Pregunta 1 (2 puntos)

Se consideran los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \left| x - \frac{1}{2} \right| \leqslant 2 \right\} \text{ y } B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 4x^2 - 8x - 5 < 0 \right\}$$

Obtenga $A \cap B$, $A \cup B$, $B \setminus A$ y $\overline{B}$, expresados mediante intervalos.

Pregunta 2 (2,5 puntos)

Se dice que una relación $\mathcal{R}$ en el conjunto U es circular si satisface la propiedad siguiente:

$$\forall x, y, z \in U \quad \text{si } x\mathcal{R}y \text{ e } y\mathcal{R}z, \text{ entonces } z\mathcal{R}x.$$

1. Si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia, ¿es $\mathcal{R}$ circular? ¿Por qué?
2. Si $\mathcal{R}$ es reflexiva y circular, ¿es $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia? ¿Por qué?

Pregunta 3 (3 puntos)

Se define en $\mathbb{N}$ la operación interna $\star$ y, por inducción, $a^{(n)}$ mediante:

$$a \star b = 2a + b \quad \text{y} \quad \begin{cases} a^{(1)} &= a \\ a^{(n+1)} &= a^{(n)} \star a \quad \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$$

1. Estudie si la operación $\star$ es conmutativa, asociativa, posee elemento neutro y en su caso, si todo elemento tiene simétrico.
2. Calcule $a^{(2)}$, $a^{(3)}$, $a^{(4)}$ y exprese $a^{(n)}$, respecto de las operaciones usuales de $\mathbb{N}$. Demuestre por inducción la validez de la expresión hallada para $a^{(n)}$ si $n \geqslant 1$.

Pregunta 4 (2,5 puntos)

Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación:

$$(z - 1 - i)(z + 1 + i)(z - 1 + i)(z + 1 - i) = 5$$