Álgebra lineal I, Grado en Matemáticas

Prueba de Evaluación Continua, curso 2019/20

Matrices, Sistemas lineales y Espacios Vectoriales

Ejercicio 1: Demuestre por inducción que el rango de una matriz cuadrada A es mayor o igual que el rango de cualquiera de sus potencias A^k para todo $k \geq 1$.

Solución: Comenzamos demostrando el caso $k = 1$ que es trivial:

$$\operatorname{rg}(A) \geq \operatorname{rg}(A^1)$$

Hipótesis de inducción: suponemos que

$$\operatorname{rg}(A) \geq \operatorname{rg}(A^{k-1})$$

Demostramos el caso k:

$$A^k = A^{k-1}A,$$

por lo que aplicando la propiedad $\operatorname{rg}(AB) \leq \min\{\operatorname{rg}(A), \operatorname{rg}(B)\}$ tenemos que

$$\operatorname{rg}(A^k) = \operatorname{rg}(A^{k-1}A) \leq \min\{\operatorname{rg}(A^{k-1}), \operatorname{rg}(A)\} \leq \min\{\operatorname{rg}(A), \operatorname{rg}(A)\} = \operatorname{rg}(A)$$

donde en la segunda desigualdad hemos aplicado la hipótesis de inducción.

Por tanto, $\operatorname{rg}(A) \geq \operatorname{rg}(A^k)$ para todo $k \geq 1$. $\square$

Ejercicio 2: Sean $AX = B$ y $A'X = B'$ dos sistemas lineales con matrices ampliadas

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & b & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{y} \quad (A'|B') = \left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & -1 & 1-b & -a & 1 \\ 1 & 2a+1 & b+2 & a & 2 \\ -1 & 1 & b & a & 0 \end{array}\right)$$

Determine los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{K}$, si existen, para los cuales los sistemas lineales sean equivalentes, es decir tengan las mismas soluciones.

Solución:

Método 1: sin resolver los sistemas.

Los sistemas son equivalentes si y sólo son equivalentes al mismo sistema escalonado reducido. Es decir, si sus formas escalonadas reducidas (o formas de Hermite por filas) $H_f(A|B)$ y $H_f(A'|B')$ son iguales. Calculamos las formas escalonadas reducidas y se obtiene que:

$H_f((A|B)) = H_f((A'|B'))$ si y sólo si $a = 2$ y b arbitrario.

Método 2: comprobando en qué casos tienen las mismas soluciones.

En este caso, lo mejor es comenzar resolvieldo $AX = B$ que está escalonado, y comprobar en qué casos las soluciones obtenidas son todas las soluciones de $A'X = B'$

Soluciones del sistema $AX = B$: los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = 3 < \text{n}^{\underline{o}}.\ \text{incógnitas}$$

por lo tanto el sistema es compatible e indeterminado. Incógnitas principales: x_1, x_2 y x_3; incógnitas secundarias o parámetros $x_4 = \lambda$. Despejando las incógnitas principales se obtiene la solución general

$$\left(\frac{4}{3}\lambda + \frac{2}{3}b,\ -\frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{3}b,\ 1,\ \lambda\right) \text{ con } \lambda \in \mathbb{K}$$

A continuación sustituímos estas soluciones en las ecuaciones de $A'X = B'$ para ver si las cumplen.

Primera ecuación: $x_1 - x_2 + (1-b)x_3 - ax_4 = 1$

$$(\frac{4}{3}\lambda + \frac{2}{3}b) - (\frac{-2}{3}\lambda + \frac{-1}{3}b) + (1-b) - a\lambda = 1 \ \Leftrightarrow\ (2-a)\lambda = 0, \text{ para todo } \lambda \Rightarrow\ \mathbf{a = 2}$$

Segunda ecuación: $x_1 + 5x_2 + (b+2)x_3 + 2x_4 = 2$ (aquí ya hemos tenido en cuenta que $a = 2$)

$$-(\frac{4}{3}\lambda + \frac{2}{3}b) + 5(\frac{-2}{3}\lambda + \frac{-1}{3}b) + (b+2) + 2\lambda = 2 \ \Leftrightarrow\ 2 = 2, \quad \text{se cumple para todo } b.$$

Tercera ecuación: $-x_1 + x_2 + bx_3 + 2x_4 = 0$

$$-(\frac{4}{3}\lambda + \frac{2}{3}b) + (\frac{-2}{3}\lambda + \frac{-1}{3}b) + b + 2\lambda = 0 \ \Leftrightarrow\ 0 = 0, \quad \text{se cumple para todo } b.$$

Con esto hemos comprobado que todas las soluciones de $AX = B$ son soluciones de $A'X = B'$ si $a = 2$ y para todo b.

Para demostrar que los sistemas son equivalentes en los casos indicados hay que dar un paso más: asegurarse de que $A'X = B'$ no tiene más soluciones. Para ello basta demostrar que si $a = 2$ se cumple $\text{rg}(A') = \text{rg}(A'|B') = 3$ para todo b (así el sistema tendrá infinitas soluciones dependiendo de un parámetro).

Ejercicio 3: Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Demuestre que el conjunto $\mathcal{M}$ formado por las matrices que conmutan con A es un subespacio vectorial de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{K})$.
(b) Determine su dimensión y una base.

Solución:

(a) En primer lugar, observamos que para que una matriz M conmute con A debe ser cuadrada de orden 3, pues en otro caso no se podrían hacer los dos productos AM y MA. Luego $\mathcal{M} \subseteq \mathfrak{M}_3(\mathbb{K})$ y

$$\mathcal{M} = \{M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{K}) : AM = MA\}$$

Veamos que es un subespacio vectorial de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{K})$. Para ello basta demostrar que las operaciones de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{K})$: suma y producto por escalares son cerradas en $\mathcal{M}$.

- La suma es una operación interna en $\mathcal{M}$ si para todo $M, N \in \mathcal{M}$ se cumple $M+N \in \mathcal{M}$. Ahora, $M+N \in \mathcal{M}$ si y sólo si la matriz $M+N$ conmuta con A:

$$A(M+N) = AM + AN = MA + NA = (M+N)A$$

donde en la segunda igualdad hemos aplicado el hecho de que tanto M como N conmutan con A.

- El producto por escalares cumple que para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y para todo $M \in \mathcal{M}$ se tiene $\lambda M \in \mathcal{M}$ ya que

$$AM = MA \;\Rightarrow\; \lambda AM = \lambda MA \;\Rightarrow\; A(\lambda M) = (\lambda M)A \;\Leftrightarrow\; \lambda M \in \mathcal{M}$$

(b) Determinamos la forma de las matrices de $\mathcal{M}$:

$$AM = MA \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+2d & b+2e & c+2f \\ 2a+d & 2b+e & 2c+f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b & 2a+b & -c \\ d+2e & 2d+e & -f \\ g+2h & 2g+h & -i \end{pmatrix}$$

Igualando entradas se obtiene el sistema lineal

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a+2b = a+2d & \Longleftrightarrow & b = d \\ 2a+b = b+2e & \Longleftrightarrow & a = e \\ -c = c+2f & \Longleftrightarrow & -c = f \\ d+2e = 2a+d & \Longleftrightarrow & a = e \\ 2d+e = 2b+e & \Longleftrightarrow & b = d \\ -f = 2c+f & \Longleftrightarrow & -c = f \\ g+2h = -g & \Longleftrightarrow & g = -h \\ 2g+h = -h & \Longleftrightarrow & g = -h \\ -i = -i & & \end{array} \right.$$

luego

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & -c \\ g & -g & i \end{pmatrix} \;:\; a, b, c, g, i \in \mathbb{K} \right\}$$

que son unas ecuaciones paramétricas de $\mathcal{M}$ y de ahí podemos obtener un sistema de generadores

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son un sistema de generadores de $\mathcal{M}$. Además son linealmente independientes pues:

$$aM_1 + bM_2 + cM_3 + gM_4 + iM_5 = 0_{3\times 3} \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & -c \\ g & -g & i \end{pmatrix} = 0_{3\times 3} \;\Leftrightarrow\; a = b = c = g = i = 0$$

Por lo tanto, forman una base de $\mathcal{M}$ y $\dim \mathcal{M} = 5$. $\square$