　行列とその演算

この章では、線形代数におけるもう一つの主役である**行列**の定義と、基本的な演算について学びます。行列は、複数のベクトルをまとめて扱ったり、ベクトルの変換を表現したりするのに使われます。

3.1　行列の定義

行列とは、数や文字を長方形に並べたものです。

定義 3.1 (行列)**.** m 行 n 列の行列 $\boldsymbol{A}$ は、実数の要素 a_{ij} を m 個の行と n 個の列に並べたもので、次のように表されます。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ここで、a_{ij} は行列 $\boldsymbol{A}$ の i 行 j 列目の要素（成分）を表します。行列 $\boldsymbol{A}$ をその要素を用いて、単に (a_{ij}) や $(a_{ij})_{m\times n}$ と略記することもあります。m を**行数**、n を**列数**と呼び、行列のサイズを $m \times n$ 行列と表します。

例 1.

- 2×3 行列: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ （2 行 3 列）
- 3×1 行列: $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ （これは 3 次元の列ベクトルと見なせます）
- 1×2 行列: $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 10 & 11 \end{pmatrix}$ （これは 2 次元の行ベクトルと見なせます）

定義 3.2 (行列の等しさ)**.** 2 つの $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ と $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ が**等しい**とは、それらの対応するすべての要素が等しいことをいいます。すなわち、$a_{ij} = b_{ij}$ がすべての $i = 1, \ldots, m$ および $j = 1, \ldots, n$ について成り立つとき、$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ と定義します。

例 2. $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ならば、$x = 1,\ y = 2,\ z = 3,\ w = 4$ です。

定義 3.3 (零行列)**.** すべての要素が 0 である $m \times n$ 行列を**零行列**といい、$\boldsymbol{O}$（または $\boldsymbol{O}_{m\times n}$）で表します。

例 3. 2×2 零行列: $\boldsymbol{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3.2　行列の基本的な演算と性質

行列には、ベクトルの演算と同様に、和、スカラー倍、そして特有の積（掛け算）が定義されます。

3.2.1 行列の和（足し算）

定義 3.4 (行列の和)**.** 同じサイズの 2 つの行列 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ と $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ の和 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ は、対応する要素同士を足し合わせることで定義されます。和の行列の (i, j) 要素は $a_{ij} + b_{ij}$ です。

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (a_{ij} + b_{ij})$$

注意. 行列の和は、同じ行数と同じ列数を持つ行列同士でしか定義できません。

例 4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$

定理 3.5 (行列の和の性質)**.** 行列の和は、ベクトルの和と同様に以下の性質を持ちます。

1. **交換法則:** $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$
2. **結合法則:** $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$
3. **零行列の存在:** 任意の行列 $\boldsymbol{A}$ に対して、$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{O} = \boldsymbol{A}$ となる零行列 $\boldsymbol{O}$ が存在する。
4. **逆行列（加法逆元）の存在:** 任意の行列 $\boldsymbol{A}$ に対して、$\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$ となる行列 $-\boldsymbol{A}$ が存在する。ここで、$-\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{A}$ の各要素に -1 を掛けた行列 $(-a_{ij})$ です。

証明. ここでは、**交換法則**の証明を示します。その他の性質は、同様の方法で要素計算によって証明できます（一部は練習問題とします）。

$\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ とする。定義 3.4 より、$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ の (i, j) 要素は $a_{ij} + b_{ij}$ である。実数の足し算は交換法則を満たす（$x + y = y + x$）ので、$a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$ がすべての i, j について成り立つ。よって、$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ の (i, j) 要素は $\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$ の (i, j) 要素と等しい。定義 3.2 より、$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$ が成り立つ。(証明終)

3.2.2 行列のスカラー倍（定数倍）と行列の差

定義 3.6 (行列のスカラー倍)**.** 行列 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ と実数 k（スカラー）の積 $k\boldsymbol{A}$ は、行列の各要素に k を掛けることで定義されます。積の行列の (i, j) 要素は ka_{ij} です。

$$k\boldsymbol{A} = (ka_{ij})$$

例 5. $2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 & 2 \times 2 \\ 2 \times 3 & 2 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

定理 3.7 (行列のスカラー倍の性質)**.** 行列のスカラー倍は、以下の性質を持ちます。

1. **結合法則:** $k(l\boldsymbol{A}) = (kl)\boldsymbol{A}$
2. **分配法則:** $(k + l)\boldsymbol{A} = k\boldsymbol{A} + l\boldsymbol{A}$ および $k(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = k\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{B}$
3. **単位元:** $1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$
4. **零元:** $0\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$, $k\boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}$

証明. ここでは、**分配法則（行列について）** の証明を示します。その他の性質は、同様の方法で要素計算によって証明できます（一部は練習問題とします）。

$\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$, $k \in \mathbb{R}$ とする。定義 3.4 より、$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ の (i,j) 要素は $a_{ij} + b_{ij}$ である。定義 3.6 より、$k(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})$ の (i,j) 要素は $k(a_{ij} + b_{ij})$ である。実数の掛け算は分配法則を満たすので、$k(a_{ij} + b_{ij}) = ka_{ij} + kb_{ij}$ が成り立つ。一方、$k\boldsymbol{A}$ の (i,j) 要素は ka_{ij}、 $k\boldsymbol{B}$ の (i,j) 要素は kb_{ij} である。したがって、$k\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{B}$ の (i,j) 要素は $ka_{ij} + kb_{ij}$ である。両者の (i,j) 要素が等しいため、定義 3.2 より $k(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = k\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{B}$ が成り立つ。(証明終)

行列の差 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ は、行列の和とスカラー倍（加法逆元）を組み合わせて定義されます。すなわち、$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B})$ です。これを要素で書くと、$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = (a_{ij} - b_{ij})$ です。

例 6. $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-1 & 6-2 \\ 7-3 & 8-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

3.2.3 行列の積（掛け算）

行列の積は、これまでの和やスカラー倍とは異なり、少し複雑な定義を持ちます。しかし、その定義には深い意味があり、線形変換の合成などを自然に表現できます。

定義 3.8 (行列の積)**.** $m \times l$ 行列 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ と $l \times n$ 行列 $\boldsymbol{B} = (b_{jk})$ の積 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ は、$m \times n$ 行列として定義されます。積の行列 $\boldsymbol{C}$ の (i,k) 要素 c_{ik} は、$\boldsymbol{A}$ の i 行目の要素と $\boldsymbol{B}$ の k 列目の要素をそれぞれ掛け合わせて足し合わせたものです。

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{l} a_{ij} b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{il}b_{lk}$$

注意. 行列の積 $\boldsymbol{AB}$ は、$\boldsymbol{A}$ の列数と $\boldsymbol{B}$ の行数が一致する場合にのみ定義されます。結果として得られる行列の行数は $\boldsymbol{A}$ の行数、列数は $\boldsymbol{B}$ の列数になります。

$$(\mathrm{m} \times \underline{\mathrm{l}}) \times (\underline{\mathrm{l}} \times \mathrm{n}) = (\mathrm{m} \times \mathrm{n})$$

例 7. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (2×2 行列) と $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ (2×2 行列) の積を計算してみましょう。

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$
$$c_{11} = (1 \times 5) + (2 \times 7) = 5 + 14 = 19$$
$$c_{12} = (1 \times 6) + (2 \times 8) = 6 + 16 = 22$$
$$c_{21} = (3 \times 5) + (4 \times 7) = 15 + 28 = 43$$
$$c_{22} = (3 \times 6) + (4 \times 8) = 18 + 32 = 50$$

よって、

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

定理 3.9 (行列の積の性質)**.** 行列の積は、以下の性質を持ちます。

1. 結合法則: $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$（積が定義される限り、計算の順序は問わない）
2. 分配法則: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$ および $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BC}$（和と積の間には分配法則が成り立つ）

3. スカラー倍との結合法則: $k(\boldsymbol{AB}) = (k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$（スカラー倍は積のどこに適用しても結果は同じ）

証明. ここでは、分配法則の一部である $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$ の証明を示します。その他の性質も同様に、積の定義と実数の演算法則を用いて要素ごとに証明できます（一部は練習問題とします)。

$\boldsymbol{A}$ を $m \times l$ 行列、$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{C}$ を $l \times n$ 行列とする。$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$ の (j,k) 要素は $b_{jk}+c_{jk}$ である（定義 3.4)。積 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$ の (i,k) 要素を考えると、定義 3.8 より、

$$(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}))_{ik} = \sum_{j=1}^{l} a_{ij}(b_{jk}+c_{jk}) = \sum_{j=1}^{l} a_{ij}b_{jk} + \sum_{j=1}^{l} a_{ij}c_{jk}$$

右辺の各項は、それぞれ $\boldsymbol{AB}$ の (i,k) 要素と $\boldsymbol{AC}$ の (i,k) 要素の定義（定義 3.8）に他ならない。したがって、

$$(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}))_{ik} = (\boldsymbol{AB})_{ik} + (\boldsymbol{AC})_{ik}$$

これは、行列の和の定義（定義 3.4）により、$(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC})$ の (i,k) 要素と等しい。すべての要素が等しいため、定義 3.2 より $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$ が成り立つ。(証明終)

注意. 行列の積は、一般に**交換法則が成り立ちません**。つまり、$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$ であることがほとんどです。

例 8 (交換法則が成り立たない例)**.** 例 7 で $\boldsymbol{BA}$ を計算してみましょう。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{BA} &= \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ c'_{11} &= (5 \times 1) + (6 \times 3) = 5 + 18 = 23 \\ c'_{12} &= (5 \times 2) + (6 \times 4) = 10 + 24 = 34 \\ c'_{21} &= (7 \times 1) + (8 \times 3) = 7 + 24 = 31 \\ c'_{22} &= (7 \times 2) + (8 \times 4) = 14 + 32 = 46 \end{aligned}$$

よって、

$$\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

先ほどの $\boldsymbol{AB}$ とは明らかに異なるため、$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$ です。

3.2.4 行列の基本変形

行列の**基本変形**は、行列に対して行われる基本的な操作のことで、行基本変形と列基本変形があります。これらの操作は、行列の多くの重要な性質（例：連立一次方程式の解、階数、逆行列、行列式）を保ちながら、行列をより扱いやすい形に変換するために用いられます。

定義 3.10 (行基本変形)**.** 行列に行われる以下の 3 種類の操作を**行基本変形**と呼びます。

1. ある行を c 倍する: ある行のすべての要素を、ゼロではないスカラー c で掛け合わせる。$(R_i \to cR_i,\ c \neq 0)$
2. *2* つの行を入れ替える: 2 つの行の位置を交換する。$(R_i \leftrightarrow R_j)$
3. ある行に別の行の c 倍を加える: ある行の各要素に、別の行の対応する要素の c 倍を加える。$(R_i \to R_i + cR_j)$

例 9. 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ に対して、以下の行基本変形を行ってみましょう。

1. 1 行目を 2 倍する:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{2R_1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$
2. 1 行目と 2 行目を入れ替える:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$
3. 2 行目に 1 行目の-4 倍を加える:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 4R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4-4(1) & 5-4(2) & 6-4(3) \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

定義 3.11 (列基本変形)**.** 行列に行われる以下の 3 種類の操作を**列基本変形**と呼びます。

1. **ある列を c 倍する**: ある列のすべての要素を、ゼロではないスカラー c で掛け合わせる。($C_j \to cC_j,\ c \neq 0$)
2. ***2* つの列を入れ替える**: 2 つの列の位置を交換する。($C_j \leftrightarrow C_k$)
3. **ある列に別の列の c 倍を加える**: ある列の各要素に、別の列の対応する要素の c 倍を加える。($C_j \to C_j + cC_k$)

例 10. 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ に対して、以下の列基本変形を行ってみましょう。

1. 1 列目を 2 倍する:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{2C_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$
2. 1 列目と 2 列目を入れ替える:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$
3. 2 列目に 1 列目の-2 倍を加える:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \to C_2 - 2C_1} \begin{pmatrix} 1 & 2-2(1) & 3 \\ 4 & 5-2(4) & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

注意. 基本変形は、行列の**行空間**や**列空間**、**階数**といった重要な特性を変化させません。特に、行基本変形は連立一次方程式の解集合を変化させないため、ガウスの消去法における主要なツールとなります。また、行列式の計算（第 8 章）や逆行列の導出（後の章）においても不可欠な操作です。

3.3 特殊な行列

行列の中には、特に重要な性質を持つものがあります。

定義 3.12 (正方行列)**.** 行数と列数が等しい行列を**正方行列**と呼びます。$n \times n$ 行列の場合、「n 次正方行列」といいます。

例 11. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ は 2 次正方行列です。

定義 3.13 (転置行列)**.** $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ の**転置行列** $\boldsymbol{A}^T$（または $\boldsymbol{A}'$）は、$\boldsymbol{A}$ の行と列を入れ替えることによって得られる $n \times m$ 行列と定義されます。すなわち、$\boldsymbol{A}^T$ の (i, j) 要素は $\boldsymbol{A}$ の (j, i) 要素に等しい。

$$\boldsymbol{A}^T = (a_{ji})$$

例 12. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ の転置行列を求めなさい。

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

定義 3.14 (三角行列)**.** 正方行列 $\boldsymbol{A}$ のうち、以下のいずれかの条件を満たすものを**三角行列**と呼びます。

1. **上三角行列**: 対角成分より下のすべての成分が 0 である行列。すなわち、$i > j$ のとき $a_{ij} = 0$。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2. **下三角行列**: 対角成分より上のすべての成分が 0 である行列。すなわち、$i < j$ のとき $a_{ij} = 0$。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

例 13. 以下の行列が上三角行列と下三角行列の例です。

- 上三角行列: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
- 下三角行列: $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

定義 3.15 (単位行列)**.** 正方行列であり、対角成分（$i = j$ の要素）がすべて 1 で、その他の成分がすべて 0 である行列を**単位行列**と呼び、$\boldsymbol{I}$（または $\boldsymbol{I}_n$）で表します。

$$\boldsymbol{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

定理 3.16 (単位行列の性質)**.** 任意の $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ に対して、以下の関係が成り立ちます。

1. $\boldsymbol{I}_m \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$
2. $\boldsymbol{A} \boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{A}$

これは、単位行列が数の掛け算における 1 のような役割を果たすことを意味します。

証明. ここでは、$\boldsymbol{I}_m \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ の証明を示します。

$\boldsymbol{I}_m$ を $m \times m$ 単位行列、$\boldsymbol{A}$ を $m \times n$ 行列とする。積 $\boldsymbol{I}_m \boldsymbol{A}$ の (i, k) 要素を考える。定義 3.8 より、

$$(\boldsymbol{I}_m \boldsymbol{A})_{ik} = \sum_{j=1}^{m} (\boldsymbol{I}_m)_{ij} a_{jk}$$

ここで、単位行列の定義（定義 3.15）より、$(\boldsymbol{I}_m)_{ij}$ は $i = j$ のとき 1、それ以外のとき 0 である。したがって、和の中の j について、 $j = i$ の項のみが残り、それ以外の項は 0 になる。

$$\sum_{j=1}^{m} (\boldsymbol{I}_m)_{ij} a_{jk} = (\boldsymbol{I}_m)_{ii} a_{ik} = 1 \cdot a_{ik} = a_{ik}$$

これは行列 $\boldsymbol{A}$ の (i, k) 要素に等しい。すべての要素が等しいため、定義 3.2 より $\boldsymbol{I}_m \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ が成り立つ。(証明終)

3.4 練習問題

問題 3.1. 次の行列を計算しなさい。

1. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ のとき、$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$
2. $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ のとき、$\boldsymbol{C} - \boldsymbol{D}$

問題 3.2. 次のスカラー倍を計算しなさい。

1. $k = 3,\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ のとき、$k\boldsymbol{A}$
2. $k = -0.5,\ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 4 \\ -2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ のとき、$k\boldsymbol{B}$

問題 3.3. $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ とするとき、次の行列を計算しなさい。

1. $2\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}$
2. $\boldsymbol{X} - 3\boldsymbol{Y}$

問題 3.4. 次の行列の積を計算しなさい。

1. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき、$\boldsymbol{AB}$ と $\boldsymbol{BA}$

2. $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ のとき、$\boldsymbol{CD}$ と $\boldsymbol{DC}$

3. $\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ のとき、$\boldsymbol{EF}$

問題 3.5 (定理の証明演習)**.** 定理 3.5、定理 3.7、定理 3.9、定理 3.16 の残りの性質を、要素計算を用いて各自で証明しなさい。

4　線形結合と線形独立・従属

これまでの章では、具体的な数の並びとしてのベクトルとその計算、そして行列の基本的な性質を学びました。これらは線形代数の「計算」の基盤です。この章では、これらの計算が成り立つ「舞台」である**ベクトル空間**について定義し、その上で線形代数の「考え方」の核心に迫る概念である**線形結合**、そしてそれに続く**線形独立**と**線形従属**を深掘りします。

4.1　ベクトル空間の定義

ベクトル空間は、数学において特定の性質を満たすベクトルの集合のことです。線形代数の概念が成り立つ「舞台」となります。

定義 4.1 (ベクトル空間)**.** 集合 V が**ベクトル空間（または線形空間）である**とは、以下の条件を満たすときに言います。

1. V の任意の 2 つの要素（ベクトル）$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対して、和 $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ が定義されており、その結果も V の要素である。（V は**加法について閉じている**）
2. V の任意の要素（ベクトル）$\boldsymbol{u}$ と、実数（スカラー）k に対して、スカラー倍 $k\boldsymbol{u}$ が定義されており、その結果も V の要素である。（V は**スカラー倍について閉じている**）

さらに、これらの演算が以下の 8 つの**公理**を満たさなければなりません。
加法に関する公理:

- (A1) **交換法則:** $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$
- (A2) **結合法則:** $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$
- (A3) **零ベクトルの存在:** V の任意の要素 $\boldsymbol{u}$ に対して、$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{u}$ となる要素 $\boldsymbol{0}$（零ベクトル）が V の中に存在する。
- (A4) **逆ベクトルの存在:** V の任意の要素 $\boldsymbol{u}$ に対して、$\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=\boldsymbol{0}$ となる要素 $-\boldsymbol{u}$（逆ベクトル）が V の中に存在する。

スカラー倍に関する公理:

- (S1) **結合法則:** $k(l\boldsymbol{u})=(kl)\boldsymbol{u}$
- (S2) **分配法則（スカラーについて）:** $(k+l)\boldsymbol{u}=k\boldsymbol{u}+l\boldsymbol{u}$
- (S3) **分配法則（ベクトルについて）:** $k(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=k\boldsymbol{u}+k\boldsymbol{v}$
- (S4) **単位元:** $1\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$ （ここで 1 は実数 1）

例 1.
- **n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$:** これまで扱ってきた数の羅列の集合は、これらの公理を全て満たすため、最も基本的なベクトル空間です。
- **多項式の集合:** 例えば、2 次以下の多項式 $P(x)=ax^2+bx+c$ 全体の集合もベクトル空間になります。
- **行列の集合:** 例えば、2×2 行列全体の集合もベクトル空間です。

4.2　線形結合

線形結合は、複数のベクトルを足し合わせたり、スカラー倍したりする操作を組み合わせたものです。これまでに学んだベクトルの基本演算の応用と言えます。

定義 4.2 (線形結合)**.** n 次元ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ と、スカラー $c_1, c_2, \ldots, c_k$ が与えられたとき、これらのベクトルとスカラーを用いて作られる以下の式を、**線形結合**と呼びます。

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k$$

例 2. 2 つのベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ を考えます。スカラー $c_1 = 2,\ c_2 = -1$ を用いた線形結合は、

$$2\boldsymbol{v}_1 + (-1)\boldsymbol{v}_2 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

となります。

定義 4.3 (生成する空間 / 線形包)**.** ベクトルの集合 $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ のすべての可能な線形結合によって形成されるベクトル全体の集合を、S によって**生成される空間**と呼び、$\mathrm{span}(S)$ または $\mathrm{span}\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ と表記します。これは**線形包**とも呼ばれます。

幾何学的解釈:

- 1 つの零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{v}_1$ の線形結合 $c_1\boldsymbol{v}_1$ は、原点を通る直線を表します。
- 2 つの平行でない零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の線形結合 $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2$ は、原点を通る平面を表します。

例 3. $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ によって生成される空間 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ は、2 次元平面上のすべてのベクトルを表現できます。これは、任意のベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と書けるからです。

4.3　線形独立と線形従属

線形結合の概念を用いることで、ベクトルの集合が持つ「冗長性」を数学的に定義できます。これが**線形独立**と**線形従属**の概念です。

定義 4.4 (線形独立)**.** ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ が**線形独立である**とは、以下の条件を満たすときに言います。

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k = \mathbf{0} \text{ ならば } \forall i.c_i = 0$$

定義 4.5 (線形従属)**.** ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ が**線形従属である**とは、線形独立ではない、つまり，以下の条件を満たすときに言います。

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k = \mathbf{0} \text{ かつ } \exists i.c_i \neq 0$$

幾何学的解釈:

- **線形独立**: どのベクトルも、他のベクトルの線形結合で表せない（つまり、集合内のベクトルがそれぞれ新しい「方向」を持っている）。
- **線形従属**: 少なくとも 1 つのベクトルが、他のベクトルの線形結合で表せる（つまり、集合内のベクトルに「冗長性」がある）。例えば、2 つのベクトルが線形従属なら、それらは平行です。3 つのベクトルが線形従属なら、それらは同一平面上にあるか、あるいは互いに平行です。

定理 4.6 (線形従属の判定条件)**.** ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ が線形従属であることと、集合内の少なくとも 1 つのベクトルが他のベクトルの線形結合で表せることは同値である。

証明.

- *(⇒)* **線形従属ならば、少なくとも** *1* **つのベクトルが他のベクトルの線形結合で表せることの証明**:
  集合が線形従属であると仮定します。定義 4.5 より、

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0} \text{ かつ } \exists i.c_i \neq 0$$

  が成り立つようなスカラー $c_1, \ldots, c_k$ が存在します。このとき、少なくとも 1 つの $c_m \neq 0$ である m が存在します。その $c_m\boldsymbol{v}_m$ の項を左辺に残し、他の項を右辺に移項すると、

$$c_m\boldsymbol{v}_m = -c_1\boldsymbol{v}_1 - \cdots - c_{m-1}\boldsymbol{v}_{m-1} - c_{m+1}\boldsymbol{v}_{m+1} - \cdots - c_k\boldsymbol{v}_k$$

  $c_m \neq 0$ なので、両辺を c_m で割ることができます。

$$\boldsymbol{v}_m = -\frac{c_1}{c_m}\boldsymbol{v}_1 - \cdots - \frac{c_{m-1}}{c_m}\boldsymbol{v}_{m-1} - \frac{c_{m+1}}{c_m}\boldsymbol{v}_{m+1} - \cdots - \frac{c_k}{c_m}\boldsymbol{v}_k$$

  これは、$\boldsymbol{v}_m$ が他のベクトル $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{m-1}, \boldsymbol{v}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ の線形結合で表せることを示しています。
- *(⇐)* **少なくとも** *1* **つのベクトルが他のベクトルの線形結合で表せるならば、線形従属であることの証明**:
  集合内の少なくとも 1 つのベクトル、例えば $\boldsymbol{v}_m$ が、他のベクトルの線形結合で表せると仮定します。

$$\boldsymbol{v}_m = d_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + d_{m-1}\boldsymbol{v}_{m-1} + d_{m+1}\boldsymbol{v}_{m+1} + \cdots + d_k\boldsymbol{v}_k$$

  ここで d_i はスカラーです。この式を移項すると、

$$d_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + d_{m-1}\boldsymbol{v}_{m-1} + (-1)\boldsymbol{v}_m + d_{m+1}\boldsymbol{v}_{m+1} + \cdots + d_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$$

  この線形結合において、$\boldsymbol{v}_m$ の係数は -1 であり、0 ではありません。したがって、定義 4.5 により、このベクトルの集合は線形従属であると言えます。

(証明終)

例 4 (線形独立・従属の判定)**.**

1. **線形独立の例**:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   $c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が成り立つのは $c_1 = 0$ かつ $c_2 = 0$ の場合に限られるため、$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ は線形独立です。

2. 線形従属の例:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

この 2 つのベクトルは $\boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{v}_1$ という関係があります。これを移項すると $2\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ となります。この線形結合において、$\boldsymbol{v}_1$ の係数は $2 \neq 0$、$\boldsymbol{v}_2$ の係数は $-1 \neq 0$ です。すべての係数が 0 ではないにもかかわらず零ベクトルとなる線形結合が存在するため、$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ は線形従属です。

4.4 練習問題

問題 4.1. 次の問いに答えなさい。

1. $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ を、$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の線形結合で表しなさい。
2. $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ を、$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ の線形結合で表しなさい。(もし表せない場合はその理由も教えてください。)

問題 4.2. 次のベクトルの集合が線形独立であるか、線形従属であるかを判定しなさい。

1. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$
2. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
3. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
   (ヒント:2 次元空間では、2 つより多いベクトルは常に線形従属になります。その理由を考えてみましょう。)

5　基底と次元

この章では、ベクトル空間の構造を理解するための核心的な概念である**基底**と**次元**について学びます。基底は、ベクトル空間内の全てのベクトルを表現するための「最小限の構成要素」であり、次元はその空間の「大きさ」を示します。

5.1　基底（Basis）

これまでに、いくつかのベクトルを線形結合することで、様々なベクトルを表現できることを学びました。基底は、この「表現」を最も効率的に行うための特別なベクトルの集まりです。

定義 5.1 (基底)**.** ベクトル空間 V のベクトルの集まり $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が**基底である**とは、以下の 2 つの条件を満たすときに言います。

1. B が**線形独立である**。
2. B が V を**生成する**（つまり、$\mathrm{span}(B) = V$ である）。

幾何学的解釈:

- **線形独立であること**: 基底を構成するベクトルは、それぞれが新しい「方向」を示しており、どれも他のベクトルの組み合わせで表すことができません。これにより、無駄なベクトルが含まれていないことが保証されます。
- **生成すること**: 基底を構成するベクトルを組み合わせることで、そのベクトル空間内の**すべての**ベクトルを表現できます。これは、空間内のどこへでも「到達できる」ことを意味します。

簡単に言えば、基底とは「**最小限の数のベクトルで、その空間のあらゆるベクトルを表せる集まり**」です。

定義 5.2 (標準基底)**.** n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ において、各成分の一つだけが 1 で他が全て 0 であるベクトルからなる基底を**標準基底**と呼びます。

例 1.

- **2 次元空間 $\mathbb{R}^2$ の標準基底**: $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

  この集まり $B = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ は $\mathbb{R}^2$ の基底です。
  - **線形独立性**: $c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 = \mathbf{0}$ ならば $c_1 = 0,\ c_2 = 0$ の場合に限られるため、線形独立です。
  - **生成性**: 任意の 2 次元ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ は $x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$ と書けるため、$\mathbb{R}^2$ を生成します。
- **$\mathbb{R}^2$ の別の基底の例**: $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

  この集まり $B' = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ も $\mathbb{R}^2$ の基底です。
  - **線形独立性**: $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$ を解くと $c_1 = 0,\ c_2 = 0$ しか解がないため、線形独立です。
  - **生成性**: 任意の $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ に対して $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{x}$ を満たす $c_1,\ c_2$ が一意に存在するため、生成します。

定理 5.3 (基底の存在と一意性)**.** 任意の有限次元ベクトル空間には基底が存在します。また、あるベクトル空間の基底を構成するベクトルの個数は、どの基底を選んだとしても常に同じです。

証明 (アイデア（個数の一意性）)**.** もし、あるベクトル空間に、異なる個数のベクトルを持つ 2 つの基底 $B_1 = \{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m\}$ と $B_2 = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ が存在すると仮定します。このとき、$m \neq n$ だとすると、例えば $m < n$ の場合、基底 B_1 のベクトルを使って基底 B_2 のベクトルを全て線形結合で表そうとすると、ある段階で線形従属な関係が生じてしまい、矛盾が生じることを示します。これにより、$m = n$ でなければならない、と結論づけます。

定義 5.4 (座標ベクトル)**.** ベクトル空間 V の基底を $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ とする。任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ は、基底の線形結合として一意に表せる（定理 7.11 参照)。すなわち、

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$$

このときの係数 $c_1, c_2, \dots, c_n$ を順に並べた列ベクトル $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ を、基底 B に関するベクトル $\boldsymbol{x}$ の**座標ベクトル**と呼び、$[\boldsymbol{x}]_B$ と表記する。

例 2 (座標ベクトルの例)**.** 2 次元空間 $\mathbb{R}^2$ の標準基底 $B = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ を考える。ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ は、

$$\boldsymbol{x} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2$$

と表せる。したがって、基底 B に関するベクトル $\boldsymbol{x}$ の座標ベクトルは

$$[\boldsymbol{x}]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

である。次に、$\mathbb{R}^2$ の別の基底 $B' = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ を考える。同じベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ をこの基底 B' の線形結合で表すことを考える。

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

これを成分ごとに書くと、$3 = c_1 - c_2,\ -2 = c_1 + c_2$。これらの連立方程式を解くと、$c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = -\frac{5}{2}$ となる。したがって、基底 B' に関するベクトル $\boldsymbol{x}$ の座標ベクトルは

$$[\boldsymbol{x}]_{B'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

である。この例から、座標ベクトルが選択された基底に依存することがわかる。

5.2 次元（Dimension）

基底を構成するベクトルの個数が常に同じであるという定理 5.3 の性質は、ベクトル空間の「大きさ」を定量的に表すことを可能にします。

定義 5.5 (次元)**.** ベクトル空間 V の**次元** *(dimension)* は、その基底を構成するベクトルの個数として定義されます。V の次元は $\dim(V)$ と表記されます。

例 3.

- *2* **次元空間** $\mathbb{R}^2$: 標準基底 $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ は 2 つのベクトルからなるので、$\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ です。
- *3* **次元空間** $\mathbb{R}^3$: 標準基底 $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ は 3 つのベクトルからなるので、$\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ です。
- n **次元空間** $\mathbb{R}^n$: 標準基底は n 個のベクトルからなるので、$\dim(\mathbb{R}^n) = n$ です。
- **零ベクトル空間** $\{\mathbf{0}\}$: この空間の基底は空集合（ベクトルを一つも持たない集合）であると定義されます。そのため、その次元は 0 です。

5.3 基底と次元に関する重要な定理

基底と次元の概念は、ベクトル空間内のベクトルの数や線形独立性・生成性と密接に関わっています。

定理 5.6. n 次元ベクトル空間 V において、以下のことが言えます。

1. n 個のベクトルからなる線形独立な集まりは、必ず V の基底である。
2. n 個のベクトルからなる V を生成する集まりは、必ず V の基底である。
3. V 内の n 個より多いベクトルは、必ず線形従属である。
4. V 内の n 個より少ないベクトルは、決して V を生成しない。

証明 (アイデア (3. と 4.))**.** これらの定理は、基底の持つ性質（線形独立性と生成性、そして個数の一意性）から論理的に導かれます。例えば、3.「n 個より多いベクトルは必ず線形従属」は、もしそれらが線形独立であると仮定すると、次元が n であることと矛盾することを示すことで証明できます。

5.4 練習問題

問題 5.1. 次のベクトルの集まりが、与えられたベクトル空間の基底であるかどうかを判定しなさい。

1. 空間 $\mathbb{R}^2$ に対して、$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\}$
2. 空間 $\mathbb{R}^3$ に対して、$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

3. 空間 $\mathbb{R}^3$ に対して、$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

問題 5.2. 次の問いに答えなさい。

1. ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ の基底を $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ とする。ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ の基底 B に関する座標ベクトル $[\boldsymbol{x}]_B$ を求めなさい。
2. ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の標準基底を $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ とする。ベクトル $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ の基底 E に関する座標ベクトル $[\boldsymbol{y}]_E$ を求めなさい。
3. ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の基底を $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ とする。ベクトル $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の基底 B' に関する座標ベクトル $[\boldsymbol{z}]_{B'}$ を求めなさい。

問題 5.3. ベクトル空間 $V = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ の次元を求めなさい。

6　線形写像と表現行列

この章では、ベクトル空間の間の「変換」である**線形写像**と、その変換を具体的な数値で表す**表現行列**について学びます。これは、行列が単なる数の集まりではなく、空間を動かす「働き」を持つことを理解する上で非常に重要です。

6.1　線形写像の定義

線形写像は、ベクトル空間の構造（和とスカラー倍）を保つ特別な種類の関数です。

定義 6.1 (線形写像)**.** 2 つのベクトル空間 V と W が与えられたとき、写像（関数）$f : V \to W$ が**線形写像** *(linear map)* であるとは、以下の 2 つの条件を満たすときに言います。

1. **加法性**: 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対して、$f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$
2. **斉次性**: 任意の $\boldsymbol{u} \in V$ と任意のスカラー c に対して、$f(c\boldsymbol{u}) = cf(\boldsymbol{u})$

これらの 2 つの条件は、まとめて以下の 1 つの条件で表すこともできます。

$$\text{任意の } \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V \text{ と任意のスカラー } c_1, c_2 \text{ に対して } f(c_1\boldsymbol{u} + c_2\boldsymbol{v}) = c_1 f(\boldsymbol{u}) + c_2 f(\boldsymbol{v})$$

幾何学的解釈:
線形写像は、空間を「まっすぐ」かつ「原点を原点に写す」変換だと考えることができます。具体的には、

- 直線を直線に写します。
- 原点を通る平面を、原点を通る直線や平面に写します。
- ベクトルの平行性や等間隔性を保ちます。

線形写像の例としては、回転、拡大・縮小、射影（影を落とすような変換）などがあります。

例 1.

1. ***2* 次元の回転**:
   $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を、ベクトルを角度 θ だけ反時計回りに回転させる写像とします。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ としたとき、$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$ と表されます。この写像が線形写像であることを確認してみましょう。
   - **加法性**: $f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$ と $f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$ が等しいことを示します。
   - **斉次性**: $f(c\boldsymbol{u})$ と $cf(\boldsymbol{u})$ が等しいことを示します。

   これは定義 6.1 の 2 つの条件を満たすので、回転写像は線形写像です。
2. **スカラー倍（拡大・縮小）**：$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を、$f(\boldsymbol{x}) = k\boldsymbol{x}$ （k は定数スカラー）と定義する写像は線形写像です。これは、ベクトルのスカラー倍の性質（定理 1.6 の 2 と 3）から明らかです。

定理 6.2 (線形写像の性質)**.** 線形写像 $f : V \to W$ は、以下の性質を持ちます。

1. 零ベクトルを零ベクトルに写す: $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$
   （ここで $\mathbf{0}_V$ はベクトル空間 V の零ベクトル、$\mathbf{0}_W$ は W の零ベクトル）
2. 線形結合を線形結合に写す: $f(c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k) = c_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + c_k f(\boldsymbol{v}_k)$

証明. ここでは、零ベクトルを零ベクトルに写すことの証明を示します。2. の証明は、線形写像の定義を繰り返し適用することで証明できます（練習問題とします）。

V の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ を考える。V における零ベクトルの性質（定理 1.4-3）より、$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{0}_V = \boldsymbol{v}$ である。この両辺に f を作用させせると、$f(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{0}_V) = f(\boldsymbol{v})$ となる。線形写像の加法性（定義 6.1-1）より、$f(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{0}_V) = f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{0}_V)$ となる。したがって、$f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{0}_V) = f(\boldsymbol{v})$ が成り立つ。W における零ベクトルの性質（定理 1.4-3）により、$f(\boldsymbol{0}_V)$ は W の零ベクトルである $\boldsymbol{0}_W$ でなければならない。よって、$f(\boldsymbol{0}_V) = \boldsymbol{0}_W$ が成り立つ。(証明終)

6.2 表現行列

線形写像の素晴らしい点の 1 つは、それを**行列**を使って表現できることです。これにより、抽象的な写像の操作を、具体的な行列計算に落とし込むことができます。

定義 6.3 (表現行列)**.** n 次元ベクトル空間 V の基底を $B_V = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ とし、m 次元ベクトル空間 W の基底を $B_W = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$ とする。線形写像 $f : V \to W$ の**表現行列** *(representation matrix)* $\boldsymbol{A}$ とは、各基底ベクトル $\boldsymbol{v}_j$ の像 $f(\boldsymbol{v}_j)$ を基底 B_W に関する座標ベクトルとして表し、それを第 j 列に並べた $m \times n$ 行列のことである。

具体的には、V の各基底ベクトル $\boldsymbol{v}_j$ の像 $f(\boldsymbol{v}_j)$ を W の基底 B_W で表すと、

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{v}_1) &= a_{11}\boldsymbol{w}_1 + a_{21}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{w}_m \\
f(\boldsymbol{v}_2) &= a_{12}\boldsymbol{w}_1 + a_{22}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{m2}\boldsymbol{w}_m \\
&\vdots \\
f(\boldsymbol{v}_n) &= a_{1n}\boldsymbol{w}_1 + a_{2n}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{w}_m
\end{aligned}
$$

このとき、これらの係数 a_{ij} を並べた行列が表現行列 $\boldsymbol{A}$ です。

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}
$$

この行列 $\boldsymbol{A}$ の j 列目は、$f(\boldsymbol{v}_j)$ の B_W に関する座標ベクトルになります。

定理 6.4 (線形写像の行列による表現)**.** 線形写像 $f : V \to W$ の基底 B_V と B_W に関する表現行列を $\boldsymbol{A}$ とする。このとき、任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ を基底 B_V で表した座標ベクトルを $[\boldsymbol{x}]_{B_V}$ とし、$f(\boldsymbol{x}) \in W$ を基底 B_W で表した座標ベクトルを $[f(\boldsymbol{x})]_{B_W}$ とすると、以下の関係が成り立ちます。

$$
[f(\boldsymbol{x})]_{B_W} = \boldsymbol{A}[\boldsymbol{x}]_{B_V}
$$

証明 (アイデア)**.** この定理の証明は、線形写像の線形性（定義 6.1）と、基底によるベクトルの表現の一意性（定義 5.1 と定理 5.3）に基づいて行われます。ベクトル $\boldsymbol{x}$ を基底 B_V の線形結合で表し、それに f を作用させると、線形性により $f(\boldsymbol{x})$ が基底ベクトルの像 $f(\boldsymbol{v}_j)$ の線形結合になります。そして、これらの $f(\boldsymbol{v}_j)$ を基底 B_W で表し直すことで、結果的に行列の積の形にまとめられることを示します。

例 2 (2 次元平面上の回転写像の表現行列)**.** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を、ベクトルを角度 θ だけ反時計回りに回転させる写像と考えます。標準基底 $B = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ を使います。原点からの点 (x, y) を角度 θ だけ反時計回りに回転させた新しい点の座標は $(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$ となります。

1. 基底ベクトル $\boldsymbol{e}_1$ の像を計算します:

$$f(\boldsymbol{e}_1) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cos\theta - 0\sin\theta \\ 1\sin\theta + 0\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

   これを基底 B で表すと、$\cos\theta \cdot \boldsymbol{e}_1 + \sin\theta \cdot \boldsymbol{e}_2$ となるので、座標ベクトルは $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ です。

2. 基底ベクトル $\boldsymbol{e}_2$ の像を計算します:

$$f(\boldsymbol{e}_2) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cos\theta - 1\sin\theta \\ 0\sin\theta + 1\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

   これを基底 B で表すと、$-\sin\theta \cdot \boldsymbol{e}_1 + \cos\theta \cdot \boldsymbol{e}_2$ となるので、座標ベクトルは $\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ です。

これらの座標ベクトルを列として並べると、回転写像の表現行列 $\boldsymbol{A}$ が得られます。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

この行列を使えば、任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を角度 θ だけ回転させた結果を、単に行列の積で計算できます。

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$

これは確かに、(x, y) を角度 θ 回転させた結果と一致します。

特定の角度の例: $\theta = \pi/2$ の場合:
上記で導出した一般の表現行列に $\theta = \pi/2$ を代入すると、$\cos(\pi/2) = 0, \sin(\pi/2) = 1$ なので、

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となります。

6.3 練習問題

問題 6.1. 次の写像が線形写像であるかどうかを判定しなさい。線形写像である場合は、その証明も簡潔に示しなさい。

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}$
2. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2$

3. $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $h\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ z \end{pmatrix}$

問題 6.2. 線形写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が、標準基底 $\left\{ \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ に対して、$f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$、$f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ を満たすとき、この線形写像の表現行列を求めなさい。また、この行列を使って $f\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ を計算しなさい。

問題 6.3. 線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ が、$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y-z \end{pmatrix}$ で与えられるとき、$\mathbb{R}^3$ の標準基底から $\mathbb{R}^2$ の標準基底への表現行列を求めなさい。

7　応用問題と発展

この章では、これまでの章で学んだ線形代数の基礎概念をより深く理解し、応用力を養うための問題を提供します。標準的な練習問題よりも思考力を要するものや、いくつかの概念を組み合わせて解く必要がある問題、そして定理の証明に焦点を当てた問題が含まれます。

7.1　応用問題

問題 7.1. 3 点 A$(1, 2, 3)$, B$(4, 5, 6)$, C$(7, 8, 9)$ が同一直線上にあることを、ベクトルの線形従属の概念を用いて証明しなさい。

問題 7.2. ベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ の両方に直交する（垂直な）零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{w}$ を 1 つ求めなさい。

問題 7.3. 2×2 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{O}$（零行列）となるような、零行列ではない行列の例を 1 つ挙げ、実際に計算して示しなさい。

問題 7.4. n 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の任意の基底が n 個のベクトルからなることを、線形独立性と生成の概念を用いて簡潔に説明しなさい。

問題 7.5. $\mathbb{R}^3$ において、3 つのベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が基底をなすことを確認し、ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ をこの基底の線形結合で表しなさい。

問題 7.6. 線形写像 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が、原点を中心に反時計回りに $\pi/4$ 回転させる変換であるとき、この写像の標準基底に関する表現行列を求めなさい。

問題 7.7. 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ について、$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$ と $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2$ をそれぞれ計算し、両者が等しくないことを示しなさい。この結果から、行列の積における注意点を述べなさい。

問題 7.8. ベクトル空間 $V = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ の次元を求め、その基底を一つ見つけなさい。

問題 7.9. 線形写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ が $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ 2x \\ x+y \end{pmatrix}$ で与えられるとき、この線形写像の標準基底に関する表現行列を求めなさい。

問題 7.10. 2×2 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が、あるベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ を $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ という線形写像で変換するとします。この変換によって、$(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)$ を頂点とする正方形がどのような図形に変換されるか図示し、その新しい図形の面積を求めなさい。

7.2 発展的な証明問題

問題 7.11. **線形結合の一意性**: ベクトル空間 V の基底 $B = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が与えられたとき、任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ は、基底の線形結合として一意に表せることを証明しなさい。すなわち、$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = d_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + d_n\boldsymbol{v}_n$ ならば、$c_i = d_i$ がすべての i について成り立つことを示しなさい。

問題 7.12. **線形写像の零ベクトル変換の証明**: 線形写像 $f : V \to W$ が与えられたとき、$f(\boldsymbol{0}_V) = \boldsymbol{0}_W$ であることを、線形写像の加法性（定義 6.1-1）と斉次性（定義 6.1-2）の定義のみを用いて厳密に証明しなさい。

問題 7.13. **線形写像による線形結合の保存**: 線形写像 $f : V \to W$ と、任意のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$ およびスカラー $c_1, \ldots, c_k$ に対して、$f(c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k) = c_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + c_k f(\boldsymbol{v}_k)$ が成り立つことを、線形写像の定義（加法性と斉次性）を用いて証明しなさい。

問題 7.14. **ベクトル空間の部分集合が部分空間となる条件の証明**: ベクトル空間 V の空でない部分集合 W が、以下の 1 つの条件を満たすとき、W は V の部分空間であることを証明しなさい。（条件: 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W$ と任意のスカラー c に対して、$c\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W$）

問題 7.15. **次元と線形従属の関係**: n 次元ベクトル空間 V において、 n 個より多いベクトルからなる任意の集合は必ず線形従属であることを証明しなさい。

問題 7.16. **生成集合と基底**: n 次元ベクトル空間 V を生成する n 個のベクトルからなる集合が、自動的に線形独立であることを証明しなさい。

問題 7.17. **行列の結合法則の証明**: 行列の積の結合法則 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})$ を、各要素の計算を用いて厳密に証明しなさい。（ただし、積が定義されることを前提とする。）

問題 7.18. **内積の性質の証明**: 任意のベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ と任意のスカラー c に対して、内積の以下の性質が成り立つことを証明しなさい。

1. $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$
2. $(c\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} = c(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})$

8　行列式

この章では、線形代数における非常に重要な概念である**行列式**について学びます。行列式は、正方行列から計算されるスカラー値であり、その行列が線形変換によって「どれだけ空間を拡大・縮小するか」や「向きを反転させるか」といった幾何学的な意味を持ちます。また、連立一次方程式の解の存在や一意性、逆行列の存在条件など、多くの重要な応用があります。

8.1　行列式の定義

行列式は、正方行列に対して定義される特別な値です。その定義は再帰的に行われます。まず、行列の要素から作られる「小行列式」と「余因子」を定義します。

定義 8.1 (小行列式)**.** n 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ の i 行目と j 列目を削除して得られる $(n-1)$ 次正方行列を $\boldsymbol{A}_{ij}$ と書くとき、その行列式を要素 a_{ij} の**小行列式**と呼び、M_{ij} で表します。

例 1. 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ の要素 a_{11} の小行列式 M_{11} を求めなさい。

a_{11} は 1 行 1 列目の要素なので、行列 $\boldsymbol{A}$ から 1 行目と 1 列目を削除します。

$$\boldsymbol{A}_{11} = \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ \cancel{4} & 5 & 6 \\ \cancel{7} & 8 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

したがって、小行列式 M_{11} はこの 2×2 行列の行列式です。（ここではまだ行列式の計算方法を厳密に定義していませんが、後ほど詳しく説明します。）

$$M_{11} = (5)(9) - (6)(8) = 45 - 48 = -3$$

定義 8.2 (余因子)**.** n 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ の要素 a_{ij} の**余因子** C_{ij} は、小行列式 M_{ij} に符号 $(-1)^{i+j}$ を掛けたものと定義されます。

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

この符号は、要素 (i, j) の位置がチェス盤のように「+ - + - ...」と交互に符号が変わることを意味します。

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

例 2. 先ほどの行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ の要素 a_{11} の余因子 C_{11} と、要素 a_{12} の余因子 C_{12} を求めなさい。

$M_{11} = -3$ であったので、

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (1)(-3) = -3$$

次に、a_{12} の小行列式 M_{12} を求めます。

$$\boldsymbol{A}_{12} = \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 4 & \cancel{5} & 6 \\ 7 & \cancel{8} & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

（ここでもまだ行列式の計算方法を厳密に定義していませんが、同様に後ほど詳しく説明します。）

$$M_{12} = (4)(9) - (6)(7) = 36 - 42 = -6$$

したがって、C_{12} は

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)(-6) = 6$$

いよいよ行列式の一般的な定義です。これは、特定の行または列に沿って余因子を「展開」することで計算されます。この定義は再帰的であり、最終的に 1×1 行列の行列式に帰着します。

定義 8.3 (行列式 - 余因子展開による定義)**.** n 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ の**行列式**は、以下の規則によって定義されます。

1. **1×1 行列の場合**: $\boldsymbol{A} = (a_{11})$ の行列式は a_{11} である。
2. **$n > 1$ の行列の場合**: 任意の行 i または任意の列 j を選んで、その行（または列）の要素と対応する余因子の積の和として定義されます。
   - i 行に沿った展開:
   $$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} C_{ik} = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \cdots + a_{in} C_{in}$$
   - j 列に沿った展開:
   $$\sum_{k=1}^{n} a_{kj} C_{kj} = a_{1j} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + \cdots + a_{nj} C_{nj}$$

行列式は、記号 $|\boldsymbol{A}|$ または $\det(\boldsymbol{A})$ で表されます。どの行または列を選んで展開しても、結果は同じになります。

8.2 具体的なサイズの行列式の計算方法の導出

余因子展開による定義を用いると、以前に学んだ 2×2 や 3×3 行列の行列式の計算方法が、この一般的な定義から自然に導かれることがわかります。

定理 8.4 (2×2 行列の行列式)**.** 2×2 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ の行列式は、余因子展開により次のように導出されます。

$$\det(\boldsymbol{A}) = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

証明. 例えば、1 行目に沿って余因子展開を行います。

$$\det(\boldsymbol{A}) = a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12}$$

ここで、$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}$ であり，M_{11} は a_{11} を除いた 1×1 行列 (a_{22}) の行列式なので、$M_{11} = a_{22}$ です。$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12}$ であり，M_{12} は a_{12} を除いた 1×1 行列 (a_{21}) の行列式なので、$M_{12} = a_{21}$ です。したがって、

$$\det(\boldsymbol{A}) = a_{11}(a_{22}) + a_{12}(-a_{21}) = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

と導出されます。

例 3. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ の行列式を計算しなさい。

上記の公式を適用すると、

$$\det(\boldsymbol{A}) = (3)(2) - (1)(4) = 6 - 4 = 2$$

定理 8.5 (3 × 3 行列の行列式 - サラスの規則)**.** 3×3 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の行列式は、余因子展開の結果として**サラスの規則**で計算できます。

$$\det(\boldsymbol{A}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

証明. (概要) 1 行目に沿って余因子展開を行うことを考えます。

$$\det(\boldsymbol{A}) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

ここで、C_{11}, C_{12}, C_{13} はそれぞれ 2×2 行列の余因子であり、これらの余因子を 2×2 行列の行列式の公式で計算し、代入することでサラスの規則の形が得られます。

例 4. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ の行列式をサラスの規則を用いて計算しなさい。

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{A}) &= (1)(5)(9) + (2)(6)(7) + (3)(4)(8) - (3)(5)(7) - (1)(6)(8) - (2)(4)(9) \\ &= 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 \\ &= 225 - 225 = 0 \end{aligned}$$

注意. サラスの規則は 3×3 行列にのみ適用できる簡便な方法です。4×4 以上の行列式を計算する際は、余因子展開を繰り返し用いる必要があります。

8.3 行列式の性質

行列式には、計算を簡略化したり、行列の特性を理解する上で非常に重要な多くの性質があります。これらの性質は、余因子展開の定義から導かれます。

定理 8.6 (行列式の性質)**.** n 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ の行列式は以下の性質を持ちます。

1. **転置行列の行列式**: $\det(\boldsymbol{A}^T) = \det(\boldsymbol{A})$（この性質により、行に関する性質はすべて列にも適用されることが保証されます。）
2. **行（または列）の交換**: 行列の 2 つの行（または列）を交換すると、行列式の符号が反転する。
3. **同じ行（または列）を持つ行列**: 行列が同じ行（または列）を 2 つ持つ場合、その行列式は 0 である。
4. **スカラー倍**: 行列の 1 つの行（または列）をスカラー k 倍すると、行列式も k 倍になる。
5. **和の分配法則**: ある行（または列）が 2 つのベクトルの和である場合、行列式は 2 つの行列式の和に分解できる（他の行は不変）。

6. **行（または列）の線形結合**: ある行（または列）に、別の行（または列）の定数倍を加えても、行列式の値は変わらない。これは、行列式の計算において、行基本変形（列基本変形）が非常に有効であることを意味します。
7. **零行（または零列）を持つ行列**: 行列がすべての成分が 0 である行（または列）を 1 つ以上持つ場合、その行列式は 0 である。
8. **三角行列の行列式**: 三角行列の行列式は、対角成分の積に等しい。
9. **積の行列式**: $\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$（この性質は、行列の積の行列式が個々の行列式の積に等しいことを示しており、線形変換の合成における体積（面積）の変化率として理解できます。）

証明.

1. **転置行列の行列式**: 行列式の定義（余因子展開）と、転置行列の定義から、行と列の役割を入れ替えても結果が同じになることを示すことで証明できます。特に、1×1 行列の定義が基底となります。
2. **行（または列）の交換**: 余因子展開の定義から帰納的に証明できます。基底ケースとして 2×2 行列で確認でき、高次の行列では展開により低次の行列式に帰着されるため、符号の反転が引き継がれます。
3. **同じ行（または列）を持つ行列**: もし 2 つの同じ行を持つ行列の行列式が D であると仮定します。その 2 つの行を交換しても行列は変化しませんが、性質 2 により行列式の符号は反転するため、$-D$ となります。したがって、$D = -D$ が成り立ち、これを満たすのは $D = 0$ の場合のみです。
4. **スカラー倍**: 余因子展開の定義 $\sum a_{ik}C_{ik}$ を考えると、ある行 i を k 倍することは、その行の全ての要素 a_{ik} が ka_{ik} に置き換わることを意味します。このとき、展開式の各項も k 倍されるため、行列式全体も k 倍になります。
5. **和の分配法則**: 和の行（または列）に沿って余因子展開を行うことを考えます。展開式の各項が和の形で表されるため、それを分配することで 2 つの行列式の和に分解できます。
6. **行（または列）の線形結合**: この性質は、性質 3（同じ行を持つ行列式は 0）と性質 5（和の分配法則）を組み合わせることで証明できます。ある行に別の行の定数倍を加えた行列式は、元の行列式と、同じ行を持つ行列式（その値は 0）の和として表せるため、結果として元の行列式と等しくなります。
7. **零行（または零列）を持つ行列**: すべての成分が 0 である行（または列）に沿って余因子展開を行うと、展開式の各項の a_{ik}（または a_{kj}）がすべて 0 となるため、行列式全体の値も 0 になります。
8. **三角行列の行列式**: 例えば、下三角行列の場合、1 行目に沿って余因子展開を行うと、a_{11} の項のみが残り、他の項は 0 となります。これを繰り返すことで、最終的に対角成分の積が得られます。上三角行列の場合も同様です。
9. **積の行列式**: この証明は、基本行列の性質や行列式の一意性を利用するなど、学部初級レベルの線形代数ではやや発展的な内容となります。ここでは省略します。

例 5.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = (1)(4) - (2)(3) = 4 - 6 = -2$$

1 行目と 2 行目を交換した行列の行列式は、

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (3)(2) - (4)(1) = 6 - 4 = 2$$

となり、符号が反転していることがわかります。

例 6. $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (1)(2) - (2)(1) = 2 - 2 = 0$

例 7.

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = -2$$

1 行目を 2 倍した行列の行列式は、

$$\det\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 4\end{pmatrix} = (2)(4) - (4)(3) = 8 - 12 = -4$$

となり、元の行列式の 2 倍になっていることがわかります。

例 8. $\det\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}b_{11} & a_{12}\\ b_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$

例 9.

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = -2$$

1 行目の 3 倍を 2 行目に加える操作を行うと、

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3+3(1) & 4+3(2)\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 6 & 10\end{pmatrix} = (1)(10) - (2)(6) = 10 - 12 = -2$$

となり、行列式の値が変化しないことがわかります。

例 10. $\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix} = (1)(0) - (2)(0) = 0$

例 11. $\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix} = (1)(4)(6) = 24$

8.4 行列式と正則性

行列式は、行列に逆行列が存在するかどうか、すなわち行列が**正則**であるかどうかの重要な判定条件を与えます。

定義 8.7 (正則行列と特異行列)**.** 正方行列 $\boldsymbol{A}$ が**正則である（または可逆である）**とは、$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$ となる行列 $\boldsymbol{B}$ が存在するときに言います。この $\boldsymbol{B}$ を $\boldsymbol{A}$ の**逆行列**と呼び、$\boldsymbol{A}^{-1}$ と表記します。正則でない行列を**特異行列**と呼びます。

定理 8.8 (行列式と正則性の関係)**.** 正方行列 $\boldsymbol{A}$ が正則であることの必要十分条件は、その行列式が 0 でないことである。すなわち、

$$\boldsymbol{A}\ \text{は正則} \iff \det(\boldsymbol{A}) \neq 0$$

証明.
- ($\Rightarrow$) $\boldsymbol{A}$ が正則ならば $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$ であることの証明:
  $\boldsymbol{A}$ が正則であると仮定すると、逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ が存在し、$\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{I}$ を満たします。行列式の積の性質（定理 8.6-9）より、$\det(\boldsymbol{AA}^{-1}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{A}^{-1})$ が成り立ちます。また、単位行列の行列式は $\det(\boldsymbol{I}) = 1$ です。したがって、$\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{A}^{-1}) = 1$ となります。この等式が成り立つためには、$\det(\boldsymbol{A})$ も $\det(\boldsymbol{A}^{-1})$ も 0 であってはなりません。よって、$\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$ が成り立ちます。

- ($\Leftarrow$) $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$ ならば $\boldsymbol{A}$ が正則であることの証明:
  この証明は、より高度な概念（例えば、余因子行列を用いた逆行列の構成や、ガウスの消去法と基本行列の関係）を必要とします。ここでは概要に留めますが、$\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$ である場合、行列 $\boldsymbol{A}$ は行基本変形によって単位行列に変換できることが知られています。これは、$\boldsymbol{A}$ がいくつかの基本行列の積で表せることを意味し、その結果として $\boldsymbol{A}$ が逆行列を持つことを導きます。

この定理は、連立一次方程式の解の存在と一意性にも密接に関連しています。$\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$ の場合、連立一次方程式 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ は一意の解を持ちます。一方、$\det(\boldsymbol{A}) = 0$ の場合、解を持たないか、または無限に多くの解を持つことになります。

例 12. 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ が正則行列でないような k の値を求めなさい。

行列 $\boldsymbol{A}$ が正則でないということは、$\det(\boldsymbol{A}) = 0$ であることを意味します。

$$\det(\boldsymbol{A}) = (1)(4) - (k)(2) = 4 - 2k$$

$4 - 2k = 0$ を解くと、$2k = 4$ より $k = 2$ となります。したがって、$k = 2$ のとき、行列 $\boldsymbol{A}$ は正則行列ではありません。

8.5 行列式の幾何学的意味

行列式は単なる計算上の値にとどまらず、線形変換が空間の体積（2 次元では面積）をどのように変化させるかを示す、明確な幾何学的意味を持ちます。

定理 8.9 (行列式の幾何学的意味)**.** 線形写像 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{Ax}$ （ここで $\boldsymbol{A}$ は n 次正方行列）によって、もとの図形が変換された図形の体積（$n = 2$ の場合は面積）は、もとの図形の体積に $|\det(\boldsymbol{A})|$ を掛けたものに等しい。また、行列式の符号は、変換によって空間の「向き」が保持されるか反転されるかを示す。

- $\det(\boldsymbol{A}) > 0$ の場合：向きは保存される（例：回転、拡大・縮小）。
- $\det(\boldsymbol{A}) < 0$ の場合：向きは反転する（例：鏡映）。
- $\det(\boldsymbol{A}) = 0$ の場合：変換によって体積が 0 になる（例：射影）。これは、空間がつぶれて次元が減少することを意味します。

証明. 単位正方形（または単位立方体）が線形写像 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{Ax}$ によって変換された図形は、平行四辺形（または平行六面体）になります。この変換後の図形の体積（面積）は、元の図形の体積（面積）に $|\det(\boldsymbol{A})|$ を掛けたものに等しいことが知られています。これは、行列式が線形変換による体積（面積）の拡大・縮小率を表すことに起因します。

行列式の符号については、以下のようになります。

- $\det(\boldsymbol{A}) > 0$ の場合：線形変換は空間の「向き」を保存します。例えば、回転や拡大・縮小のような変換です。変換後の基底ベクトルの順序が元の基底ベクトルの順序と同じ向きを保つことを意味します。
- $\det(\boldsymbol{A}) < 0$ の場合：線形変換は空間の「向き」を反転させます。例えば、鏡映（反転）のような変換です。変換後の基底ベクトルの順序が元の基底ベクトルの順序と逆向きになることを意味します。
- $\det(\boldsymbol{A}) = 0$ の場合：変換によって空間が「潰れ」、変換後の図形の体積が 0 になります。これは、線形

写像の像空間の次元が元の空間の次元よりも小さくなることを意味し、例えば平面を直線や点に写すような射影変換がこれに該当します。

これらの性質の厳密な証明は、多変量積分の変数変換の公式や、行列の列ベクトルが張る図形の体積を計算する理論に基づきますが、ここでは直感的な理解に留めます。

例 13. 線形写像 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ において、$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ とする。この変換により、単位正方形（頂点 $(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)$ で囲まれた面積 1 の図形）が変換された図形の面積を求めなさい。

まず、行列 $\boldsymbol{A}$ の行列式を計算します。

$$\det(\boldsymbol{A}) = (2)(3) - (1)(1) = 6 - 1 = 5$$

単位正方形の面積は 1 なので、変換後の図形の面積は $1 \times |\det(\boldsymbol{A})| = 1 \times |5| = 5$ である。変換された図形は平行四辺形になります。

例 14. 線形写像 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ において、$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$（$y$ 軸に関する鏡映変換）とする。この変換により、単位正方形がどのような図形に変換され、その面積と向きがどうなるか答えなさい。

まず、行列 $\boldsymbol{A}$ の行列式を計算します。

$$\det(\boldsymbol{A}) = (1)(-1) - (0)(0) = -1$$

変換後の図形の面積は $1 \times |-1| = 1$ である。面積は変わらない。行列式が負の値なので、向きは反転する。実際、この変換は y 軸に関して図形を鏡映させるため、向きが反転します。

8.6 クラメルの公式（連立一次方程式の解法）

行列式は、正則行列の連立一次方程式の解を求めるための**クラメルの公式**に応用されます。この公式は、特に変数の数が少ない場合に有用です。

定理 8.10 (クラメルの公式)**.** n 元連立一次方程式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が与えられたとき、もし $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$ ならば、一意の解 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ が存在し、その各成分は次のように与えられる。

$$x_i = \frac{\det(\boldsymbol{A}_i)}{\det(\boldsymbol{A})}$$

ここで $\boldsymbol{A}_i$ は、行列 $\boldsymbol{A}$ の i 列目を定数ベクトル $\boldsymbol{b}$ で置き換えて得られる行列である。

証明. クラメルの公式の証明には、余因子行列を用いる方法が一般的です。連立一次方程式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を考えます。ここで、$\boldsymbol{A}$ は正方行列、$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{b}$ は列ベクトルです。$\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$ のとき、$\boldsymbol{A}$ は逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ を持ちます。$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ となります。ここで、逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ は、余因子行列 $\mathrm{adj}(\boldsymbol{A})$ を用いて $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\mathrm{adj}(\boldsymbol{A})$ と表されます。余因子行列 $\mathrm{adj}(\boldsymbol{A})$ は、要素が余因子 C_{ji} である行列 (C_{ji}) の転置行列として定義されます。つまり、$\mathrm{adj}(\boldsymbol{A})_{ij} = C_{ji}$ です。

したがって、x_i は、

$$\begin{aligned}x_i &= (\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b})_i = \left(\frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\mathrm{adj}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{b}\right)_i = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\sum_{j=1}^{n}(\mathrm{adj}(\boldsymbol{A}))_{ij}b_j \\ &= \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\sum_{j=1}^{n}C_{ji}b_j\end{aligned}$$

ここで、$\sum_{j=1}^{n} C_{ji}b_j$ は、行列 $\boldsymbol{A}_i$ （行列 $\boldsymbol{A}$ の i 列目を $\boldsymbol{b}$ で置き換えた行列）の i 列目以外の列に沿って余因子展開を行ったものに等しくなります。しかし、より正確には、行列 $\boldsymbol{A}_i$ を i 列目で余因子展開したものに相当します。具体的には、$\det(\boldsymbol{A}_i)$ は、行列 $\boldsymbol{A}_i$ の i 列目を基準に余因子展開すると、

$$\det(\boldsymbol{A}_i) = \sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{A}_i)_{ji}C'_{ji}$$

ここで $(\boldsymbol{A}_i)_{ji}$ は行列 $\boldsymbol{A}_i$ の j 行 i 列目の要素であり、これは b_j に等しいです。また、C'_{ji} は行列 $\boldsymbol{A}_i$ の j 行 i 列目の余因子ですが、$\boldsymbol{A}_i$ は $\boldsymbol{A}$ の i 列目だけが異なるため、C'_{ji} は元の行列 $\boldsymbol{A}$ の C_{ji} と等しくなります（i 列目を取り除いた小行列は同じになるため）。よって、

$$\det(\boldsymbol{A}_i) = \sum_{j=1}^{n}b_jC_{ji}$$

この式と、x_i の式を比較すると、

$$x_i = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\sum_{j=1}^{n}b_jC_{ji} = \frac{\det(\boldsymbol{A}_i)}{\det(\boldsymbol{A})}$$

が成り立ちます。

例 15. 次の連立一次方程式をクラメルの公式を用いて解きなさい。

$$\begin{aligned}2x + 3y &= 7 \\ x - y &= 1\end{aligned}$$

まず、この連立方程式を行列の形で書くと $\begin{pmatrix}2 & 3 \\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 \\ 1\end{pmatrix}$ となります。係数行列を $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}2 & 3 \\ 1 & -1\end{pmatrix}$、定数ベクトルを $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}7 \\ 1\end{pmatrix}$ とします。

1. 係数行列 $\boldsymbol{A}$ の行列式を計算します。

$$\det(\boldsymbol{A}) = \det\begin{pmatrix}2 & 3 \\ 1 & -1\end{pmatrix} = (2)(-1) - (3)(1) = -2 - 3 = -5$$

   $\det(\boldsymbol{A}) = -5 \neq 0$ なので、解は一意に存在します。

2. x の係数である 1 列目を $\boldsymbol{b}$ で置き換えた行列 $\boldsymbol{A}_1$ の行列式を計算します。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_1 &= \begin{pmatrix}7 & 3 \\ 1 & -1\end{pmatrix} \\ \det(\boldsymbol{A}_1) &= (7)(-1) - (3)(1) = -7 - 3 = -10\end{aligned}$$

3. y の係数である 2 列目を $\boldsymbol{b}$ で置き換えた行列 $\boldsymbol{A}_2$ の行列式を計算します。

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\det(\boldsymbol{A}_2) = (2)(1) - (7)(1) = 2 - 7 = -5$$

4. クラメルの公式を適用して x と y の値を求めます。

$$x = \frac{\det(\boldsymbol{A}_1)}{\det(\boldsymbol{A})} = \frac{-10}{-5} = 2$$
$$y = \frac{\det(\boldsymbol{A}_2)}{\det(\boldsymbol{A})} = \frac{-5}{-5} = 1$$

よって、連立一次方程式の解は $x = 2,\ y = 1$ である。

8.7 練習問題

問題 8.1. 次の行列の行列式を余因子展開を行って計算しなさい。

1. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$
2. $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

問題 8.2. 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ が正則行列でないような k の値を求めなさい。

問題 8.3. 線形写像 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ において、$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ とする。この変換により、面積 1 の図形がどのような面積の図形に変換されるか答えなさい。

問題 8.4. クラメルの公式を用いて、次の連立一次方程式を解きなさい。

$$3x - y = 5$$
$$x + 2y = -1$$

解答

第 7 章

解答 7.1. A から B へ向かうベクトルを AB，A から C へ向かうベクトルを AC とすると，

$$\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 2\mathrm{AB}$$

このとき，$2\mathrm{AB} - \mathrm{AC} = \mathbf{0}$ より，AB と AC は線形従属であるため平行である．さらにどちらも A を通っているため，AB と AC は同一直線上にある．よって，A,B,C は同一直線上にある．

解答 7.2. $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ $(w_1 \neq 0,\ w_2 \neq 0,\ w_3 \neq 0)$ とする．$\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{w}$ と直交するので，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} &= 0 \\ w_1 + 2w_2 - w_3 &= 0 \end{aligned}$$

$\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{w}$ と直交するので，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} &= 0 \\ 3w_1 - w_2 + 2w_3 &= 0 \end{aligned}$$

よって，$w_1 = -\frac{3}{7}w_3,\ w_2 = \frac{5}{7}w_3$ なので，$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} w_3\ (w_3 \neq 0)$．従って求める $\boldsymbol{w}$ の一つは $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

解答 7.3. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ とすると，

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{O}$$

となる．

解答 7.4. $n+1$ 個以上のベクトルは余分なベクトルが含まれていて必ず線形従属になってしまう．逆に $n-1$ 個以下のベクトルでは $\mathbb{R}^n$ のすべてのベクトルを線形結合で表すことができない．よって基底は n 個である．

解答 7.5. $c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + c_3\boldsymbol{v_3} = \mathbf{0}$ $(c_1,\ c_2,\ c_3 \in \mathbb{R})$ とすると，

$$\begin{pmatrix} c_1 + c_3 \\ c_2 + c_3 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より，$c_1 = c_2 = c_3 = 0$．よって，$\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ は線形独立．さらに，任意の $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right)\boldsymbol{v_1} + \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right)\boldsymbol{v_2} + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z\right)\boldsymbol{v_3}$$

と表せるので，$\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ は $\mathbb{R}^3$ を生成する．よって，$\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底である．

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\boldsymbol{v_1} + \frac{5}{2}\boldsymbol{v_2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v_3}$$

解答 7.6.

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって表現行列は

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

解答 7.7. $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ より，

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 15 & 25 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より，

$$\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2 = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 15 & 21 \end{pmatrix}$$

より確かに $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) \neq \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2$．
行列の積では一般に $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$ なので, $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BA} - \boldsymbol{B}^2$ であるが, $-\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{O}$ とはならない．

解答 7.8. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるため，$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ は線形従属である．また，$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ $(c_1,\ c_2 \in \mathbb{R})$ とすると，$c_1 = c_2 = 0$．よって，$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ は線形独立．これらのこと

から,

$$V = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \right\} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim(V) = 2$$

基底の一つは $\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$.

解答 7.9.

$$f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

よって表現行列は

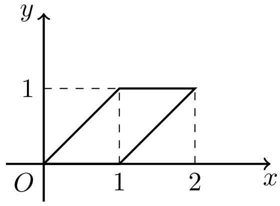
$$\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$$

解答 7.10.

$$f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

より下図となる.



よって面積は $1 \cdot 1 = 1$.