Curso 2019-2020

Pruebas Presenciales

Alfonso García Pérez

Universidad Nacional de Educación a Distancia

# ESTADÍSTICA BÁSICA

Prueba Presencial de Febrero. Primera semana. Curso 2019-2020

# NOTAS IMPORTANTES:

- 1) Duración del examen: Dos horas.
- 2) Material permitido: Solamente una calculadora no programable y el original (no se permiten fotocopias, ni anotaciones, ni hojas sueltas dentro) de la Addenda "Fórmulas y tablas estadísticas".
  - 3) No es necesario entregar esta hoja de enunciados.
  - 4) Los tres problemas puntúan lo mismo.

## Problema 1

Los siguientes datos corresponden a los niveles de renta anual (en miles de euros) de 10 personas elegidas al azar,

$$14'5$$
,  $22'3$ ,  $34'7$ ,  $50'4$ ,  $32'6$ ,  $12'4$ ,  $29'5$ ,  $19'4$ ,  $22'3$ ,  $31'3$ 

Se pide determinar: La Distribución de Frecuencias Relativas Acumuladas, el gráfico de la Función de Distribución Empírica, la Media, la Mediana, la Moda, el Primer Cuartil, el Tercer Cuartil, la Desviación Típica, el Recorrido, y el Coeficiente de Asimetría de Pearson.

## Problema 2

Se eligieron al azar 10 localizaciones costeras del planeta en las que se midió el incremento en centímetros del nivel del mar en los últimos dos años. Los incrementos observados fueron los siguientes:

$$1'2\;,\;0'9\;,\;1'5\;,\;1'9\;,\;0'2\;,\;1'4\;,\;0'8\;,\;0'7\;,\;1'9\;,\;2'1$$

Calcular el intervalo de confianza para un coeficiente de confianza del  $95\,\%$  para el incremento medio, admitiendo que dicha variable sigue una distribución normal.

# Problema 3

Para los datos del problema anterior y utilizando el test de los signos, ¿se podría concluir con que hay un incremento mediano poblacional de 1'30 centímetros o más?

La distribución de frecuencias relativas acumuladas (EBR-sección 2.3), en este caso correspondientes a un carácter cuantitativo sin agrupar, es

$X_i$	$F_i$
12'4	0'1
14'5	0'2
19'4	0'3
22'3	0'5
29'5	0'6
31'3	0'7
32'6	0'8
34'7	0'9
50'4	1

El gráfico de la Función de distribución empírica es el de la Figura 0.1.

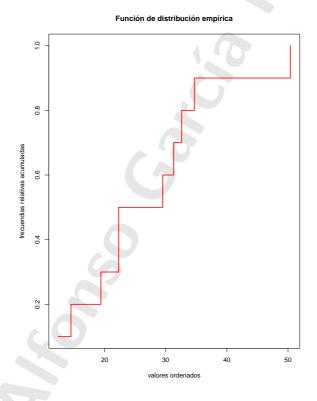


Figura 0.1 : Función de distribución empírica

Las Medidas de Posición (EBR-sección 2.3.2) serán, la Media

$$\overline{x} = \frac{269'4}{10} = 26'94.$$

La Moda (el valor más frecuente),  $M_d = 22'3$ . Como la distribución de frecuencias acumuladas es

$X_i$	$N_i$
12'4	1
14'5	2
19'4	3
22'3	5
29'5	6
31'3	7
32'6	8
34'7	9
50'4	10

será

$$5 \le 10/2 = 5 < 6$$

con lo que la Mediana corresponderá al valor (22'3 + 29'5)/2 = 25'9.

Por otro lado, al ser

$$2 < 10/4 = 2'5 < 3$$

el primer cuartil será  $p_{1/4}=19^\prime 4$ y, al ser

$$7 < 3 \cdot 10/4 = 7'5 < 8$$

el tercer cuartil será  $p_{3/4} = 32'6$ .

En cuanto a las medidas de dispersión (EBR-sección 2.3.3), al ser la varianza

$$s^2 = 113'4264$$

la desviación típica será  $s = \sqrt{s^2} = 10'65$ .

El Recorrido será R = 50'4 - 12'4 = 38.

Por último, el Coeficiente de Asimetría de Pearson, EBR-sección 2.3.4, será

$$A_p = \frac{\overline{x} - M_d}{s} = 0'436$$

mostrando los datos una cierta asimetría a la derecha.

Aunque en la Prueba Presencial resulta imposible, si hubiéramos resuelto el problema con R hubiéramos ejecutado la siguiente secuencia de instrucciones

obteniendo, lógicamente, los mismos resultados. Con (1) incorporamos los datos; con (2) los ordenamos, con (3) creamos la función de distribución empírica que, como toda función en R, podemos aplicar a los datos anteriores con (4), obteniendo las frecuencias relativas acumuladas asociadas a cada uno de los valores ordenados en (5). Con (6) obtenemos el gráfico de la función de distribución empírica.

Con (7) varias de la medidas solicitadas que son completadas con (8), (9), (10) y (11) con la diferencia habitual en los cuartiles.

```
> renta<-c(14.5,22.3,34.7,50.4,32.6,12.4,29.5,19.4,22.3,31.3)
                                                                              (1)
> sort(renta)
                                                                              (2)
 [1] 12.4 14.5 19.4 22.3 22.3 29.5 31.3 32.6 34.7 50.4
> Fn<-ecdf(sort(renta))
                                                                              (3)
> Fn(sort(renta))
                                                                              (4)
 [1] 0.1 0.2 0.3 0.5 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0
                                                                              (5)
> plot(sort(renta),Fn(sort(renta)),type="s",xlab="valores ordenados",
                                                                              (6)
+ ylab="frecuendias relativas acumuladas", main="Función de distribución
                                                                              (6)
+ empírica",col=2,lwd=2)
                                                                              (6)
                                                                              (7)
> summary(renta)
 Min. 1st Qu. Median
                           Mean 3rd Qu.
                                           Max
                  25.90
  12.40
         20.12
                           26.94
                                   32.28
> library(modeest)
> mfv(renta)
                                                                              (8)
[1] 22.3
> sqrt(9*var(renta)/10)
                                                                              (9)
[1] 10.65018
> (mean(renta)-mfv(renta))/sqrt(9*var(renta)/10)
                                                                             (10)
[1] 0.4356733
> range(renta)
[1] 12.4 50.4
> range(renta)[2]-range(renta)[1]
                                                                             (11)
[1] 38
```

# Problema 2

Nos piden calcular el intervalo de confianza para la media de una población supuestamente normal (EBR-sección 6.2) con varianza desconocida. El intervalo pedido es

$$\left[ \overline{x} - t_{n-1;\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} , \ \overline{x} + t_{n-1;\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right].$$

De los datos se obtiene que es  $\overline{x}=1'26$  y S=0'613 y de la Tabla 5 de la distribución t de Student se obtiene que es  $t_{n-1;\alpha/2}=t_{9;0'025}=2'262$  con lo que el intervalo buscado será

$$\left[\overline{x} - t_{n-1;\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} , \overline{x} + t_{n-1;\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}\right] = \left[1'26 - 2'262 \frac{0'613}{\sqrt{10}} , 1'26 + 2'262 \frac{0'613}{\sqrt{10}}\right]$$
$$= [0'8215 , 1'6985].$$

Si hubiéramos querido resolverlo con R, hubiéramos ejecutado las siguientes sentencias:

obteniendo lógicamente el mismo resultado.

#### Problema 3

Como siempre que se utiliza el test de los signos (EBR-sección 8.3.1), las hipótesis a contrastar hacen referencia a la mediana poblacional M y, como siempre que se pueda, la hipótesis de interés se debe establecer como hipótesis alternativa. Por tanto, se trata de contrastar la hipótesis nula  $H_0: M \leq 1'30$  frente a la alternativa de ser M > 1'30, aceptándose la hipótesis nula cuando sea  $T < t_{\alpha}$ , siendo  $t_{\alpha}$  el punto crítico y T el estadístico del contraste, número de observaciones mayores que 1'30, o equivalentemente, número de signos positivos de las diferencias entre las observaciones y la mediana establecida en las hipótesis.

Por otro lado,  $t_{\alpha}$  es el valor de una binomial B(n,0'5) que deja a la derecha un área de probabilidad  $\alpha$ . Como no nos dan un nivel de significación deberemos utilizar el p-valor para obtener las conclusiones.

De los datos se desprende que es T=5 por lo que el p-valor será

$$P\{W \ge 5\}$$

con W una variable aleatoria con distribución binomial B(10,0'5). Por tanto, el p-valor será

$$P\{W \ge 5\} = 0'2461 + 0'2051 + 0'1172 + 0'0439 + 0'0098 + 0'001 = 0'6231$$

suficientemente grande como para aceptar la hipótesis nula y concluir que no existe un incremento mediano significativamente mayor que 1'3 centímetros.

Si hubiéramos podido resolverlo con R (imposible en la Prueba Presencial), hubiéramos instalado primero la librería BSDA, que ejecuta el test de los signos mediante la función SIGN.test, y ejecutado las siguientes sentencias, supuesto que ya hemos incorporado los datos como en el problema anterior.

obteniéndose en (1) el valor del estadístico y en (2) el p-valor, lógicamente iguales a los anteriores calculados sin R.

# ESTADÍSTICA BÁSICA

Prueba Presencial de Febrero. Segunda semana. Curso 2019-2020

## NOTAS IMPORTANTES:

- 1) Duración del examen: Dos horas.
- 2) Material permitido: Solamente una calculadora no programable y el original (no se permiten fotocopias, ni anotaciones, ni hojas sueltas dentro) de la Addenda "Fórmulas y tablas estadísticas".
  - 3) No es necesario entregar esta hoja de enunciados.
  - 4) Los tres problemas puntúan lo mismo.

# Problema 1

Se admite que el número de erratas por página, en un libro determinado, es una variable aleatoria X que sigue una distribución de Poisson de parámetro 1'1. Determinar su función de masa, su media, su varianza y calcular las siguientes probabilidades:

(a) 
$$P\{|X| \ge 4\}$$
.

(b) 
$$P\{|2-X|<2'7\}$$
.

## Problema 2

Los datos de la siguiente tabla de contingencia representan las frecuencias absolutas de esqueletos hallados en la necrópolis meroítica de Amir Abdallah (Abri, Nubia sudanesa, siglos IV-I a.C.) en función del Sexo del esqueleto y de la presencia o ausencia de ajuar en la tumba (Fernández, 2015):

	Varón	$\mathbf{Hembra}$
Ajuar	72	56
No ajuar	<b>7</b> 5	<b>7</b> 6

Determinar si puede aceptarse la independencia entre estas dos variables que forman la tabla de contingencia.

#### Problema 3

Los siguientes datos (Smith, 1977), muestran el porcentaje de desempleados, X, y la tasa de suicidios por millón, Y, en 11 ciudades de Estados Unidos. Determinar la recta de regresión de Y sobre X y contrastar si es o no significativa para predecir Y en función de X.

Ciudad	$\boldsymbol{X}$	$oldsymbol{Y}$
Nueva York	3'0	72
Los Ángeles	4'7	<b>224</b>
Chicago	3'0	82
Filadelfia	3'2	92
Detroit	3'8	104
Boston	2'5	71
San Francisco	4'8	<b>235</b>
Washington	2'7	81
Pittsburg	4'4	86
Sant Louis	3'1	102
Cleveland	3'5	104

La función de masa de la distribución de Poisson de parámetro 1'1 es (EBR-sección 4.4.2)

$$p_X(x) = \frac{e^{-1'1} \, 1' 1^x}{x!}$$

para x = 0, 1, 2, ....

Su media y su varianza son iguales al parámetro, por lo que

$$E[X] = V(X) = 1'1.$$

Las distribución de Poisson, como se ve por su función de masa, sólo toma valores no negativos, por lo que las probabilidades pedidas serán, utilizando la Tabla 2 de la distribución de Poisson,

(a) 
$$P\{|X| \ge 4\} = P\{X \ge 4\} = P\{X = 4\} + P\{X = 5\} + P\{X = 6\} + P\{X = 7\} = 0'0203 + 0'0045 + 0'0008 + 000'1 = 0'0257.$$
(b) 
$$P\{|2-X| < 2'7\} = P\{|X-2| < 2'7\} = P\{-2'7 < X - 2 < 2'7\} = P\{-0'7 < X < 4'7\} = P\{X < 4'7\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} + P\{X = 3\} + P\{X = 4\} = 0'3329 + 0'3662 + 0'2014 + 0'0738 + 0'0203 = 0.9946.$$

Las probabilidades anteriores se hubieran podido calcular con R (si no estuviera en el examen) utilizando la función dpois(x,a) que nos da el valor de la función de distribución de la Poisson de parámetro a en el punto x.

(a)

> 1-ppois(3,1.1)
[1] 0.02574182

(b)

> ppois(4.7,1.1)
[1] 0.9945647

Se trata de un contraste de independencia de caracteres (EBR-sección 8.2.4), en donde la hipótesis nula es que las variables que forman la tabla son independientes.

El estadístico de Pearson toma el valor

$$\lambda = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(n_{ij} - n_{i.} n_{.j} / n)^{2}}{n_{i.} n_{.j} / n} = 1'2037.$$

De la tabla 4 de la distribución chi-cuadrado de Pearson se obtiene que el p-valor es

$$P\{\chi_1^2 > 1'2037\} > 0'1$$

suficientemente grande como aceptar la hipótesis nula de independencia y concluir que incluían o no ajuar en las tumbas independientemente del sexo.

Las frecuencias esperadas en las celdillas son mayores que 5 por lo que no es necesario agrupar clases contiguas.

Si hubiéramos podido resolver el ejercicio con R hubiéramos ejecutado las siguientes sentencias.

```
> X<-matrix(c(72,56,75,76),ncol=2,byrow=T)</pre>
```

- > colnames(X)<-c("Varón","Hembra")</pre>
- > rownames(X)<-c("Ajuar","No ajuar")</pre>
- > chisq.test(X,correct=FALSE)

Pearson's Chi-squared test

data: X
X-squared = 1.2037, df = 1, p-value = 0.2726

y si calculamos las frecuencias esperadas,

vemos que no hay ninguna frecuencia esperada menor que 5.

# Problema 3

La recta de regresión es (EBR-sección 10.2)

$$Y = -93'86 + 59'05 X$$

Uno de los dos posibles tests para analizar su significación consiste en contrastar la hipótesis nula de que es cero el coeficiente de regresión de la variable independiente, X. Este test nos da un p-valor igual a 0'00249 y que sugiere, por tanto, que rechacemos la hipótesis nula de ser cero el coeficiente de regresión asociado a la variable independiente, es decir, podemos concluir con que la recta es significativa para explicar la tasa de suicidios en función del porcentaje de desempleados.

Si hubiéramos utilizado R (cosa imposible en el examen pero que puede ser útil para conocer cómo resolverlo con este paquete en otras ocasiones), hubiéramos ejecutado los siguientes comandos:

La recta de regresión solicitada será, por tanto,

$$Y = -93'86 + 59'05 X$$

El análisis de su significación lo podemos obtener ejecutando

```
> summary(recta)
Call:
lm(formula = y ~
Residuals:
            1Q Median
-79.985 -10.072 -1.308
                        16.314
Coefficients:
           Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
             -93.86
                         51.25 -1.831 0.10027
(Intercept)
              59.05
                         14.24
                               4.149 0.00249 **
X
```

Signif. codes: 0 '\*\*\* 0.001 '\*\* 0.01 '\* 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 36.06 on 9 degrees of freedom Multiple R-squared: 0.6566, Adjusted R-squared: 0.6185

F-statistic: 17.21 on 1 and 9 DF, p-value: 0.00249

# ESTADÍSTICA BÁSICA

Prueba Presencial de Septiembre. Curso 2019-2020

#### NOTAS IMPORTANTES:

- 1) Duración del examen: Dos horas.
- 2) Material permitido: Solamente una calculadora no programable y el original (no se permiten fotocopias, ni anotaciones, ni hojas sueltas dentro) de la Addenda "Fórmulas y tablas estadísticas".
  - 3) No es necesario entregar esta hoja de enunciados.
  - 4) Los tres problemas puntúan lo mismo.

#### Problema 1

Se supone que una variable aleatoria X asociada a un determinado experimento aleatorio sigue una distribución binomial de parámetros (10,0'3). Determinar su media, su varianza y calcular las siguientes probabilidades:

- (a)  $P\{0 < X < 3\}$ .
- (b)  $P\{|X| < 1'5\}$ .
- (c)  $P\{|1-X|<2'1\}$ .

# Problema 2

En la necrópolis de 6.200 años de antigüedad denominada "Campo de Hockey" en la antigua isla de San Fernando (Cádiz), se descubrieron 59 tumbas, en las que se detectó que el ADN del 20 % de ellas correspondía a cazadores y recolectores mientras que el resto eran de agricultores. A partir de estos datos, ¿podría concluirse que el porcentaje de cazadores y recolectores de esa comunidad era significativamente menor del 25 %? (lo que implicaría que esa comunidad cabría enmarcarla ya en el Neolítico).

## Problema 3

Se está realizando un ensayo clínico para analizar un nuevo medicamento antidepresivo. Para ello se seleccionaron al azar 12 individuos de los que a 4 (Grupo I) se les aplicó un placebo (es decir, no se les aplicó el medicamento), a 4 individuos se les aplicó una dosis baja del medicamento (Grupo II) y a otros 4 pacientes, la dosis normal (Grupo III). Los resultados obtenidos sobre su mejora en estado de ánimo fueron los siguientes:

Grupo I | 0'9 0'5 0'8 0'4 Grupo II | 1'1 0'9 1'3 1'2 Grupo III | 1'2 1'1 1'2 1'4 Utilizando un ANOVA, ¿puede concluirse que existen diferencias significativas entre los tres Grupos?

La distribución binomial B(n, p) viene definida en la sección 4.4.1 de EBR. Su media y su varianza son (página 115),

$$E[X] = n \cdot p = 10 \cdot 0'3 = 3.$$

$$V(X) = np(1-p) = 10 \cdot 0'3 \cdot 0'7 = 2'1.$$

Por otro lado, las probabilidades que nos piden calcular serán,

(a) 
$$P{0 < X < 3} = P{X = 1} + P{X = 2} = 0'1211 + 0'2335 = 0'3546.$$

(b) 
$$P\{|X| < 1'5\} = P\{-1'5 < X < 1'5\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = 0'0282 + 0'1211 = 0'1493.$$

(c) 
$$P\{|1-X| < 2'1\} = P\{|X-1| < 2'1\} = P\{-2'1 < X-1 < 2'1\} = P\{-1'1 < X < 3'1\} = P\{X=0\} + P\{X=1\} + P\{X=2\} + P\{X=3\} = 0'0282 + 0'1211 + 0'2335 + 0'2668 = 0'6496$$

usando la Tabla 1 de la Adenda.

## Problema 2

El ejercicio se puede modelar como en uno de inferencias sobre el parámetro p de una binomial con tamaños muestrales grandes (EBR-sección 7.3). Allí se especifica n > 30 como tamaño muestral grande y aquí tenemos 59 tumbas.

Nuestra inferencia se basa en analizar si puede admitirse que es p < 0'25, hipótesis que debe establecerse como alternativa. Se trata, por tanto, de un test de la hipótesis  $H_0: p \ge 0'25$  frente a la alternativa  $H_1: p < 0'25$  (página 207), aceptándose la hipótesis alternativa si

$$\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}} < z_{1-\alpha}.$$

Como no nos dan ningún nivel de significación y, además, como hay que calcular el p-valor, éste será

$$P\left\{Z < \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}\right\} = P\left\{Z < \frac{0'2 - 0'25}{\sqrt{0'25 \cdot 0'75/59}}\right\} = P\left\{Z < \frac{-0'05}{0'05637}\right\} = P\{Z < -0'887\}$$

siendo Z una variable con distribución N(0,1), ya que el sentido de la región crítica nos lo da la desigualdad anterior.

Por tanto, utilizando la Tabla 3 de la distribución normal, el p-valor será igual a

p-valor = 
$$P\{Z < -0'887\} = P\{Z > 0'887\} = 0'1902$$

suficientemente grande como para no poder rechazar la hipótesis nula, debiendo aceptarla, no pudiendo calificar, por tanto, a esa comunidad como del neolítico.

#### Problema 3

Se trata de un Análisis de la Varianza para un factor en un diseño completamente aleatorizado (EBR-sección 9.2) con el que se quiere contrastar la hipótesis nula de igualdad de la media de los tres grupos de pacientes, frente a la alternativa de no ser los tres iguales.

Para ello debemos determinar es la tabla de Análisis de la Varianza, la cual es

F. de variación	Suma de cuadrados	g.l.	c. medios	Estadístico
Grupos	$SST_i = \sum_{i=1}^r \frac{T_i^2}{n_i} - \frac{T^2}{n}$	r-1	$\frac{SST_i}{r-1}$	$SST_i/(r-1)$
Residual	$SSE = SST - SST_i$	n-r	$\frac{SSE}{n-r}$	$\overline{SSE/(n-r)}$
Total	$SST = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 - \frac{T^2}{n}$	n-1		

que, para los datos de nuestro problema resulta ser igual a

F. de variación	Suma de cuadrados	g.l.	c. medios	Estadístico
Grupos Residual	$SST_i = 0'755$ $SSE = 0'305$	2 9	0′3775 0′0339	F = 11'14
Total	SST = 1'06	11		

El estadístico F tiene, si es cierta la hipótesis nula, una distribución F de Snedecor con grados de libertad igual al par formado por los grados de libertad correspondientes a las fuentes de variación antes determinados, (r-1, n-r) = (2, 9), por lo que para determinar el punto crítico a, por ejemplo, un nivel de

significación  $\alpha = 0'05$ , buscaremos en la tabla de la F de Snedecor (Tabla 6) el valor  $F_{(2,9);0'05} = 4'2563$ . Al ser F = 11'14 mayor que dicho punto crítico, se rechaza  $H_0$  a ese nivel de significación, concluyendo con la existencia de diferencias significativas entre los tres Grupos.

De dicha tabla también se obtiene una acotación del p-valor:

p-valor = 
$$P\{F_{(2,9)} > 11'14\} < P\{F_{(2,9)} > 10'107\} = 0'005$$

suficientemente pequeño como para rechazar la hipótesis nula con claridad. Aunque no es posible en el examen, para resolver este ejercicio con R, EBR-sección 9.3, incorporaríamos los datos ejecutando las tres siguientes sentencias,

Al final de la fila (1) se observa el p-valor exacto que, al igual que el anterior, es lo suficientemente bajo como para concluir con el rechazo de la igualdad de los tres Grupos.

\_\_\_\_\_

EBR: Estadística Básica con R (2010). Alfonso García Pérez. Editorial UNED, Colección Grado (código: 6102104GR01A01).

- ADD: **Fórmulas y Tablas Estadísticas** (1998). Alfonso García Pérez. Editorial UNED, Colección Adendas (código: 41206AD01A01).
- ID: La Interpretación de los Datos. Una Introducción a la Estadística Aplicada (2014). Alfonso García Pérez, A. (2014). Editorial UNED, Colección Temática (código: 0105008CT01A01).
- PREB: **Problemas Resueltos de Estadística Básica** (1998). Alfonso García Pérez. Editorial UNED, Colección Educación Permanente (código: 0184011EP31A01).

- EEA: **Ejercicios de Estadística Aplicada** (2008). Alfonso García Pérez. Editorial UNED, Colección Cuadernos de la UNED (código: 0135284CU01A01).
- Fernández Martínez, V.M. (2015). Arqueo-Estadística. Métodos Cuantitativos en Arqueología. Alianza Editorial.
- Smith, D. (1977). *Patters in Human Geography*. Canada: Douglas David and Charles Ltd., 158.