Geometría Básica

Capítulo III: Isometrías del plano

Jackie Harjani y Belén López.

UNED, C.A. Las Palmas

Marzo 2011

EJERCICIO 3.1

Sea $\tau \in Isom(P)$ una traslación y $c \subset P$ una recta tal que $\tau(c) = c$.

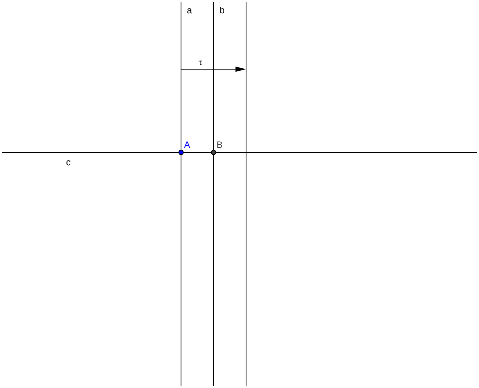
A. Para toda recta $a \perp c$ existen rectas $b, b' \perp c$, únicamente determinadas, tales que $\tau = \sigma_b \sigma_a = \sigma_a \sigma_{b'}$.

B. Para toda recta $r \subset P$ se tiene

$$\tau(r) = r \iff r \text{ es paralela a } c$$

Solución

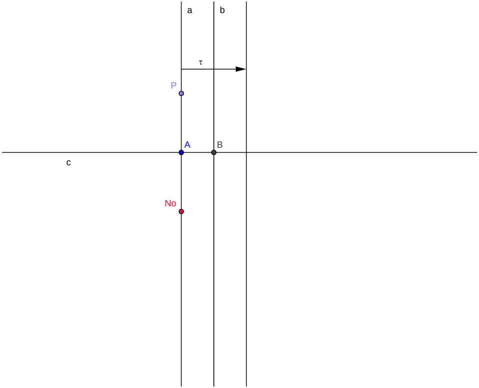
Sea A la intersección de las rectas a y c, B=medio$[A, \tau(A)]$ y b la recta que verifica $b \perp_B c$.



Podemos observar que $\sigma_b\tau$ realiza las siguientes transformaciones:

- Deja la recta c invariante: $\sigma_b\tau(c) = c$.
- El punto A queda fijo: $\sigma_b\tau(A) = A$.
- Los semiplanos determinados por la recta c son invariantes: $\sigma_b\tau(H^i) = H^i$.

$\sigma_b\tau$ es una isometría por ser composición de isometrías, por lo que mantendrá las distancias y la ortogonalidad en sus transformaciones.
Como la recta a es ortogonal a c, $\sigma_b\tau(a)$ será ortogonal a $\sigma_b\tau(c) = c$.
Por ser A un punto fijo y la recta c invariante la recta a también será invariante, pues su transformada por $\sigma_b\tau$ tiene que ser una recta ortogonal a c que pase por A y sólo existe una única recta cumpliendo estos requisitos: la recta a (ver Teorema 2.29).
Sea P un punto de a, entonces $d\big(\sigma_b\tau(P), \sigma_b\tau(A)\big) = d\big(\sigma_b\tau(P), A\big)$, con lo que $\sigma_b\tau(P)$ tiene que ser un punto de la recta a a la misma distancia de A que P. De las dos posibilidades sólo podemos quedarnos con $\sigma_b\tau(P) = P$ porque $\sigma_b\tau$ mantiene invariantes los semiplanos determinados por c (ver la figura siguiente).


a
b
τ
P
A
B
c
No

La recta a es una recta de puntos fijos y el Teorema 3.6 nos dice que o bien $\sigma_b\tau = \sigma_a$ o bien $\sigma_b\tau = id_P$. Este último caso implicaría

$$\sigma_b\tau = \mathrm{id}_P \Rightarrow (\sigma_b)^{-1}\sigma_b\tau = (\sigma_b)^{-1}\mathrm{id}_P \Rightarrow \tau = (\sigma_b)^{-1} \Rightarrow \tau = \sigma_b,$$

pero una traslación no tiene puntos fijos, por lo que llegamos a una contradicción.
Entonces tiene que ser $\sigma_b\tau = \sigma_a$ de donde $\tau = (\sigma_b)^{-1}\sigma_a = \sigma_b\sigma_a$.
Haciendo un razonamiento similar con τ^{-1}, que también es una traslación, obtenemos

$$\sigma_{b'}\tau^{-1} = \sigma_a \Rightarrow \tau^{-1} = \sigma_{b'}\sigma_a.$$

Aplicando las propiedades de la función inversa

$$\left(\tau^{-1}\right)^{-1} = \left(\sigma_{b'}\sigma_a\right)^{-1} \Rightarrow \tau = (\sigma_a)^{-1}(\sigma_{b'})^{-1} \Rightarrow \tau = \sigma_a\sigma_{b'}.$$

Veamos que la recta b es única.
Supongamos que existe otra recta r verificando $\tau = \sigma_r \sigma_a$. Entonces

$$\sigma_r \sigma_a = \sigma_b \sigma_a \Rightarrow \sigma_r \sigma_a (\sigma_a)^{-1} = \sigma_b \sigma_a (\sigma_a)^{-1} \Rightarrow \sigma_r = \sigma_b$$

y como una reflexión esta determinada por su eje, tenemos que $r = b$. Análogamente se prueba la unicidad de b'.

Solución apartado B.

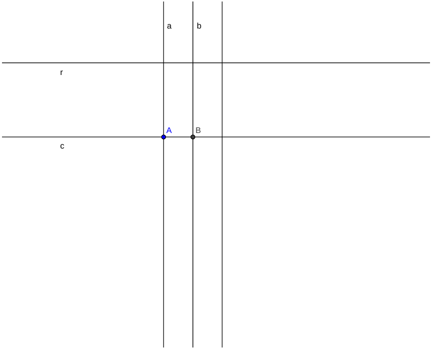
Para toda recta $r \subset P$ se tiene

$$\tau(r) = r \iff r \text{ es paralela a } c$$

$\Rightarrow$

$$\tau(r) = r \Rightarrow \tau(r \cap c) = \tau(r) \cap \tau(c) = r \cap c$$

pero por ser τ una traslación no tiene puntos, con lo que $r \cap c = \emptyset$.



$\Leftarrow$

Sabemos que $\tau = \sigma_b \sigma_a$, $a \perp c, b \perp c$. Si $r || c$ entonces $r \perp a$ y $r \perp b$ (ver Teorema 2.33). Como toda reflexión deja invariante las rectas ortogonales al eje (Teorema 2.26) tenemos que $\sigma_a(r) = r$ y $\sigma_b(r) = r$, de donde

$$\tau(r) = \sigma_b \sigma_a(r) = \sigma_b(r) = r.$$