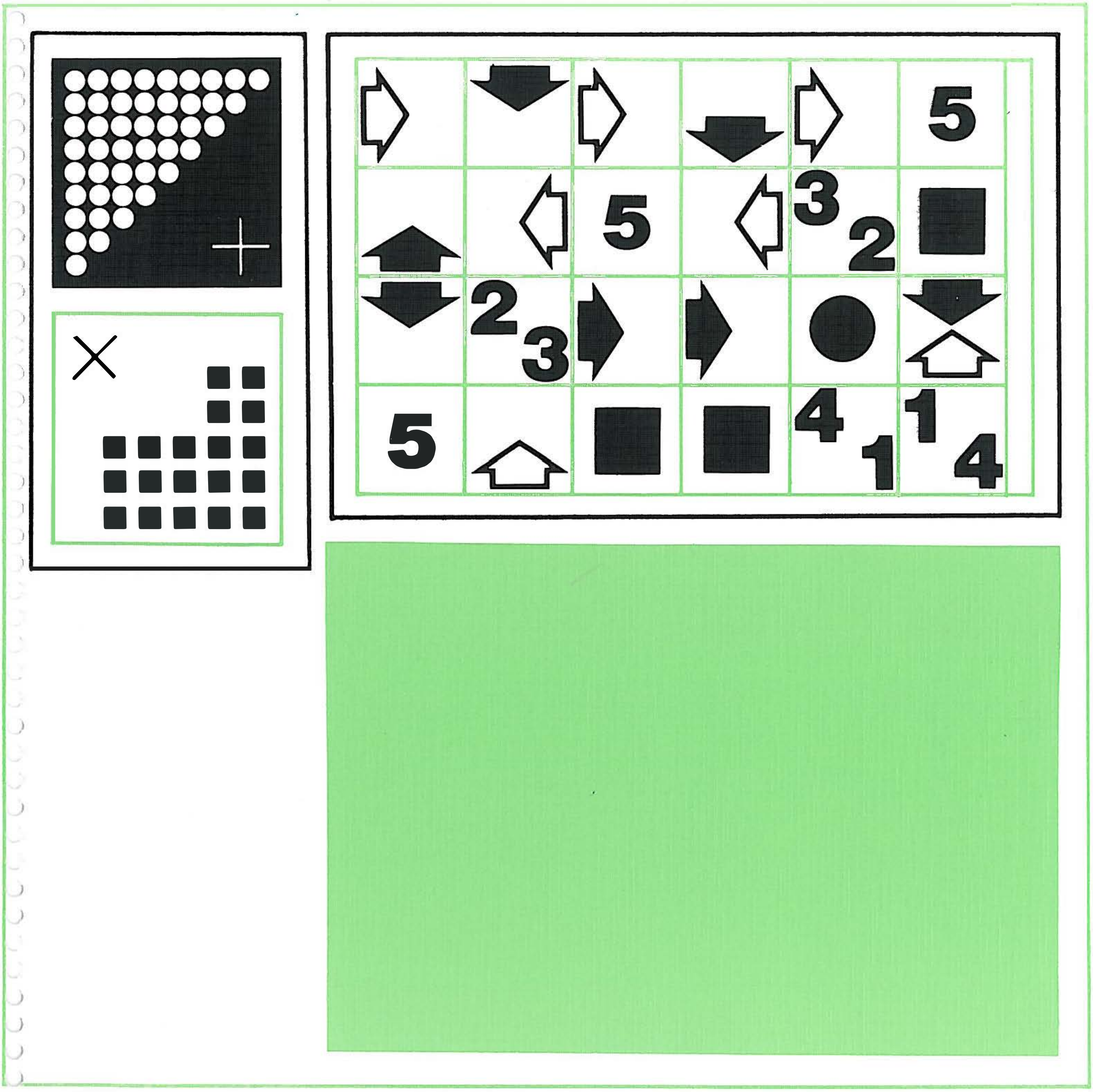
UNIVERSIDAD NACIONAL
DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

07121



ANÁLISIS MATEMÁTICO I
2

UNIDADES DIDÁCTICAS (0107121UD01A04)
ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Librería UNED: c/ Bravo Murillo, 38 - 28015 Madrid
Tels.: 91 398 75 60 / 73 73
e-mail: libreria@adm.uned.es

ISBN: 978-84-362-1669-1 (Tomo II)
ISBN: 978-84-362-1667-7 (Obra completa)
Depósito legal: M. 53.821-2009

Cuarta edición: julio de 1991
Undécima reimpresión: diciembre de 2009

Impreso por: Fernández Ciudad S.L.
Coto de Doñana, 10. 28320 Pinto (Madrid)
Impreso en España - Printed in Spain

UNIDADES DIDÁCTICAS

JESÚS FERNÁNDEZ NOVOA

ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Unidad Didáctica / 4

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

Tema I

Integrales impropias

Esquema/Resumen

1.1. *Integrales impropias de primera especie.*

1.2. *Criterios de comparación.*

1.3. *Convergencia absoluta.*

1.4. *Integrales impropias de segunda especie.*

Sea f una función integrable en todo intervalo $[a, \alpha]$, $\alpha \geqslant a$, y sea F la función que a cada $\alpha \geqslant a$ hace corresponder la integral de f en el intervalo $[a, \alpha]$. El par de funciones (f, F) se llama integral impropia de f en el intervalo $[a, +\infty]$ y se designa por $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$.

Se dice que la integral impropia $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ es convergente cuando existe y es finito el limite de F en $+\infty$, y si este límite es igual a $l(\in \mathbb{R})$, se dice que l es el valor de la integral impropia. Cuando el límite anterior no existe o es infinito, se dice que la integral impropia es divergente.

De manera análoga y para funciones f integrables en todo intervalo $[\alpha, a]$, $\alpha \leqslant a$, se definen las integrales impropias de la forma $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f$.

Sea ahora f una función integrable en todo intervalo cerrado. Si para algún $a \in \mathbb{R}$ las dos integrales impropias $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f$ y $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ son convergentes, se dice que la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f$ es convergente y su valor es, por definición, la suma de las dos integrales impropias anteriores. En otro caso, se dice que la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ es divergente.

Estas integrales impropias en las que el intervalo de integración I no es acotado y el integrando es una función acotada e integrable en todo intervalo cerrado contenido en I se llaman integrales impropias de primera especie.

En 1.2 y en 1.3 se establecen algunos criterios de convergencia para integrales impropias de primera especie.

En 1.4 se estudian las integrales impropias de segunda especie, es decir, las integrales en intervalos acotados de funciones no acotadas, y las integrales impropias de tipo mixto.

1.1. INTEGRALES IMPROPIAS DE PRIMERA ESPECIE

Sea $f:[a, +\infty)\to\mathbb{R}$ una función integrable en todo intervalo $[a, \alpha]$, $\alpha\geqslant a$ y sea $F:[a, +\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$F(\alpha)=\int_a^\alpha f(x)\,dx$$

para cada $\alpha\geqslant a$. El par de funciones (f, F) se llama *integral impropia* de f en el intervalo $[a, +\infty)$ y se designa por $\int_a^{+\infty} f$ o por $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Se dice que la integral impropia $\int_a^{+\infty} f$ es *convergente* cuando existe y es finito el límite

$$\lim_{\alpha\to+\infty} F(\alpha)=\lim_{\alpha\to+\infty}\int_a^\alpha f(x)\,dx$$

y si este límite es igual a l ($\in\mathbb{R}$), se escribe

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=l$$

y se dice que l es el valor de la integral impropia $\int_a^{+\infty} f$.

Cuando el límite anterior no existe o es infinito, se dice que la integral impropia $\int_a^{+\infty} f$ es *divergente*.

De manera análoga y para funciones $f:(-\infty, a]\to\mathbb{R}$ integrables en todo intervalo $[\alpha, a]$, $\alpha\leqslant a$, se definen las integrales impropias de la forma $\int_{-\infty}^{a} f$.

Sea ahora $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función integrable en todo intervalo cerrado. Si para algún $a\in\mathbb{R}$ las dos integrales $\int_{-\infty}^{a} f$ y $\int_{a}^{+\infty} f$ son convergentes, se dice que la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ es convergente y su valor es, por definición,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f=\int_{-\infty}^{a} f+\int_{a}^{+\infty} f.$$

En otro caso, se dice que la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ es divergente.

Ejemplos:

1. Sea $a>0$. La integral

$$\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^r}$$

es convergente si $r>1$ y divergente si $r\leqslant 1$ puesto que

$$\int_{a}^{\alpha}\frac{dx}{x^r}=\begin{cases}\dfrac{1}{r-1}\left(\dfrac{1}{a^{r-1}}-\dfrac{1}{\alpha^{r-1}}\right) & \text{si} \quad r\neq 1\\[2mm] \log\dfrac{\alpha}{a} & \text{si} \quad r=1\end{cases}$$

y, por tanto,

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_{a}^{\alpha}\frac{dx}{x^r}=\begin{cases}\dfrac{1}{(r-1)\,a^{r-1}} & \text{si} \quad r>1\\[2mm] +\infty & \text{si} \quad r\leqslant 1\end{cases}$$

2. De manera análoga, se ve que para todo $a<0$ la integral

$$\int_{-\infty}^{a}\frac{dx}{x^r}$$

es convergente si $r>1$ y divergente si $r\leqslant 1$.

3. La integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

converge y su valor es π, puesto que por ser

$$\lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\alpha \to -\infty} (-\operatorname{arc tg} \alpha) = \frac{\pi}{2}$$

y

$$\lim_{\beta \to +\infty} \int_{0}^{\beta} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\beta \to +\infty} \operatorname{arc tg} \beta = \frac{\pi}{2},$$

se tiene

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} = \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

y, por tanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

4. La integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x \, dx$$

es divergente puesto que para todo $a \in \mathbb{R}$ es

$$\int_{a}^{\alpha} \cos x \, dx = \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} a$$

y no existe

$$\lim_{\alpha \to +\infty} (\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} a)$$

Observaciones:

1. Sea $f\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función integrable en todo intervalo $[a, \alpha]$, $\alpha \geqslant a$. Si

es $b>a$, las integrales $\int_a^{+\infty} f$ y $\int_b^{+\infty} f$ convergen o divergen simultáneamente, puesto que

$$\int_a^{\alpha} f=\int_a^{b} f+\int_b^{\alpha} f$$

para todo $\alpha \geqslant a$.

Análogamente, si $f:(-\infty, a]\rightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable en todo intervalo $[\alpha, a]$, $\alpha \leqslant a$ y es $b<a$, las dos integrales $\int_{-\infty}^{a} f$ y $\int_{-\infty}^{b} f$ tienen el mismo carácter.

Sea ahora $f: \mathbb{R}\rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en todo intervalo cerrado. Se ha definido que la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ es convergente cuando y sólo cuando existe un $a \in \mathbb{R}$ tal que las dos integrales $\int_{-\infty}^{a} f$ y $\int_{a}^{+\infty} f$ son convergentes. Pues bien, el carácter de la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ no depende del punto a elegido y lo mismo ocurre con el valor de la integral cuando sea convergente.

2. Cuando la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ es convergente, su valor es el límite

$$\lim_{\alpha\rightarrow +\infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx.$$

Sin embargo, este limite puede existir sin que la integral sea convergente. Tal ocurre, por ejemplo, con la función $f(x)=2x$ para la que se verifica

$$\lim_{\alpha\rightarrow +\infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} 2x\,dx=\lim_{\alpha\rightarrow +\infty} (\alpha^2-\alpha^2)=0$$

pero la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ diverge, pues para todo $a \in \mathbb{R}$ es

$$\lim_{\alpha\rightarrow +\infty} \int_{a}^{\alpha} 2x\,dx=\lim_{\alpha\rightarrow +\infty} (\alpha^2-a^2)=+\infty$$

y, por tanto, la integral $\int_{a}^{+\infty} f$ diverge para todo $a \in \mathbb{R}$.

Se llama *valor principal* de la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ y se designa por

$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} f$ al límite

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx$$

cuando este límite existe y es finito.

1.2. CRITERIOS DE COMPARACION

En este párrafo y en el siguiente vamos a establecer algunos criterios de convergencia para integrales impropias de la forma $\int_a^{+\infty} f$. El enunciar y demostrar los criterios análogos para las integrales de la forma $\int_{-\infty}^{a} f$ constituirá sin duda un buen ejercicio para el lector.

Proposición: *Sea* $f:[a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *una función no negativa e integrable en todo intervalo* $[a, \alpha]$, $\alpha \geqslant a$. *Entonces la integral* $\int_a^{+\infty} f$ *converge si y sólo si la función* $F:[a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *definida por* $F(\alpha) = \int_a^{\alpha} f$ *está acotada superiormente.*

Demostración: Como f es no negativa, F es creciente y tendrá límite finito o infinito según que esté acotada superiormente o no.

Proposición. (Primer criterio de comparación): *Sean* f *y* g *dos funciones de* $[a, +\infty)$ *en* $\mathbb{R}$ *integrables en todo intervalo* $[a, \alpha]$, $\alpha \geqslant a$, *y supongamos que existe un* $b > a$ *tal que* $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ *para todo* $x \geqslant b$. *Si la integral* $\int_a g$ *es convergente, entonces la integral* $\int_a^{+\infty} f$ *es también convergente. Si la integral* $\int_a^{+\infty} f$ *es divergente, entonces la integral* $\int_a^{+\infty} g$ *es también divergente.*

Demostración: Supongamos, en primer lugar, que la integral $\int_a^{+\infty} g$ es convergente. Entonces la integral $\int_b^{+\infty} g$ es también convergente y como $g(x) \geqslant 0$ para todo $x \geqslant b$, la función $G:[b, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $G(\alpha) = \int_b^{\alpha} g$ está acotada superiormente. Por ser $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \geqslant b$, la función $F:[b, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $F(\alpha) = \int_b^{\alpha} f$ también está acotada superiormente, luego la integral $\int_b^{+\infty} f$ es convergente y, por tanto, la integral $\int_a^{+\infty} f$ es también convergente.

Supongamos ahora que la integral $\int_a^{+\infty} f$ es divergente. Entonces la integral $\int_b^{+\infty} f$ es también divergente y la función $F(\alpha)=\int_b^{\alpha} f$ no está acotada superiormente. Lo mismo ocurre con la función $G(\alpha)=\int_b^{\alpha} g$ y, por tanto, la integral $\int_b^{+\infty} g$ es divergente, luego la integral $\int_a^{+\infty} g$ es también divergente.

Proposición. (Segundo criterio de comparación): *Sean f y g dos funciones de $[a, +\infty)$ en $\mathbb{R}$ no negativas e integrables en todo intervalo $[a, \alpha]$, $\alpha \geqslant a$, y supongamos que*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}.$$

Si $l \neq 0$, entonces las dos integrales $\int_a^{+\infty} f$ y $\int_a^{+\infty} g$ tienen el mismo carácter. Si $l=0$ y la integral $\int_a^{+\infty} g$ es convergente, entonces la integral $\int_a^{+\infty} f$ es también convergente.

Demostración: Si $l \neq 0$, existe un $b \geqslant a$ tal que para todo $x \geqslant b$ se verifica

$$\frac{1}{2} l \leqslant \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \frac{3}{2} l$$

y, por tanto,

$$\frac{1}{2} l g(x) \leqslant f(x) \leqslant \frac{3}{2} l g(x)$$

y, para concluir, basta aplicar dos veces el primer criterio de comparación. (Obsérvese que por ser $l \neq 0$ las tres integrales

$$\int_a^{+\infty} g, \quad \int_a^{+\infty} \frac{1}{2} l g \quad \text{y} \quad \int_a^{+\infty} \frac{3}{2} l g$$

tienen el mismo carácter).

Si $l=0$, existe un $b \geqslant a$ tal que para todo $x \geqslant b$ se verifica

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 1$$

y, por tanto,

$$f(x) \leqslant g(x)$$

y el resultado se sigue también del primer criterio de comparación.

Observaciones:

1. En el segundo criterio de comparación, si $l=0$ y la integral $\int_a^{+\infty} g$ es divergente no se puede afirmar nada sobre el carácter de la integral $\int_a^{+\infty} f$. Esto se ve considerando, por ejemplo, las funciones $g(x)=x$, $f_1(x)=1/x$ y $f_2(x)=1/x^2$. La integral $\int_1^{+\infty} g$ es divergente. La integral $\int_1^{+\infty} f_1$ es divergente mientras que la integral $\int_1^{+\infty} f_2$ es convergente.

2. Como las dos integrales $\int_a^{+\infty} f$ y $\int_a^{+\infty} (-f)$ tienen el mismo carácter, si es $f(x)\leqslant 0$ para todo $x\geqslant a$, para estudiar el carácter de la integral $\int_a^{+\infty} f$, basta estudiar el carácter de la integral $\int_a^{+\infty} (-f)$.

3. Para poner en práctica los criterios de comparación debemos disponer de algunas integrales de carácter conocido. Uno de los tipos de integrales más utilizados para este objeto es el de las integrales de la forma

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^r} \quad , \quad a>0,$$

que como sabemos convergen cuando $r>1$ y divergen cuando $r\leqslant 1$.

Ejemplos:

1. Del primer criterio de comparación se deduce que la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\, dx$$

es convergente puesto que para todo $x\geqslant 1$ se verifica

$$0\leqslant\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\leqslant\frac{1}{x^2}$$

y la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

es convergente.

2. Por el segundo criterio de comparación resulta que la integral

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}\, dx$$

es convergente puesto que

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} \geqslant 0 \text{ para todo } x \geqslant 1$$

y además,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = 1$$

y la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

es convergente.

1.3. CONVERGENCIA ABSOLUTA

Proposición: *Sea $f:[a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función integrable en todo intervalo $[a, \alpha]$, $\alpha \geqslant a$. Si la integral $\int_a^{+\infty} |f|$ es convergente entonces la integral $\int_a^{+\infty} f$ es también convergente.*

Demostración: Para todo $x \geqslant a$ se verifica

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$$

y, por tanto,

$$0 \leqslant |f(x)| - f(x) \leqslant 2\, |f(x)|$$

Entonces, como la integral $\int_a^{+\infty} |f|$ es convergente, por el primer criterio de comparación la integral $\int_a^{+\infty} (|f| - f)$ es también convergente y de la igualdad

$$\int_a^{\alpha} f = \int_a^{\alpha} |f| - \int_a^{\alpha} (|f| - f)$$

se sigue la convergencia de la integral $\int_a^{+\infty} f$.

Observación: La recíproca de la proposición anterior no es cierta en general. Para ver esto consideremos la función $f(x)=\operatorname{sen} x/x$, $x \geqslant \pi$. Entonces

$$\int_\pi^{2^n\pi} |f| = \sum_{k=2}^{2^n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\, dx \geqslant \sum_{k=2}^{2^n} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\operatorname{sen} x|\, dx = \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{2^n} \frac{1}{k} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)\right]$$

$$> \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\pi}\,\frac{n}{2} = \frac{n}{\pi}$$

luego la función $F(\alpha)=\int_\pi^\alpha |f|$ no está acotada y, por tanto, la integral $\int_\pi^{+\infty} |f|$ es divergente.

Sin embargo, integrando por partes, resulta

$$\int_\pi^\alpha \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = -\frac{\cos\alpha}{\alpha} + \frac{\cos\pi}{\pi} - \int_\pi^\alpha \frac{\cos x}{x^2}\, dx$$

y como

$$\left|\frac{\cos\alpha}{\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{\alpha} \qquad \text{y} \qquad \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$$

se tiene

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\cos\alpha}{\alpha} = 0 \qquad \text{y} \qquad \int_\pi^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx \ \text{converge}$$

y, por tanto, existe y es finito el límite

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \int_\pi^\alpha \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

luego la integral $\int_\pi^{+\infty} f$ converge.

Definición: *Sea* $f:[a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *una función integrable en todo intervalo* $[a, \alpha]$, $\alpha \geqslant a$. *Se dice que la integral* $\int_a^{+\infty} f$ *es absolutamente convergente cuando la integral* $\int_a^{+\infty} |f|$ *es convergente. Se dice que la integral* $\int_a^{+\infty} f$ *es condicionalmente convergente o semiconvergente cuando la integral* $\int_a^{+\infty} f$ *es convergente pero la integral* $\int_a^{+\infty} |f|$ *es divergente.*

Según esto, la proposición anterior podría enunciarse diciendo que *la convergencia absoluta implica la convergencia.*

1.4. INTEGRALES IMPROPIAS DE SEGUNDA ESPECIE

1.4.1. Sea $f:[a, b) \to \mathbb{R}$ una función integrable en todo intervalo $[a, \alpha]$, $\alpha \in [a, b)$ y sea $F:[a, b) \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$F(\alpha) = \int_a^{\alpha} f(x)\, dx$$

para cada $\alpha \in [a, b)$. El par de funciones (f, F) se llama *integral impropia* de f en el intervalo $[a, b)$ y se designa por $\int_a^{b-} f$ o por $\int_a^{b-} f(x)\, dx$.

Se dice que la integral impropia $\int_a^{b-} f$ es *convergente* cuando existe y es finito el límite

$$\lim_{\alpha \to b-} F(\alpha) = \lim_{\alpha \to b-} \int_a^{\alpha} f(x)\, dx$$

y si este límite es igual a l $(\in \mathbb{R})$, se escribe

$$\int_a^{b-} f(x)\, dx = l$$

y se dice que l es el valor de la integral impropia $\int_a^{b-} f$.

Cuando el límite anterior no existe o es infinito, se dice que la integral impropia $\int_a^{b-} f$ es *divergente.*

De manera análoga y para funciones $f: (a, b] \to \mathbb{R}$ integrables en todo intervalo $[\alpha, b]$, $\alpha \in (a, b]$, se definen las integrales impropias de la forma $\int_{a+}^{b} f$.

Sea ahora $f\colon (a, b)\to\mathbb{R}$ una función integrable en todo intervalo cerrado contenido en (a, b). Si para algún $c\in(a, b)$ las dos integrales $\int_{a+}^{b} f$ y $\int_{a}^{b-} f$ son convergentes, se dice que la integral $\int_{a+}^{b-} f$ es convergente y su valor es, por definición,

$$\int_{a+}^{b-} f=\int_{a+}^{c} f+\int_{c}^{b-} f$$

En otro caso, se dice que la integral $\int_{a+}^{b-} f$ es divergente.

Ejemplos:

1. La integral

$$\int_{a}^{b-}\frac{dx}{(b-x)^r}$$

es convergente si $r<1$ y divergente si $r\geqslant 1$ puesto que

$$\int_{a}^{\alpha}\frac{dx}{(b-x)^r}=\begin{cases}\dfrac{1}{r-1}\left[\dfrac{1}{(b-a)^{r-1}}-\dfrac{1}{(b-\alpha)^{r-1}}\right] & \text{si} \quad r\neq 1\\[2ex] \log\dfrac{b-a}{b-\alpha} & \text{si} \quad r=1\end{cases}$$

y, por tanto,

$$\lim_{\alpha\to b-}\int_{a}^{\alpha}\frac{dx}{(b-x)^r}=\begin{cases}\dfrac{1}{(r-1)(b-a)^{r-1}} & \text{si } r<1\\ -\infty & \text{si } r>1\\ +\infty & \text{si } r=1\end{cases}$$

2. De manera análoga se ve que la integral

$$\int_{a+}^{b}\frac{dx}{(x-a)^r}$$

es convergente si $r<1$ y divergente si $r\geqslant 1$.

1.4.2. Las demostraciones de las cuatro proposiciones siguientes son análogas a las de 1.2 y 1.3.

Proposición: *Sea* $f\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ *una función no negativa e integrable en todo intervalo* $[a, \alpha]$, $\alpha \in [a, b)$. *Entonces la integral* $\int_a^{b-} f$ *converge si y sólo si la función* $F\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ *definida por* $F(\alpha) = \int_a^{\alpha} f$ *está acotada superiormente.*

Proposición. (Primer criterio de comparación): *Sean* f *y* g *dos funciones de* $[a, b)$ *en* $\mathbb{R}$ *integrables en todo intervalo* $[a, \alpha]$, $\alpha \in [a, b)$, *y supongamos que existe un* $c \in [a, b)$ *tal que* $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ *para todo* $x \in [c, b)$. *Si la integral* $\int_a^{b-} g$ *es convergente entonces la integral* $\int_a^{b-} f$ *es también convergente. Si la integral* $\int_a^{b-} f$ *es divergente entonces la integral* $\int_a^{b-} g$ *es también divergente.*

Proposición. (Segundo criterio de comparación): *Sean* f *y* g *dos funciones de* $[a, b)$ *en* $\mathbb{R}$ *no negativas e integrables en todo intervalo* $[a, \alpha]$, $\alpha \in [a, b)$, *y supongamos que*

$$\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}$$

Si $l \neq 0$ *entonces las dos integrales* $\int_a^{b-} f$ *y* $\int_a^{b-} g$ *tienen el mismo carácter. Si* $l = 0$ *y la integral* $\int_a^{b-} g$ *es es convergente entonces la integral* $\int_a^{b-} f$ *es también convergente*

Proposición: *Sea* $f\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ *una función integrable en todo intervalo* $[a, \alpha]$, $\alpha \in [a, b)$. *Si la integral* $\int_a^{b-} |f|$ *es convergente entonces la integral* $\int_a^{b-} f$ *es también convergente.*

Definición: *Sea* $f\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ *una función integrable en todo intervalo* $[a, \alpha]$, $\alpha \in [a, b)$. *Se dice que la integral* $\int_a^{b-} f$ *es absolutamente convergente cuando la integral* $\int_a^{b-} |f|$ *es convergente. Se dice que la integral* $\int_a^{b-} f$ *es condicionalmente convergente o semiconvergente cuando la integral* $\int_a^{b-} f$ *es convergente pero la integral* $\int_a^{b-} |f|$ *es divergente.*

Ejemplos:

1. Para determinar el carácter de la integral

$$\int_{0+}^{1-} \log x \log(1-x)\, dx$$

consideramos las dos integrales

$$\int_0^c \log x \, \log(1-x)\,dx \quad \text{y} \quad \int_c^{1-} \log x \, \log(1-x)\,dx$$

donde $c \in (0, 1)$. La primera de ellas es convergente en virtud del segundo criterio de comparación puesto que

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\log x \, \log(1-x)}{x^{-1}} = 0$$

y la integral $\int_{0+}^{c} x\,dx$ es convergente. Asimismo, del segundo criterio de comparación se deduce que la segunda integral es también convergente, puesto que,

$$\lim_{x \to 1-} \frac{\log x \, \log(1-x)}{(1-x)^{-1}} = 0$$

y la integral $\int_c^{1-} (1-x)\,dx$ es convergente. Por consiguiente, la integral

$$\int_{0+}^{1-} \log x \, \log(1-x)\,dx$$

es convergente.

2. Del primer criterio de comparación se deduce que la integral

$$\int_{-1}^{1-} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

es absolutamente convergente, puesto que

$$\left| \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-x}} \right| \leqslant \frac{1}{(1-x)^{1/2}}$$

y la integral

$$\int_{-1}^{1-} \frac{dx}{(1-x)^{1/2}}$$

es convergente.

1.4.3. También es posible considerar integrales impropias de tipo mixto, tales como $\int_{a+}^{+\infty} f$. Esta integral es convergente cuando existe un $b > a$ tal que las dos integrales $\int_{a+}^{b} f$ y $\int_{b}^{+\infty} f$ son convergentes y, en este caso, el valor de la integral $\int_{a+}^{+\infty} f$ es, por definición,

$$\int_{a+}^{+\infty} f = \int_{a+}^{b} f + \int_{b}^{+\infty} f$$

Ejemplo: Para determinar el carácter de la integral

$$\int_{1+}^{+\infty} \frac{\log x}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

consideramos las dos integrales

$$\int_{1+}^{b} \frac{\log x}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx \quad \text{y} \quad \int_{b}^{+\infty} \frac{\log x}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

donde $b>1$. La primera de ellas es convergente en virtud del segundo criterio de comparación, puesto que

$$\lim_{x\to 1+} (x-1)^{1/2} \frac{\log x}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to 1+} \frac{\log x}{x\sqrt{x+1}} = 0$$

y la integral

$$\int_{1+}^{b} \frac{dx}{(x-1)^{1/2}}$$

es convergente. Asimismo, del segundo criterio de comparación se deduce que la segunda integral es también convergente, puesto que

$$\lim_{x\to +\infty} x^{3/2} \frac{\log x}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{x^{1/2}\sqrt{1-1/x^2}} = 0$$

y la integral

$$\int_{b}^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$$

es convergente.

Ejercicios de autocomprobación

1. Probar que la integral

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x} \cos x\,dx$$

es convergente y calcular su valor.

2. Determinar el carácter de las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-x} \operatorname{sen} x}{\sqrt{x+1}}dx.$

b) $\displaystyle\int_{0+}^{1} \cos\frac{1}{x}dx.$

c) $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(1+e^{x})}}.$

3. Probar que las integrales

$$I=\int_{0+}^{\pi/2} \log \operatorname{sen} x\,dx \qquad \text{y} \qquad J=\int_{0}^{\pi/2-} \log \cos x\,dx$$

convergen y son iguales y calcular sus valores.

4. Sabiendo que

$$\int_{0+}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2},$$

probar las siguientes fórmulas:

$$\int_{0+}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_{0+}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^2} = \frac{\pi}{4}, \qquad \int_{0+}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^4} dx = \frac{\pi}{3}.$$

5. Calcular

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x \frac{1}{t} \operatorname{tg} \frac{\pi t}{2t+1} dt.$$

Soluciones a los ejercicios de autocomprobación

1. Sea $\alpha > 0$. Integrando por partes resulta

$$\int_0^{\alpha} e^{-x} \cos x \, dx = [e^{-x} \operatorname{sen} x]_0^{\alpha} + \int_0^{\alpha} e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx$$
$$= [e^{-x} \operatorname{sen} x]_0^{\alpha} + [-e^{-x} \cos x]_0^{\alpha} - \int_0^{\alpha} e^{-x} \cos x \, dx$$

y, por tanto,

$$2\int_0^{\alpha} e^{-x} \cos x \, dx = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{e^{\alpha}} - \frac{\cos \alpha}{e^{\alpha}} + 1$$

luego

$$\int_0^{\alpha} e^{-x} \cos x \, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{e^{\alpha}} - \frac{\cos \alpha}{e^{\alpha}} + 1\right)$$

y pasando al límite cuando α tiende a $+\infty$ se deduce que la integral propuesta es convergente y que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x \, dx = \frac{1}{2}.$$

2. a) Para $x \geqslant 0$ se tiene

$$\left|\frac{e^{-x} \operatorname{sen} x}{\sqrt{x+1}}\right| \leqslant \frac{e^{-x}}{\sqrt{x+1}} \leqslant e^{-x}$$

y como

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_0^\alpha e^{-x}\,dx=\lim_{\alpha\to+\infty}(1-e^{-\alpha})=1,$$

la integral $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ converge y, por el primer criterio de comparación, la integral propuesta converge absolutamente.

b) Sea $\alpha\in(0,1)$. Haciendo el cambio de variable $x=1/t$ resulta

$$\int_\alpha^1\cos\frac{1}{x}\,dx=\int_1^{1/\alpha}\frac{\cos t}{t^2}\,dt$$

y como

$$\left|\frac{\cos t}{t^2}\right|\leqslant\frac{1}{t^2}\qquad\text{y}\qquad\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}\ \text{converge,}$$

la integral

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2}\,dt$$

converge absolutamente, y pasando al límite cuando $\alpha\to0+$ en la igualdad anterior se deduce que la integral propuesta es convergente.

c) Sea $a>0$. Como

$$\lim_{x\to0+}\frac{x^{1/2}}{\sqrt{x(1+e^x)}}=\lim_{x\to0+}\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

y la integral $\int_{0+}^a x^{-1/2}\,dx$ converge, la integral

$$\int_{0+}^a\frac{dx}{\sqrt{x(1+e^x)}}$$

también converge. Como

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x(1+e^x)}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3}{1+e^x}}=0$$

y la integral $\displaystyle\int_a^{+\infty} x^{-2}\,dx$ converge, la integral

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(1+e^x)}}$$

también converge. Por tanto, la integral propuesta es convergente.

3. La integral

$$I_1 = \int_{0+}^{\pi/2} -\log \operatorname{sen} x\,dx$$

tiene el mismo carácter que I y su integrando es no negativo, y, como

$$\lim_{x\to 0+} \frac{-\log \operatorname{sen} x}{x^{-1/2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{(\cos x)/(\operatorname{sen} x)}{(1/2)x^{-3/2}} = \lim_{x\to 0+}\left(2\frac{x}{\operatorname{sen} x}x^{1/2}\cos x\right) = 0$$

y la integral $\displaystyle\int_{0+}^{\pi/2} x^{1/2}\,dx$ converge, por el segundo criterio de comparación I_1 converge y, por tanto, I converge.

Sea $\alpha \in (0,\ \pi/2)$. Haciendo el cambio de variable $x = \pi/2 - t$ resulta

$$\int_0^{\alpha} \log\cos x\,dx = -\int_{\pi/2}^{\pi/2-\alpha} \log\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)dt = \int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2} \log \operatorname{sen} t\,dt$$

y pasando al límite cuando $\alpha \to \pi/2-$ se obtiene $J = I$.

Sean ahora α y β dos números reales tales que $0 < \alpha < \beta < \pi/2$.

Se tiene

$$\int_\alpha^\beta \log \operatorname{sen} x\,dx + \int_\alpha^\beta \log\cos x\,dx = \int_\alpha^\beta \log\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\,dx =$$

$$= (\alpha - \beta)\log 2 + \int_\alpha^\beta \log \operatorname{sen} 2x\,dx =$$

$$= (\alpha - \beta)\log 2 + \frac{1}{2}\int_{2\alpha}^{2\beta} \log \operatorname{sen} t\,dt$$

y pasando al límite cuando $\alpha \to 0^+$ y $\beta \to \pi/2-$ resulta

$$I+J=-\frac{\pi}{2}\log 2+\frac{1}{2}\int_{0+}^{\pi-}\log \operatorname{sen} t\, dt=$$

$$=-\frac{\pi}{2}\log 2+\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi-}\log \operatorname{sen} t\, dt=$$

$$=-\frac{\pi}{2}\log 2+\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}I.$$

(Este último paso puede verse haciendo el cambio de variable $t=\pi-u$ en la última integral).

En consecuencia,

$$I+J=-\frac{\pi}{2}\log 2+I$$

y, por tanto,

$$I=J=-\frac{\pi}{2}\log 2.$$

4. Sean α y β dos números reales tales que $0<\alpha<\beta$. Integrando por partes resulta

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}dx=\left[-\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}\right]_{\alpha}^{\beta}+\int_{\alpha}^{\beta}\frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{x}dx=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\alpha}-\frac{\operatorname{sen}^2 \beta}{\beta}+\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\operatorname{sen} 2x}{x}dx=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\alpha}-\frac{\operatorname{sen}^2 \beta}{\beta}+\int_{2\alpha}^{2\beta}\frac{\operatorname{sen} t}{t}dt$$

y pasando al límite cuando $\alpha \to 0+$ y $\beta \to +\infty$ se obtiene

$$\int_{0+}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}dx=\int_{0+}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} t}{t}dt=\frac{\pi}{2}.$$

Por otra parte, como

$$\operatorname{sen}^4 x=\operatorname{sen}^2 x(1-\cos^2 x)=\operatorname{sen}^2 x-\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2x$$

se tiene

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^2}\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx - \frac{1}{4}\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{x^2}\,dx =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx - \frac{1}{2}\int_{2\alpha}^{2\beta} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}\,dt$$

y pasando al límite cuando $\alpha \to 0+$ y $\beta \to +\infty$ resulta

$$\int_{0+}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^2}\,dx = \int_{0+}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx - \frac{1}{2}\int_{0+}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}\,dt = \frac{\pi}{4}.$$

Finalmente,

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^4}\,dx = \left[-\frac{\operatorname{sen}^4 x}{3x^3}\right]_{\alpha}^{\beta} + \frac{4}{3}\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\operatorname{sen}^3 x \cos x}{x^3}\,dx =$$

$$= \left[-\frac{\operatorname{sen}^4 x}{3x^3}\right]_{\alpha}^{\beta} - \frac{4}{3}\left[\frac{\operatorname{sen}^3 x \ \cos x}{2x^2}\right]_{\alpha}^{\beta} + \frac{2}{3}\int_{\alpha}^{\beta} \frac{3\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x - \operatorname{sen}^4 x}{x^2}\,dx$$

y como

$$3\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x - \operatorname{sen}^4 x = 3\operatorname{sen}^2 x(1 - \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen}^4 x = 3\operatorname{sen}^2 x - 4\operatorname{sen}^4 x,$$

resulta

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^4}\,dx = \left[-\frac{\operatorname{sen}^4 x}{3x^3}\right]_{\alpha}^{\beta} - \frac{4}{3}\left[\frac{\operatorname{sen}^3 x \cos x}{2x^2}\right]_{\alpha}^{\beta} + 2\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx - \frac{8}{3}\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^2}\,dx$$

y pasando al límite cuando $\alpha \to 0+$ y $\beta \to +\infty$ se obtiene

$$\int_{0+}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^4}\,dx = 2\int_{0+}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx - \frac{8}{3}\int_{0+}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{3}.$$

5. La función $f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = \frac{1}{t}\operatorname{tg}\frac{\pi t}{2t+1}$$

para cada $t \geqslant 1$ es positiva y como

$$f(t) = \frac{1}{t}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi t}{2t+1}\right) = \frac{1}{t}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4t+2} = \frac{1}{t\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4t+2}},$$

se tiene

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t\ \mathrm{tg}\ \dfrac{\pi}{4t+2}} = \frac{4}{\pi}$$

y por el segundo criterio de comparación, las integrales

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,dt \qquad \text{y} \qquad \int_1^{+\infty} dt$$

tienen el mismo carácter. Como la segunda es divergente, también lo es la primera y, por tanto,

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t}\ \mathrm{tg}\ \frac{\pi t}{2t+1}\,dt = +\infty.$$

Además, f es continua y, por el primer teorema fundamental del cálculo, la función $F:[1,\ +\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$ es derivable y $F'(x)=f(x)$ para cada $x\geqslant 1$, y el límite pedido puede calcularse aplicando la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} F'(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{4}{\pi}$$

Tema II

Las funciones eulerianas

Esquema/Resumen

2.1. *La función gamma de Euler.*

2.2. *La función beta de Euler.*

2.3. *Algunas fórmulas notables.*

Muchos procesos de cálculo pueden abreviarse haciendo intervenir las funciones eulerianas. Dichas funciones vienen definidas por integrales impropias.

La función gamma de Euler es la función de $(0,+\infty)$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$\Gamma(p)=\int_{0+}^{+\infty} x^{p-1}\, e^{-x}\, dx$$

para cada número real positivo p.

La función beta de Euler es la función de $(0,\ +\infty)\times(0,\ +\infty)$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$\beta(p,\ q)=\int_{0+}^{1-} x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}\, dx$$

para cada par de números reales positivos p y q.

Mediante una integración por partes se prueba que $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$ para todo $p>0$. De esta relación resulta que $\Gamma(p+1)=p!$ para todo número natural p.

Con el cambio de variable $x=\operatorname{sen}^2 t$ se obtiene otra expresión útil de la función beta:

$$\beta(p,\ q)=2\int_{0+}^{\pi/2-} \operatorname{sen}^{2p-1} x \cos^{2q-1} x\ dx$$

En 2.3 se enuncian otras dos propiedades importantes de las funciones gamma y beta de Euler y, a partir de ellas, se obtienen algunos valores de estas funciones.

Los ejercicios de autocomprobación son ejemplos de cálculo de integrales mediante las funciones eulerianas.

2.1. LA FUNCION GAMMA DE EULER

Proposición: *La integral*

$$\int_{0+}^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} \, dx$$

es convergente si $p>0$.

Demostración: Probaremos que la integral

$$I=\int_{0+}^{1} x^{p-1} e^{-x} \, dx$$

es convergente cuando $p>0$ y que la integral

$$J=\int_{1}^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} \, dx$$

es convergente para todo $p \in \mathbb{R}$.

Si $p \geqslant 1$, I es convergente puesto que su integrando es una función contínua y, por tanto, integrable en $[0, 1]$. Si $0<p<1$, como para todo $x>0$ se verifica

$$0<x^{p-1} e^{-x}<x^{p-1}$$

y $1-p<1$, el primer criterio de comparación prueba que I es convergente.

Por otra parte, como

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{p-1} e^{-x}}{x^{-2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{p+1}}{e^{x}} = 0,$$

la convergencia de J se sigue del segundo criterio de comparación

Definición: *La función gamma de Euler es la función* $\Gamma:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ *definida por*

$$\Gamma(p)=\int_{0+}^{+\infty} x^{p-1}\, e^{-x}\, dx$$

para cada $p\in(0,+\infty)$.

Proposición: *Para todo* $p>0$ *se verifica*

$$\Gamma(p+1)=p\,\Gamma(p)$$

Demostración: Sean α y β dos números reales tales que $0<\alpha<\beta$. Integrando por partes resulta

$$\int_{\alpha}^{\beta} x^{p}\, e^{-x}\, dx=\alpha^{p}\, e^{-\alpha}-\beta^{p}\, e^{-\beta}+p\int_{\alpha}^{\beta} x^{p-1}\, e^{-x}\, dx$$

y pasando al límite cuando $\alpha\to 0+$ y $\beta\to+\infty$ se obtiene

$$\Gamma(p+1)=p\,\Gamma(p)$$

En particular, si $p\in\mathbb{N}$,

$$\Gamma(p+1)=p(p-1)\dots 2.1.\;\;\Gamma(1)$$

y como

$$\Gamma(1)=\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\, dx=\lim_{\beta\to+\infty}(1-e^{-\beta})=1,$$

resulta

$$\Gamma(p+1)=p!$$

2.2. LA FUNCION BETA DE EULER

Proposición: *La integral*

$$\int_{0+}^{1-} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx$$

es convergente para $p>0$ *y* $q>0$.

Demostración: Como

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{x^{p-1}} = 1 = \lim_{x\to 1-} \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1-x)^{q-1}}$$

por el segundo criterio de comparación las integrales

$$\int_{0+}^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \qquad \text{y} \qquad \int_{1/2}^{1-} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

son convergentes si y sólo si las integrales

$$\int_{0+}^{1/2} \frac{dx}{x^{1-p}} \qquad \text{y} \qquad \int_{1/2}^{1-} \frac{dx}{(1-x)^{1-q}}$$

lo son, y esto último ocurre cuando y sólo cuando $p>0$ y $q>0$.

Definición: *La función beta de Euler es la función $\beta:(0, +\infty)\times(0, +\infty)\to\mathbb{R}$ definida por*

$$\beta(p, q) = \int_{0+}^{1-} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

para cada par de números reales positivos p y q.

Proposición: *Para cada par de números reales positivos p y q se verifica*

$$\beta(p, q) = 2\int_{0+}^{\pi/2-} \operatorname{sen}^{2p-1} x \cos^{2q-1} x\, dx$$

Demostración: Sean ξ y η dos números reales tales que $0<\xi<\eta<1$. Con el cambio de variable $x=\operatorname{sen}^2 t$ se obtiene

$$\int_{\xi}^{\eta} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = 2\int_{\operatorname{arc\,sen}\sqrt{\xi}}^{\operatorname{arc\,sen}\sqrt{\eta}} \operatorname{sen}^{2p-1} t \cos^{2q-1} t\, dt$$

de donde, haciendo tender ξ a 0 por la derecha y η a 1 por la izquierda, se sigue el resultado.

2.3. ALGUNAS FORMULAS NOTABLES

Otras propiedades importantes de las funciones gamma y beta de Euler que admitiremos sin demostración son las siguientes:

1. $\beta(p,\ q)=\dfrac{\Gamma(p)\ \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, (p>0,\ q>0)$

2. $\Gamma(p)\,\Gamma(1-p)=\dfrac{\pi}{\operatorname{sen} p\,\pi}, (0<p<1)$

La propiedad 2 se conoce con el nombre de *fórmula de los complementos.*

En particular, como

$$\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{\pi/2} dt=\pi$$

resulta

$$\pi=\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(1)}=\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$$

y como $\Gamma(p)>0$ para todo $p>0$,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

y, por inducción, resulta que para todo $p \in \mathbb{N}$ se verifica

$$\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2p-1)!!}{2^p}\sqrt{\pi}$$

(Con el símbolo $(2p-1)!!$ se designa el *semifactorial* de $2p-1$ que, por definición, es el producto $(2p-1)\ (2p-3)\ \cdots\ 5.3.1$. Análogamente, el semifactorial de $2p$ es $(2p)!!=(2p)\ (2p-2)\ \cdots\ 6.4.2$.)

Ejercicios de autocomprobación

Calcular las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$

2. $\displaystyle\int_{0+}^{1} x^3 \log x\,dx.$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx \quad , \quad n \in \mathbb{N}.$

4. $\displaystyle\int_{0+}^{\pi/2-} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}$

6. $\displaystyle\int_{-1+}^{1-} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)^2\,(1-x)}}$

Soluciones de los ejercicios de autocomprobación

1. *Sea* $\alpha > 0$. Haciendo el cambio de variable $x^2 = t$ resulta

$$\int_0^{\alpha} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\alpha^2} t^{-1/2}\,e^{-t}\,dt$$

y pasando al limite cuando $\alpha \to +\infty$ se obtiene

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

2. Sea $\alpha \in (0,\ 1)$. Con el cambio $\log x = -t/4$ se deduce

$$\int_{\alpha}^{1} x^3 \log x\,dx = -\frac{1}{16}\int_0^{-4\log\alpha} t\,e^{-t}\,dt$$

y pasando al limite cuando $\alpha \to 0+$ resulta

$$\int_{0+}^{1} x^3 \log x\,dx = -\frac{1}{16}\Gamma(2) = -\frac{1}{16}$$

3. Se tiene

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Ahora bien, si $n=2k-1$,

$$\frac{1}{2}\beta\left(\frac{n+1}{2},\ \frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\beta\left(k,\ \frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(k)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{(k-1)!\ 2^{k-1}}{(2k-1)!!}=\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}=$$

$$=\frac{(n-1)!!}{n!!}$$

y si $n=2k$,

$$\frac{1}{2}\beta\left(\frac{n+1}{2},\ \frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\beta\left(k+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k+1)}=$$

$$=\frac{1}{2}\ \frac{(2k-1)!!\ \pi}{2^k\cdot k!}=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\ \frac{\pi}{2}=$$

$$=\frac{(n-1)!!}{n!!}\ \frac{\pi}{2},$$

luego

$$\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^n x\,dx=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!} & \text{si } n \text{ es impar}\\[2ex] \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2} & \text{si } n \text{ es par}\end{cases}$$

4. $$\int_{0+}^{\pi/2-}\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}=\int_{0+}^{\pi/2-}\operatorname{sen}^{-1/2}x\ \cos^{1/2}x\,dx=\frac{1}{2}\beta\left(\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\ \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(1)}=\frac{1}{2}\ \frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

5. Sea $\alpha > 0$. Haciendo el cambio $x^3 = \operatorname{tg} t$ se obtiene

$$\int_0^{\alpha} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{1}{3}\int_0^{\operatorname{arc\,tg}\alpha^3} \operatorname{sen}^{-2/3} t \cos^{2/3} t \, dt$$

y pasando al límite cuando $\alpha \to +\infty$ resulta

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{1}{6}\beta\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right) = \frac{1}{6}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{6 \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3}$$

6. Sean ξ y η dos números reales tales que $0 < \xi < \eta < 1$. Haciendo el cambio de variable $x = 2t - 1$ resulta

$$\int_{\xi}^{\eta} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)}} = \int_{(\xi+1)/2}^{(\eta+1)/2} t^{-2/3}(1-t)^{-1/3} \, dt$$

y pasando al límite cuando $\xi \to -1+$ y $\eta \to 1-$ se obtiene

$$\int_{-1+}^{1-} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)}} = \beta\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

Tema III

Límites superior e inferior de una sucesión de números reales.

Esquema/Resumen

3.1. *Subsucesiones.*

3.2. *Puntos de aglomeración.*

3.3. *Límites superior e inferior.*

En este tema se estudian algunas cuestiones complementarias sobre sucesiones de números reales que se utilizarán en los temas posteriores.

Cuatro son los nuevos conceptos introducidos en el tema: el de subsucesión o sucesión extraída de otra, el de punto de aglomeración de una sucesión y los de límite superior e inferior de una sucesión de números reales.

Se dice que una sucesión (b_n) es una subsucesión o una sucesión extraída de otra (a_n) cuando existe una aplicación f de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $b_n = a_{f(n)}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Se dice que un $a \in \overline{\mathbb{R}}$ es un punto de aglomeración de una sucesión (a_n) cuando existe una subsucesión (b_n) de (a_n) que tiene por límite a.

El límite superior de una sucesión (a_n) de números reales es el límite de la sucesión (b_n) definida por $b_n = \sup\{a_k : k \geqslant n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ en el caso de que la sucesión (a_n) esté acotada superiormente, y $+\infty$ en otro caso.

El límite inferior de una sucesión (a_n) de números reales es el límite de la sucesión (b_n) definida por $b_n = \inf\{a_k : k \geqslant n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ en el caso de que la sucesión (a_n) esté acotada inferiormente, y $-\infty$ en otro caso.

3.1. SUBSUCESIONES

Definición: *Sean* (a_n) *y* (b_n) *dos sucesiones de números reales. Se dice que* (b_n) *es una subsucesión o una sucesión extraída de la* (a_n) *cuando existe una aplicación* $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *estrictamente creciente tal que* $b_n = a_{f(n)}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo: Sea (a_n) la sucesión de números reales definida por $a_n = (-1)^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Las sucesiones (b_n) y (c_n) definidas, respectivamente, por $b_n = -1$ y $c_n = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$ son dos subsucesiones de (a_n), pues para $f(n) = 2n-1$ y $g(n) = 2n$ se tiene $b_n = a_{f(n)}$ y $c_n = a_{g(n)}$.

Proposición: *Si* (a_n) *es una sucesión de números reales tal que* $\lim\limits_n a_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$ *y* (b_n) *es una subsucesión de la* (a_n) *entonces* $\lim\limits_n b_n = a$.

Demostración: Sea $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una aplicación estrictamente creciente tal que $b_n = a_{f(n)}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Se tiene $f(1) \geqslant 1$ y, si $f(n-1) \geqslant n-1$, entonces $f(n) > n-1$, ya que f es estrictamente creciente. Por consiguiente, $f(n) \geqslant n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Además, para cada entorno $N(a)$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in N(a)$ para todo $n \geqslant n_0$. Pero para todo $n \geqslant n_0$ es $f(n) \geqslant n \geqslant n_0$ y, por tanto, $b_n = a_{f(n)} \in N(a)$, luego, efectivamente, $\lim\limits_n b_n = a$.

Proposición: *Sean* (a_n) *una sucesión de números reales,* f *y* g *dos aplicaciones de* $\mathbb{N}$ *en* $\mathbb{N}$ *estrictamente crecientes y tales que* $f(\mathbb{N}) \cup g(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$ *y* (b_n) *y* (c_n) *las subsucesiones de* (a_n) *definidas, respectivamente, por* $b_n = a_{f(n)}$ *y* $c_n = a_{g(n)}$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$. *Si*

$$\lim_n b_n = \lim_n c_n = a \in \overline{\mathbb{R}},$$

entonces

$$\lim_n a_n = a$$

Demostración: Para cada entorno $N(a)$ existen dos números naturales n_1 *y* n_2 tales que $b_n \in N(a)$ para todo $n \geqslant n_1$ y $c_n \in N(a)$ para todo $n \geqslant n_2$. Sea $n_0 = \max\{f(n_1), g(n_2)\}$ y consideremos un $n \geqslant n_0$. Como $f(\mathbb{N}) \cup g(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$ existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $n = f(m)$ o $n = g(m)$. Si $n = f(m)$ entonces $f(m) \geqslant f(n_1)$ y, por tanto, $m \geqslant n_1$, luego $a_n = b_m \in N(a)$. Análogamente, si $n = g(m)$, entonces $m \geqslant n_2$ y, por tanto, $a_n = c_m \in N(a)$. Por consiguiente, para cada entorno $N(a)$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in N(a)$ para todo $n \geqslant n_0$, luego, $\lim_n a_n = a$.

Ejemplo: Sea (a_n) la sucesión de números reales definida por

$$a_n = \begin{cases} 1/n & \text{si } n \text{ es impar} \\ 1/n^2 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

y sean (b_n) y (c_n) las subsucesiones de (a_n) definidas, respectivamente, por

$$b_n = a_{2n-1} = \frac{1}{2n-1} \qquad \text{y} \qquad c_n = a_{2n} = \frac{1}{4n^2}$$

Si $f(n) = 2n-1$ y $g(n) = 2n$ se tiene $f(\mathbb{N}) \cup g(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, y como $\lim_n b_n = \lim_n c_n = 0$, también $\lim_n a_n = 0$.

Proposición: *De toda sucesión de números reales se puede extraer una subsucesión monótona.*

Demostración: Sea (a_n) una sucesión de números reales y sea A el conjunto de los números naturales n tales que $a_n > a_m$ para todo $m > n$. Puede ocurrir que A sea vacio, finito o infinito.

Si A es vacío o finito, existe un $n_1 \in \mathbb{N}$ mayor que todos los elementos de A. Como $n_1 \notin A$, existe un $n_2 > n_1$ tal que $a_{n_2} \geqslant a_{n_1}$. Como $n_2 \notin A$, existe un $n_3 > n_2$ tal que $a_{n_3} \geqslant a_{n_2}$. Continuando este proceso, se construye una sucesión $(b_k) = (a_{n_k})$ que es una subsucesión creciente de (a_n).

Si A es infinito y $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ son los infinitos elementos de A, según la definición de A se tiene $a_{n_1} > a_{n_2} > a_{n_3} > \ldots$, y $(b_k) = (a_{n_k})$ es una subsucesión creciente de (a_n).

Proposición: *De toda sucesión acotada de números reales se puede extraer una subsucesión convergente.*

Demostración: Sea (a_n) una sucesión acotada de números reales. Por la proposición anterior, de (a_n) se puede extraer una subsucesión (b_n) monótona y como (a_n) es acotada, también lo es (b_n), luego (b_n) es convergente.

3.2. PUNTOS DE AGLOMERACION

3.2.1. **Definición**: *Se dice que un* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *es punto de aglomeración de una sucesión* (a_n) *de números reales cuando existe una subsucesión* (b_n) *de* (a_n) *tal que* $\lim\limits_n b_n = a$.

Ejemplos:

1. La sucesión (a_n) definida por $a_n = (-1)^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tiene como puntos de aglomeración -1 y 1, puesto que

$$\lim_n a_{2n-1} = \lim_n (-1)^{2n-1} = -1 \quad \text{y} \quad \lim_n a_{2n} = \lim_n (-1)^{2n} = 1.$$

2. La sucesión (a_n) definida por $a_n = (-1)^n n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tiene como puntos de aglomeración $-\infty$ y $+\infty$, puesto que

$$\lim_n a_{2n-1} = \lim_n \ -(2n-1) = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_n a_{2n} = \lim_n 2n = +\infty.$$

Proposición: *Si* (a_n) *es una sucesión de números reales tal que* $\lim\limits_n a_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$, *entonces a es el único punto de aglomeración de* (a_n).

Demostración: Para toda subsucesión (b_n) de (a_n) se verifica $\lim\limits_n b_n = a$.

Proposición: *Toda sucesión de números reales tiene al menos un punto de aglomeración.*

Demostración: De toda sucesión de números reales se puede extraer una subsucesión monótona que tendrá límite finito o infinito según esté acotada o no.

3.2.2. La siguiente proposición nos da una caracterización importante de los puntos de aglomeración de una sucesión de números reales.

Proposición: *Un* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *es punto de aglomeración de una sucesión de números reales si y sólo si para cada entorno* $N(a)$ *y cada número natural m existe otro número natural* $n \geqslant m$ *tal que* $a_n \in N(a)$.

Demostración: Supongamos, en primer lugar, que a es punto de aglomeración de (a_n). Entonces existe una aplicación $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que la sucesión (b_k) definida por $b_k = a_{f(k)}$ para cada $k \in \mathbb{N}$ tiene por límite a, y, por tanto, para cada entorno $N(a)$ existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b_k \in N(a)$ para todo $k \geqslant k_o$, y si m es un número natural arbitrario y $k = \max\{k_0, m\}$ el número $n = f(k)$ verifica la condición del enunciado, puesto que $a_{f(k)} = b_k \in N(a)$ y $f(k) \geqslant k \geqslant m$.

Recíprocamente, supongamos que se verifica la condición del enunciado y, para cada $k \in \mathbb{N}$, pongamos

$$N_k(a) = \begin{cases} (a-1/k,\ a+1/k) & \text{si} \quad a \in \mathbb{R} \\ (k,\ +\infty] & \text{si} \quad a = +\infty \\ [-\infty,\ k) & \text{si} \quad a = -\infty \end{cases}$$

Sea n_1 un número natural tal que $a_{n_1} \in N_1(a)$. Por hipótesis, existe un número natural $n_2 > n_1$ tal que $a_{n_2} \in N_2(a)$ y, por inducción, se obtiene una sucesión creciente de números naturales (n_k) tal que $a_{n_k} \in N_k(a)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Es evidente que la subsucesión $(b_k) = (a_{n_k})$ de (a_n) así obtenida tiene por límite a, luego a es punto de aglomeración de (a_n).

3.3. LIMITES SUPERIOR E INFERIOR

3.3.1. Sea (a_n) una sucesión de números reales y, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos el conjunto $A_n = \{a_k : k \geqslant n\}$.

Si la sucesión (a_n) está acotada superiormente, existe $\sup A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y como $A_{n+1} \subset A_n$ se tiene $\sup A_{n+1} \leqslant \sup A_n$, luego la sucesión $(\sup A_n)$ es decreciente y, por tanto, tiene límite en $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\lim_n (\sup A_n) = \inf \{\sup A_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Este límite es un número real o $-\infty$ según que la sucesión $(\sup A_n)$ esté acotada inferiormente o no.

Análogamente, si la sucesión (a_n) está acotada inferiormente, existe $\inf A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la sucesión $(\inf A_n)$ es creciente y, por tanto, tiene límite en $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\lim_n (\inf A_n) = \sup \{\inf A_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Este límite es un número real o $+\infty$ según que la sucesión $(\inf A_n)$ esté acotada superiormente o no.

Definición: *Sea (a_n) una sucesión de números reales y, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos el conjunto $A_n = \{a_k : k \geqslant n\}$.*

Se llama límite superior de la sucesión (a_n) y se designa por $\overline{\lim_n}\, a_n$ al elemento de $\overline{\mathbb{R}}$ definido por

$$\overline{\lim_n}\, a_n = \begin{cases} (\sup A_n) & \textit{si } (a_n) \textit{ está acotada superiormente} \\ +\infty & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Se llama límite inferior de la sucesión (a_n) y se designa por $\underline{\lim}_n\, a_n$ al elemento de $\overline{\mathbb{R}}$ definido por

$$\underline{\lim_n}\, a_n = \begin{cases} \lim_n (\inf A_n) & \textit{si } (a_n) \textit{ está acotada inferiormente} \\ -\infty & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

3.3.2. Si (a_n) es una sucesión acotada superiormente, su límite superior puede ser un número real o $-\infty$.

Proposición: *Sea (a_n) una sucesión de números reales y sea $a \in \mathbb{R}$. Entonces $\overline{\lim_n}\, a_n = a$ si y sólo si se verifican las dos condiciones siguientes:*

1. *Para cada $x > a$ existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < x$ para todo $n \geqslant m$.*

2. *Para cada $y < a$ y cada número natural m existe otro número natural $n \geqslant m$ tal que $a_n > y$.*

Demostración: Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $A_n = \{a_k : k \geqslant n\}$.

Por definición de límite superior es $\overline{\lim_n}\, a_n = a \in \mathbb{R}$ si y sólo si $\inf\{\sup A_n : n \in \mathbb{N}\} = a \in \mathbb{R}$, y esto ocurre cuando y sólo cuando se verifican las dos condiciones siguientes:

a) Para cada $x > a$ existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $\sup A_m < x$.

b) Para cada $y < a$ y para cada número natural m es $y < \sup A_m$.

Pero estas dos condiciones son, respectivamente, equivalentes a las dos condiciones del enunciado.

Proposición: *Sea (a_n) una sucesión de números reales. Entonces $\overline{\lim_n}\, a_n = -\infty$ si y sólo si $\lim_n a_n = -\infty$.*

Demostración: Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $A_n = \{a_k : k \geqslant n\}$. Será $\overline{\lim_n}\, a_n = -\infty$ si y sólo si la sucesión $(\sup A_n)$ no está acotada inferiormente, es decir, si y sólo si para cada $c \in \mathbb{R}$ existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $\sup A_m < c$, y esto ocurre cuando y sólo cuando para cada $c \in \mathbb{R}$ existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < c$ para todo $n \geqslant m$, o sea, cuando y sólo cuando $\lim_n a_n = -\infty$.

3.3.3. De manera análoga se demuestran las dos proposiciones siguientes:

Proposición: *Sea (a_n) una sucesión de números reales y sea $a \in \mathbb{R}$. Entonces $\underline{\lim_n}\, a_n = a$ si y sólo si se verifican las dos condiciones siguientes:*

1. *Para cada $x > a$ y cada número natural m existe otro número natural $n \geqslant m$ tal que $a_n < x$.*

2. *Para cada* $y<a$ *existe un* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $a_n>y$ *para todo* $n \geqslant m$.

Proposición: *Sea* (a_n) *una sucesión de números reales. Entonces* $\underline{\lim}_n a_n = +\infty$ *si y sólo si* $\lim_n a_n = +\infty$.

3.3.4. **Proposición:** *Sea* (a_n) *una sucesión de números reales tal que* $\overline{\lim}_n a_n = a$. *Entonces* a *es el mayor de los puntos de aglomeración de* (a_n).

Demostración: Si $a=+\infty$, entonces (a_n) no está acotada superiormente, luego para cada $c \in \mathbb{R}$ y para cada número natural m existe otro número natural $n \geqslant m$ tal que $a_n \in (c, +\infty)$ y por la proposición 3.2.2, $+\infty$ es un punto de aglomeración de la sucesión (a_n) y, evidentemente, es el mayor.

Si $a=-\infty$ entonces $\lim_n a_n = -\infty$ y, por tanto, $-\infty$ es el único punto de aglomeración de (a_n).

Finalmente, supongamos que $a \in \mathbb{R}$ y sean $\varepsilon>0$ y $m \in \mathbb{N}$. Como $a+\varepsilon>a$, existe un número natural n_0 tal que $a_n<a+\varepsilon$ para todo $n \geqslant n_0$ y como $a-\varepsilon<a$, existe un número natural $n \geqslant \text{máx}\,\{m, n_0\}$ tal que $a_n>a-\varepsilon$. Por consiguiente, existe un número natural $n \geqslant m$ tal que $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ y, por la proposición 3.2.2, a es un punto de aglomeración de (a_n). Además, es el mayor, pues si (a_n) tuviese otro punto de aglomeración $x>a$, eligiendo un $y \in \mathbb{R}$ tal que $x>y>a$, por ser x punto de aglomeración y ser $x>y$, para cada número natural m existiría otro número natural n tal que $a_n>y$, y por ser a punto de aglomeración y ser $y>a$, existiría un $m \in \mathbb{N}$ tal que $a_n<y$ para todo $n \geqslant m$, y estas dos propiedades son incompatibles.

De manera análoga se demuestra la siguiente

Proposición: *Sea* (a_n) *una sucesión de números reales tal que* $\underline{\lim}_n a_n = a$. *Entonces* a *es el menor de los puntos de aglomeración de* (a_n).

3.3.5. **Proposición:** *Sea* (a_n) *una sucesión de números reales. Entonces*

$$\underline{\lim}_n a_n \leqslant \overline{\lim}_n a_n$$

y

$$\underline{\lim}_n a_n = \overline{\lim}_n a_n = a \quad \textit{si y sólo si} \quad \lim_n a_n = a.$$

Demostración: El límite inferior y el límite superior de (a_n) son, respectivamente, el menor y el mayor de los puntos de aglomeración de (a_n) y, por tanto,

$$\underline{\lim}_n a_n \leqslant \overline{\lim}_n a_n.$$

Si $\underline{\lim}_n a_n = \overline{\lim}_n a_n = a$, de las proposiciones de 3.3.2 y 3.3.3 se deduce que si $a = +\infty$ (respectivamente, $a = -\infty$) entonces $\lim_n a_n = +\infty$ (resp. $\lim_n a_n = -\infty$) y que si $a \in \mathbb{R}$ entonces para cada $\varepsilon > 0$ se tiene $a - \varepsilon < a < a + \varepsilon$ y, por tanto, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ para todo $n \geqslant m$, luego $\lim_n a_n = a$.

Finalmente, si $\lim_n a_n = a$ entonces a es el único punto de aglomeración de (a_n) y como el límite inferior y el límite superior de (a_n) son puntos de aglomeración de (a_n), será $\underline{\lim}_n a_n = \overline{\lim}_n a_n = a$.

Ejercicios de autocomprobación

1. Sea (a_n) una sucesión de números reales, tal que las subsucesiones (a_{2n-1}), (a_{2n}) y (a_{3n}) son convergentes. Probar que la sucesión (a_n) es convergente.

2. Probar que la sucesión (a_n) definida por

$$a_1=1, \quad a_2=4 \quad \text{y} \quad a_n=\frac{1}{2}(a_{n-2}+a_{n-1}) \quad \text{para} \quad n\geqslant 3$$

es convergente y calcular su límite.

3. Sea (a_n) una sucesión de Cauchy de números reales y sea a un punto de aglomeración de (a_n). Probar que (a_n) es convergente y que $\lim\limits_n a_n=a$.

4. Sea (a_n) una sucesión de números reales. Probar que

$$\overline{\lim_n}\,(-a_n)=-\underline{\lim_n}\,a_n.$$

5. Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números reales. Probar que se verifican las desigualdades

a) $\overline{\lim\limits_n}\,a_n+\underline{\lim\limits_n}\,b_n\leqslant\overline{\lim\limits_n}\,(a_n+b_n)\leqslant\overline{\lim\limits_n}\,a_n+\overline{\lim\limits_n}\,b_n$

b) $\underline{\lim\limits_n}\,a_n+\underline{\lim\limits_n}\,b_n\leqslant\underline{\lim\limits_n}\,(a_n+b_n)\leqslant\overline{\lim\limits_n}\,a_n+\underline{\lim\limits_n}\,b_n$

siempre que las sumas estén definidas.

6. Sea (a_n) una sucesión de números reales positivos. Probar que

$$\overline{\lim_{n}}\ \frac{1}{a_n}=\begin{cases}\dfrac{1}{\underline{\lim}_{n}\ a_n} & \text{si } \underline{\lim}_{n}\ a_n>0\\[2ex] +\infty & \text{si } \underline{\lim}_{n}\ a_n=0\end{cases}$$

7. Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números reales positivos. Probar que se verifican las desigualdades

a) $\left(\overline{\lim}_{n}\, a_n\right)\left(\underline{\lim}_{n}\, b_n\right)\leqslant\overline{\lim}_{n}\,(a_n b_n)\leqslant\left(\overline{\lim}_{n}\, a_n\right)\left(\overline{\lim}_{n}\, b_n\right)$

b) $\left(\underline{\lim}_{n}\, a_n\right)\left(\underline{\lim}_{n}\, b_n\right)\leqslant\underline{\lim}_{n}\,(a_n b_n)\leqslant\left(\overline{\lim}_{n}\, a_n\right)\left(\underline{\lim}_{n}\, b_n\right)$

siempre que los productos estén definidos.

8. Sea (a_n) una sucesión de números reales positivos. Demostrar las desigualdades

$$\overline{\lim}_{n}\ \sqrt[n]{a_n}\leqslant\overline{\lim}_{n}\ \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

y

$$\underline{\lim}_{n}\ \frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\underline{\lim}_{n}\ \sqrt[n]{a_n}.$$

9. Hallar los límites superior e inferior de la sucesión (a_n) definida por

a) $a_n=(-1)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$; b) $a_n=\dfrac{2n+(-1)^n n}{3n+2}$;

c) $a_n=n\ \operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{3}$; d) $a_n=(-1)^n+\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{4}$.

10. Sea (a_n) una sucesión de números reales positivos tal que $\overline{\lim}_{n}(a_{n+1}/a_n)<1$. Probar que $\lim_{n} a_n=0$.

Soluciones a los ejercicios de autocomprobación

1. Toda subsucesión de una sucesión converge con límite a es también convergente y tiene por límite a.

   Las sucesiones (a_{2n-1}) y (a_{3n}) son convergentes. La sucesión (a_{6n-3}) es una subsucesión de cada una de ellas, luego es convergente y

$$\lim_n a_{2n-1} = \lim_n a_{6n-3} = \lim_n a_{3n}$$

   Las sucesiones (a_{2n}) y (a_{3n}) son convergentes. La sucesión (a_{6n}) es una subsucesión de cada una de ellas, luego es convergente y

$$\lim_n a_{2n} = \lim_n a_{6n} = \lim_n a_{3n}$$

   Por consiguiente,

$$\lim_n a_{2n-1} = \lim_n a_{2n}$$

   y si a es el límite común de (a_{2n-1}) y (a_{2n}) y $f(n)=2n-1$ y $g(n)=2n$, como $f(\mathbb{N}) \cup g(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$,

$$\lim_n a_n = a$$

2. Consideremos la subsucesión (a_{2n}). Como $a_2 = 4$ y $a_4 = 13/4$ se tiene $a_4 - a_2 < 0$. Supongamos que $a_{2n+2} - a_{2n} < 0$. Entonces

$$a_{2n+4} - a_{2n+2} = \frac{1}{2}(a_{2n+2} + a_{2n+3}) - \frac{1}{2}(a_{2n} + a_{2n+1})$$

$$= \frac{1}{2}\left[a_{2n+2} + \frac{1}{2}(a_{2n+1} + a_{2n+2})\right] - \frac{1}{2}(a_{2n} + a_{2n+1})$$

$$=\frac{3}{4}a_{2n+2}-\frac{1}{4}a_{2n+1}-\frac{1}{2}a_{2n}$$

$$=\frac{3}{4}a_{2n+2}-\frac{1}{4}(a_{2n}+a_{2n+1})-\frac{1}{4}a_{2n}$$

$$=\frac{3}{4}a_{2n+2}-\frac{1}{2}a_{2n+2}-\frac{1}{4}a_{2n}$$

$$=\frac{1}{4}(a_{2n+2}-a_{2n})$$

$$<0.$$

Por tanto, la sucesión (a_{2n}) es decreciente. Además, está acotada inferiormente ($a_n>0$ para todo $n \in \mathbb{N}$), luego es convergente.

De manera análoga se prueba que la subsucesión (a_{2n-1}) es creciente y está acotada superiormente, luego también es convergente.

Sean $a=\lim_n a_{2n}$ y $b=\lim_n a_{2n-1}$. Como

$$a_{2n}-a_{2n-1}=\frac{1}{2}(a_{2n-2}+a_{2n-1})-\frac{1}{2}(a_{2n-3}+a_{2n-2})$$
$$=\frac{1}{2}(a_{2n-1}-a_{2n-3})$$

y

$$\lim a_{2n-1}=b=\lim_n a_{2n-3},$$

se tiene

$$a-b=\lim_n(a_{2n}-a_{2n-1})=0$$

es decir, $a=b$. Pero para $f(n)=2n$ y $g(n)=2n-1$ es $f(\mathbb{N})\cup g(\mathbb{N})=\mathbb{N}$ y, por tanto, la sucesión (a_n) es convergente y

$$\lim_n a_n=a$$

Además, sumando miembro a miembro las igualdades

$$2a_3=a_1+a_2\ ,\quad 2a_4=a_2+a_3,\ \ldots,\ 2a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$$

y simplificando resulta

$$2a_n+a_{n-1}=a_1+2a_2=9$$

y pasando al límite se obtiene $2a+a=9$, es decir,

$$a=3$$

3. Observemos en primer lugar que por ser (a_n) una sucesión de Cauchy está acotada y, por tanto, cualquier subsucesión extraída de ella también está acotada, luego $a \in \mathbb{R}$.

Por ser (a_n) una sucesión de Cauchy, para cada $\varepsilon>0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_m-a_n|<\varepsilon/2$ para $m,\ n\geqslant n_0$, y como a es un punto de aglomeración de (a_n) existe un número natural $m\geqslant n_0$ tal que $a_m \in (a-\varepsilon/2,\ a+\varepsilon/2)$. Por consiguiente, para todo $n\geqslant n_0$ se verifica

$$|a_n-a|\leqslant|a_n-a_m|+|a_m-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

luego

$$\underline{\lim_n}\ a_n=a$$

4. Si (a_n) está acotada inferiormente entonces $(-a_n)$ está acotada superiormente y si $A_n=\{a_k : k\geqslant n\}$ y $B_n=\{-a_k : k\geqslant n\}$, se tiene $\sup B_n=-\inf A_n$ y, por tanto,

$$\overline{\lim_n}\,(-a_n)=\lim_n(\sup B_n)=\lim_n(-\inf A_n)=-\underline{\lim_n}\ a_n$$

Si (a_n) no está acotada inferiormente, entonces $\underline{\lim_n}\ a_n=-\infty$ y $(-a_n)$ no está acotada superiormente, luego $\underline{\lim_n}\,(-a_n)=+\infty$ y también se verifica la igualdad del enunciado.

5. Si (a_n) y (b_n) están acotadas superiormente y

$$A_n=\{a_k : k\geqslant n\},\ B_n=\{b_k : k\geqslant n\}\ \text{y}\ C_n=\{a_k+b_k : k\geqslant n\},$$

entonces

$$\sup C_n\leqslant\sup A_n+\sup B_n$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned}\overline{\lim_n}\,(a_n+b_n)&=\lim_n\,(\sup\ C_n)\leqslant\lim_n\,(\sup\ A_n+\sup\ B_n)\\&=\lim_n\,(\sup\ A_n)+\lim_n\,(\sup\ B_n)\\&=\overline{\lim_n}\ a_n+\overline{\lim_n}\ b_n\end{aligned}$$

Si (a_n) o (b_n) no están acotadas superiormente, entonces

$$\overline{\lim_n}\ a_n+\overline{\lim_n}\ b_n=+\infty$$

y también en este caso se verifica la segunda desigualdad de a).

La primera desigualdad de a) se deduce ahora aplicando el resultado del ejercicio anterior:

$$\overline{\lim_n}\ a_n = \overline{\lim_n}(a_n + b_n - b_n) \leqslant \overline{\lim_n}(a_n + b_n) + \overline{\lim_n}(-b_n)$$
$$= \overline{\lim_n}(a_n + b_n) - \underline{\lim_n}\ b_n$$

De manera análoga se demuestran las desigualdades de b).

6. Si $\underline{\lim_n}\ a_n > 0$ entonces la sucesión (a_n) está acotada inferiormente y, por tanto, la sucesión $(1/a_n)$ está acotada superiormente, y si

$$A_n = \{a_k : k \geqslant n\} \quad \text{y} \quad B_n = \left\{\frac{1}{a_k} : k \geqslant n\right\},$$

se tiene $\sup B_n = 1/(\inf A_n)$ y, por consiguiente,

$$\overline{\lim_n}\ \frac{1}{a_n} = \lim_n(\sup B_n) = \lim_n\left(\frac{1}{\inf A_n}\right) = \frac{1}{\underline{\lim_n}\ a_n}.$$

Si $\underline{\lim_n}\ a_n = 0$, para cada $k > 0$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < 1/k$, es decir, $1/a_n > k$ y, por tanto, la sucesión $(1/a_n)$ no está acotada superiormente, luego

$$\overline{\lim_n}\ \frac{1}{a_n} = +\infty$$

7. Si (a_n) y (b_n) están acotadas superiormente y

$$A_n = \{a_k : k \geqslant n\},\ B_n = \{b_k : k \geqslant n\} \ \text{y}\ C_n = \{a_k b_k : k \geqslant n\},$$

entonces

$$\sup C_n \leqslant (\sup A_n)(\sup C_n)$$

y, por tanto,

$$\overline{\lim_n}(a_n b_n) = \lim_n(\sup C_n) \leqslant \lim_n(\sup A_n)(\sup B_n)$$
$$= [\lim_n(\sup A_n)]\,[\lim_n(\sup B_n)]$$
$$= (\overline{\lim_n}\ a_n)\ (\overline{\mathit{lim}_n}\ b_b).$$

Si (a_n) o (b_n) no están acotadas superiormente entonces

$$(\overline{\lim_n}\, a_n)(\overline{\lim_n}\, b_n) = +\infty$$

y también, en este caso, se verifica la segunda desigualdad de a).

La primera desigualdad de a) se deduce ahora aplicando el resultado del ejercicio anterior: Si $\underline{\lim_n}\, b_n > 0$,

$$\overline{\lim_n}\, a_n = \overline{\lim_n}\left[(a_n b_n)\left(\frac{1}{b_n}\right)\right] \leqslant \left[\overline{\lim_n}\,(a_n b_n)\right]\left[\overline{\lim_n}\left(\frac{1}{b_n}\right)\right]$$

$$= \left[\overline{\lim_n}\,(a_n b_n)\right] \frac{1}{\underline{\lim_n}\, b_n}$$

y si $\underline{\lim_n}\, b_n = 0$, la desigualdad es evidente.

De manera análoga se demuestran las desigualdades de b).

8. Probaremos sólo la primera desigualdad. La segunda se demuestra de manera análoga.

Sea $a = \overline{\lim_n}\,(a_{n+1}/a_n)$. Si $a = +\infty$, no hay nada que demostrar. Supongamos pues que $a \in \mathbb{R}$ y sea $b > a$. Entonces existe un $m \in \mathbb{R}$ tal que $a_{n+1}/a_n < b$ para todo $n \geqslant m$ y, por tanto,

$$a_{m+1} < b\ a_m,$$

$$a_{m+2} < b\ a_{m+1} < b^2\ a_m,$$

$$a_{m+3} < b\ a_{m+2} < b^3\ a_m,$$

y por inducción resulta que

$$a_{m+k} < b^k a_m$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, o lo que es igual,

$$a_n < b^{n-m} a_m$$

para todo $n > m$. Por consiguiente,

$$\sqrt[n]{a_n} < b \sqrt[n]{a_m b^{-m}}$$

para todo $n > m$, y como

$$\lim_n \sqrt[n]{a_m b^{-m}} = 1,$$

se tiene

$$\overline{\lim_n} \sqrt[n]{a_n} < b$$

Como esto es cierto para todo $b > a$, resulta

$$\overline{\lim_n} \sqrt[n]{a_n} \leqslant a$$

9. a) 1 y -1; b) 1 y 1/3; c) $+\infty$ y $-\infty$; d) 2 y $-(1+1/\sqrt{2})$.

10. Sea $a > 0$ un número real tal que

$$\overline{\lim_n} \frac{a_{n+1}}{a_n} < a < 1$$

Entonces existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n+1}/a_n < a$ para todo $n \geqslant m$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} &a_{m+1} < a\ a_m, \\ &a_{m+2} < a\ a_{m+1} < a^2\ a_m, \\ &a_{m+3} < a\ a_{m+2} < a^3\ a_m, \end{aligned}$$

y por inducción resulta que

$$a_{m+k} < a^k a_m$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, es decir,

$$a_n < a^{n-m} a_m$$

para todo $n > m$, y como $\lim_n a^{n-m} = 0$,

$$\lim_n a_n = 0$$

TEMA IV

Series de números reales

Esquema/resumen

4.1. *Series de números reales.*

4.2. *Series alternadas.*

4.3. *Series de términos no negativos.*

Combinando la adición con el paso al límite se puede dar sentido a la suma de los términos de una sucesión de números reales. Si A_n es la suma de los n primeros términos de la sucesión (a_n), el par de sucesiones $((a_n), (A_n))$ se llama serie de término general a_n y se designa por Σa_n. El número real A_n se llama suma parcial n-sima de la serie. Si la sucesión (A_n) tiene límite finito A, se dice que la serie es convergente y el número A es, por definición, la suma de la serie. En otro caso, se dice que la serie es divergente.

Un criterio elemental de convergencia para series de términos alternativamente positivos y negativos es el criterio de Leibnitz.

Como la sucesión de las sumas parciales de una serie de términos no negativos es creciente, tendrá límite finito o infinito según que esté acotada superiormente o no. Por consiguiente, una serie de términos no negativos converge si y sólo si la sucesión de sus sumas parciales está acotada superiormente. De este hecho resultan dos criterios generales para decidir la convergencia o divergencia de una serie de términos no negativos, los criterios de comparación.

Por comparación con las series geométricas se deducen los criterios del cociente y de la raíz. Un criterio muy útil para las series de términos positivos decrecientes es el criterio integral.

4.1. SERIES DE NUMEROS REALES

Sea (a_n) una sucesión de números reales y sea (A_n) la sucesión definida por

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. El par de sucesiones $\big((a_n), (A_n)\big)$ se llama *serie de término general* a_n y se designa por Σa_n. El número real A_n se llama *suma parcial n-sima* de la serie Σa_n.

Se dice que la serie Σa_n es *convergente* cuando existe y es finito el límite

$$\lim_n A_n = \lim_n (a_1 + a_2 + \cdots a_n)$$

y si este límite es igual a A ($\in \mathbb{R}$), se escribe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$$

y se dice que A es la *suma* de la serie Σa_n.

Cuando el limite anterior no existe o es infinito, se dice que la serie Σa_n es *divergente.*

Una condición necesaria para la convergencia de una serie es que su término general tienda a cero.

Proposición: *Si la serie Σa_n es convergente, entonces* $\lim_n a_n = 0$.

Demostración: Sea A la suma de la serie y sea (A_n) la sucesión de sus sumas parciales. Entonces $\lim_n A_n = A$ y como $a_n = A_n - A_{n-1}$,

$$\lim_n a_n = A - A = 0.$$

Proposición. (Criterio de Cauchy): *Una serie Σa_n es convergente si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que*

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| < \varepsilon$$

siempre que $n > m \geqslant n_0$.

Demostración: Basta tener en cuenta que la sucesión (A_n) de las sumas parciales de la serie Σa_n es convergente si y sólo si es una sucesión de Cauchy y que

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n = A_n - A_m.$$

Ejemplos:

1. La *serie armónica* $\Sigma(1/n)$ diverge, pues para todo $m \in \mathbb{N}$ es

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+m} = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{m+m} > \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}$$

y la condición del criterio de Cauchy no se verifica para $\varepsilon \leqslant 1/2$.

Este ejemplo prueba que la condición $\lim_n a_n = 0$, necesaria para la convergencia de la serie Σa_n, no es suficiente.

2. Sea r un número real. La *serie geométrica* $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge si $|r| < 1$ y diverge si $|r| \geqslant 1$. En efecto: Su suma parcial n-sima es

$$A_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r},$$

y como $\lim_n r^{n+1} = 0$ si $|r| < 1$, la serie converge y tiene por suma $1/(1-r)$ cuando $|r| < 1$. En cambio, si $|r| \geqslant 1$ la serie diverge, pues no se verifica la condición necesaria de convergencia.

Proposición: *Sean Σa_n y Σb_n dos series convergentes. Entonces, para todo par de números reales α, β, la serie $\Sigma(\alpha a_n + \beta b_n)$ es convergente y*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Demostración: Basta tener en cuenta que

$$\sum_{n=1}^{m} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{m} a_n + \beta \sum_{n=1}^{m} b_n$$

y pasar al límite cuando m tiende a $+\infty$.

Proposición: *Si en una serie Σa_n se intercalan (respectivamente, se suprimen) un número finito de términos cuya suma es S, la serie obtenida tiene el mismo carácter, convergente o divergente, que la primera y si A es la suma de Σa_n, la nueva serie tiene por suma $A+S$ (respectivamente, $A-S$).*

Demostración: Supongamos que se han intercalado k términos. Designemos por Σb_n la serie obtenida y sea a_m el primer término de la serie dada posterior a todos los intercalados. Si A_n y B_n son las sumas parciales n-simas de Σa_n y Σb_n respectivamente, se tiene

$$B_{n+k} = A_n + S$$

para todo $n \geqslant m-1$, de donde se deduce que Σb_n es convergente si y sólo si lo es Σa_n y que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = A+S$.

La demostración para el caso de supresión de términos es análoga.

4.2. SERIES ALTERNADAS

Si (a_n) es una sucesión de números reales positivos, la serie $\Sigma(-1)^n a_n$ se llama *serie alternada.*

Proposición. (Criterio de Leibnitz): *Si (a_n) es una sucesión de números reales decreciente y con límite cero, entonces la serie alternada $\Sigma(-1)^n a_n$ es convergente.*

Demostración: Sea (A_n) la sucesión de las sumas parciales de la serie $\Sigma(-1)^n a_n$. Como la sucesión (a_n) es decreciente, para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifican

$$A_{2n+2} - A_{2n} = -a_{2n+1} + a_{2n+2} < 0$$

y

$$A_{2n} = -a_1 + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n} > -a_1$$

luego la sucesión (A_{2n}) es decreciente y está acotada inferiormente y, por tanto, tiene límite finito.

De manera análoga se ve que la sucesión (A_{2n-1}) es creciente y está acotada superiormente, luego también tiene límite finito.

Además, como la sucesión (a_n) tiene por límite cero,

$$\lim_n (A_{2n} - A_{2n-1}) = \lim_n a_{2n} = 0$$

y, por tanto, las dos sucesiones (A_{2n}) y (A_{2n-1}) tienen el mismo límite A, luego la sucesión (A_n) tiene también por límite A.

4.3. SERIES DE TERMINOS NO NEGATIVOS

Proposición: *Sea (a_n) una sucesión de números reales no negativos. Entonces la serie Σa_n converge si y sólo si la sucesión (A_n) de sus sumas parciales está acotada superiormente.*

Demostración: Como $a_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesión (A_n) es creciente y tendrá límite finito o infinito según que esté acotada superiormente o no.

Proposición. (Primer criterio de comparación): *Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números reales tales que $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ para todo $n \geqslant m$. Si la serie Σb_n es convergente, entonces la serie Σa_n es también convergente. Si la serie Σa_n es divergente, entonces la serie Σb_n es también divergente.*

Demostración: Si (A_n) y (B_n) son las sucesiones de las sumas parciales de Σa_n y Σb_n respectivamente, se verifica

$$A_n - A_m \leqslant B_n - B_m$$

para todo $n \geqslant m$. De aquí resulta que si la sucesión (B_n) está acotada superiormente, también lo está la sucesión (A_n) y que si la sucesión (A_n) no está acotada superiormente, tampoco lo está la (B_n).

Proposición. (Segundo criterio de comparación): *Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números reales tales que $a_n \geqslant 0$ y $b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que*

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = l \in \mathbb{R}.$$

Si $l \neq 0$, entonces las dos series Σa_n y Σb_n tienen el mismo carácter. Si $l = 0$ y la serie Σb_n es convergente, entonces la serie Σa_n es también convergente.

Demostración: Si $l \neq 0$, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m$ se verifica

$$\frac{1}{2} l \leqslant \frac{a_n}{b_n} \leqslant \frac{3}{2} l$$

y, por tanto,

$$\frac{1}{2} l b_n \leqslant a_n \leqslant \frac{3}{2} l b_n$$

y para concluir, basta aplicar dos veces el primer criterio de comparación. (Obsérvese que por ser $l \neq 0$ las tres series Σb_n, $\Sigma(1/2) l b_n$ y $\Sigma(3/2) l b_n$ tienen el mismo carácter).

Si $l=0$, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m$ se verifica $a_n/b_n \leqslant 1$ y, por tanto, $a_n < b_n$ y el resultado se sigue también del primer criterio de comparación.

Observación: En el segundo criterio de comparación, si $l=0$ y la serie Σb_n es divergente, no se puede afirmar nada sobre el carácter de la serie Σa_n. Si son $a_n=0$ y $b_n=1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es $l=0$ y la serie Σa_n converge. Si son $a_n=1/n$ y $b_n=1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es $l=0$ y la serie Σa_n diverge.

Proposición. (Criterio integral): *Sea $f:[1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función positiva y decreciente y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $a_n = f(n)$. Entonces, la serie Σa_n y la integral impropia $\int_1^{+\infty} f$ tienen el mismo carácter.*

Demostración: Sea (A_n) la sucesión de las sumas parciales de la serie Σa_n. Por ser f decreciente, para cada $k \in \mathbb{N}$ se verifica

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f \leqslant f(k)$$

es decir,

$$a_{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} f \leqslant a_k$$

y sumando desde $k=1$ hasta $k=n$ estas desigualdades se obtiene

$$A_{n+1} - a_1 \leqslant \int_1^{n+1} f \leqslant A_n$$

y de aquí resulta que la sucesión (A_n) está acotada superiormente si y sólo si la integral impropia $\int_1^{+\infty} f$ es convergente.

Ejemplos:

1. Sea p un número real. La serie $\Sigma(1/n^p)$ es convergente si $p>1$ y divergente si $p \leqslant 1$ puesto que la integral impropia $\int_1^{+\infty} (1/x^p)\, dx$ es convergente si $p>1$ y divergente si $p \leqslant 1$.

2. Del primer criterio de comparación se deduce que la serie $\Sigma(\text{sen}^2 n)/n^3$ es convergente, puesto que

$$0 \leqslant \frac{\text{sen}^2 n}{n^3} \leqslant \frac{1}{n^3}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y la serie $\Sigma(1/n^3)$ es convergente.

3. Por el segundo criterio de comparación la serie

$$\Sigma \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

es convergente, ya que

$$\lim_n n^2 \cdot \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = 1$$

y la serie $\Sigma(1/n^2)$ es convergente.

Proposición. (Criterio del cociente): *Sea (a_n) una sucesión de números reales positivos y sean*

$$\alpha = \underline{\lim}_n \frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad y \qquad \beta = \overline{\lim}_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Si $\beta < 1$ entonces la serie Σa_n converge. Si $\alpha > 1$ entonces la serie Σa_n diverge.

Demostración: Supongamos en primer lugar que $\beta < 1$ y sea x un número real tal que $\beta < x < 1$. Entonces existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < x$$

para todo $n \geqslant m$. En particular,

$$a_{m+1} \leqslant a_m x,$$

$$a_{m+2} \leqslant a_{m+1} x \leqslant a_m x^2$$

y para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$a_{m+k} \leqslant a_m x^k$$

luego para todo $n \geqslant m$ se verifica

$$a_n \leqslant c\, x^n$$

donde $c = a_m x^{-m}$, y la convergencia de Σa_n se sigue del primer criterio de comparación, pues al ser $0 < x < 1$, la serie geométrica Σx^n converge.

Supongamos ahora que $\alpha > 1$. Entonces existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n+1} > a_n$ para todo $n \geqslant m$ y no se cumple, por tanto, la condición $\lim_n a_n = 0$, necesaria para la convergencia de Σa_n.

Observación: En el criterio del cociente, si $\alpha \leqslant 1 \leqslant \beta$ no se puede afirmar nada sobre el carácter de la serie Σa_n. Para las dos series Σn^{-1} y Σn^{-2} son $\alpha = \beta = 1$, pero la primera diverge mientras que la segunda converge.

Proposición. (Criterio de Raabe): *Sea (a_n) una sucesión de números reales positivos y sean*

$$\alpha = \underline{\lim}_n\, n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \qquad y \qquad \beta = \overline{\lim}_n\, n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

Si $\alpha > 1$, entonces la serie Σa_n converge. Si $\beta < 1$, entonces la serie Σa_n diverge.

Demostración: Supongamos, en primer lugar, que $\alpha > 1$ y sea x un número real tal que $\alpha > x > 1$. Entonces existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m$ se verifica

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > x$$

es decir,

$$n(a_n - a_{n+1}) > x\, a_n$$

y, por tanto,

$$m(a_m - a_{m+1}) + (m+1)(a_{m+1} - a_{m+2}) + \cdots + n(a_n - a_{n+1}) > x(a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n)$$

luego

$$m\, a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n - n\, a_{n+1} > x(a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n)$$

y de aquí resulta

$$a_{m+1} + \cdots + a_n < \frac{(m-x)\,a_m - n\,a_{n+1}}{x-1} < \frac{(m-x)\,a_m}{x-1}$$

con lo que

$$a_1 + \cdots + a_n < (a_1 + \cdots + a_m) + \frac{(m-x)\,a_m}{x-1}$$

y la serie Σa_n es convergente, porque la sucesión de sus sumas parciales está acotada.

Supongamos ahora que $\beta < 1$. Entonces, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > m$ se verifica

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1$$

es decir,

$$(n-1)\,a_n < n\,a_{n+1}$$

y, por tanto,

$$m a_{m+1} < (m+1) a_{m+2} < \cdots < (n-1) a_n$$

luego

$$a_n > \frac{m a_{m+1}}{n-1} > \frac{m a_{m+1}}{n}$$

y como la serie Σn^{-1} es divergente, por el primer criterio de comparación resulta que la serie Σa_n es divergente.

Proposición. (Criterio de la raíz): *Sea (a_n) una sucesión de números reales no negativos y sea*

$$\alpha = \overline{\lim_n} \sqrt[n]{a_n}.$$

Si $\alpha < 1$, entonces la serie Σa_n converge. Si $\alpha > 1$, entonces la serie Σa_n diverge.

Demostración: Supongamos, en primer lugar, que $\alpha < 1$ y sea x un número real tal que $\alpha < x < 1$. Entonces, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < x^n$ para todo $n \geq m$ y la convergencia de la serie Σa_n se sigue del primer criterio de comparación, pues al ser $0 < x < 1$, la serie geométrica Σx^n converge.

Supongamos ahora que $\alpha > 1$. Entonces, $a_n > 1$ para infinitos valores de n y no se cumple, por tanto, la condición $\lim\limits_n a_n = 0$, necesaria para la convergencia de la serie Σa_n.

Observaciones:

1. En el criterio de la raíz, si $\alpha = 1$ no se puede afirmar nada sobre el carácter de la serie Σa_n. Para las dos series Σn^{-1} y Σn^{-2} se verifica $\alpha = 1$, pero la primera diverge mientras que la segunda converge.

2. A veces, el criterio del cociente no dilucida el carácter de una serie y, en cambio, con el de la raíz se decide la cuestión. Así, para la serie Σa_n donde

$$a_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } n \text{ es impar} \\ 2^{2-n} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

se tiene

$$\underline{\lim_n} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{8}, \quad \overline{\lim_n} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 \quad \text{y} \quad \lim_n \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$$

y el criterio de la raíz nos dice que la serie converge mientras que el del cociente no dilucida.

De hecho, el criterio del cociente es menos potente que el de la raíz y puede probarse a partir de éste teniendo en cuenta que si (a_n) es una sucesión de números reales positivos, se verifica

$$\underline{\lim_n} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \underline{\lim_n} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim_n} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim_n} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Ejemplos:

1. Por el criterio del cociente la serie $\Sigma\, n^2/n!$ converge, puesto que

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{n+1}{n^2} = 0 < 1.$$

2. Por el criterio de Raabe, la serie

$$\sum \frac{5 \cdot 10 \cdots (5n)}{6 \cdot 11 \cdots (5n+1)}$$

diverge, puesto que

$$\lim_n n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_n n\left(1 - \frac{5n+5}{5n+6}\right) = \lim_n \frac{n}{5n+6} = \frac{1}{5} < 1.$$

3. Por el criterio de la raíz la serie

$$\sum \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$$

converge, puesto que

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Ejercicios de autocomprobación

1. Determinar el carácter de las series siguientes:

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}$

   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{n}$

   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

   e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg}\frac{1}{n}$

   f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$

   g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 3 \cdots (n+1)}{4\cdot 5 \cdots (n+3)}$

   h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$

2. Sea x un número real no negativo. Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^{2n}+x^n+1}.$$

3. Calcular las sumas de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)!} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right).$$

4. Probar que

$$\lim_n \frac{3\cdot 5 \cdots (2n+1)}{2\cdot 5 \cdots (3n-1)}=0.$$

5. Sea (a_n) una sucesión de números reales positivos. Si la serie Σa_n es convergente, ¿qué puede decirse de las series

$$\sum \frac{a_n^2}{1+a_n} \qquad \text{y} \qquad \sum \frac{1}{1+a_n}?$$

¿Y si la serie Σa_n es divergente?

6. Sea Σa_n una serie de términos positivos convergente. Demostrar que existe una sucesión (b_n) de números positivos con limite $+\infty$ para la que la serie $\Sigma a_n b_n$ también converge.

7. Sea (a_n) una sucesión decreciente de números reales positivos. Probar que si la serie Σa_n converge, entonces

$$\lim_n n\, a_n = 0.$$

8. Se llama serie aritmético-geométrica a toda serie de la forma $\Sigma a_n b_n$ donde (a_n) y (b_n) son dos sucesiones de números reales tales que $a_{n+1}=a_n+p$ y $b_{n+1}=b_n q$, siendo $p\neq 0$ y $q\neq 1$. Probar que si $b_1\neq 0$, la serie aritmético-geométrica converge si y sólo si $|q|<1$ y que, en este caso, su suma es

$$\left[\frac{a_1}{1-q}+\frac{pq}{(1-q)^2}\right]b_1.$$

9. Una serie Σa_n de términos positivos, tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\alpha n+\beta}{\alpha n+\gamma}$$

donde α, β y γ son números reales y $\alpha>0$ se llama serie hipergeométrica. Probar que si $\alpha+\beta<\gamma$, la serie hipergeométrica converge y su suma es

$$\frac{a_1\gamma}{\gamma-\alpha-\beta}.$$

10. Calcular las sumas de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

Soluciones a los ejercicios de autocomprobación

1. a) Como

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{2}{n+1} = 0 < 1,$$

por el criterio del cociente, la serie converge.

b) Como $\lim\limits_n a_n = 1 \neq 0$, la serie diverge.

c) Como

$$\frac{2+\cos n}{n} \geqslant \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y la serie $\Sigma(1/n)$ diverge, por el primer criterio de comparación la serie dada diverge.

d) Como

$$\lim_n n \cdot \frac{1}{n+\sqrt{n}} = 1$$

y la serie $\Sigma(1/n)$ diverge, por el segundo criterio de comparación, la serie dada diverge.

e) La sucesión $(\operatorname{tg}(1/n))$ es decreciente y tiende a 0 y por el criterio de Leibnitz la serie dada converge.

f) Como

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_2^{\alpha} \frac{dx}{x(\log x)^2} = \lim_{\alpha \to +\infty} \int_{\log 2}^{\log \alpha} \frac{dt}{t^2} = \lim_{\alpha \to +\infty} \left(\frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log \alpha} \right) = \frac{1}{\log 2}$$

la integral impropia $\int_2^{+\infty} [1/x(\log x)^2]dx$ converge, y por el criterio integral, la serie dada converge.

g) Como

$$\lim_n n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim_n \frac{2n}{n+4}=2>1,$$

por el criterio de Raabe, la serie converge.

h) Como

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n}=\lim_n \frac{1}{\log n}=0<1,$$

por el criterio de la raíz, la serie converge.

2. Si $x=0$, entonces $a_n=0$ para todo $n\in\mathbb{N}$ y la serie converge.

Si $0<x<1$, entonces $\lim\limits_n (a_n/x^n)=1$ y como la serie Σx^n converge (serie geométrica de razón menor que 1), por el segundo criterio de comparación, la serie dada converge.

Si $x=1$, entonces $a_n=1/3$ para todo $n\in\mathbb{N}$ y la serie diverge.

Si $x>1$, entonces

$$\lim_n x^n\cdot\frac{x^n}{x^{2n}+x^n+1}=1$$

y como la serie $\Sigma(1/x^n)$ converge (serie geométrica de razón menor que 1), por el segundo criterio de comparación, la serie dada converge.

3. Como

$$\frac{n+1}{(n+2)!}=\frac{n+2-1}{(n+2)!}=\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!},$$

la suma parcial n-sima de la primera serie es

$$A_n=\frac{1}{2!}-\frac{1}{(n+2)!}$$

y, por tanto, su suma A es

$$A=\lim_n A_n=\frac{1}{2}.$$

Por otra parte, como

$$\log\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right)=\log\frac{n^2+3n+2}{n(n+3)}=\log\frac{(n+1)\ (n+2)}{n(n+3)}$$
$$=\log(n+1)+\log(n+2)-\log n-\log(n+3),$$

la suma parcial n-sima de la segunda serie es

$$A_n=\log 3+\log(n+1)-\log(n+3)=\log 3+\log\frac{n+1}{n+3}$$

y, por tanto, su suma A es

$$A=\lim_n A_n=\log 3$$

4. Pongamos

$$a_n=\frac{3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 5\cdots(3n-1)}.$$

Como

$$\lim_n\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_n\frac{2n+3}{3n+2}=\frac{2}{3}<1,$$

por el criterio del cociente, la serie Σa_n converge y, por la condición necesaria de convergencia,

$$\lim_n a_n=0.$$

5. Supongamos, en primer lugar, que la serie Σa_n converge.

Como

$$\frac{a_n^2}{1+a_n}<\frac{a_n^2}{a_n}=a_n,$$

Por otra parte, como $\lim_n a_n=0$ se tiene

$$\lim_n\frac{1}{1+a_n}=1\neq 0$$

y la serie $\Sigma\, 1/(1+a_n)$ diverge (no cumple la condición necesaria de convergencia.

Supongamos ahora que la serie Σa_n diverge. Tomando $a_n=1/n$ resulta

$$\Sigma\frac{a_n^2}{1+a_n}=\Sigma\frac{1}{n^2+n}$$

y esta serie es convergente. En cambio, si se toma $a_n = 1/\sqrt{n}$ resulta

$$\Sigma \frac{a_n^2}{1+a_n} = \Sigma \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

y esta serie diverge. Análogamente, si se toma $a_n = 1/n$ queda

$$\Sigma \frac{1}{1+a_n} = \Sigma \frac{n}{n+1}$$

y esta serie diverge. Pero si se toma $a_n = n^2$ queda

$$\Sigma \frac{1}{1+a_n} = \Sigma \frac{1}{1+n^2}$$

y esta serie converge. Por consiguiente, cuando la serie Σa_n diverge no se puede afirmar nada sobre el carácter de las series

$$\sum \frac{a_n^2}{1+a_n} \quad \text{y} \quad \sum \frac{1}{1+a_n}$$

6. Sean A la suma de la serie Σa_n, (A_n) la sucesión de sus sumas parciales y (R_n) la sucesión definida por

$$R_1 = A, \; R_n = A - A_{n-1} \text{ para } n > 1.$$

Entonces

$$\lim_n R_n = \lim_n (A - A_{n-1}) = 0$$

y, por tanto,

$$\lim_n \frac{1}{\sqrt{R_n} + \sqrt{R_{n+1}}} = +\infty$$

y la serie

$$\sum \frac{a_n}{\sqrt{R_n} + \sqrt{R_{n+1}}}$$

converge, puesto que por ser

$$\frac{a_n}{\sqrt{R_n} + \sqrt{R_{n+1}}} = \frac{a_n(\sqrt{R_n} - \sqrt{R_{n+1}})}{R_n - R_{n+1}} = \sqrt{R_n} - \sqrt{R_{n+1}},$$

su suma parcial n-sima es

$$\sqrt{R_1} - \sqrt{R_{n+1}} = \sqrt{A} - \sqrt{R_{n+1}}$$

que tiende a $\sqrt{A}$.

Basta tomar, pues,

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{R_n} + \sqrt{R_{n+1}}}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

7. Por el criterio de Cauchy, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n < \frac{\varepsilon}{2}$$

siempre que $n > m \geqslant n_0$ y como la sucesión (a_n) es decreciente,

$$(n-m)a_n < \frac{\varepsilon}{2}$$

y, por tanto,

$$na_n < ma_n + \frac{\varepsilon}{2}$$

para $n > m > n_0$. Fijemos $m \geqslant n_0$. Como $\lim_n a_n = 0$, existe un $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $ma_n < \varepsilon/2$ para todo $n \geqslant n_1$. Entonces, para $n > \max\{m, n_1\}$ se verifica

$$na_n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

y, por consiguiente,

$$\lim_n na_n = 0.$$

8. Pongamos $A_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$. Entonces

$$qA_n = a_1 b_2 + a_2 b_3 + a_2 b_3 + \cdots + a_{n-1} b_n + a_n b_n q$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned}(1-q)A_n &= a_1 b_1 + (a_2 - a_1) b_2 + \cdots + (a_n - a_{n-1}) b_n - a_n b_n q \\ &= a_1 b_1 + p(b_2 + \cdots + b_n) - a_n b_n q = \\ &= a_1 b_1 + p b_1 q (1 + q + \cdots + q^{n-2}) - [a_1 + (n-1)p] b_1 q^n = \\ &= [a_1 + pq \frac{1 - q^{n-1}}{1-q} - (a_1 + pn - p) q^n] b_1 = \\ &= [a_1 + \frac{pq}{1-q} - (a_1 + pn) q^n] b_1.\end{aligned}$$

y si $|q|<1$ se tiene

$$\lim_n (a_1+pn)q^n=0$$

y, por consiguiente, la serie converge y tiene por suma

$$A=\lim_n A_n=\left[\frac{a_1}{1-q}+\frac{pq}{(1-q)^2}\right]b_1.$$

En cambio, si $|q|\geqslant 1$ no se cumple la condición necesaria de convergencia, puesto que

$$\lim_n |a_n b_n|=\lim_n |a_1+(n-1)p|\ |b_1|\ |q|^{n-1}=+\infty,$$

luego la serie diverge.

9. Si $\alpha+\beta<\gamma$, se tiene

$$\lim_n n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim_n \frac{(\gamma-\beta)n}{\alpha n+\gamma}=\frac{\gamma-\beta}{\alpha}>1$$

y por el criterio de Raabe, la serie Σa_n converge

Pongamos $A_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$. Como para todo $n\in\mathbb{N}$ es

$$(\alpha n+\gamma)a_{n+1}=(\alpha n+\beta)a_n,$$

se verifican

$$(\alpha+\gamma)a_2=(\alpha+\beta)a_1$$

$$(2\alpha+\gamma)a_3=(2\alpha+\beta)a_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$((n-1)\alpha+\gamma)a_n=((n-1)\alpha+\beta)a_{n-1}$$

y sumando miembro a miembro y simplificando resulta

$$(n-1)\alpha a_n+\gamma(a_2+a_3+\cdots+a_n)=(\alpha+\beta)\ (a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})$$

es decir,

$$(n-1)\alpha a_n+\gamma(A_n-a_1)=(\alpha+\beta)\ (A_n-a_n)$$

y de aquí resulta

$$A_n=\frac{a_1\gamma-(n\alpha+\beta)a_n}{\gamma-\alpha-\beta}\ .$$

Ahora bien, como $\alpha+\beta<\gamma$ y $\alpha<0$, es $\beta<\gamma$ y, por tanto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\alpha n+\beta}{\alpha n+\gamma}<1$$

luego $a_{n+1}<a_n$ y la sucesión (a_n) es decreciente, y como la serie Σa_n converge,

$$\lim_n (n\alpha+\beta)a_n=0$$

(véase el ejercicio 7). Por consiguiente,

$$\lim_n A_n=\frac{a_1\gamma}{\gamma-\alpha-\beta}\ .$$

10. La primera es una serie aritmético-geométrica, siendo

$$a_1=1,\ b_1=3,\ p=1,\ q=3$$

y su suma es

$$\left[\frac{a_1}{1-q}+\frac{pq}{(1-q)^2}\right]b_1=\frac{3}{4}\,.$$

La segunda es una serie hipergeométrica, siendo

$$a_1=\frac{1}{4},\ \alpha=3,\ \beta=-2,\ \gamma=4$$

y su suma es

$$\frac{a_1\gamma}{\gamma-\alpha-\beta}=\frac{1}{3}\,.$$

TEMA V

Series de números reales (continuación)

Esquema/resumen

5.1. *Convergencia absoluta y condicional.*

5.2. *Criterios de Dirichlet y de Abel.*

5.3. *Reordenación de series.*

5.4. *Producto de Cauchy de dos series.*

Se dice que una serie es absolutamente convergente cuando la serie de los valores absolutos de sus términos converge. La convergencia absoluta implica la convergencia, pero el recíproco no es cierto en general. Se dice que una serie es condicionalmente convergente cuando dicha serie converge pero la serie de los valores absolutos de sus términos diverge.

Para estudiar la convergencia absoluta de una serie puede aplicarse cualquiera de los criterios de convergencia para series de términos no negativos estudiados en el tema anterior. Los criterios de Dirichlet y de Abel son particularmente útiles para determinar la convergencia condicional. Ambos se deducen de la llamada fórmula de sumación parcial.

La suma de una serie absolutamente convergente se conserva al reordenar sus términos. Sin embargo, reordenando convenientemente una serie condicionalmente convergente puede obtenerse una serie que converja a cualquier número real prefijado (teorema de Riemann).

Uno de los distintos tipos de productos de dos series es el producto de Cauchy. El teorema de Mertens establece que si una serie converge absolutamente y tiene por suma A y otra serie converge y tiene por suma B, entonces el producto de Cauchy de las dos series converge y tiene por suma AB.

5.1. CONVERGENCIA ABSOLUTA Y CONDICIONAL

Proposición: *Si la serie $\Sigma|a_n|$ es convergente, entonces la serie Σa_n es también convergente.*

Demostración: Para $n>m$ se verifica

$$|a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n|\leqslant|a_{m+1}|+|a_{m+2}|+\cdots+|a_n|$$

y para concluir basta aplicar el criterio de Cauchy.

Observación: La recíproca de la proposición anterior no es cierta en general. La serie alternada $\Sigma(-1)^n/n$ converge en virtud del criterio de Leibnitz, pero la serie $\Sigma(1/n)$ diverge.

Definición: *Se dice que una serie Σa_n es absolutamente convergente cuando la serie $\Sigma|a_n|$ es convergente. Se dice que una serie Σa_n es condicionalmente convergente o semiconvergente cuando la serie Σa_n es convergente pero la serie $\Sigma|a_n|$ es divergente.*

Según esto, la proposición anterior podría enunciarse diciendo que la convergencia absoluta implica la convergencia.

Proposición: *Sea Σa_n una serie de números reales y, para cada $n\in\mathbb{N}$, sean*

$$p_n=\text{máx}\{a_n,\ 0\}=\frac{a_n+|a_n|}{2}\quad y\quad q_n=\text{mín}\{a_n,\ 0\}=\frac{a_n-|a_n|}{2}.$$

Si la serie Σa_n es absolutamente convergente, entonces las series Σp_n y Σq_n son convergentes. Si la serie Σa_n es condicionalmente convergente, entonces las series Σp_n y Σq_n son divergentes.

Demostración: Si la serie Σa_n es absolutamente convergente, entonces Σa_n y $\Sigma |a_n|$ son convergentes y, por tanto, las series

$$\Sigma \frac{a_n+|a_n|}{2} \quad \text{y} \quad \Sigma \frac{a_n-|a_n|}{2}$$

son también convergentes.

Si la serie Σa_n es condicionalmente convergente, entonces Σa_n es convergente pero $\Sigma |a_n|$ es divergente, y si Σp_n fuese convergente, como $q_n = a_n - p_n$, también sería convergente Σq_n; análogamente, si Σq_n fuese convergente, como $p_n = a_n - q_n$, también sería convergente Σp_n. Por consiguiente, si una de las series Σp_n, Σq_n fuese convergente, ambas serían convergentes y como $|a_n| = p_n - q_n$, también sería convergente $\Sigma |a_n|$. Pero esto está en contra de la hipótesis.

5.2. CRITERIOS DE DIRICHLET Y DE ABEL

Para estudiar la convergencia absoluta de una serie puede aplicarse cualquiera de los criterios de convergencia para series de términos no negativos estudiados en el tema anterior. Los criterios de Dirichlet y de Abel son particularmente útiles para determinar la convergencia condicional. Ambos se deducen de la siguiente:

Proposición. (Fórmula de sumación parcial): *Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números reales, y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Se verifica*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} A_k (b_{k+1} - b_k)$$

Demostración: Poniendo $A_0 = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$ podemos escribir $a_k = A_k - A_{k-1}$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_k b_{k+1} + A_n b_{n+1} \\ &= A_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} A_k (b_{k+1} - b_k) \end{aligned}$$

Proposición. (Criterio de Dirichlet): *Sea Σa_n una serie de números reales cuya sucesión de sumas parciales está acotada y sea (b_n) una sucesión decreciente con límite cero. Entonces la serie $\Sigma a_n b_n$ es convergente.*

Demostración: Pongamos $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Por hipótesis, existe un $M > 0$ tal que $|A_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y como la sucesión (b_n) tiene por límite 0, la sucesión $(A_n b_{n+1})$ también tiene límite 0.

Por otra parte, de la igualdad

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}$$

se deduce que la serie $\Sigma(b_n - b_{n+1})$ es convergente y como la sucesión (b_n) es decreciente, para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica

$$|A_n(b_{n+1} - b_n)| \leqslant M(b_n - b_{n+1})$$

luego, por el primer criterio de comparación, la serie $\Sigma A_n(b_{n+1} - b_n)$ converge (absolutamente).

La convergencia de la serie $\Sigma a_n b_n$ resulta ahora de la fórmula de sumación parcial.

Ejemplos:

1. Para todo $x \neq 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ las sucesiones de las sumas parciales de las series Σ sen nx y $\Sigma \cos nx$ están acotadas por $1/|\text{sen}(x/2)|$. Esto resulta inmediatamente de las identidades

$$\text{sen } x + \text{sen } 2x + \cdots + \text{sen } nx = \frac{\text{sen}(nx/2)}{\text{sen}(x/2)} \text{ sen } \frac{(n+1)x}{2}$$

y

$$\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\text{sen}(nx/2)}{\text{sen}(x/2)} \cos \frac{(n+1)x}{2}$$

válidas para todo $x \neq 2k\pi$. Ambas identidades se demuestran de manera análoga. Probaremos la primera de ellas: Como

$$\text{sen } kx \text{ sen } \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left[\cos \frac{(2k-1)x}{2} - \cos \frac{(2k+1)x}{2}\right],$$

sumando desde $k=1$ hasta $k=n$ resulta

$$(\text{sen } x + \text{sen } 2x + \cdots + \text{sen } nx) \text{ sen } \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left[\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{(2n+1)x}{2}\right] = \text{sen } \frac{(n+1)x}{2} \text{ sen } \frac{nx}{2}$$

luego efectivamente

$$\text{sen } x + \text{sen } 2x + \cdots + \text{sen } nx = \frac{\text{sen}(nx/2)}{\text{sen}(x/2)} \text{ sen } \frac{(n+1)x}{2}.$$

2. La serie $\Sigma(\text{sen } nx)/n$ convergente para todo $x \in \mathbb{R}$, pues si $x = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ todos sus términos son nulos y si $x \neq 2k\pi$, su convergencia se sigue del criterio de Dirichlet, puesto que la sucesión de las sumas parciales de la serie Σ sen nx está acotada y $(1/n)$ es una sucesión decreciente con límite cero.

3. Por el criterio de Dirichlet, la serie $\Sigma(\cos nx)/\sqrt{n}$ es convergente para todo $x \neq 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Para $x=2k\pi$,

$$\sum \frac{\cos nx}{\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{1/2}}$$

y la serie diverge.

Proposición. (Criterio de Abel): *Sea Σa_n una serie de números reales convergente y sea (b_n) una sucesión monótona convergente. Entonces la serie $\Sigma a_n b_n$ es convergente.*

Demostración: Pongamos $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Como la serie Σa_n y la sucesión (b_n) convergen, también converge la sucesión $(A_n b_{n+1})$ y la sucesión (A_n) es acotada. La convergencia de la serie $\Sigma A_n(b_{n+1} - b_n)$ se prueba de la misma forma que en el criterio de Dirichlet y la conclusión se sigue también de la fórmula de sumación parcial.

5.3. REORDENACION DE SERIES

Definición: *Se dice que una serie Σb_n es una reordenación de otra Σa_n cuando existe una aplicación biyectiva $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $b_n = a_{f(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Si Σb_n es una reordenación de Σa_n y $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es la aplicación biyectiva tal que $b_n = a_{f(n)}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $a_n = b_{f^{-1}(n)}$ y como f^{-1} es también biyectiva, Σa_n es también una reordenación de Σb_n.

Proposición: *Si la serie Σa_n es absolutamente convergente y la serie Σb_n es una reordenación de Σa_n, entonces Σb_n también converge absolutamente y*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. Como Σa_n y $\Sigma |a_n|$ convergen, existe un número natural N tal que

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_n \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| - \sum_{n=1}^{N} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Además, existe una aplicación biyectiva $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $b_n = a_{f(n)}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $g = f^{-1}$ y elijamos M de manera que

$$\{1, 2, \ldots, N\} \subset \{f(1), f(2), \ldots, f(M)\}.$$

Entonces

$$\{g(1), g(2), \ldots, g(N)\} \subset \{1, 2, \ldots, M\}$$

y, por tanto,

$$\{b_{g(1)}, b_{g(2)}, \dots, b_{g(N)}\} \subset \{b_1, b_2, \dots, b_M\}$$

es decir,

$$\{a_1, a_2, \dots, a_N\} \subset \{b_1, b_2, \dots, b_M\},$$

y si $m > N$, la diferencia $\sum_{n=1}^{m} b_n - \sum_{n=1}^{N} a_n$ es una suma de ciertos a_i en la que no figuran $a_1, a_2, \dots, a_N$, luego

$$\left|\sum_{n=1}^{m} b_n - \sum_{n=1}^{N} a_n\right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y, por consiguiente,

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{m} b_n\right| \leqslant \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_n\right| + \left|\sum_{n=1}^{m} b_n - \sum_{n=1}^{N} a_n\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

lo que prueba que la serie Σb_n converge y que

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

El hecho de que la convergencia de Σb_n es absoluta se sigue del criterio de Cauchy. En efecto: Si $m > M$, entonces $f(m) \notin \{f(1), f(2), \dots, f(M)\}$ y, por tanto, $f(m) > N$, luego

$$\sum_{n=m+1}^{m+p} |b_n| = \sum_{n=m+1}^{m+p} |a_{f(n)}| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $m > N$.

Reordenando convenientemente una serie condicionalmente convergente, puede obtenerse una serie que converja a cualquier número real prefijado.

Proposición. (Teorema de Riemann): *Si Σa_n es una serie condicionalmente convergente de números reales, entonces para cualquier número real x existe una reordenación Σb_n de Σa_n, tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = x.$$

Demostración: Suprimiendo los términos nulos de una serie no se altera su carácter y, por tanto, podemos suponer que todos los términos de la serie Σa_n son distintos de cero.

Como la serie Σa_n es condicionalmente convergente, las dos series

$$\sum \frac{a_n+|a_n|}{2} \qquad \text{y} \qquad \sum \frac{a_n-|a_n|}{2}$$

son divergentes, y suprimiendo los términos nulos de cada una de ellas se obtienen las series Σp_n y Σq_n de los términos positivos y de los términos negativos de Σa_n respectivamente, que son también divergentes.

Como Σp_n es una serie de términos positivos divergente, existe un número natural N, tal que

$$\sum_{n=1}^{N} p_n > x.$$

Sea N_1 el menor de los N con esta propiedad. Entonces

$$\sum_{n=1}^{N_1} p_n > x \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{m} p_n \leqslant x \text{ para } m < N_1.$$

Como Σq_n es una serie de términos negativos divergente, existe un número natural M tal que $\sum_{n=1}^{N_1} p_n + \sum_{n=1}^{M} q_n < x$.

Sea M_1 el menor de los M con esta propiedad. Entonces

$$\sum_{n=1}^{N_1} p_n + \sum_{n=1}^{M_1} q_n < x \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{N_1} p_n + \sum_{n=1}^{m} q_n \geqslant x \text{ para } m < M_1.$$

Sea N_2 el menor de los números naturales N que verifican

$$\sum_{n=1}^{N_1} p_n + \sum_{n=1}^{M_1} q_n + \sum_{n=N_1+1}^{N} p_n > x$$

y sea M_2 el menor de los M para los que

$$\sum_{n=1}^{N_1} p_n + \sum_{n=1}^{M_1} q_n + \sum_{n=N_1+1}^{N_2} p_n + \sum_{n=M_1+1}^{M} q_n < x.$$

Continuando este proceso, obtenemos la serie

$$p_1 + \cdots + p_{N_1} + q_1 + \cdots + q_{M_1} + p_{N_1+1} + \cdots + p_{N_2} + q_{M_1+1} + \cdots + q_{M_2} + \cdots$$

que es, evidentemente, una reordenación de la serie Σa_n. Concluiremos la demostración probando que la sucesión (A_n) de las sumas parciales de esta reordenación tiene por límite x.

Por construcción, se verifican las desigualdades

$$A_1 < A_2 < \cdots < A_{N_1-1} \leqslant x < A_{N_1},$$

$$A_{N_1} > A_{N_1+1} > \cdots > A_{N_1+M_1-1} \geqslant x > A_{N_1+M_1},$$

$$A_{N_1+M_1} < A_{N_1+M_1+1} < \cdots < A_{N_1+M_1+N_2-1} \leqslant x < A_{N_1+M_1+N_2},$$

$$A_{N_1+M_1+N_2} > A_{N_1+M_1+N_2+1} > \cdots > A_{N_1+M_1+N_2+M_2-1} \geqslant x > A_{N_1+M_1+N_2+M_2},$$

... ...

... ...

Las dos primeras cadenas de desigualdades prueban que

$$|A_n - x| \leqslant p_{N_1} \qquad \text{para} \qquad N_1 \leqslant n \leqslant N_1 + M_1 - 1$$

puesto que la longitud del intervalo $[A_{N_1-1}, A_{N_1})$ es p_{N_1} y en este intervalo están x y A_{N_1+1}, A_{N_1+2}, ..., $A_{N_1+M_1-1}$; análogamente, de la segunda y tercera cadena de desigualdades, se deduce que

$$|A_n - x| \leqslant -q_{M_1} \quad \text{para} \quad N_1 + M_1 \leqslant n \leqslant N_1 + M_1 + N_2 - 1;$$

de la tercera y la cuarta, se obtiene

$$|A_n - x| \leqslant p_{N_2} \quad \text{para} \quad N_1 + M_1 + N_2 \leqslant n \leqslant N_1 + M_1 + N_2 + M_2 - 1,$$

etc. Pero (p_{N_k}) y (q_{M_k}) tienden a cero, ya que son dos subsucesiones de (a_n) y esta sucesión tiene por límite cero, porque la serie Σa_n es convergente. Por consiguiente, la sucesión (A_n) tiene por límite x.

5.4. PRODUCTO DE CAUCHY DE DOS SERIES

Definición: *Sean* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *dos series de números reales y, para* $n=0$, 1, 2, ..., *sea*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *se llama producto de Cauchy de las series* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Proposición. (Teorema de Mertens): *Si la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente y tiene por suma A y la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *converge y tiene por suma B, entonces el producto de Cauchy de las dos series converge y tiene por suma AB.*

Demostración: Pongamos

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad , \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \quad \text{y} \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$$

donde

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

y sean

$$d_n = B - B_n \quad \text{y} \quad e_n = \sum_{k=0}^{n} a_k d_{n-k}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} C_n = \; & a_0 b_0 \\ & + a_0 b_1 + a_1 b_0 \\ & + a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \\ & + a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 \\ & + \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ & + a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + a_3 b_{n-3} + \cdots + a_n b_0 \end{aligned}$$

y sumando por columnas resulta

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} a_k B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k (B - d_{n-k}) = A_n B - e_n$$

luego, para concluir, bastará probar que

$$\lim_n e_n = 0.$$

Ahora bien, la serie $\Sigma |a_n|$ es convergente y la sucesión (d_n) tiende a cero (luego está acotada). Sea $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ y sea $\beta > 0$ un número real tal que $|d_n| \leqslant \beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $\varepsilon > 0$ existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2\beta} \qquad \text{y} \qquad |d_n| < \frac{\varepsilon}{2\alpha} \text{ para } n > m,$$

y para $n > 2m$ se tiene

$$|e_n| \leqslant \sum_{k=0}^{m} |a_k d_{n-k}| + \sum_{k=m+1}^{n} |a_k d_{n-k}|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2\alpha} \sum_{k=0}^{m} |a_k| + \beta \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2\alpha} \cdot \alpha + \beta \cdot \frac{\varepsilon}{2\beta}$$

$$= \varepsilon$$

luego, efectivamente,

$$\lim_{n} e_n = 0.$$

Ejercicios de autocomprobación

1. Probar que si la serie Σa_n es absolutamente convergente y $a_n \neq -1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la serie $\Sigma a_n/(1+a_n)$ es también absolutamente convergente.

2. Se dice que una serie Σb_n es una subserie o una serie extraída de otra Σa_n cuando existe una aplicación inyectiva $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $b_n = a_{f(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que si Σa_n es absolutamente convergente y Σb_n es una subserie de Σa_n, entonces Σb_n es también absolutamente convergente.

3. Estudiar la convergencia de la serie

$$\Sigma \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$$

4. Sabiendo que la serie Σa_n es convergente, determinar el carácter de las series

$$\sum \frac{a_n}{n} \quad \text{y} \quad \sum \frac{n\, a_n}{n+1}$$

5. Demostrar que si la serie Σa_n es divergente, entonces la serie $\Sigma n a_n$ es también divergente.

6. Sea (a_n) una sucesión de números reales positivos y sea (A_n) la sucesión definida por $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que las dos series Σa_n y $\Sigma a_n/A_n$ tienen el mismo carácter.

7. Sea Σa_n una serie condicionalmente convergente. Probar que existe una reordenación Σb_n de Σa_n cuya sucesión de sumas parciales tiende a $+\infty$.

8. Demostrar que el producto de Cauchy de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}/\sqrt{n+1}$ por sí misma es una serie divergente.

9. Probar que para $|x|<1$ se verifica

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n}{n}x^n=\frac{1}{(1-x)^{m+1}}.$$

10. Demostrar que cualesquiera que sean los números reales x e y se verifica

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Soluciones a los ejercicios de autocomprobación

1. Como Σa_n converge es $\lim_n a_n = 0$ y, por tanto,

$$\lim_n \frac{\left|\dfrac{a_n}{1+a_n}\right|}{|a_n|} = \lim_n \frac{1}{|1+a_n|} = 1,$$

luego la serie $\Sigma |a_n/(1+a_n)|$ converge en virtud del segundo criterio de comparación.

2. Por hipótesis existe una aplicación inyectiva $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $b_n = a_{f(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y pongamos $N = \text{máx}\,\{f(1), f(2), ..., f(n)\}$. Entonces

$$\{f(1), f(2), ..., f(n)\} \subset \{1, 2, ..., N\}$$

y, por tanto,

$$\{a_{f(1)}, a_{f(2)}, ..., a_{f(n)}\} \subset \{a_1, a_2, ..., a_N\}$$

es decir,

$$\{b_1, b_2, ..., b_n\} \subset \{a_1, a_2, ..., a_N\}$$

y, por consiguiente,

$$\sum_{k=1}^{n} |b_k| \leqslant \sum_{k=1}^{N} |a_k| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

de donde se sigue la convergencia absoluta de Σb_n.

3. Para $x = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ todos los términos de la serie son nulos, luego la serie converge. Para $x \neq 2k\pi$ la sucesión de las sumas parciales de la serie Σ sen nx

está acotada y como la sucesión $\left(\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right)$ es decreciente y tiene límite cero (criterio de Stoltz), por el criterio de Dirichlet la serie converge. En resumen, la serie dada converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

4. Las sucesiones $(1/n)$ y $(n/n+1)$ son monótonas convergentes, luego las dos series dadas son convergentes en virtud del criterio de Abel.

5. Si la serie $\Sigma n\, a_n$ fuera convergente, como la sucesión $(1/n)$ es decreciente y tiene límite cero, por el criterio de Abel la serie Σa_n sería convergente.

6. Si la serie de términos positivos Σa_n es convergente, la sucesión $(1/A_n)$ es decreciente y tiene límite y, por el criterio de Abel, la serie $\Sigma a_n/A_n$ es convergente.

   Si la serie Σa_n es divergente entonces $\lim_n A_n = +\infty$, luego para todo $m \in \mathbb{N}$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A_n > 2\, A_m$ para todo $n \geq n_0$ y, por tanto,

$$\frac{a_{m+1}}{A_{m+1}}+\frac{a_{m+2}}{A_{m+2}}+\cdots+\frac{a_n}{A_n}>\frac{a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n}{A_n}$$

$$=\frac{A_n-A_m}{A_n}=1-\frac{A_m}{A_n}>1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

   y no se verifica pues la condición del criterio de Cauchy, luego la serie $\Sigma a_n/A_n$ es divergente.

7. Podemos suponer que todos los términos de la serie Σa_n son distintos de cero. Sean Σp_n y Σq_n las series de los términos positivos y de los términos negativos de Σa_n respectivamente. Como Σp_n es una serie de términos positivos divergente, existe un $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$p_1+\cdots+p_{n_1}>1-q_1$$

   y un $n_2 > n_1$ tal que

$$p_1+\cdots+p_{n_1}+p_{n_1+1}+\cdots+p_{n_2}>2-q_1-q_2$$

   y, en general, un $n_k > n_{k-1}$ tal que

$$p_1+p_2+\cdots+p_{n_k}>k-q_1-\cdots-q_k,$$

   y la serie

$$p_1+\cdots+p_{n_1}+q_1+p_{n_1+1}+\cdots+p_{n_2}+q_2+p_{n_2+1}+\cdots+p_{n_3}+q_3+\cdots$$

   es evidentemente una reordenación de Σa_n cuya suma parcial de orden $k+n_k$ es mayor que k.

8. Pongamos $a_n = (-1)^{n+1}/\sqrt{n+1}$. Entonces

$$a_k a_{n-k}=\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k+1}}\cdot\frac{(-1)^{n-k+1}}{\sqrt{n-k+1}}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}},$$

luego el producto de Cauchy de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ por sí misma es la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ donde

$$c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}=(-1)^n \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}.$$

Pero la media geométrica de dos números es menor o igual que la media aritmética y, por tanto,

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}\geqslant\frac{2}{(k+1)+(n-k+1)}=\frac{2}{n+2}$$

luego

$$|c_n|\geqslant\frac{2(n+1)}{n+2}=2\left(1-\frac{1}{n+2}\right)$$

y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ diverge (no cumple la condición $\lim_n c_n=0$, necesaria para la convergencia).

9. Procederemos por inducción sobre m. Para $m=0$ resulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x},$$

igualdad válida para $|x|<1$ puesto que para $|x|<1$ la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge absolutamente y tiene por suma $1/(1-x)$.

Supongamos que la igualdad es cierta para m, es decir, supongamos que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n}{n}x^n=\frac{1}{(1-x)^{m+1}}.$$

Por el teorema de Mertens,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n}{n}x^n\right)=\frac{1}{(1-x)^{m+2}}.$$

Pero el producto de Cauchy que aparece en el primer miembro de esta igualdad es

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\binom{m+n}{n}x^n+\binom{m+n-1}{n-1}x^n+\cdots+\binom{m}{0}x^n\right]$$

y teniendo en cuenta que

$$\binom{m+n}{n}+\binom{m+n-1}{n-1}+\cdots+\binom{m}{0}=\binom{m+n+1}{n},$$

resulta

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n+1}{n}x^n=\frac{1}{(1-x)^{m+2}}$$

luego la igualdad también es cierta para $m+1$.

10. Como para todo $x \in \mathbb{R}$ es

$$\lim_n \frac{\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{|x|^n}{n!}}=\lim_n \frac{|x|}{n+1}=0<1,$$

la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x^n/n!)$ converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$, y por el teorema de Mertens,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\right)&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\cdot\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\right]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\,y^{n-k}\right]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}.\end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACION A DISTANCIA

ANALISIS MATEMATICO I

UNIDAD DIDACTICA/5

Temario:

I. Sucesiones de funciones.
II. Series de funciones.
III. Series de potencias.
IV. Topología de $\mathbb{R}^n$.
V. Límites y continuidad.

Jesús Fernández Novoa

Doctor en Ciencias Matemáticas

Profesor de la U. N. E. D.

Tema I

Sucesiones de funciones

Esquema/Resumen

1.1. *Convergencia uniforme.*

1.2. *Convergencia uniforme y continuidad.*

1.3. *Convergencia uniforme e integrabilidad.*

1.4. *Convergencia uniforme y derivabilidad.*

Se dice que una sucesión de funciones (f_n) converge puntualmente a una función f en un conjunto A cuando para cada x de A el límite de la sucesión numérica $(f_n(x))$ es $f(x)$. Esto significa que para cada $\varepsilon>0$ y cada x de A existe un número natural n_0 tal que $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ para todo $n\geqslant n_0$. Generalmente, este número natural depende no sólo de ε, sino también del punto x de A considerado. Cuando n_0 depende solamente de ε se dice que la convergencia es uniforme: Una sucesión de funciones (f_n) converge uniformemente a una función f en un conjunto A cuando para cada $\varepsilon>0$ existe un número natural n_0 tal que $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ para todo $n\geqslant n_0$ y todo x de A. Este concepto se puede expresar también en una forma más manejable: Una sucesión de funciones (f_n) converge uniformemente a una función f en un conjunto A si y sólo si la sucesión $(\sup\{|f_n(x)-f(x)|: x \in A\})$ tiene por límite cero.

El límite uniforme de una sucesión de funciones continuas es también una función continua. Si una sucesión (f_n) de funciones continuas converge puntualmente a una función continua f en un conjunto compacto A y para cada $x \in A$ la sucesión mérica $(f_n(x))$ es creciente (respectivamente, decreciente), entonces (f_n) converge uniformemente a f en A (teorema de Dini).

Si f es el límite uniforme de una sucesión de funciones (f_n) integrables en un intervalo, entonces f es también integrable en dicho intervalo y la integral de f es el límite de las integrales de las f_n.

Así pues, la convergencia uniforme de una sucesión de funciones (f_n) es suficiente para transmitir la continuidad o la integrabilidad de las f_n a la función límite. Sin embargo, el límite uniforme f de una sucesión de funciones derivables (f_n) puede no ser derivable y, si lo es, puede ocurrir que la sucesión de las derivadas (f'_n) no converja ni siquiera puntualmente a f'. Pero si (f_n) es una sucesión de funciones derivables en un intervalo (a, b) y para un c de (a, b) la sucesión numérica $\big(f_n(c)\big)$ converge y la sucesión de las derivadas (f'_n) converge uniformemente en (a, b), entonces la sucesión de funciones (f_n) converge uniformemente en (a, b), su límite f es una función derivable en (a, b) y $f'(x)$ es el límite de la sucesión $\big(f'_n(x)\big)$ para cada x de (a, b).

1.1. CONVERGENCIA UNIFORME

1.1.1. Sea $A \subset \mathbb{R}$. Se dice que una sucesión (f_n) de funciones de A en $\mathbb{R}$ *converge puntualmente* a una función $f{:}A \to \mathbb{R}$ cuando para cada $x \in A$ se verifica

$$\lim_n f_n(x) = f(x).$$

Esto significa que para cada $\varepsilon > 0$ y cada $x \in A$ existe un número natural n_0 tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $n \geqslant n_0$. Generalmente, este número natural n_0 depende no sólo de ε, sino también del punto $x \in A$ considerado. Cuando n_0 depende solamente de ε se dice que la convergencia es uniforme:

Definición: *Sea $A \subset \mathbb{R}$. Se dice que una sucesión (f_n) de funciones de A en $\mathbb{R}$ converge uniformemente a una función $f{:}\, A \to \mathbb{R}$ cuando para cada $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

para todo $n \geqslant n_0$ y todo $x \in A$.

Este concepto se puede expresar también en una forma más manejable:

Proposición: *Sea $A \subset \mathbb{R}$. Una sucesión (f_n) de funciones de A en $\mathbb{R}$ converge uniformemente a una función $f{:}\, A \to \mathbb{R}$ si y sólo si*

$$\lim_n \sup\{|f_n(n) - f(x)| : x \in A\} = 0.$$

Demostración: Si (f_n) converge uniformemente a f en A, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/2$ para todo $n \geqslant n_0$ y todo $x \in A$ y, por tanto,

$$\sup\{|f_n(x)-f(x)| : x \in A\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

para todo $n \geqslant n_0$, luego

$$\lim_n \sup\{|f_n(x)-f(x)| : x \in A\} = 0.$$

Recíprocamente, si se verifica esta condición, para cada $\varepsilon>0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup\{|f_n(x)-f(x)| : x \in A\} < \varepsilon$$

para todo $n \geqslant n_0$ y como para todo $x \in A$ es

$$|f_n(x)-f(x)| \leqslant \sup\{|f_n(x)-f(x)| : x \in A\},$$

se tiene

$$|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$$

para todo $n \geqslant n_0$ y todo $x \in A$, luego (f_n) converge uniformemente a f en A.

Ejemplos:

1. Sea (f_n) la sucesión de funciones de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in [0, 1]$. Como

$$\lim_n f_n(0) = \lim_n 0 = 0$$

y, para cada $x \in (0, 1]$,

$$\lim_n f_n(x) = \lim_n \frac{x}{1+nx} = 0$$

la sucesión (f_n) converge puntualmente a la función $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x)=0$ para cada $x \in [0, 1]$. Veamos si la convergencia es uniforme o no:

Para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in [0, 1]$ es

$$|f_n(x)-f(x)| = |f_n(x)| = f_n(x)$$

y la función f_n es continua en el compacto $[0, 1]$ luego, por el teorema de Weierstrass, tiene máximo y como

$$f'_n(x) = \frac{1}{(1+nx)^2} > 0,$$

f_n es creciente y su máximo en $[0, 1]$ es $f_n(1)=1/(1+n)$.

Por consiguiente:

$$\lim_n \sup \{|f_n(x)-f(x)|: x \in [0, 1]\} = \lim_n \frac{1}{1+n} = 0$$

y (f_n) converge uniformemente en $[0, 1]$ a la función nula.

2. Sea (f_n) la sucesión de funciones de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x(1-nx) & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/n \\ 0 & \text{si} \quad x \geqslant 1/n \end{cases}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in [0, 1]$. Como $f_n(0)=0$ y para cada $x \in (0, 1]$ es $f_n(x)=0$ para todo $n \geqslant 1/x$, (f_n) converge puntualmente a la función $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x)=0$ para cada $x \in [0, 1]$. Pero como

$$\sup \{|f_n(x)-f(x)| : x \in [0, 1]\} = \sup \left\{n^2 x(1-nx) : x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]\right\} = \frac{n}{4},$$

se tiene

$$\lim_n \sup\{|f_n(x)-f(x)| : x \in [0, 1]\} = +\infty$$

y la convergencia no es uniforme.

1.1.2. **Proposición (Criterio de Cauchy):** *Sea $A \subset \mathbb{R}$. Una sucesión (f_n) de funciones de A en $\mathbb{R}$ converge uniformemente en A si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

para todo par de números naturales m y n mayores que n_0 y para todo $x \in A$.

Demostración: Si (f_n) converge uniformemente en A hacia una función f, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $n > n_0$ y todo $x \in A$. Entonces, para todo par de números naturales m, n mayores que n_0 y para todo $x \in A$ se verifica

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Recíprocamente, si se cumple la condición del enunciado, la sucesión de números reales $(f_n(x))$ es una sucesión de Cauchy para todo $x \in A$ y, por tanto, converge. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \lim_n f_n(x)$$

para cada $x \in A$. Por definición (f_n) converge puntualmente a f en A. Probaremos que también converge uniformemente.

Para cada $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo par de números naturales m y n mayores que n_0 y para todo $x \in A$ se verifica

$$f_m(x) - \varepsilon < f_n(x) < f_m(x) + \varepsilon$$

y pasando al límite en m resulta

$$f(x) - \varepsilon \leqslant f_n(x) \leqslant f(x) + \varepsilon$$

es decir,

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

para todo $n > n_0$ y todo $x \in A$, luego (f_n) converge uniformemente a f en A.

1.2. CONVERGENCIA UNIFORME Y CONTINUIDAD

Proposición: *Sean $A \subset \mathbb{R}$ y (f_n) una sucesión de funciones de A en $\mathbb{R}$ que converge uniformemente a una función $f\colon A \to \mathbb{R}$. Si cada una de las funciones f_n es continua en un punto $a \in A$ entonces la función f es también continua en a.*

Demostración: Si a es un punto aislado de A entonces f es evidentemente continua en a. Supongamos, pues, que a es un punto de acumulación de A. Como (f_n) converge uniformemente a f en A, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo $n \geqslant n_0$ y todo $x \in A$. Sea $n \geqslant n_0$. Como f_n es continua en a, existe un entorno $N(a)$ tal que

$$|f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo $x \in N(a) \cap A$. Por tanto, para todo $x \in N(a) \cap A$ se verifica

$$|f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

luego f es continua en a.

Ejemplos:

1. En 1.1 hemos visto que la sucesión de funciones continuas en [0, 1]

$$f_n(x)=\begin{cases} n^2x(1-nx) & \text{si} \quad 0\leqslant x\leqslant 1/n \\ 0 & \text{si} \quad x\geqslant 1/n \end{cases}$$

converge puntual pero no uniformemente en [0, 1] a la función continua $f(x)=0$.

Este ejemplo prueba que la convergencia uniforme de la sucesión (f_n), suficiente para transmitir la continuidad de las f_n a la función límite, no es necesaria.

2. Sea (f_n) la sucesión de funciones de [0, 1] en $\mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x)=\frac{1}{1+nx}$$

para cada $n\in\mathbb{R}$ y cada $x\in[0, 1]$. Como

$$\lim_n f_n(0)=\lim_n 1=1$$

y, para cada $x\in(0, 1]$,

$$\lim_n f_n(x)=\lim_n\frac{1}{1+nx}=0$$

la sucesión (f_n) converge puntualmente a la función $f\colon[0, 1]\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x=0 \\ 0 & \text{si} \quad x\neq 0 \end{cases}$$

pero como cada una de las f_n es continua en [0, 1] y la función f no es continua en 0, la convergencia no es uniforme.

Proposición (Teorema de Dini): *Sea $A\subset\mathbb{R}$ un conjunto compacto y sea (f_n) una sucesión de funciones continuas de A en $\mathbb{R}$ que converge puntualmente a una función continua $f\colon A\to\mathbb{R}$. Si para cada $x\in A$ la sucesión numérica $(f_n(x))$ es creciente (respectivamente, decreciente), entonces (f_n) converge uniformemente a f en A.*

Demostración: Supongamos que para cada $x\in A$ la sucesión $(f_n(x))$ es creciente. Como (f_n) converge puntualmente a f en A, para cada $\varepsilon>0$ y cada $x\in A$ existe un número natural n_x tal que

$$0\leqslant f(x)-f_n(x)<\varepsilon$$

para todo $n\geqslant n_x$. En particular,

$$0\leqslant f(x)-f_{n_x}(x)<\varepsilon$$

y como la función $f-f_{n_x}$ es continua en x, existe un conjunto abierto $A(x)$ que contiene a x tal que

$$0 \leqslant f(y)-f_{n_x}(y) < \varepsilon$$

para todo $y \in A \cap A(x)$.

La familia de los $A(x)$, $x \in A$, es un recubrimiento abierto de A y como A es compacto, existen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ tales que

$$A \subset A(x_1) \cup A(x_2) \cup \cdots \cup A(x_m).$$

Sea $n_0 = \text{máx}\{n_{x_1}, n_{x_2}, \ldots, n_{x_m}\}$. Cada $y \in A$ pertenece al menos a un $A(x_i)$, $i=1, 2, \ldots, m$, y por tanto,

$$0 \leqslant f(y)-f_n(y) \leqslant f(y)-f_{n_{x_i}}(y) < \varepsilon$$

para todo $n \geqslant n_0$ y todo $y \in A$.

Esto prueba que (f_n) converge uniformemente a f en A.

La demostración, en el caso de que para cada $x \in A$ la sucesión $(f_n(x))$ sea decreciente, es análoga.

Ejemplo: La sucesión (f_n) de funciones continuas en $(0, 1)$ definida por

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in (0, 1)$ converge puntualmente a la función continua $f:(0, 1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x)=0$ para cada $x \in (0, 1)$. Además, para cada $x \in (0, 1)$ la sucesión $(f_n(x))$ es decreciente. Sin embargo, como f_n es decreciente en $(0, 1)$, se tiene

$$\sup\{|f_n(x)-f(x)| : x \in (0, 1)\} = \sup\{f_n(x) : x \in (0, 1)\} = 1$$

y, por tanto,

$$\lim_n \sup\{|f_n(x)-f(x)| : x \in (0, 1)\} = 1 \neq 0$$

y la convergencia no es uniforme.

Este ejemplo prueba que no se puede prescindir de la hipótesis de compacidad en el teorema de Dini.

1.3. CONVERGENCIA UNIFORME E INTEGRABILIDAD

Proposición: *Sea (f_n) una sucesión de funciones de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ que converge uniformemente a una función $f:[a, b] \to \mathbb{R}$. Si cada una de las funciones f_n es integrable en $[a, b]$ entonces la función f es también integrable en $[a, b]$ y se verifica*

$$\int_a^b f = \lim_n \int_a^b f_n$$

Demostración: Sea $\varepsilon>0$. Como (f_n) converge uniformemente a f en $[a, b]$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$ y todo $x \in [a, b]$ se verifica

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

y, por tanto

$$f_n(x)-\frac{\varepsilon}{3(b-a)}<f(x)<f_n(x)+\frac{\varepsilon}{3(b-a)}.$$

Fijemos $n \geqslant n_0$. Como f_n es integrable en $[a, b]$, existe una partición $P=\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ de $[a, b]$ tal que

$$U(f_n, P)-L(f_n, P)<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Pero si m_i y M_i son el ínfimo y el supremo de f y m_i' y M_i' son el ínfimo y el supremo de f_n en $[x_{i-1}, x_i]$, se tiene

$$m_i'-\frac{\varepsilon}{3(b-a)} \leqslant m_i \qquad \text{y} \qquad M_i \leqslant M_i'+\frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

y multiplicando estas desigualdades por (x_i-x_{i-1}) y sumando desde $i=1$ hasta $i=k$ resultan

$$L(f_n, P)-\frac{\varepsilon}{3} \leqslant L(f, P) \qquad \text{y} \qquad U(f, P) \leqslant U(f_n, P)+\frac{\varepsilon}{3}$$

y, por tanto,

$$U(f, P)-L(f, P) \leqslant U(f_n, P)-L(f_n, P)+\frac{2\varepsilon}{3}<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{2\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

luego f es integrable en $[a, b]$.

Además, para todo $n \geqslant n_0$ se verifica

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right| &\leqslant \int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx \\ &\leqslant \int_a^b \frac{\varepsilon}{3(b-a)}dx \\ &<\varepsilon\end{aligned}$$

y, por consiguiente,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_n \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Ejemplo: Sea (f_n) la sucesión de funciones de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in [0, 1]$. Como

$$\lim_n f_n(0) = \lim_n 0 = 0$$

y para cada $x \in (0, 1]$,

$$\lim_n f_n(x) = \lim_n \frac{nx}{1+nx} = 1,$$

la sucesión (f_n) converge puntualmente a la función $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Cada una de las funciones f_n es continua en $[0, 1]$ pero f no es continua en 0, luego la convergencia no es uniforme.

Sin embargo, tanto las f_n como f son integrables en $[0, 1]$ y se tiene

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+nx}\right) dx = x - \frac{1}{n} \log(1+nx)\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{n}\log(1+n)$$

y

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1$$

y, por tanto,

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_n \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

Este ejemplo prueba que la hipótesis de convergencia uniforme en la proposición anterior, suficiente para asegurar la integrabilidad de f y la igualdad

$$\int_a^b f = \lim_n \int_a^b f_n,$$

no es necesaria.

1.4. CONVERGENCIA UNIFORME Y DERIVABILIDAD

En los apartados anteriores hemos visto que la convergencia uniforme de una sucesión de funciones (f_n) es suficiente para transmitir la continuidad o la integrabilidad de las f_n a la función límite. Sin embargo, el límite uniforme f de una sucesión de funciones derivables puede no ser derivable y, si lo es, puede ocurrir que la sucesión de las derivadas (f'_n) no converja ni siquiera puntualmente a f'.

Ejemplos:

1. Sea (P_n) la sucesión de funciones polinómicas definida como sigue:

$$P_1(x)=\frac{1}{2}x^2 \qquad \text{y} \qquad P_{n+1}(x)=P_n(x)+\frac{1}{2}[x^2-P_n^2(x)].$$

Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in [-1, 1]$ se verifica

$$0 \leqslant |x|-P_n(x) \leqslant \frac{2|x|}{2+n|x|}.$$

Para ver esto procederemos por inducción: Sea $x \in [-1, 1]$. Como

$$|x|-P_1(x)=|x|-\frac{1}{2}|x|^2=|x|\cdot\frac{2-|x|}{2}=|x|\cdot\frac{4-|x|^2}{2(2+|x|)},$$

se verifica

$$0 \leqslant |x|-P_1(x) \leqslant \frac{2|x|}{2+|x|}$$

y las desigualdades se cumplen para $n=1$. Supongamos que se cumplen para n, es decir, supongamos que

$$0 \leqslant |x|-P_n(x) \leqslant \frac{2|x|}{2+n|x|}.$$

Se tiene

$$|x|-P_{n+1}(x)=|x|-P_n(x)-\frac{1}{2}[x^2-P_n^2(x)]$$

$$=\frac{1}{2}[2(|x|-P_n(x))-(x^2-P_n^2(x))]$$

$$=\frac{1}{2}[|x|-P_n(x)]\cdot[2-|x|-P_n(x)].$$

Pero, por hipótesis es $|x|-P_n(x) \geqslant 0$, luego $P_n(x) \leqslant |x| \leqslant 1$ y

$$2-|x|-P_n(x)=(1-|x|)+(1-P_n(x)) \geqslant 0$$

y, por tanto,

$$|x| - P_{n+1}(x) \geqslant 0.$$

También se verifica por hipótesis

$$|x| - P_n(x) \leqslant \frac{2|x|}{2+n|x|}$$

y de aquí resulta

$$\frac{1}{2}\,[2 - |x| - P_n(x)] \leqslant \frac{1}{2}\left[2 - |x| - |x| + \frac{2|x|}{2+n|x|}\right]$$

$$= 1 - |x| + \frac{|x|}{2+n|x|}$$

$$= \frac{2 + n|x| - 2|x| - n|x|^2 + |x|}{2+n|x|}$$

$$\leqslant \frac{2 + (n-1)\,|x|}{2+n|x|}$$

y, por tanto.

$$|x| - P_{n+1}(x) \leqslant \frac{2|x|}{2+n|x|} \cdot \frac{2+(n-1)\,|x|}{2+n|x|}$$

$$= \frac{2|x|}{2+(n+1)\,|x|} \cdot \frac{[2+(n+1)\,|x|]\cdot[2+(n-1)\,|x|]}{(2+n\,|x|)^2}$$

$$= \frac{2\,|x|}{2+(n+1)\,|x|} \cdot \frac{(2+n\,|x|)^2 - |x|^2}{(2+n\,|x|)^2}$$

$$\leqslant \frac{2\,|x|}{2+(n+1)\,|x|}$$

luego las desigualdades son también válidas para $n+1$.

Por consiguiente, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in [-1, 1]$ se verifica

$$0 \leqslant |x| - P_n(x) \leqslant \frac{2|x|}{2+n|x|}$$

y como para $x \neq 0$ es

$$\frac{2|x|}{2+n|x|} = \frac{2}{(2/|x|)+n} \leqslant \frac{2}{n}$$

y para $x=0$ también se cumple

$$\frac{2|x|}{2+n|x|}\leqslant\frac{2}{n},$$

se tiene

$$0\leqslant|x|-P_n(x)\leqslant\frac{2}{n}.$$

Esto prueba que la sucesión (P_n) converge uniformemente en $[-1, 1]$ a la función $f(x)=|x|$.

Ahora bien, cada una de las P_n es derivable en todo punto, mientras que f no es derivable en 0.

2. La sucesión de funciones (f_n) definida por

$$f_n(x)=\frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{n}}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in \mathbb{R}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a la función $f(x)=0$, puesto que

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in \mathbb{R}$.

Pero como $f'(x)=0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y

$$f'_n(x)=\sqrt{n}\ \cos nx$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in \mathbb{R}$, la sucesión (f'_n) no converge ni siquiera puntualmente a f' pues, por ejemplo,

$$\lim_n f'_n(0)=\lim_n \sqrt{n}=+\infty$$

mientras que $f'(0)=0$.

Proposición: *Sea (f_n) una sucesión de funciones derivables y con derivada finita en (a, b) y supongamos que para un $c \in (a, b)$ la sucesión numérica $(f_n(c))$ converge y que la sucesión de las derivadas (f'_n) converge uniformemente en (a, b). Entonces la sucesión de funciones (f_n) converge uniformemente en (a, b), su límite f es una función derivable en (a, b) y para cada $x \in (a, b)$ se verifica*

$$f'(x)=\lim_n f'_n(x).$$

Demostración: Sea $x \in (a, b)$ y sean m y n dos números naturales arbitrarios. Aplicando el teorema del valor medio a la función $f_m - f_n$ en el intervalo de extremos c y x podemos escribir

$$f_m(x) - f_n(x) - (f_m(c) - f_n(c)) = (x - c)\ (f'_m(y) - f'_n(y))$$

donde y es un número comprendido entre c y x y, por tanto,

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant |f_m(c) - f_n(c)| + |x - c|\ |f'_m(y) - f'_n(y)| <$$

$$< |f_m(c) - f_n(c)| + (b - a)\ |f'_m(y) = f'_n(y)|.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como la sucesión numérica $(f_n(c))$ converge, existe un $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_m(c) - f_n(c)| < \varepsilon/2$ para todo par de números naturales m, n myores que n_1. Además, como la sucesión (f'_n) converge uniformemente en (a, b), existe un $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|f'_m(x) - f'_n(x)| < \varepsilon/2(b - a)$ para todo par de números naturales m, n mayores que n_2 y para todo $x \in (a, b)$ (en particular, esto se verifica para el punto y). Sea $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Entonces

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + (b - a)\frac{\varepsilon}{2(b - a)} = \varepsilon$$

para todo par de números naturales m, n mayores que n_0 y para todo $x \in (a, b)$. Por consiguiente, la sucesión (f_n) converge uniformemente en (a, b) hacia una función f.

Sea ahora (g_n) la sucesión de funciones de (a, b) en $\mathbb{R}$ definida por

$$g_n(t) = \begin{cases} \dfrac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} & \text{si} \quad t \neq x \\[2ex] f'_n(x) & \text{si} \quad t = x \end{cases}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $t \in (a, b)$. Es evidente que cada g_n es continua en x.

Sean m y n dos números naturales arbitrarios. Si $t \neq x$, aplicando el teorema del valor medio a la función $f_m - f_n$ en el intervalo de extremos x y t podemos escribir

$$g_m(t) - g_n(t) = \frac{f_m(t) - f_n(t) - (f_m(x) - f_n(x))}{t - x} = f'_m(z) - f'_n(z)$$

donde z es un número comprendido entre x y t. Por otra parte,

$$g_m(x) - g_n(x) = f'_m(x) - f'_n(x)$$

De estas igualdades y teniendo en cuenta la convergencia uniforme de (f'_n) en (a, b) resulta que la sucesión (g_n) converge uniformemente en (a, b) hacia una función g. Además, como cada g_n es continua en x, también g es continua en x, es decir,

$$\lim_{t \to x} g(t) = g(x)$$

y como (f_n) converge a f, para $t \neq x$ se tiene

$$g(t)=\lim_n \; g_n(t)=\lim_n \frac{f_n(t)-f_n(x)}{t-x}=\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

y, por tanto,

$$\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=g(x)$$

luego f es derivable en x y

$$f'(x)=g(x)=\lim_n \; g_n(x)=\lim_n f_n'(x).$$

Ejercicios de autocomprobación

1. Determinar, en cada caso, el límite puntual en el conjunto A de la sucesión de funciones (f_n) y estudiar si la convergencia es uniforme o no:

   a) $A=[0,\ 1]$, $f_n(x)=\dfrac{x}{x+n}$.

   b) $A=\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$.

   c) $A=[0,\ \pi]$, $f_n(x)=\dfrac{\operatorname{sen} nx}{n}$.

   d) $A=[0,\ 2]$, $f_n(x)=e^{-nx}$.

2. Demostrar que la sucesión de funciones (f_n) definida por $f_n(x)=x^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ converge uniformemente en todo intervalo $[0,\ a]$, $0<a<1$, pero no converge uniformemente en $[0,\ 1]$.

3. Sea f una función continua en $[0,\ 1]$ tal que $f(1)=0$. Probar que la sucesión de funciones (g_n) de $[0,\ 1]$ en $\mathbb{R}$ definida por $g_n(x)=x^n f(x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in [0,\ 1]$ converge uniformemente en $[0,\ 1]$.

4. Sea (f_n) la sucesión de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x)=\frac{2nx+\operatorname{sen}^6 nx}{n}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in \mathbb{R}$. Hallar la función límite puntual, estudiar si la convergencia es uniforme o no y calcular

$$\lim_n \int_0^\pi f_n(x)\,dx.$$

5. Determinar la función f limite puntual de la sucesión de funciones (f_n) de $[0, \pi/2]$ en $\mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = \cos^n x$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in [0, \pi/2]$ y estudiar si la convergencia es uniforme o no y si es cierta o no la relación

$$\int_0^{\pi/2} f = \lim_n \int_{\bullet}^{\pi/2} f_n.$$

6. Probar que la sucesión (f_n) de funciones de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = n^2 x e^{-nx^2}$ converge a una función integrable y que, sin embargo,

$$\lim_n \int_0^1 f_n = +\infty.$$

7. Determinar la función f límite puntual de la sucesión de funciones (f_n) de $(-1, 1)$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in (-1, 1)$ y estudiar si la convergencia es uniforme o no y si es cierta o no la relación

$$f' = \lim_n f_n'.$$

8. En el ejemplo 1 de 1.4 hemos demostrado que la sucesión de funciones polinómicas

$$P_1(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\,[x^2 - P_n^2(x)]$$

converge uniformemente en $[-1, 1]$ a la función $f(x) = |x|$. Dar otra demostración de este hecho utilizando el teorema de Dini.

Soluciones a los ejercicios de autocomprobación

1. a) Para cada $x \in [0, 1]$ es

$$\lim_n f_n(x) = \lim_n \frac{x}{x+n} = 0$$

luego (f_n) converge puntualmente a la función $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ para cada $x \in [0, 1]$.

Ahora bien, para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in [0, 1]$ es $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x)$ y la función f_n es continua en el compacto $[0, 1]$, luego

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0, 1]\} = \max\{f_n(x) : x \in [0, 1]\}$$

y como

$$f_n'(x) = \frac{n}{(x+n)^2} > 0$$

f_n es creciente y su máximo en $[0, 1]$ es $f_n(1) = 1/(1+n)$. Por consiguiente,

$$\lim_n \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0, 1]\} = \lim_n \frac{1}{1+n} = 0$$

y (f_n) converge uniformemente en $[0, 1]$ a la función nula.

b) Si $|x| < 1$, entonces $\lim_n x^{2n} = 0$ y, por tanto, $\lim_n f_n(x) = 0$. Si $|x| = 1$, entonces $f_n(x) = 1/2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por tanto, $\lim_n f_n(x) = 1/2$. Si $|x| > 1$, entonces

$\lim\limits_n x^{2n} = +\infty$ y, por tanto, $\lim\limits_n f_n(x) = 1$. Por consiguiente, la sucesión (f_n) converge puntualmente a la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| < 1 \\ 1/2 & \text{si} \quad |x| = 1 \\ 1 & \text{si} \quad |x| > 1 \end{cases}$$

pero como cada una de las f_n es continua en $\mathbb{R}$ y f no es continua en $x = -1$ ni en $x = 1$, la convergencia no es uniforme.

c) Como para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in [0, \pi]$ es

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n},$$

la sucesión (f_n) converge uniformemente en $[0, \pi]$ a la función $f(x) = 0$.

d) Como $f_n(0) = 1$ y para $x \in (0, 2]$ es

$$\lim_n f_n(x) = \lim_n e^{-nx} = 0,$$

la sucesión (f_n) converge puntualmente a la función $f: [0, 2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

pero como cada una de las f_n es continua en $[0, 2]$ y la función f no es continua en 0, la convergencia no es uniforme.

2. Si $0 < a < 1$, la sucesión (f_n) converge puntualmente en $[0, a]$ a la función nula, y como para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in [0, a]$ es $|f_n(x) - 0| = f_n(x)$ y f_n es creciente en $[0, a]$, se tiene

$$\lim_n \sup\{|f_n(x) - 0| : x \in [0, a]\} = \lim_n f_n(a) = \lim_n a^n = 0,$$

luego la convergencia es uniforme.

Sin embargo, en $[0, 1]$ la sucesión (f_n) converge puntualmente a la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0, 1) \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

pero como cada una de las f_n es continua en $[0, 1]$ y la función f no es continua en 1, la convergencia no es uniforme.

3. Como f es continua en $[0, 1]$ existe un $M>0$ tal que $|f(x)|\leqslant M$ para todo $x \in [0, 1]$, y como para cada $x \in [0, 1)$ es $\lim_n x^n=0$, para cada $\varepsilon>0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0\leqslant x^n<\varepsilon/M$ para todo $n\geqslant n_0$ y todo $x \in [0, 1)$. Por consiguiente,

$$|g_n(x)|=|x^n f(x)|\leqslant Mx^n<\varepsilon$$

para todo $n\geqslant n_0$ y todo $x \in [0, 1)$, y como $g_n(1)=f(1)=0$, también $|g_n(1)|<\varepsilon$. En resumen, para cada $\varepsilon>0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|g_n(x)|<\varepsilon$ para todo $n\geqslant n_0$ y todo $x \in [0, 1]$, luego la sucesión (g_n) converge uniformemente en $[0, 1]$ a la función nula.

4. Para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica

$$|f_n(x)-2x|=\frac{\operatorname{sen}^6 nx}{n}\leqslant\frac{1}{n}$$

y de aquí resulta que (f_n) converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a la función $f(x)=2x$.

Como la convergencia es uniforme,

$$\lim_n \int_0^\pi f_n(x)dx=\int_0^\pi f(x)dx=\int_0^\pi 2x dx=\pi^2.$$

5. Como $f_n(0)=1$ y para cada $x \in (0, \pi/2]$ es $0<\cos x<1$, la sucesión (f_n) converge puntualmente en $[0, \pi/2]$ a la función

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x=0 \\ 0 & \text{si} \quad x \in (0, \pi/2] \end{cases}$$

pero como cada una de las f_n es continua en $[0, \pi/2]$ y f no es continua en 0, la convergencia no es uniforme.

Por otra parte,

$$\int_0^{\pi/2} f(x)dx=0$$

y para cada $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\pi}{2}\cos^n\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $n \geqslant m$, luego

$$\begin{aligned}0 \leqslant \int_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx &= \int_0^{\varepsilon/2} \cos^n x\,dx + \int_{\varepsilon/2}^{\pi/2} \cos^n x\,dx \leqslant \\ &\leqslant \int_0^{\varepsilon/2} dx + \int_{\varepsilon/2}^{\pi/2} \cos^n \frac{\varepsilon}{2}\,dx < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\pi}{2}\cos^n \frac{\varepsilon}{2} < \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

para todo $n \geqslant m$ y, por tanto,

$$\lim_n \int_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx = 0$$

y se verifica la igualdad del enunciado.

6. Para cada $x \in [0, 1]$ se tiene

$$\lim_n n^2 x e^{-nx^2} = 0,$$

luego el límite puntual de la sucesión (f_n) es la función $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ para cada $x \in [0, 1]$, que evidentemente es una función integrable en $[0, 1]$ y $\int_0^1 f = 0$.

Por otra parte, haciendo el cambio de variable $nx^2 = t$ resulta

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = n \int_0^1 nxe^{-nx^2}\,dx = \frac{n}{2}\int_0^n e^{-t}\,dt = \frac{n}{2}\,(1 - e^{-n})$$

y, por tanto,

$$\lim_n \int_0^1 f_n(x)\,dx = +\infty$$

Esto nos dice que la convergencia de la sucesión (f_n) a la función $f(x) = 0$ no es uniforme en $[0, 1]$. También podíamos haber comprobado esto directamente. En efecto, como

$$\begin{aligned}\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0, 1]\} &= \max\{f_n(x) : x \in [0, 1]\} = \\ &= f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n^3}}\right) = \\ &= \sqrt{\frac{n}{2}}\; e^{-1/2n^2},\end{aligned}$$

se tiene

$$\lim_n \sup\{|f_n(x)-f(x)| : x \in [0,\ 1]\} = +\infty$$

7. El límite puntual de la sucesión (f_n) es la función $f:(-1,\ 1)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=0$ para cada $x \in (-1,\ 1)$. Además,

$$f_n'(x)=\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$$

y

$$\sup\ \{|f_n(x)-f(x)| : x \in (-1,\ 1)\} = f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n}\cdot$$

luego

$$\lim_n\ \sup\ \{|f_n(x)-f(x)| : x \in (-1,\ 1)\} = 0$$

y la convergencia es uniforme.

Sin embargo, para cada $x \in (-1,\ 1)$ es $f'(x)=0$ y

$$\lim_n f_n'(x)=\lim_n \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x=0 \\ 0 & \text{si} \quad x\neq 0 \end{cases}$$

y no se verifica la relación

$$f' = \lim_n f_n'.$$

(Obsérvese que la sucesión de las derivadas (f_n') no converge uniformemente en $(-1,\ 1)$: Su límite puntual no es una función continua en 0, mientras que cada f_n' sí lo es.)

8. Por inducción se prueba que

$$0 \leqslant P_n(x) \leqslant |x|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in [-1,\ 1]$ y, por tanto,

$$P_{n+1}(x)-P_n(x)=\frac{1}{2}\ [x^2-P_n^2(x)]=\frac{1}{2}\ \big(|x|+P_n(x)\big)\ \big(|x|-P_n(x)\big)\geqslant 0,$$

luego para cada $x \in [-1,\ 1]$ la sucesión numérica $(P_n(x))$ es creciente, y como está acotada por $|x|$, tiene límite. Sea $f(x)$ dicho límite. Pasando al límite en la igualdad

$$P_{n+1}(x)=P_n(x)+\frac{1}{2}\ [x^2-P_n^2(x)]$$

se obtiene

$$x^2 - f^2(x) = 0$$

y como es $P_n(x) \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, también será $f(x) \geqslant 0$, luego

$$f(x) = |x|$$

y la sucesión de funciones continuas (P_n) converge uniformemente en $[-1, 1]$ a la función continua f en virtud del teorema de Dini.

TEMA II

Series de funciones

Esquema/resumen

Una serie de funciones converge puntualmente a una función F en un conjunto A cuando la sucesión de sus sumas parciales converge puntualmente a F en A. El conjunto A suele llamarse campo de convergencia de la serie.

Una serie de funciones converge absolutamente en un conjunto A cuando la serie de los valores absolutos converge puntualmente en A.

Una serie de funciones converge uniformemente a una función F en un conjunto A cuando la sucesión de sus sumas parciales converge uniformemente a F en A.

Las proposiciones sobre la continuidad, integrabilidad y derivabilidad de la función límite uniforme de una sucesión de funciones se traducen inmediatamente en proposiciones sobre la continuidad, integrabilidad y derivabilidad de la función suma de una serie de funciones (2.1.2.).

Una condición suficiente para la convergencia absoluta y uniforme de una serie de funciones es que dicha serie esté mayorada por una serie numérica convergente (criterio de Weierstrass).

En 2.2.2 se construye una función continua en todo punto y no derivable en ninguno.

Los criterios de Dirichlet y de Abel dan condiciones suficientes para la convergencia uniforme de una serie de funciones. Ambos se deducen de la fórmula de sumación parcial de Abel.

2.1. SERIES DE FUNCIONES

2.1.1. Sea (f_n) una sucesión de funciones y sea (F_n) la sucesión definida por

$$F_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. El par de sucesiones funcionales $((f_n), (F_n))$ se llama *serie funcional de término general* f_n y se designa por Σf_n. La función F_n se llama *suma parcial n-sima* de la serie Σf_n.

Se dice que la serie Σf_n *converge puntualmente* a una función F en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ cuando la sucesión (F_n) converge puntualmente a F en A. Esto significa que para cada $x \in A$ la serie numérica $\Sigma f_n(x)$ converge a $F(x)$. En este caso, la función F se llama suma de la serie Σf_n y se escribe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = F$$

Se dice que la serie Σf_n *converge absolutamente* en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ cuando la serie $\Sigma |f_n|$ converge puntualmente en A.

Se dice que la serie Σf_n *converge uniformemente* a una función F en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ cuando la sucesión (F_n) converge uniformemente a F en A.

Está claro que si la serie Σf_n converge absolutamente en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, entonces Σf_n converge puntualmente en A. Asimismo, si la serie Σf_n converge uniformemente a una función F en A, entonces Σf_n converge puntualmente a F en A.

Proposición (Criterio de Cauchy para la convergencia puntual): *Una serie fun-*

cional Σf_n converge puntualmente en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ y para cada $x \in A$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon$$

siempre que $n > m \geqslant n_0$.

Demostración: Por el criterio de Cauchy para series de números reales, la serie numérica $\Sigma f_n(x)$ converge si y sólo si se verifica la condición del enunciado.

Proposición. (Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme): *Una serie funcional Σf_n converge uniformemente en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon$$

para $n > m \geqslant n_0$ y para todo $x \in A$.

Demostración: Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $F_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$. Por el criterio de Cauchy para la convergencia uniforme de sucesiones, la sucesión (F_n) converge uniformemente en A si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|F_n(x) - F_m(x)| < \varepsilon$$

para $n > m \geqslant n_0$ y para todo $x \in A$, es decir, si y sólo si

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon$$

para $n > m \geqslant n_0$ y para todo $x \in A$.

2.1.2. Las tres proposiciones siguientes se demuestran inmediatamente a partir de las proposiciones sobre la continuidad, integrabilidad y derivabilidad de la función límite uniforme de una sucesión de funciones.

Proposición: *Sea Σf_n una serie de funciones que converge uniformemente a una función F en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$. Si cada una de las funciones f_n es continua en un punto $a \in A$, entonces la función F también es continua en a.*

Proposición: *Sea Σf_n una serie de funciones que converge uniformemente a una función F en un intervalo $[a, b]$. Si cada una de las funciones f_n es integrable en $[a, b]$, entonces la función F también es integrable en $[a, b]$ y*

$$\int_a^b F = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n$$

Proposición: *Sea* Σf_n *una serie de funciones derivables y con derivada finita en* (a, b) *y supongamos que para un* $c \in (a, b)$ *la serie numérica* $\Sigma f_n(c)$ *converge y que la serie de las derivadas* $\Sigma f'_n$ *converge uniformemente en* (a, b). *Entonces la serie de funciones* Σf_n *converge uniformemente en* (a, b) *a una función derivable* F *y se verifica*

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$$

para cada $x \in (a, b)$.

2.2. CRITERIO DE WEIERSTRASS

2.2.1. **Proposición (Criterio de Weierstrass):** *Sea* (f_n) *una sucesión de funciones de* A *en* $\mathbb{R}$ *y supongamos que existe una sucesión de números reales* (M_n) *tal que*

$$|f_n(x)| \leqslant M_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ *y todo* $x \in A$. *Si la serie numérica* ΣM_n *converge, entonces la serie de funciones* Σf_n *converge absoluta y uniformemente en* A.

Demostración: Como la serie numérica ΣM_n converge, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=m+1}^{n} M_k < \varepsilon$$

siempre que $n > m \geqslant n_0$ y, por tanto,

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} M_k < \varepsilon$$

para $n > m \geqslant n_0$ y para todo $x \in A$, luego la serie de funciones Σf_n converge absoluta y uniformemente en A.

2.2.2. Como aplicación del criterio de Weierstrass, vamos a construir una función continua en todo punto y no derivable en ninguno. El ejemplo que vamos a dar se debe a B. L. van der Waerden y lo recoge W. Rudin en su libro «Principios de Análisis Matemático» (página 153).

Proposición: *Existe una función continua* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *no derivable en ningún punto.*

Demostración: Sea $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función periódica de período 2 definida por

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ la función

$$f_n(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^n g(4^n x)$$

es continua en todo punto. Por ser $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene $0 \leqslant f_n(x) \leqslant (3/4)^n$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y como la serie geométrica $\Sigma(3/4)^n$ converge, por el criterio de Weierstrass, la serie de funciones Σf_n converge uniformemente a la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n g(4^n x)$$

que es continua en todo punto.

Sea x un número real arbitrario y sea $m \in \mathbb{N}$. Existe un número entero k tal que $k \leqslant 4^m x < k+1$. Pongamos $\alpha_m = 4^{-m}k$ y $\beta_m = 4^{-m}(k+1)$ y consideremos los números $4^n \beta_m$ y $4^n \alpha_m$. Si $n > m$, su diferencia es un número entero par; si $n = m$, dichos números son enteros y su diferencia es 1; si $n < m$, no hay ningún entero entre ellos.

Por tanto,

$$|g(4^n \beta_m) - g(4^n \alpha_m)| = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n > m \\ 4^{n-m} & \text{si} \quad n \leqslant m \end{cases}$$

y

$$\begin{aligned} |f(\beta_m) - f(\alpha_m)| &= \left| \sum_{n=0}^{m} \left(\frac{3}{4}\right)^n [g(4^n \beta_m) - g(4^n \alpha_m)] \right| \\ &\geqslant \left(\frac{3}{4}\right)^m - \left| \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{3}{4}\right)^n [g(4^n \beta_m) - g(4^n \alpha_m)] \right| \\ &\geqslant \left(\frac{3}{4}\right)^m - \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{3}{4}\right)^n |g(4^n \beta_m) - g(4^n \alpha_m)| \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^m - \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{3}{4}\right)^n 4^{n-m} \\ &> \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^m \end{aligned}$$

luego

$$\left| \frac{f(\beta_m) - f(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} \right| > \frac{3^m}{2}$$

y como $\alpha_m \leqslant x \leqslant \beta_m$ y $\lim\limits_{m} (\beta_m - \alpha_m) = 0$, resulta que f no es derivable en x.

2.3. CRITERIOS DE DIRICHLET Y DE ABEL

Sea $A \subset \mathbb{R}$. Se dice que una sucesión de funciones (f_n) está *uniformemente acotada* en A cuando existe un $M>0$ tal que $|f_n(x)| \leqslant M$ para todo $x \in A$ y todo $n \in \mathbb{N}$.

Cada número $M>0$ para el que se cumpla la condición anterior se llama *cota uniforme* de la sucesión (f_n).

Proposición (Criterio de Dirichlet): *Sean $A \subset \mathbb{R}$, Σf_n una serie de funciones de A en $\mathbb{R}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in A$, sea $F_n(x)$ la suma parcial n-sima de la serie $\Sigma f_n(x)$. Si la sucesión (F_n) está uniformemente acotada en A y (g_n) es una sucesión de funciones de A en $\mathbb{R}$ tales que $g_{n+1}(x) \leqslant g_n(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in A$ que converge uniformemente a 0 en A, entonces la serie $\Sigma f_n g_n$ converge uniformemente en A.*

Demostración: Sea M una cota uniforme de la sucesión (F_n) en A. Como (g_n) converge uniformemente a 0 en A, para cada $\varepsilon>0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leqslant g_n(x) < \varepsilon/2M$ para todo $n \geqslant n_0$ y todo $x \in A$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in A$, sea $s_n(x)$ la suma parcial n-sima de la serie $\Sigma f_n(x) g_n(x)$. Probaremos que la sucesión (s_n) converge uniformemente en A.

Por la fórmula de sumación parcial de Abel,

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} F_k(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x)) + F_n(x) g_{n+1}(x)$$

y si $n>m$, se tiene

$$s_n(x) - s_m(x) = \sum_{k=m+1}^{n} F_k(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x)) + F_n(x) g_{m+1}(x) - F_m(x) g_{m+1}(x)$$

y como para cada $x \in A$ la sucesión $(g_n(x))$ es decreciente,

$$\begin{aligned}
|s_n(x) - s_m(x)| &\leqslant M \left[\sum_{k=m+1}^{n} (g_k(x) - g_{k+1}(x)) + g_{n+1}(x) + g_{m+1}(x) \right] \\
&= M\,[g_{m+1}(x) - g_{n+1}(x) + g_{n+1}(x) + g_{m+1}(x)] \\
&= 2M g_{m+1}(x) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

para $n>m \geqslant n_0$ y todo $x \in A$ y por la condición de Cauchy, la sucesión (s_n) converge uniformemente en A.

Ejemplo: Si $0<\delta<\pi$, las sucesiones de las sumas parciales de las series $\Sigma \operatorname{sen} nx$ y $\Sigma \cos nx$ están uniformemente acotadas en el intervalo $[\delta, 2\pi-\delta]$ por $1/\operatorname{sen}(\delta/2)$. Esto resulta inmediatamente de las desigualdades

$$|\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \dots + \operatorname{sen} nx| \leqslant \frac{1}{|\operatorname{sen}(x/2)|}$$

y

$$|\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx|\leqslant\frac{1}{|\operatorname{sen}(x/2)|}$$

válidas para todo $x\neq 2k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$. Por consiguiente, si (g_n) es una sucesión de funciones que verifica las hipótesis del criterio de Dirichlet en el intervalo $[\delta,\ 2\pi-\delta]$, las series

$$\Sigma g_n(x)\ \operatorname{sen} nx \qquad \text{y} \qquad \Sigma g_n(x)\cos nx$$

convergen uniformemente en $[\delta,\ 2\pi-\delta]$.

Proposición (Criterio de Abel): *Sean $A\subset\mathbb{R}$, Σf_n una serie de funciones de A en $\mathbb{R}$ que converge uniformemente en A y (g_n) una sucesión de funciones de A en $\mathbb{R}$, tales que $g_{n+1}(x)\leqslant g_n(x)$ para todo $n\in\mathbb{N}$ y todo $x\in A$ uniformemente acotada en A. Entonces, la serie $\Sigma f_n g_n$ converge uniformemente en A.*

Demostración: Sean M una cota uniforme de la sucesión (g_n), (F_n) la sucesión de las sumas parciales de la serie Σf_n y F su suma. Por hipótesis (F_n) converge uniformemente a F en A, luego para cada $\varepsilon>0$ existe un $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $|F_n(x)-F(x)|<\varepsilon/4\ M$ para todo $n\geqslant n_0$ y todo $x\in$ A.

Para cada $n\in\mathbb{N}$ y cada $x\in A$, sea $s_n(x)$ la suma parcial n-sima de la serie $\Sigma f_n(x)g_n(x)$. Probaremos que la sucesión (s_n) converge uniformemente en A.

Por la fórmula de sumación parcial de Abel,

$$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n} F_k(x)\,(g_k(x)-g_{k+1}(x))+F_n(x)g_{n+1}(x)$$

y si $n>m$, se tiene

$$\begin{aligned} s_n(x)-s_m(x)&=\sum_{k=m+1}^{n} F_k(x)\,(g_k(x)-g_{k+1}(x))+F_n(x)g_{n+1}(x)-F_m(x)g_{m+1}(x)=\\ &=\sum_{k=m+1}^{n} (F_k(x)-F(x))(g_k(x)-g_{k+1}(x))+(F_n(x)-F(x))\,g_{n+1}(x)-\\ &\quad-(F_m(x)-F(x))g_{m+1}(x) \end{aligned}$$

y como para cada $x\in A$ la sucesión $(g_n(x))$ es decreciente,

$$\begin{aligned} |s_n(x)-s_m(x)|&<\frac{\varepsilon}{4M}\,[g_{m+1}(x)-g_{n+1}(x)+|g_{n+1}(x)|+|g_{m+1}(x)|]\\ &\leqslant\frac{\varepsilon}{4M}\,[2\,|g_{m+1}(x)|+2\,|g_{n+1}(x)|]\\ &\leqslant\varepsilon \end{aligned}$$

para $n>m\geqslant n_0$ y todo $x\in A$ y por la condición de Cauchy, la sucesión (s_n) converge uniformemente en A.

Ejercicios de autocomprobación

1. Determinar los campos de convergencia de las siguientes series funcionales:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\, x^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(x-2)^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n \operatorname{sen} x}$

2. Estudiar la convergencia y la convergencia uniforme de las siguientes series funcionales:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 x^2}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$

3. Determinar el campo de convergencia y la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

y estudiar si la convergencia es uniforme o no.

4. Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x^n)$, se pide:

   a) Determinar su campo de convergencia A y su suma F y estudiar si la convergencia en A es uniforme o no.

   b) Probar que la serie converge uniformemente en todo intervalo cerrado contenido en $(-1, 1)$.

5. Demostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x^{2n}-x^{2n+1})$$

converge uniformemente en $[0, 1]$.

6. Sean a y b dos números reales tales que $0<a<b$. Probar que la función $F:[a, b]\to\mathbb{R}$ definida por

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$$

para cada $x\in[a, b]$ es integrable en $[a, b]$ y calcular

$$\int_a^b F(x)\,dx.$$

7. Probar que la función $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^3}$$

para cada $x\in\mathbb{R}$ es derivable en todo punto.

8. Demostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$$

converge uniformemente en $\mathbb{R}$ pero no converge absolutamente para ningún valor de x.

Soluciones a los ejercicios de autocomprobación

1. a) Para $x=0$ la serie diverge. Para $x\neq 0$ se tiene

$$\lim_n \left| \frac{\dfrac{1}{(n+1)!\,x^{n+1}}}{\dfrac{1}{n!\,x^n}} \right| = \lim_n \frac{1}{(n+1)\,|x|} = 0 < 1$$

y, por el criterio del cociente, la serie converge absolutamente en $\mathbb{R}-\{0\}$.

b) Para $x=2$ la serie diverge. Para $x\neq 2$ se tiene

$$\lim_n \sqrt[n]{\left|\frac{n}{(x-2)^n}\right|} = \lim_n \frac{\sqrt[n]{n}}{|x-2|} = \frac{1}{|x-2|}$$

y, por el criterio de la raíz, la serie converge absolutamente si $|x-2|>1$ y diverge si $|x-2|<1$.

Si $x-2=1$ queda la serie Σn y si $x-2=-1$, queda la serie $\Sigma(-1)^n n$ y ninguna de estas dos series cumple la condición necesaria de convergencia.

En resumen, la serie dada converge absolutamente en $(-\infty,\ 1)\cup(3,\ +\infty)$ y diverge en $[1,\ 3]$.

c) Cuando $\operatorname{sen} x \leqslant 0$ no se cumple la condición necesaria de convergencia, pues, si $\operatorname{sen} x<0$,

$$\lim_n e^{-n\operatorname{sen} x} = +\infty$$

y si $\operatorname{sen} x=0$, queda la serie $\Sigma(-1)^n$.

Cuando $\operatorname{sen} x>0$, la serie de los valores absolutos es una serie geométrica convergente, pues $e^{-\operatorname{sen} x}<e^0=1$.

En resumen, la serie dada converge absolutamente cuando $2k\pi<x<$ $<(2k+1)\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ y diverge en otro caso.

2. a) Si $x=0$, la serie diverge. Si $x\neq 0$ la serie converge (segundo criterio de comparación). Además, cualquiera que sea el número real $a>0$, para $|x|>a$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica

$$0\leqslant\frac{1}{n^2x^2}\leqslant\frac{1}{n^2a^2}$$

y como la serie numérica $\Sigma\, 1/n^2a^2$ converge, por el criterio de Weierstrass, la serie dada converge uniformemente en $(-\infty, \ -a) \cup (a, \ +\infty)$.

b) La serie converge si $x>1$ y diverge si $x\leqslant 1$. Además, cualquiera que sea el número real $a>1$, para todo $x\geqslant a$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica

$$0\leqslant\frac{1}{n^x}\leqslant\frac{1}{n^a}$$

y como la serie numérica $\Sigma\, 1/n^a$ converge, por el criterio de Weierstrass, la serie dada converge uniformemente en $[a, \ +\infty)$.

c) Si $x<0$, se verifica

$$\lim_n \frac{e^{-nx}}{n^2+1}=+\infty$$

y, por tanto, la serie diverge en $(-\infty, \ 0)$.

Si $x\geqslant 0$, se tiene

$$0\leqslant\frac{e^{-nx}}{n^2+1}\leqslant\frac{1}{n^2+1}$$

y como la serie numérica $\Sigma\, 1/(n^2+1)$ converge, por el criterio de Weierstrass, la serie dada converge uniformemente en $[0, \ +\infty)$.

3. Si $x=0$ es la serie nula. Si $x\neq 0$ es una serie geométrica de razón $1/(1+x^2)<1$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}=x^2\cdot\frac{\dfrac{1}{1+x^2}}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}=1.$$

Por consiguiente, la serie dada converge en $\mathbb{R}$ y su suma es la función $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x=0\\ 1 & \text{si } x\neq 0\end{cases}$$

Como las funciones $f_n(x)=x^2/(1+x^2)^n$ son continuas y F no es continua en 0, la convergencia en $\mathbb{R}$ no es uniforme.

4. a) La suma parcial n-sima de la serie es

$$F_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n-(x^2+x^4+\cdots+x^{2n})$$

y para $|x|\neq 1$ se tiene

$$F_n(x)=\frac{x^{n+1}-x}{x-1}-\frac{x^{2n+2}-x^2}{x^2-1}$$

luego si $|x|<1$ la serie converge y su suma es

$$F(x)=\lim_n F_n(x)=\frac{x}{1-x}-\frac{x^2}{1-x^2}=\frac{x}{1-x^2}$$

Por otra parte, si $x=1$ se tiene $x^n(1-x^n)=0$ para todo $n\in\mathbb{N}$, luego la serie converge y $F(1)=0$. Para $x=-1$ es

$$x^n(1-x^n)=\begin{cases}0 & \text{si } n \text{ es par}\\ -2 & \text{si } n \text{ es impar}\end{cases}$$

y la serie diverge. Para $|x|>1$ es

$$\lim_n x^n(1-x^n)=-\infty$$

y la serie también diverge.

Por consiguiente, el campo de convergencia de la serie es el conjunto $A=(-1,\ 1]$ y su suma es la función F de A en $\mathbb{R}$ definida por

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-x^2} & \text{si } x\in(-1,\ 1)\\ 0 & \text{si } x=1\end{cases}$$

La convergencia en A no es uniforme porque las funciones $f_n(x)=x^n(1-x^n)$ son continuas en A y F no es continua en 1.

b) Sea $[a, b]$ un intervalo contenido en $(-1, 1)$ y sea $c = \text{máx}\ \{|a|, |b|\}$. Para cada $x \in [a, b]$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$|x^n(1-x^n)| \leqslant |x|^n + |x|^{2n} \leqslant c^n + c^{2n}$$

y como $0 < c < 1$, las series geométricas Σc^n y Σc^{2n} convergen, luego la serie numérica $\Sigma (c^n + c^{2n})$ converge y por el criterio de Weierstrass, la serie dada converge uniformemente en $[a, b]$.

5. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in [0, 1]$ sea $f_n(x) = \frac{1}{n}(x^{2n} - x^{2n+1})$. Entonces

$$f'_n(x) = \frac{1}{n} x^{2n-1}[2n - (2n+1)x]$$

y $f'_n(x) = 0$ para $x = 2n/(2n+1)$. Para $0 < x < 2n/(2n+1)$ es $f'_n(x) > 0$ y para $2n/(2n+1) < x < 1$ es $f'_n(x) < 0$. Por tanto, el máximo de f_n en $[0, 1]$ es

$$f_n\left(\frac{2n}{2n+1}\right) = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n} \cdot \frac{1}{n(2n+1)}$$

y para cada $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in [0, 1]$ se tiene

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n} \cdot \frac{1}{n(2n+1)} \leqslant \frac{1}{n(2n+1)}$$

y como la serie numérica $\Sigma\, 1/n(2n+1)$ converge, por el criterio de Weierstrass, la serie Σf_n converge uniformemente en $[0, 1]$.

6. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in [a, b]$ se verifica

$$0 < ne^{-nx} < ne^{-na}$$

y como la serie numérica Σne^{-na} converge (criterio de la raíz), la serie Σne^{-nx} converge uniformemente en $[a, b]$ (criterio de Weierstrass). Además, cada una de las funciones $f_n(x) = ne^{-nx}$ es integrable en $[a, b]$, luego F es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b F(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b ne^{-nx}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-na} - e^{-nb})$$

$$= \frac{e^{-a}}{1-e^{-a}} - \frac{e^{-b}}{1-e^{-b}}$$

7. Cada una de las funciones $f_n(x) = (\operatorname{sen} nx)/n^3$ es derivable y $f'_n(x) = (\cos nx)/n^2$.

Además, como $|f_n(x)| \leqslant 1/n^3$ y $|f'_n(x)| \leqslant 1/n^2$, las dos series Σf_n y $\Sigma f'_n$ convergen uniformemente en $\mathbb{R}$ (criterio de Weierstrass). Por tanto, F es derivable y

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$.

8. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in \mathbb{R}$ sean $f_n(x) = (-1)^n$ y $g_n(x) = 1/(n+x^2)$ y sea $F_n(x)$ la suma parcial n-sima de la serie $\Sigma f_n(x)$. Como $F_{2n-1}(x) = -1$ y $F_{2n}(x) = 0$, la sucesión (F_n) está uniformemente acotada en $\mathbb{R}$. Además, es evidente que $g_{n+1}(x) \leqslant g_n(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in \mathbb{R}$, y la sucesión (g_n) converge uniformemente a 0 en $\mathbb{R}$, puesto que $0 \leqslant g_n(x) \leqslant 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in \mathbb{R}$. Por consiguiente, la serie $\Sigma f_n g_n$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ (criterio de Dirichlet).

Por otra parte, la serie de los valores absolutos $\Sigma\, 1(n+x^2)$ diverge para todo $x \in \mathbb{R}$.

Tema III

Series de potencias

Esquema/resumen

3.1. *Series de potencias.*

3.2. *Convergencia uniforme, derivación e integración de una serie de potencias.*

3.3. *El teorema del límite de Abel.*

3.4. *Desarrollos en serie de potencias.*

Una serie funcional de la forma $\Sigma a_n (x-a)^n$ se llama serie de potencias centrada en a. En este tema y con el fin de simplificar la escritura, nos limitaremos a estudiar las series de potencias centradas en 0, es decir, las series de la forma $\Sigma a_n x^n$.

Dada una serie de potencias, existe un $r \geqslant 0$ tal que la serie converge absolutamente si $|x| < r$ y diverge si $|x| > r$. El elemento $r \in \overline{\mathbb{R}}$ con estas propiedades se llama radio de convergencia de la serie y el intervalo $(-r, r)$ se llama intervalo de convergencia de la serie. Del criterio de la raíz se deduce una fórmula para calcular el radio de convergencia de una serie de potencias.

La convergencia de una serie de potencias es uniforme en cualquier intervalo cerrado contenido en su intervalo de convergencia. De este hecho se deducen la derivabilidad y la integrabilidad de la función suma de la serie.

El teorema del límite de Abel establece que si una serie de potencias converge en uno de los extremos de su intervalo de convergencia, entonces la suma de la serie es una función continua en ese punto.

Se dice que la serie $\Sigma a_n x^n$ es un desarrollo en serie de potencias de una función f en un intervalo $(-r, r)$ cuando su radio de convergencia es mayor o igual que r y su suma es igual a $f(x)$ para cada $x \in (-r, r)$.

El desarrollo en serie de potencias de una función f, si existe, es $\Sigma[f^{(n)}(0)/n!]x^n$. Pero hay funciones para las que esta serie converge y que, sin embargo, no son desarrollables en serie de potencias. Una condición suficiente para que una función sea desarrollable en serie de potencias es que la sucesión de sus derivadas esté uniformemente acotada.

3.1. SERIES DE POTENCIAS

Una serie funcional de la forma $\Sigma\, a_n (x-a)^n$ se llama *serie de potencias* centrada en a. Para simplificar la escritura, nos limitaremos a estudiar las series de potencias centradas en 0, es decir, las series de la forma $\Sigma\, a_n x^n$.

Proposición: *Si una serie de potencias $\Sigma\, a_n x^n$ converge para un $x_0 \neq 0$, entonces la serie converge absolutamente si $|x| < |x_0|$.*

Demostración: Si la serie $\Sigma\, a_n x_0^n$ converge, entonces, $\lim\limits_n a_n x_0^n = 0$ y, por tanto, la sucesión $(a_n x_0^n)$ está acotada, es decir, existe un $c > 0$ tal que $|a_n x_0^n| < c$ para todo n, luego

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < c \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

y si $|x| < |x_0|$, la serie geométrica $\Sigma |x/x_0|^n$ converge y, por el primer criterio de comparación, la serie $\Sigma\, a_n x^n$ converge absolutamente.

Proposición: *Dada una serie de potencias $\Sigma\, a_n x^n$, existe un $r \geqslant 0$ tal que la serie converge absolutamente si $|x| < r$ y diverge si $|x| > r$.*

Demostración: Sea A el conjunto de los números reales $x \geqslant 0$ para los que la serie $\Sigma a_n x^n$ converge absolutamente, A es no vacío porque $0 \in A$. Sea r el supremo de A en $\overline{\mathbb{R}}$. Entonces $r \geqslant 0$.

Si $0 < r \leqslant +\infty$ y $|x| < r$, existe un $x_0 \in A$, tal que $|x| < x_0 \leqslant r$, es decir, existe un número real x_0 tal que $|x| < x_0 \leqslant r$ y la serie $\Sigma\, a_n x_0^n$ converge y, por la proposición anterior, la serie $\Sigma\, a_n x^n$ converge absolutamente.

Si $0 \leqslant r < +\infty$ y $|x| > r$, la serie $\Sigma a_n x^n$ diverge, pues, de lo contrario, para cualquier número real α tal que $|x| > \alpha > r$, la serie $\Sigma a_n \alpha^n$ sería absolutamente convergente en virtud de la proposición anterior y, por tanto, $\alpha \in A$, siendo $\alpha > \sup A$, lo cual es absurdo.

Definición: *Dada una serie de potencias $\Sigma a_n x^n$, el elemento $r \in \overline{\mathbb{R}}$ con las propiedades de la proposición anterior se llama radio de convergencia de la serie y el intervalo $(-r, r)$ se llama intervalo de convergencia de la serie.*

Proposición: *Si $\overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n|} = l$ entonces el radio de convergencia r de la serie de potencias $\Sigma a_n x^n$ viene dado por*

$$r = \begin{cases} +\infty & \text{si } l = 0 \\ 1/l & \text{si } l \in (0, +\infty) \\ 0 & \text{si } l = +\infty \end{cases}$$

Demostración: Como $\quad \overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x|\, l,$

por el criterio de la raíz, si $l = 0$ la serie converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$, si $l \in (0, +\infty)$ la serie converge absolutamente si $|x| < 1/l$ y diverge si $|x| > 1/l$, y si $l = +\infty$ la serie diverge para todo $x \neq 0$. La conclusión se deduce ahora de la proposición anterior.

Observación: Si $a_n \neq 0$ para todo n y $\lim_n |a_{n+1}/a_n| = l$ entonces el radio de convergencia r de la serie de potencias $\Sigma a_n x^n$ viene dado por

$$r = \begin{cases} +\infty & \text{si } l = 0 \\ 1/l & \text{si } l \in (0, +\infty) \\ 0 & \text{si } l = +\infty \end{cases}$$

puesto que por ser

$$\underline{\lim_n} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leqslant \underline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \overline{\lim_n} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|,$$

se tiene

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = l.$$

Ejemplos:

1. La serie $\Sigma x^n/n^n$ converge para todo $x \in \mathbb{R}$, puesto que por ser

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \frac{1}{n} = 0,$$

su radio de convergencia es $+\infty$.

2. La serie $\Sigma n^n x^n$ converge sólamente para $x=0$, puesto que, por ser

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n n = +\infty,$$

su radio de convergencia es 0.

3. Para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, el radio de convergencia de la serie $\Sigma n^\alpha x^n$ es 1, puesto que

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{n^\alpha} = 1.$$

Por tanto, la serie converge absolutamente en el intervalo $(-1, 1)$. Estudiemos lo que ocurre en los extremos de este intervalo: Si $\alpha > 0$, la serie diverge para $x=-1$ y para $x=1$ (el término general no tiende a cero). Si $-1 \leqslant \alpha < 0$, la serie converge para $x=-1$ (criterio de Leibnitz) y diverge para $x=1$ (criterio integral). Si $\alpha < -1$, la serie converge absolutamente para $x=-1$ y para $x=1$ (criterio integral).

3.2. CONVERGENCIA UNIFORME, DERIVACION E INTEGRACION DE UNA SERIE DE POTENCIAS

3.2.1. **Proposición:** *Si $r>0$ es el radio de convergencia de una serie de potencias $\Sigma a_n x^n$ y $x_0 \in (0, r)$, entonces la serie converge absoluta y uniformemente en $[-x_0, x_0]$.*

Demostración: Es una consecuencia inmediata del criterio de Weierstrass, puesto que para todo n y todo $x \in [-x_0, x_0]$ se verifica $|a_n x^n| \leqslant |a_n x_0^n|$ y, por ser $0 < x_0 < r$, la serie numérica $\Sigma |a_n x_0^n|$ converge.

3.2.2. **Proposición:** *Si $r>0$ es el radio de convergencia de una serie de potencias $\Sigma a_n x^n$ entonces la serie de potencias $\Sigma n a_n x^{n-1}$ tiene también radio de convergencia r, la función $f:(-r, r) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

es derivable y

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

para cada $x \in (-r, r)$.

Demostración: Como

$$\left(\underline{\lim}_n \sqrt[n]{n}\right)\left(\overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|}\right) \leqslant \overline{\lim}_n \sqrt[n]{n\,|a_n|} \leqslant \left(\overline{\lim}_n \sqrt[n]{n}\right)\left(\overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|}\right)$$

y

$$\lim_n \sqrt[n]{n} = 1,$$

se tiene

$$\overline{\lim_n} \sqrt[n]{n\,|a_n|} = \overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n|}$$

y, por tanto, los radios de convergencia de las series $\Sigma n a_n x^{n-1}$ y $\Sigma a_n x^n$ son iguales.

Para todo $x_0 \in (-r, r)$ la serie numérica $\Sigma a_n x_0^n$ converge y, según la proposición anterior, para todo $a \in (0, r)$ la serie $\Sigma n a_n x^{n-1}$ converge uniformemente en $[-a, a]$. Además, $n a_n x^{n-1}$ es la derivada de $a_n x^n$ y de la tercera proposición de 2.1.2 resulta que para cada $x \in [-a, a]$ se verifica

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Como esto es cierto para todo $a \in (0, r)$, queda probada la proposición.

Ejemplo: Sea α un número real arbitrario. La serie de potencias $\Sigma a_n x^n$ donde

$$a_0 = 1 \quad \text{y} \quad a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} \quad \text{para } n \geqslant 1,$$

se llama *serie binómica.* Como

$$\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_n \frac{|\alpha-n|}{n+1} = \lim_n \frac{n-\alpha}{n+1} = 1,$$

el radio de convergencia de esta serie es 1, y si $f: (-1, 1) \to \mathbb{R}$ es la función definida por

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n,$$

para cada $x \in (-1, 1)$ se tiene

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1}$$

y, por tanto,

$$(1+x) f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^n$$

$$= \alpha + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^n$$

$$=\alpha+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^n$$

$$=\alpha+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n-1)!}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{\alpha-n}\right]x^n$$

$$=\alpha\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\right]$$

$$=\alpha f(x)$$

y si $g:(-1,\ 1)\to\mathbb{R}$ es la función definida por $g(x)=(1+x)^{-\alpha}f(x)$, se tiene

$$\begin{aligned}g'(x)&=-\alpha(1+x)^{-\alpha-1}f(x)+(1+x)^{-\alpha}f'(x)\\&=(1+x)^{-\alpha-1}[-\alpha f(x)+(1+x)f'(x)]\\&=0\end{aligned}$$

luego $g(x)=c$ para todo $x\in(-1,\ 1)$ y como $f(0)=1$, resulta $c=1$ con lo que para todo $x\in(-1,\ 1)$ se verifica $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, es decir,

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}=(1+x)^{\alpha}$$

3.2.3. Como la serie derivada $\Sigma n a_n x^{n-1}$ tiene el mismo radio de convergencia r que la serie $\Sigma a_n x^n$, se puede aplicar la proposición anterior a dicha serie derivada, obteniendo la serie derivada segunda, cuyo radio de convergencia es también r y cuya suma es la derivada segunda de la función $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$. Repitiendo el proceso se obtiene la siguiente

Proposición: *Si $r>0$ es el radio de convergencia de una serie de potencias $\Sigma a_n x^n$ entonces para todo $k\in\mathbb{N}$ la serie de potencias $\Sigma n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n x^{n-k}$ tiene también radio de convergencia r, la función $f:(-r,\ r)\to\mathbb{R}$ definida por*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

tiene derivada k-ésima y

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n x^{n-k}$$

para cada $x\in(-r,\ r)$.

3.2.4. **Proposición:** *Si $r>0$ es el radio de convergencia de una serie de potencias $\Sigma a_n x^n$ entonces la serie de potencias $\Sigma[a_n/(n+1)]x^{n+1}$ tiene también radio de convergencia r y si $f:(-r, r)\to\mathbb{R}$ es la función definida por*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

para cada $x\in(-r, r)$ se verifica

$$\int_0^x f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

Demostración: Como

$$\left(\underline{\lim_n}\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}\right)\left(\overline{\lim_n}\sqrt[n]{|a_n|}\right)\leqslant\overline{\lim_n}\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}}\leqslant\left(\overline{\lim_n}\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}\right)\left(\overline{\lim_n}\sqrt[n]{|a_n|}\right)$$

y

$$\lim_n\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}=1,$$

se tiene

$$\overline{\lim_n}\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}}=\overline{\lim_n}\sqrt[n]{|a_n|}$$

y, por tanto, los radios de convergencia de las series $\Sigma[a_n/(n+1)]\,x^{n+1}$ y $\Sigma a_n x^n$ son iguales.

Además, para cada $x\in(-r, r)$ la serie $\Sigma a_n t^n$ converge uniformemente en el intervalo cerrado de extremos 0 y x y por la segunda proposición de 2.1.2,

$$\int_0^x f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

Ejemplo: El radio de convergencia de la serie Σx^n es igual a 1. Sea $f:(-1, 1)\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

Según la proposición anterior, para cada $x \in (-1, 1)$ se verifica

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

y derivando resulta

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2},$$

es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

3.3. EL TEOREMA DEL LIMITE DE ABEL

Proposición: *Si $r>0$ es el radio de convergencia de una serie de potencias $\Sigma a_n x^n$ y la serie numérica $\Sigma a_n r^n$ converge, entonces la serie $\Sigma a_n x^n$ converge uniformemente en $[0, r]$.*

Demostración: Para $n=0, 1, 2, \ldots$, sean f_n y g_n las funciones de $[0, r]$ en $\mathbb{R}$ definidas respectivamente por

$$f_n(x) = a_n r^n \qquad \text{y} \qquad g_n(x) = \left(\frac{x}{r}\right)^n$$

para cada $x \in [0, r]$. Como las f_n son constantes y la serie $\Sigma a_n r^n$ converge, la serie Σf_n converge uniformemente en $[0, r]$ y como $g_{n+1}(x) \leqslant g_n(x)$ y $|g_n(x)| \leqslant 1$ para $n=0$, 1, 2, ..., y para todo $x \in [0, r]$, por el criterio de Abel para la convergencia uniforme, la serie $\Sigma f_n g_n$ converge uniformemente en $[0, r]$.

Proposición (Teorema del límite de Abel): *Sea $\Sigma a_n x^n$ una serie de potencias de radio de convergencia $r>0$ y sea $f:(-r, r) \to \mathbb{R}$ la función definida por*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Si la serie numérica $\Sigma a_n r^n$ converge, entonces existe $\lim\limits_{x \to r-} f(x)$ y se verifica

$$\lim_{x \to r-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

Demostración: Por la proposición anterior, la serie $\Sigma a_n x^n$ converge uniformemente en $[0, r]$ a una función g que coincide con f en $[0, r)$ y como las funciones $f_n(x)=a_n x^n$ son continuas en todo punto, g es continua en r, luego

$$\lim_{x\to r-} f(x)=\lim_{x\to r-} g(x)=g(r)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n.$$

Observación: De manera análoga se prueba que si $r>0$ es el radio de convergencia de una serie de potencias $\Sigma a_n x^n$ y la serie numérica $\Sigma(-1)^n a_n r^n$ converge, entonces la serie $\Sigma a_n x^n$ converge uniformemente en $[-r, 0]$ y que, en estas condiciones, si $f:(-r, r)\to\mathbb{R}$ es la función definida por

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

entonces existe $\lim\limits_{x\to -r+} f(x)$ y se verifica

$$\lim_{x\to -r+} f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n r^n$$

3.4. DESARROLLOS EN SERIE DE POTENCIAS

3.4.1. **Definición:** *Sea $r>0$. Se dice que la serie $\Sigma a_n x^n$ es un desarrollo en serie de potencias de una función f en el intervalo $(-r, r)$ cuando su radio de convergencia es mayor o igual que r y*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

para cada $x\in(-r, r)$.

Proposición: *Dados dos desarrollos en serie de potencias*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\ , \quad x\in(-r_1, r_1)$$

y

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,\ x\in(-r_2, r_2),$$

la suma $f+g$ viene dada por la serie de potencias

$$f(x)+g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n, \quad x\in(-r,\ r)$$

donde $r=\min\{r_1,\ r_2\}$.

Demostración: La serie $\Sigma(a_n+b_n)x^n$ converge a $f(x)+g(x)$ para cada $x\in(-r,\ r)$.

Proposición: *Dados un desarrollo en serie de potencias*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n, \quad x\in(-r,\ r)$$

y un número real $c\neq 0$, *la función* cf *viene dada por la serie de potencias*

$$cf(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c\,a_n x^n, \quad x\in(-r,\ r)$$

Demostración: La serie $\Sigma c\,a_n x^n$ converge a $cf(x)$ para cada $x\in(-r,\ r)$.

Proposición: *Dados dos desarrollos en serie de potencias*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n, \quad x\in(-r_1,\ r_1)$$

y

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n, \quad x\in(-r_2,\ r_2),$$

el producto fg *viene dado por la serie de potencias*

$$f(x)\ g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n\ , \quad x\in(-r,\ r)$$

donde $c_n=\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}$ *y* $r=\min\{r_1,\ r_2\}$.

Demostración: Por el teorema de Mertens, el producto de Cauchy de las dos series dadas

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k x^k b_{n-k}x^{n-k}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$$

converge a $f(x)\ g(x)$ para cada $x\in(-r,\ r)$.

3.4.2. **Proposición:** *Sea $r>0$. Si $\Sigma a_n x^n$ es un desarrollo en serie de potencias de una función f en el intervalo $(-r, r)$ entonces*

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \qquad (k=0, 1, 2, \ldots)$$

Demostración: Por hipótesis, para cada $x \in (-r, r)$ se verifica

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

y por la proposición 3.2.3, para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \ldots (n-k+1)\, a_n\, x^{n-k}$$

y haciendo $x=0$ en estas igualdades resultan

$$f(0) = a_0 \qquad \text{y} \qquad f^{(k)}(0) = k!\, a_k$$

Observación: Según esta proposición, el único desarrollo en serie de potencias de una función $f:(-r, r) \to \mathbb{R}$, si existe, es $\Sigma[f^{(n)}(0)/n!]\, x^n$. Pero hay funciones f para las que la serie $\Sigma[f^{(n)}(0)/n!]\, x^n$ converge en todo punto y que, sin embargo, no son desarrollables en serie de potencias en ningún intervalo.

Ejemplo: Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Probaremos por inducción que para cada $x \neq 0$ y para todo n se verifica

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}$$

donde $P_n(1/x)$ es un polinomio en $1/x$ de grado $3n$. Evidentemente, esto se cumple para $n=0$. Supongamos que se cumple para n. Entonces

$$f^{(n+1)}(x) = \left[-\frac{1}{x^2} P'_n\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3} P_n\left(\frac{1}{x}\right) \right] e^{-1/x^2}$$

y poniendo $P_{n+1}(y) = -y^2 P'_n(y) + 2\, y^3 P_n(y)$, el polinomio P_{n+1} tiene grado $3n+3$ y

$$f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}$$

Ahora es fácil probar que $f^{(n)}(0)=0$ para todo n. Desde luego, esto se cumple para $n=0$. Supongamos que se cumple para n. Entonces, para cada $x\neq 0$, se verifica

$$\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x}=\frac{1}{x}P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}$$

y, por tanto,

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x}=\lim_{y\to +\infty} y\,P_n(y)\,e^{-y^2}=0$$

y

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x}=\lim_{y\to -\infty} y\,P_n(y)\;e^{-y^2}=0$$

luego $f^{(n+1)}=0$.

Por consiguiente, la serie $\Sigma\,[f^{(n)}(0)/n!]\,x^n$ converge a 0 para todo $x\in\mathbb{R}$. Sin embargo, la igualdad

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

solamente se verifica para $x=0$.

3.4.3. La siguiente proposición da condiciones suficientes para que una función sea desarrollable en serie de potencias.

Proposición: *Sean* $r>0$ y $f:(-r,\,r)\to\mathbb{R}$ *una función indefinidamente derivable y supongamos que la sucesión de las derivadas* $(f^{(n)})$ *está uniformemente acotada en* $(-r,\,r)$. Entonces

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\quad,\quad x\in(-r,\,r)$$

Demostración: Si $x=0$ no hay nada que demostrar. Supongamos, pues, que $x\neq 0$. Por el teorema de Taylor, para cada $m\in\mathbb{N}$ existe un punto c perteneciente al intervalo abierto de extremos 0 y x tal que

$$f(x)=\sum_{n=0}^{m-1}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(m)}(c)}{m!}x^m$$

Pero por hipótesis, existe un $M>0$ tal que $|f^{(m)}(x)| \leqslant M$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y todo $x \in (-r, r)$, luego

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| \leqslant M \frac{x^m}{m!}$$

y como para todo $x \in \mathbb{R}$ es $\lim_m (x^m/m!) = 0$, resulta

$$\lim_m \left[f(x) - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right] = 0$$

es decir,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Ejemplos:

1. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^x$. Para $n = 0, 1, 2, \ldots$, y para todo $x \in \mathbb{R}$ es $f^{(n)}(x) = e^x$ y cualquiera que sea el número real $r>0$ se tiene $|f^{(n)}(x)| \leqslant e^r$ para todo $x \in (-r, r)$. Como $f^{(n)}(0) = 1$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, según la proposición 3.4.3,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-r, r)$$

y por la arbitrariedad de r,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

2. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$. Para $n = 0, 1, 2, \ldots$ y para todo $x \in \mathbb{R}$ es $f^{(n)}(x) = \operatorname{sen}(x + n\pi/2)$ y, por tanto, $|f^{(n)}(x)| \leqslant 1$. Como $f^{(2n)}(0) = 0$ y $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$, según la proposición 3.4.3,

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

Procediendo de manera análoga o bien por derivación de este último desarrollo, se obtiene

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

3. Las dos series geométricas Σx^n y $\Sigma(-1)^n x^n$ convergen en $(-1, 1)$ a $1/(1-x)$ y $1/(1+x)$, respectivamente, luego

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1, 1)$$

y

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1, 1)$$

De estos desarrollos se deducen por integración

$$\log(1-x)=-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in (-1, 1)$$

y

$$\log(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in (-1, 1)$$

y restando,

$$\log\frac{1+x}{1-x}=2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1, 1)$$

4. La serie geométrica $\Sigma(-1)^n x^{2n}$ converge en $(-1, 1)$ a $1/(1+x^2)$, luego

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad x \in (-1, 1)$$

y por integración se obtiene

$$\text{arc tg } x=\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1, 1)$$

5. Cualquiera que sea el número real α, la serie binómica

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

converge en $(-1, 1)$ a $(1+x)^\alpha$, luego

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad x \in (-1,\ 1).$$

En particular, para $\alpha = -1/2$, resulta

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n, \quad x \in (-1,\ 1)$$

Si en este último desarrollo cambiamos x primero por $-x^2$ y después por x^2, se obtienen los desarrollos

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}, \quad x \in (-1,\ 1)$$

y

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}, \quad x \in (-1,\ 1)$$

y por integración resultan

$$\text{arc sen } x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1,\ 1)$$

y

$$\text{arg sh}\, x = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1,\ 1).$$

Ejercicios de autocomprobación

1. Determinar el intervalo de convergencia de cada una de las siguientes series de potencias y estudiar la convergencia en los extremos de dicho intervalo:

   a) $\Sigma \dfrac{x^n}{n\,2^n}$

   b) $\Sigma\, n!\, x^n$

   c) $\Sigma \dfrac{n}{n+1}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n$

   d) $\Sigma\, x^{n!}$

   e) $\Sigma\, 3^{n^2} x^{n^2}$

2. Estudiar la convergencia y calcular las sumas de las siguientes series de potencias:

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n}$

   b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\, x^n$

3. Determinar el radio de convergencia de la serie $\Sigma\, n^2 x^n$ y calcular su suma.

4. Sean $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ dos series convergentes y sea $\Sigma\, c_n$ su producto de Cauchy. Probar que si $\Sigma\, c_n$ converge, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

5. Probar que la serie $\Sigma(-1)^n/(3n+2)$ es semiconvergente y calcular su suma.

6. Deducir los siguientes desarrollos en serie de potencias:

a) $\operatorname{sen}^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$

b) $\log(x^2+3x+2) = \log 2 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in (-1, 1).$

c) $\frac{\log(1+x)}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n, \quad x \in (-1, 1).$

7. Utilizar desarrollos en serie de potencias convenientes para calcular las sumas de las series siguientes:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1} \cdot n!}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1}.$

8. Calcular la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}.$$

9. Determinar tres números reales A, B y C tales que

$$n^3 = An + Bn(n-1) + Cn(n-1)(n-2)$$

y calcular la suma de la serie

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$$

10. Utilizar los desarrollos en serie de potencias de $(1-x)^{-1/2}$ y de $(1-x)^{-1}$ para demostrar la igualdad

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!\,(2n-2k)!}{[k!\,(n-k)!]^2} = 4^n$$

Soluciones a los ejercicios de autocomprobación

1. a) Como

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \frac{1}{2\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2},$$

el radio de convergencia de la serie es 2. Para $x=-2$ queda la serie alternada $\Sigma(-1)^n/n$ que, por el criterio de Leibnitz, converge. Para $x=2$ queda la serie armónica $\Sigma\, 1/n$ que es divergente. Por tanto, la serie dada converge para $-2 \leqslant x < 2$ y diverge en otro caso.

b) Como

$$\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_n (n+1) = +\infty,$$

el radio de convergencia de la serie es 0 y la serie converge sólamente para $x=0$.

c) Como

$$\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_n \frac{(n+1)^2}{2n(n+2)} = \frac{1}{2},$$

el radio de convergencia de la serie es 2. Para $x=\pm 2$ no se cumple la condición necesaria de convergencia. Por tanto, la serie converge para $-2 < x < 2$ y diverge en otro caso.

d) Como

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m! \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

se tiene $\overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ y, por tanto, el radio de convergencia de la serie es 1. Para $x = \pm 1$ no se cumple la condición necesaria de convergencia. Por consiguiente, la serie converge para $-1 < x < 1$ y diverge en otro caso,

También podíamos haber procedido aplicando el criterio del cociente: Para $|x| \geqslant 1$ la serie diverge, puesto que su término general no tiende a cero. Para $|x| < 1$ la serie converge, puesto que

$$\lim_n \left| \frac{x^{(n+1)!}}{x^{n!}} \right| = \lim_n |x|^{n! \, n} = 0.$$

e) Como

$$a_n = \begin{cases} 3^{m^2} & \text{si } n = m^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

se tiene

$$\overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_m \sqrt[m^2]{3^{m^2}} = 3$$

y, por tanto, el radio de convergencia de la serie es 1/3. Para $x = \pm 1/3$ no se cumple la condición necesaria de convergencia. Por consiguiente, la serie converge para $-1/3 < x < 1/3$ y diverge en otro caso.

También podíamos haber procedido aplicando el criterio de la raíz: Como

$$\lim_n \sqrt[n]{|3^{n^2} x^{n^2}|} = \lim_n (3|x|)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < 1/3 \\ 1 & \text{si } |x| = 1/3 \\ +\infty & \text{si } |x| > 1/3 \end{cases}$$

la serie converge si $|x| < 1/3$ y diverge si $|x| \geqslant 1/3$.

2. a) Como

$$\lim_n \sqrt[n]{\left| \frac{x^{2n}}{2n} \right|} = \lim_n \frac{x^2}{\sqrt[n]{2n}} = x^2,$$

la serie converge absolutamente si $x^2 < 1$ y diverge si $x^2 > 1$. Para $x^2 = 1$ queda la serie $\Sigma\, 1/(2n)$ que es divergente. Por tanto, la serie converge absolutamente para $-1 < x < 1$ y diverge en otro caso.

Para cada $x \in (-1, 1)$ sea

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n}.$$

Entonces

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1} = \frac{x}{1-x^2}$$

e integrando y teniendo en cuenta que $f(0)=0$, resulta

$$f(x) = -\frac{1}{2} \log(1-x^2).$$

b) Como

$$\lim_n \left| \frac{(n+2)(n+3)\, x^{n+1}}{(n+1)(n+2)\, x^n} \right| = |x|,$$

la serie converge absolutamente si $|x|<1$ y diverge si $|x|>1$. Para $|x|=1$ no se cumple la condición necesaria de convergencia. Por tanto, la serie converge absolutamente para $-1<x<1$ y diverge en otro caso.

Para cada $x \in (-1, 1)$ sean

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\, x^n, \quad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad \text{y} \quad G(x) = \int_0^x F(t)\,dt.$$

Entonces,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\, x^{n+1}$$

y

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} = \frac{x^2}{1-x}$$

y, por consiguiente,

$$F(x) = G'(x) = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2}$$

y

$$f(x) = F'(x) = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

3. Como

$$\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_n \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1,$$

el radio de convergencia de la serie es 1.

Además, para $|x| < 1$ se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

y, por tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

y

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \sum_{n=1}^{\infty} [n(n-1)+n]\, x^n =$$

$$= x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} =$$

$$= \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

4. Las series de potencias $\Sigma a_n x^n$, $\Sigma b_n x^n$ y $\Sigma c_n x^n$ convergen para $x=1$ y, por la tercera proposición de 3.4.1, para cada $x \in (-1, 1)$ se verifica

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

y pasando al límite cuando x tiende a 1 por la izquierda (teorema del límite de Abel), resulta

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

5. Por el criterio de Leibnitz la serie dada converge y por el segundo criterio de comparación la serie de los valores absolutos diverge.

Consideremos la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+2}/(3n+2)$. Según hemos visto, esta serie converge para $x=-1$ y diverge para $x=1$, luego su radio de convergencia es 1. Pongamos

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+2}}{3n+2} \quad \text{para} \quad -1\leqslant x<1.$$

La función f es derivable en $(-1,\ 1)$ y su derivada es

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+1}=\frac{x}{1-x^3}, \qquad -1<x<1$$

y como $f(0)=0$, integrando resulta

$$f(x)=-\frac{1}{3}\log(1-x)+\frac{1}{6}\log(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

y, por el teorema del límite de Abel,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+2}=\lim_{x\to -1+} f(x)=-\frac{1}{3}\log 2+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\cdot$$

6. a) Se tiene

$$\operatorname{sen}^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

y cambiando x por $2x$ en el desarrollo

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\ x\in(-\infty,\ +\infty)$$

resulta

$$\cos 2x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in(-\infty,\ +\infty).$$

con lo que

$$1-\cos 2x=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in(-\infty,\ +\infty)$$

y

$$\operatorname{sen}^2 x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in(-\infty,\ +\infty).$$

b) Descomponiendo en fracciones simples la derivada de la función $\log(x^2+3x+2)$ se obtiene

$$\frac{2x+3}{x^2+3x+2}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+(x/2)}$$

y teniendo en cuenta los desarrollos

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad , \quad x\in(-1,\ 1)$$

y

$$\frac{1}{1+(x/2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n \quad , \quad x\in(-2,\ 2)$$

resulta

$$\frac{2x+3}{x^2+3x+2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n \quad , \quad x\in(-1,\ 1)$$

e integrando se obtiene

$$\log(x^2+3x+2)=\log 2+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x\in(-1,\ 1).$$

c) Para $x\in(-1,\ 1)$ son

$$\log(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

donde $a_0=0$ y $a_n=(-1)^{n-1}/n$ para $n\in\mathbb{N}$ y

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$$

donde $b_n=(-1)^n$ para $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$ y multiplicando estos desarrollos resulta

$$\frac{\log(1+x)}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$$

donde $c_0=a_0 b_0=0$ y, para $n\in\mathbb{N}$,

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}=\sum_{k=1}^{n}a_k b_{n-k}=(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=$$

$$=(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right).$$

Así, pues,

$$\frac{\log(1+x)}{1+x}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)x^n \quad , \quad x\in(-1,\ 1).$$

7. a) Para $x\in(-\infty,\ +\infty)$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$$

y haciendo $x=1/2$ resulta

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n!}=e^{1/2}$$

luego

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}\cdot n!}=\frac{\sqrt{e}}{2}.$$

b) La serie dada converge (criterio de Raabe) y como para $x\in(-1,\ 1)$ es

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\operatorname{arc\,sen} x-x,$$

por el teorema de Abel,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}=\lim_{x\to 1-}(\operatorname{arc\,sen} x-x)=\frac{\pi}{2}-1.$$

8. Consideremos la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}.$$

Su radio de convergencia es 1. Además, la serie converge para $x=\pm 1$. Pongamos

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}, \quad -1\leqslant x\leqslant 1.$$

Como

$$\frac{1}{n(2n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{2}{2n+1},$$

se tiene

$$f(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Pero para $x\in(-1,\ 1)$ son

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\log(1-x)\qquad \text{y}\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$$

y, por tanto,

$$f(x)=-x\ \log\ (1-x^2)-\log\ \frac{1+x}{1-x}=$$

$$=-(1+x)\ \log\ (1+x)+(1-x)\ \log\ (1-x)$$

y por el teorema del límite de Abel,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}=f(1)=\lim_{x\to 1-}f(x)=-2\ \log\ 2.$$

9. Por el método de los coeficientes indeterminados se obtiene

$$n^3=n+3n(n-1)+n(n-1)(n-2)$$

y, por tanto,

$$\frac{n^3}{n!}=\frac{1}{(n-1)!}+3\cdot\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-3)!}.$$

Pero para todo $x\in\mathbb{R}$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$$

y haciendo $x=1$ resulta

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$$

con lo que

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}=e-2,\quad \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}=e-1,\quad \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-3)!}=e$$

y, por consiguiente,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{n!}=5e-5.$$

10. Para $x \in (-1, 1)$ se tiene

$$(1-x)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^n$$

y multiplicando este desarrollo por sí mismo resulta

$$(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

donde

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \cdot \frac{(2n-2k)!}{2^{2n-2k}[(n-k)!]^2} = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!(2n-2k)!}{[k!(n-k)!]^2}$$

y como también es

$$(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

ha de ser

$$\frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!(2n-2k)!}{[k!(n-k)!]^2} = 1$$

y, por tanto,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!(2n-2k)!}{[k!(n-k)!]^2} = 4^n$$

para todo n.

TEMA IV

Topología de $\mathbb{R}^n$

Esquema/resumen

4.1. *El espacio vectorial* $\mathbb{R}^n$. *Norma de un vector.*

4.2. *Conjuntos abiertos y conjuntos cerrados.*

4.3. *Puntos interiores, exteriores y puntos frontera.*

4.4. *Puntos adherentes y puntos de acumulación.*

4.5. *Conjuntos compactos.*

En este tema se estudia la topología usual del conjunto $\mathbb{R}^n$ de las n-plas de números reales. Los conceptos que en él se definen son extensiones inmediatas de los expuestos en el tema I de la unidad didáctica 2, en el que estudiábamos la topología de $\mathbb{R}$, y las técnicas utilizadas en uno y otro temas son análogas. El papel que allí jugaba el valor absoluto lo desempeña aquí la norma, y el concepto de entorno de un punto allí definido se extiende de manera natural al concepto de bola abierta.

A pesar de estas analogías y aún a riesgo de caer en repeticiones, hemos desarrollado el tema con bastante detalle. Unicamente hemos omitido la demostración del teorema de Tychonoff, no porque su dificultad sobrepase los límites de este curso, sino porque volverá a ser objeto de estudio en el curso próximo. Damos además una referencia precisa donde puede verse, si se desea, esta demostración.

4.1. EL ESPACIO VECTORIAL $\mathbb{R}^n$. NORMA DE UN VECTOR

Se designa por $\mathbb{R}^n$ el producto cartesiano de $\mathbb{R}$ consigo mismo n veces, es decir, el conjunto de todas las n-plas de números reales:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n\}$$

Sean $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ dos elementos de $\mathbb{R}^n$ y sea λ un número real. Se definen

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \quad \text{y} \quad \lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Con estas operaciones el conjunto $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo de los números reales. Los vectores $e_1, \ldots, e_n$ donde $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ con el 1 en el lugar i constituyen una base que se llama base canónica de $\mathbb{R}^n$. Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ es un vector de $\mathbb{R}^n$, su expresión en la base canónica es $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$.

Definición: *Sea* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. *El número real* $\|x\|$ *dado por*

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

se llama norma de x.

Obsérvese que si $n = 1$, la norma de x coincide con el valor absoluto del número real x.

Proposición (Desigualdad de Cauchy-Schwarz): *Para todo par de vectores* $x=(x_1, ..., x_n)$ *e* $y=(y_1, ..., y_n)$ *de* $\mathbb{R}^n$ *se tiene*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$$

y se verifica la igualdad si y sólo si x e y son linealmente dependientes.

Demostración: Si x e y son linealmente dependientes, existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $y=\lambda x$ y, por tanto,

$$\|x\| \cdot \|y\| = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2} \cdot \sqrt{\lambda^2 x_1^2+\cdots+\lambda^2 x_n^2} = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} x_i^2 =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \lambda x_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right|$$

Si x e y son linealmente independientes, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se verifica $y-\lambda x \neq 0$ y, por tanto, $\|y-\lambda x\|>0$ y como

$$\|y-\lambda x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i-\lambda x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

este trinomio de segundo grado en λ no tiene raíces reales, luego su discriminante es negativo:

$$4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) < 0.$$

Por consiguiente,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| < \|x\| \cdot \|y\|$$

Proposición: *Sean* $x=(x_1, ..., x_n)$ *e* $y=(y_1, ..., y_n)$ *dos vectores de* $\mathbb{R}^n$ *y sea* λ *un número real. Se verifican las siguientes propiedades:*

a) $\|x\| \geqslant 0$ *y* $\|x\|=0$ *si y sólo si* $x=0$.

b) $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$.

c) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

Demostración: Las propiedades a) y c) son inmediatas. Probaremos la propiedad b). Como

$$\|x+y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_1^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 =$$

$$= \|x\|^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \|y\|^2$$

y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$$

se tiene

$$\|x+y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

y, por tanto,

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

4.2. CONJUNTOS ABIERTOS Y CONJUNTOS CERRADOS

Definición: *Sean $a \in \mathbb{R}^n$ y r un número real positivo. Los conjuntos*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| < r\} \text{ y } \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| \leqslant r\}$$

se llaman bola abierta y bola cerrada de centro a y radio r y se designan respectivamente por $B(a, r)$ y $\overline{B}(a, r)$.

Obsérvese que las bolas de $\mathbb{R}$ son intervalos, en $\mathbb{R}^2$ círculos y en $\mathbb{R}^3$ esferas.

Definición: *Se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto cuando para cada $a \in A$ existe una bola $B(a, r)$ contenida en A.*

Ejemplo: Una bola abierta $B(a, r)$ es un conjunto abierto, pues si b es un punto arbitrario de $B(a, r)$ entonces $\|b-a\| = \delta < r$ y la bola abierta de centro b y radio $r-\delta$ está contenida en $B(a, r)$, puesto que para todo $x \in B(b, r-\delta)$ se tiene

$$\|x-a\| = \|x-b+b-a\| \leqslant \|x-b\| + \|b-a\| < r-\delta+\delta = r.$$

Proposición: *Se verifican las siguientes propiedades:*

a) *ϕ y $\mathbb{R}^n$ son abiertos.*

b) *La unión de cualquier colección de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*

c) *La intersección de cualquier colección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*

Demostración: La propiedad a) es evidente. Probaremos b) y c).

Sea A la unión de una colección arbitraria $\{A_i\}_{i \in I}$ de conjuntos abiertos y sea $a \in A$. Existe un $i \in I$ tal que $a \in A_i$ y como A_i es abierto, una bola $B(a, r)$ está contenida en A_i. Entonces $B(a, r) \subset A$ y A es abierto.

Sea B la intersección de una colección finita $B_1, \ldots, B_n$ de conjuntos abiertos y sea $b \in B$. Entonces $b \in B_i$ para $i=1, \ldots, n$ y como los B_i son abiertos, para $i=1, \ldots, n$ existen bolas $B(b, r_i) \subset B_i$. La intersección de las $B(b, r_i)$ es una bola de centro b contenida en B y B es, pues, un conjunto abierto.

Definición: *Se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado cuando su complementario $\mathbb{R}^n - A$ es abierto.*

De las leyes de De Morgan sobre los complementarios de la unión y de la intersección y de las propiedades de los abiertos, resultan inmediatamente las propiedades de los cerrados.

Proposición: *Se verifican las siguientes propiedades*:

a) *ϕ y $\mathbb{R}^n$ son cerrados.*

b) *La intersección de cualquier colección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*

c) *La unión de cualquier colección finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*

Ejemplos: Todo conjunto que conste de un punto o de un número finito de puntos es cerrado. Toda bola cerrada es un conjunto cerrado.

4.3. PUNTOS INTERIORES, EXTERIORES Y PUNTOS FRONTERA

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ clasifica los puntos de $\mathbb{R}^n$ en tres clases: puntos interiores a A, puntos exteriores y puntos frontera de A.

Definición: *Se dice que un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es interior a un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ cuando existe una bola de centro x contenida en A. El conjunto de los puntos interiores a A se llama interior de A y se designa por* $\operatorname{int}(A)$.

Definición: *Se dice que un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es exterior a un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ cuando existe una bola de centro x contenida en el complementario de A. El conjunto de los puntos exteriores a A se llama exterior de A y se designa por* $\operatorname{ext}(A)$.

Definición: *Se dice que un $x \in \mathbb{R}^n$ es punto frontera de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ cuando toda bola de centro x contiene puntos de A y de $\mathbb{R}^n - A$. El conjunto de los puntos frontera de A se llama frontera de A y se designa por* $\operatorname{fr}(A)$.

Proposición: *Para cada $A \subset \mathbb{R}^n$ los conjuntos* $\operatorname{int}(A)$, $\operatorname{ext}(A)$ *y* $\operatorname{fr}(A)$ *son disjuntos y se verifica* $\mathbb{R}^n = \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{ext}(A) \cup \operatorname{fr}(A)$.

Demostración: Es evidente que $\operatorname{int}(A) \cap \operatorname{fr}(A) = \phi$ y que $\operatorname{ext}(A) \cap \operatorname{fr}(A) = \phi$. También $\operatorname{int}(A) \cap \operatorname{ext}(A) = \phi$, pues si $x \in \operatorname{int}(A)$, entonces $x \in A$ y si $x \in \operatorname{ext}(A)$, entonces $x \in \mathbb{R}^n - A$.

Además, se verifica $\mathbb{R}^n = \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{ext}(A) \cup \operatorname{fr}(A)$, pues si $x \in \mathbb{R}^n$ y $x \notin \operatorname{int}(A) \cup$

$\cup$ ext(A), entonces toda bola de centro x contiene puntos de A y del complementario de A, luego $x \in$ fr(A).

Proposición: *Para cada $A \subset \mathbb{R}^n$ los conjuntos* int(A) *y* ext(A) *son abiertos y el conjunto* fr(A) *es cerrado.*

Demostración: Desde luego, int(A) es abierto si int(A)$=\phi$. En otro caso, por definición de interior, para cada $x \in$ int(A) existe una bola $B(x, r)$ contenida en A, Como $B(x, r)$ es abierto, para cada $y \in B(x, r)$ existe una bola $B(y, s)$ contenida en $B(x, r)$ y, por tanto, en A. Esto prueba que todos los puntos de $B(x, r)$ son interiores a A, es decir, que $B(x, r) \subset$ int(A). En resumen, para cada $x \in$ int(A) existe una bola $B(x, r)$ contenida en int(A), luego int(A) es un conjunto abierto.

Como ext(A)$=$int($\mathbb{R}^n - A$), también ext(A) es un conjunto abierto.

Finalmente, como fr(A)$=\mathbb{R}^n-$(int(A) $\cup$ ext(A)) y el conjunto int(A) $\cup$ ext(A) es abierto por ser unión de abiertos, fr(A) es un conjunto cerrado.

4.4. PUNTOS ADHERENTES Y PUNTOS DE ACUMULACION

Definición: *Se dice que un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es adherente a un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ cuando toda bola de centro x contiene puntos de A. El conjunto de los puntos adherentes a A se llama adherencia de A y se designa por* adh(A).

Proposición: *Para cada conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ el conjunto* adh(A) *es el mínimo cerrado que contiene a A.*

Demostración: Desde luego, adh(A) es un conjunto cerrado, pues,

$$\text{adh}(A)=\text{int}(A) \cup \text{fr}(A) = \mathbb{R}^n - \text{ext}(A).$$

Sea B un cerrado que contenga a A. Tenemos que probar que adh(A) $\subset B$ o lo que es equivalente, $\mathbb{R}^n - B \subset \mathbb{R}^n -$adh($A$). Sea $x \in \mathbb{R}^n - B$. Como B es cerrado, $\mathbb{R}^n - B$ es abierto y existirá una bola $B(x, r)$ contenida en $\mathbb{R}^n - B$, y como $\mathbb{R}^n - B \subset \mathbb{R}^n - A$, será $A \cap B(x, r)=\phi$ luego $x \in \notin$adh(A), es decir, $x \in \mathbb{R}^n -$adh(A) como queríamos demostrar.

De esta proposición resulta inmediatamente que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado si y sólo si $A=$adh(A).

Definición: *Se dice que un $x \in \mathbb{R}^n$ es punto de acumulación de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ cuando toda bola de centro x contiene puntos de A distintos de x. El conjunto de los puntos de acumulación de A se llama conjunto derivado de A y se designa por* ac(A).

Obsérvese que todos los puntos de acumulación de un conjunto A son adherentes a A pero un punto x adherente a A no es necesariamente un punto de acumulación de A. Puede ocurrir que exista una bola $B(x, r)$ cuyo único punto común con A sea x. Este tipo de puntos que son adherentes pero no de acumulación se llaman *puntos aislados.*

Proposición: *Para cada* $A \subset \mathbb{R}^n$ *se verifica* $\text{adh}(A) = A \cup \text{ac}(A)$.

Demostración: Está claro que $A \cup \text{ac}(A) \subset \text{adh}(A)$, pues tanto A como $\text{ac}(A)$ están contenidos en $\text{adh}(A)$. Veamos que también se verifica $\text{adh}(A) \subset A \cup \text{ac}(A)$. Sea $x \in \text{adh}(A)$. Entonces para toda bola $B(x, r)$ se cumple $A \cap B(x, r) \neq \phi$. Puede suceder que exista una bola $B(x, r)$ tal que $A \cap B(x, r) = \{x\}$ en cuyo caso $x \in A$, o bien para toda bola $B(x, r)$ sea $(A - \{x\}) \cap B(x, r) \neq \phi$, en cuyo caso $x \in \text{ac}(A)$. En todo caso, $x \in A \cup \text{ac}(A)$.

Proposición: *Un conjunto* $A \subset \mathbb{R}^n$ *es cerrado si y sólo si contiene todos sus puntos de acumulación.*

Demostración: Basta tener en cuenta que A es cerrado si y sólo si $A = \text{adh}(A) = A \cup \text{ac}(A)$.

4.5. CONJUNTOS COMPACTOS

Se dice que una colección $\mathscr{A}$ de conjuntos cubre a un conjunto A o que es un *recubrimiento* de A cuando la unión de todos los conjuntos de $\mathscr{A}$ contiene a A.

Un *subrecubrimiento* de un recubrimiento $\mathscr{A}$ de A es una subcolección $\mathscr{B}$ de $\mathscr{A}$ que cubre también al conjunto A.

Un *recubrimiento abierto* de A es un recubrimiento formado por conjuntos abiertos.

Definición: *Se dice que un conjunto* $A \subset \mathbb{R}^n$ *es compacto cuando de todo recubrimiento abierto de* A *se puede extraer un subrecubrimiento finito.*

En el tema I de la unidad didáctica 2 demostrábamos la siguiente

Proposición: *Todo intervalo cerrado* $[a, b]$ *es compacto.*

En el libro de Spivak, «Cálculo en variedades», página 9, puede verse la demostración de la siguiente.

Proposición (Teorema de Tychonoff): *Si* $A \subset \mathbb{R}^n$ *y* $B \subset \mathbb{R}^m$ *son compactos, entonces* $A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$ *es compacto.*

De estas dos últimas proposiciones se deduce que los conjuntos de la forma $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ son compactos. Un conjunto de esta forma se llama rectángulo cerrado en $\mathbb{R}^n$. En el caso particular de que todos los intervalos $[a_i, b_i]$ tengan la misma longitud l, se dice que R es un cubo cerrado de arista l.

Definición: *Se dice que un conjunto* $A \subset \mathbb{R}^n$ *es acotado cuando está contenido en una bola de centro el origen.*

Es fácil ver que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es acotado si y sólo si está contenido en un cubo cerrado.

Proposición (Teorema de Heine-Borel): *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

Demostración: Supongamos, en primer lugar, que A es compacto y sea $a \in \mathbb{R}^n - A$. Para cada $b \in A$ existen dos bolas $B(a, r_a)$ y $B(b, r_b)$ disjuntas (basta tomar $r_a = r_b = \|a-b\|/2$). La colección de todas las bolas $B(b, r_b)$ para $b \in A$ es un recubrimiento abierto del compacto A y de él podrá extraerse un subrecubrimiento finito $B(b_1, r_{b_1}), \ldots, B(b_k, r_{b_k})$. Sean $B(a, r_1), \ldots, B(a, r_k)$ las bolas de centro a correspondientes. La intersección de estas últimas es una bola de centro a contenida en $\mathbb{R}^n - A$. Así, para cada $a \in \mathbb{R}^n - A$ existe una bola de centro a contenida en $\mathbb{R}^n - A$, luego $\mathbb{R}^n - A$ es abierto y A es cerrado.

Para ver que A es acotado, consideremos el recubrimiento abierto de A formado por todas las bolas $B(0, n)$ con $n \in \mathbb{N}$. De él podrá extraerse un subrecubrimiento finito $B(0, n_1), \ldots, B(0, n_j)$ y si $n_0 = \text{máx}\{n_1, \ldots, n_j\}$ tendremos $A \subset B(0, n_0)$ y A es, pues, acotado.

Recíprocamente, si A es cerrado y acotado, entonces A estará contenido en algún cubo cerrado R (por ser acotado), y si $\mathscr{A}$ es un recubrimiento abierto de A, adjuntándole el abierto $\mathbb{R}^n - A$ obtendremos un recubrimiento abierto del compacto R del que se podrá extraer un subrecubrimiento finito. Este subrecubrimiento estará formado por un número finito de conjuntos $A_1, \ldots, A_i$ de $\mathscr{A}$ y tal vez $\mathbb{R}^n - A$. Entonces los conjuntos $A_1, \ldots, A_i$ cubren A. Así pues, de todo recubrimiento abierto de A se puede extraer un subrecubrimiento finito, luego A es compacto.

Proposición (Teorema de Bolzano-Weierstrass): *Todo conjunto infinito y acotado $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene al menos un punto de acumulación.*

Demostración: Probaremos que todo conjunto acotado $A \subset \mathbb{R}^n$ sin puntos de acumulación es finito.

Si A es acotado estará contenido en un cubo cerrado R. Si A no tiene puntos de acumulación, ningún punto de R será de acumulación de A, lo cual implica que para cada $y \in \mathbb{R}$ existe una bola $B(y, r_y)$ que no contiene puntos de A distintos del punto y. La colección de todas las $B(y, r_y)$ para $y \in R$ es un recubrimiento abierto del compacto R del que se podrá extraer un subrecubrimiento finito $B(y_1, r_{y_1}), \ldots, B(y_k, r_{y_k})$. Estas k bolas cubren también a A y ninguno de los conjuntos $B(y_1, r_{y_1}) - \{y_1\}, \ldots, B(y_k, r_{y_k}) - \{y_k\}$ tiene puntos de A, luego A consta a lo sumo de los k puntos $y_1, \ldots, y_k$.

Ejercicios de autocomprobación

1. Demostrar que el conjunto

$$A=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ x>0\}$$

es abierto.

2. Probar que una bola cerrada es un conjunto cerrado.

3. Sea $r>0$. Demostrar que el conjunto

$$A=\{x\in\mathbb{R}^n;\ \|x\|=r\}$$

es cerrado.

4. Hallar el interior, el exterior, la frontera, la adherencia y el derivado del conjunto

$$A=\{(x_1,\ \ldots,\ x_n)\in\mathbb{R}^n\ ;\ x_i\in\mathbb{Q},\ i=1,\ \ldots,\ n\}.$$

5. Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Probar que

$$\mathrm{ac}(A\cup B)=\mathrm{ac}(A)\cup\mathrm{ac}(B).$$

6. Sean A y B dos subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$. Demostrar que el conjunto $A\cup B$ es compacto.

7. Probar que todo subconjunto cerrado B de un conjunto compacto A es compacto.

Soluciones a los ejercicios de autocomprobación

1. Sea $(a, b) \in A$. Entonces $a>0$ y la bola de centro (a, b) y radio a está contenida en A pues si (x, y) es un punto de dicha bola, se verifica

$$|x-a| \leqslant [(x-a)^2+(y-b)^2]^{1/2} < a$$

y, por tanto, $-a<x-a<a$, luego $0<x<2a$ y $(x, y) \in A$, puesto que $x>0$. Así pues, para cada punto (a, b) de A existe una bola de centro (a, b) contenida en A, luego A es abierto.

2. Consideremos la bola cerrada $\overline{B}(a, r)$ y sea $b \in \mathbb{R}^n - \overline{B}(a, r)$. Entonces $\|b-a\| = r+\delta$ con $\delta>0$ y la bola $B(b, \delta)$ está contenida en $\mathbb{R}^n - \overline{B}(a, r)$, puesto que para todo $x \in B(b, \delta)$ se verifica

$$r+\delta = \|b-a\| \leqslant \|b-x\| + \|x-a\| < \delta + \|x-a\|$$

y, por tanto, $\|x-a\|>r$. Por consiguiente, para cada punto $b \in \mathbb{R}^n - \overline{B}(a, r)$ existe una bola de centro b contenida en $\mathbb{R}^n - \overline{B}(a, r)$, luego $\mathbb{R}^n - \overline{B}(a, r)$ es abierto y $\overline{B}(a, r)$ es cerrado.

3. A es la intersección de la bola cerrada $\overline{B}(0, r)$ con el complementario de la bola abierta $B(0, r)$ luego es cerrado como intersección de dos cerrados.

4. Como toda bola contiene puntos de coordenadas racionales e irracionales se tiene $\operatorname{int}(A)=\phi$, $\operatorname{ext}(A)=\phi$, $\operatorname{fr}(A)=\mathbb{R}^n$, $\operatorname{adh}(A)=\mathbb{R}^n$ y $\operatorname{ac}(A)=\mathbb{R}^n$.

5. Un punto x pertenece a $\operatorname{ac}(A \cup B)$ si y sólo si toda bola de centro x contiene puntos de A o de B distintos de x, es decir, si y sólo si $x \in \operatorname{ac}(A)$ o $x \in \operatorname{ac}(B)$ y esto equivale a decir que $x \in \operatorname{ac}(A) \cup \operatorname{ac}(B)$.

6. Sea $\mathscr{A}$ un recubrimiento abierto de $A \cup B$. Entonces $\mathscr{A}$ es un recubrimiento abier-

to de A y de B y como A y B son compactos, un número finito $A_1, ..., A_i$ de conjuntos de $\mathscr{A}$ cubre A y otro número finito $B_1, ..., B_j$ de conjuntos de $\mathscr{A}$ cubre B, luego $\{A_1, ..., A_i, B_1, ..., B_j\}$ cubre $A \cup B$. Así pues, de todo recubrimiento abierto de $A \cup B$ se puede extraer un subrecubrimiento finito, luego $A \cup B$ es compacto.

7. Sea $\mathscr{A}$ un recubrimiento abierto de B. Adjuntándole, si es preciso, el abierto $\mathbb{R}^n - B$ se obtiene un recubrimiento abierto del compacto A del que se podrá extraer un subrecubrimiento finito. Este subrecubrimiento estará formado por un número finito $A_1, ..., A_n$ de conjuntos de $\mathscr{A}$ y, tal vez, $\mathbb{R}^n - B$. Entonces, los conjuntos $A_1, ..., A_n$ cubren B. Así pues, de todo recubrimiento abierto de B se puede extraer un subrecubrimiento finito, luego B es compacto.

Tema V

Límites y continuidad

Esquema/Resumen

5.1. *Límites de funciones.*

5.2. *Funciones continuas.*

5.3. *Continuidad uniforme.*

La definición de límite para una función definida en un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y con valores en $\mathbb{R}^m$ es análoga a la del límite de una función real de una variable real si se cambian los valores absolutos por las normas.

Si el límite de una función f cuando x tiende hacia a sobre un conjunto A es igual a l y B es un subconjunto de A, entonces el límite de f cuando x tiende hacia a sobre el conjunto B es también igual a l. Esta propiedad permite probar en algunos casos la no existencia del límite.

El límite de una función f es igual a $l=(l_1, ..., l_m)$ si y sólo si para cada $i=1, ..., m$ el límite de la componente f_i de f es igual a l_i.

Una función f definida en un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ y con valores en $\mathbb{R}^m$ se dice continua en un punto $a \in A$ si el límite de f cuando x tiende hacia a sobre A es igual a $f(a)$.

Una función f es continua en un punto a si y sólo si todas sus funciones componentes son continuas en a.

Se dice que una función $f: A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$, es continua en el conjunto A cuando es continua en todo punto de A. La continuidad global de una función $f: A \to \mathbb{R}^m$ queda caracterizada por el hecho de que la imagen inversa por f de cualquier conjunto abierto (respectivamente, cerrado) de $\mathbb{R}^m$ es igual a la intersección con A de un conjunto abierto (resp. cerrado) de $\mathbb{R}^n$.

La imagen de un conjunto compacto por una función continua es un conjunto compacto. De esta propiedad se deduce que toda función continua en un conjunto compacto tiene un mínimo y un máximo en dicho conjunto (teorema de Weierstrass).

El concepto de continuidad uniforme de una función definida en un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y con valores en $\mathbb{R}^m$ es análogo al de las funciones reales de una variable real, cambiando los valores absolutos por las normas.

Toda función uniformemente continua en un conjunto es continua en él. El recíproco, en general, no es cierto. Sin embargo, toda función continua en un conjunto compacto es uniformemente continua en dicho conjunto.

5.1. LIMITES DE FUNCIONES

5.1.1. **Definición**: *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y sea f una función de A en $\mathbb{R}^{\prime n}$. Si a es un punto de acumulación de A, se dice que f tiene por límite l cuando x tiende hacia a sobre A y se escribe*

$$\lim_{x \in A, x \to a} f(x) = l$$

cuando para cada bola $B(l, \varepsilon)$ existe una bola $B(a, \delta)$ tal que $f(x) \in B(l, \varepsilon)$ para todo $x \in (A - \{a\}) \cap B(a, \delta)$.

Esto equivale a decir que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\|f(x) - l\| < \varepsilon$ para todo $x \in A$ tal que $0 < \|x - a\| < \delta$.

Este último enunciado es análogo al de la definición de límite de una función real de una variable real, cambiando los valores absolutos por las normas.

Para evitar dificultades de notación, convendremos en que si a es un punto aislado de A entonces $\lim\limits_{x \in A, x \to a} f(x) = f(a)$.

Proposición: *El límite*

$$\lim_{x \in A, x \to a} f(x)$$

si existe, es único.

Demostración: Si fuesen

$$\lim_{x \in A, x \to a} f(x) = l \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \in A, x \to a} f(x) = m$$

con $l \neq m$, por la definición de límite, para $\varepsilon = \|l-m\|/2$ existiría una bola $B(a, \delta)$ tal que $f(x) \in B(l, \varepsilon) \cap B(m, \varepsilon)$ para todo $x \in (A-\{a\}) \cap B(a, \delta)$, lo cual es absurdo, puesto que las bolas $B(l, \varepsilon)$ y $B(m, \varepsilon)$ son disjuntas.

5.1.2. **Proposición**: *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset A$, a un punto de acumulación de B, $l \in \mathbb{R}^m$ y $f: A \to \mathbb{R}^m$ una función tal que* $\lim\limits_{x \in A, x \to a} f(x) = l$. *Entonces,* $\lim\limits_{x \in B, x \to a} f(x) = l$.

Demostración: Por hipótesis, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\|f(x)-l\| < \varepsilon$ para todo $x \in A$ tal que $0 < \|x-a\| < \delta$ y como $B \subset A$, también $\|f(x)-l\| < \varepsilon$ para todo $x \in B$ tal que $0 < \|x-a\| < \delta$.

Observación: Este resultado permite probar en algunos casos la no existencia del límite: Si para dos subconjuntos B y C de A se verifica

$$\lim_{x \in B, x \to a} f(x) \neq \lim_{x \in C, x \to a} f(x)$$

o bien no existe alguno de estos límites, entonces puede asegurarse que no existe

$$\lim_{x \in A, x \to a} f(x).$$

Ejemplo: Sea $f: \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

para cada $(x, y) \neq (0, 0)$. Entonces no existe

$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$$

puesto que si $A_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \lambda x\}$ se tiene

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in A_\lambda}} f(x, y) = \lim_{x \to 0} \frac{\lambda x^2}{x^2 + \lambda^2 x^2} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$$

y, por tanto, los límites sobre cada A_λ son distintos.

5.1.3. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Una función $f: A \to \mathbb{R}^m$ determina m funciones $f_1, \ldots, f_m$ de A en $\mathbb{R}$, las funciones

$$f_i = \pi_i \circ f_m$$

donde π_i es la función de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}$ que a cada vector $y = (y_1, \ldots, y_m)$ hace corresponder su i-ésima componente y_i. Las funciones f_i se llaman *funciones componentes* de la función f. Suele escribirse $f = (f_1, \ldots, f_m)$ para indicar que $f_1, \ldots, f_m$ son las funciones componentes de f.

Ejemplo: Las funciones componentes de la función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x,\ y) = \left(x^2 + y^2,\ \operatorname{sen} xy,\ \frac{1}{x^2+1}\right)$$

son las funciones f_1, f_2 y f_3 de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ definidas respectivamente por

$$f_1(x,\ y) = x^2 + y^2,\ f_2(x,\ y) = \operatorname{sen} xy,\ f_3(x,\ y) = \frac{1}{x^2+1}$$

para cada $(x,\ y) \in \mathbb{R}^2$.

Proposición: *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$, a un punto de acumulación de A y $f = (f_1,\ \ldots,\ f_m)$ una función de A en $\mathbb{R}^m$. Una condición necesaria y suficiente para que sea*

$$\lim_{x \in A, x \to a} f(x) = l = (l_1,\ \ldots,\ l_m)$$

es que para $i = 1,\ \ldots,\ m$ se verifique

$$\lim_{x \in A, x \to a} f_i(x) = l_i.$$

Demostración: Supongamos, en primer lugar, que

$$\lim_{x \in A, x \to a} f(x) = l.$$

Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\|f(x) - l\| < \varepsilon$ para todo $x \in A$ tal que $0 < \|x - a\| < \delta$, y como para $i = 1,\ \ldots,\ m$ se verifica

$$|f_1(x) - l_i| \leqslant \|f(x) - l\|,$$

también es $|f_i(x) - l_i| < \varepsilon$ para todo $x \in A$ tal que $0 < \|x - a\| < \delta$, luego

$$\lim_{x \in A, x \to a} f_i(x) = l_i.$$

Supongamos ahora que para $i = 1,\ \ldots,\ m$ es

$$\lim_{x \in A, x \to a} f_i(x) = l_i.$$

Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta_i > 0$ tal que $|f_i(x) - l_i| < \varepsilon/\sqrt{m}$ para todo $x \in A$ tal que $0 < \|x - a\| < \delta_i$, y si $\delta = \min\{\delta_1,\ \ldots,\ \delta_m\}$, se verifica

$$\|f(x) - l\| = \left[\sum_{i=1}^{m} (f_i(x) - l_i)^2\right]^{1/2} < \left(m\frac{\varepsilon^2}{m}\right)^{1/2} = \varepsilon$$

para todo $x \in A$ tal que $0<\|x-a\|<\delta$, luego

$$\lim_{x\in A, x\to a} f(x)=l.$$

5.1.4. **Proposición**: *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$, a un punto de acumulación de A y f y g dos funciones de A en $\mathbb{R}^m$ tales que*

$$\lim_{x\in A, x\to a} f(x)=l_1 \qquad y \qquad \lim_{x\in A, x\to a} g(x)=l_2.$$

Se verifican las siguientes propiedades:

a) $\lim_{x\in A, x\to a} (\alpha f+\beta g)\,(x)=\alpha l_1+\beta l_2$, $(\alpha,\ \beta \in \mathbb{R})$.

b) *Si* $m=1$, *entonces* $\lim_{x\in A, x\to a} (fg)\,(x)=l_1 l_2$.

c) *Si* $m=1$ *y* $l_2\neq 0$, *entonces* $\lim_{x\in A, x\to a} (f/g)\,(x)=l_1/l_2$.

Demostración: Es análoga a la de la proposición correspondiente para funciones de una variable.

5.1.5. **Definición**: *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y sea f una función de A en $\mathbb{R}^m$. Si a es un punto de acumulación de A, se dice que f tiene por límite ∞ cuando x tiende hacia a sobre A y se escribe*

$$\lim_{x\in A, x\to a} f(x)=\infty$$

cuando para cada $h>0$ existe un $\delta>0$ tal que $\|f(x)\|>h$ para todo $x\in A$ tal que $0<\|x-a\|<\delta$.

Definición: *Sea A un subconjunto no acotado de $\mathbb{R}^n$ y sea f una función de A en $\mathbb{R}^m$. Se dice que f tiene por límite l cuando x tiende a ∞ sobre A y se escribe*

$$\lim_{x\in A, x\to \infty} f(x)=l$$

cuando para cada $\varepsilon>0$ existe $k>0$ ral que $\|f(x)-l\|<\varepsilon$ para todo $x\in A$ tal que $\|x\|>k$.

Definición: *Sea A un subconjunto no acotado de $\mathbb{R}^n$ y sea f una función de A en $\mathbb{R}^m$. Se dice que f tiene por límite ∞ cuando x tiende a ∞ sobre A y se escribe*

$$\lim_{x\in A, x\to \infty} f(x)=\infty$$

cuando para cada $h>0$ existe $k>0$ tal que $\|f(x)\|>h$ para todo $x\in A$ tal que $\|x\|>k$.

5.2. FUNCIONES CONTINUAS

5.2.1. **Definición**: *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$, $f: A \to \mathbb{R}^m$ y $a \in A$. Se dice que f es continua en a cuando*

$$\lim_{x \in A, x \to a} f(x) = f(a).$$

Esto significa que para cada bola $B(f(a), \varepsilon)$ existe una bola $B(a, \delta)$ tal que $f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$ para todo $x \in A \cap B(a, \delta)$, es decir, que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$ para todo $x \in A$ tal que $\|x - a\| < \delta$.

5.2.2. De las proposiciones de 5.1.3. y 5.1.4 se deducen inmediatamente las dos proposiciones siguientes:

Proposición: *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, ..., f_m)$ una función de A en $\mathbb{R}^m$ y $a \in A$. Una condición necesaria y suficiente para que f sea continua en a es que cada función componente f_i sea continua en a.*

Proposición: *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in A$ y f y g dos funciones de A en $\mathbb{R}^m$ continuas en a. Se verifican las siguientes propiedades:*

a) *$\alpha f + \beta g$ es continua en a, $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$.*

b) *Si $m = 1$, entonces fg es continua en a.*

c) *Si $m = 1$ y $g(a) \neq 0$, entonces f/g es continua en a.*

5.2.3. La siguiente proposición de condiciones suficientes para la continuidad de una función compuesta.

Proposición: *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^m$. Si $f: A \to B$ es continua en $a \in A$ y $g: B \to \mathbb{R}^p$ es continua en $b = f(a)$, entonces la función compuesta $g \circ f$ es continua en a.*

Demostración: Pongamos $c = g(b)$. Tenemos que probar que para cada bola $B(c, \varepsilon)$ existe una bola $B(a, \delta)$ tal que $g(f(x)) \in B(c, \varepsilon)$ para todo $x \in A \cap B(a, \delta)$.

Consideremos pues una bola $B(c, \varepsilon)$. Por ser g continua en b, existe una bola $B(b, \delta_1)$ tal que $g(y) \in B(c, \varepsilon)$ para todo $y \in B \cap B(b, \delta_1)$. Por otra parte, como f es continua en a, para la bola $B(b, \delta_1)$ anterior existe una bola $B(a, \delta)$ tal que $f(x) \in B(b, \delta_1)$ para todo $x \in A \cap B(a, \delta)$. Por consiguiente, para todo $x \in A \cap B(a, \delta)$ se verifica $f(x) \in B \cap B(b, \delta_1)$, y, por tanto, $g(f(x)) \in B(c, \varepsilon)$ como queríamos demostrar.

5.2.4. **Definición:** *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $f: A \to \mathbb{R}^m$. Se dice que f es continua en A cuando f es continua en todo punto de A.*

Proposición: *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $f: A \to \mathbb{R}^m$. Una condición necesaria y suficiente para que f sea continua en A es que para todo abierto (respectivamente, cerrado) $U \subset \mathbb{R}^m$ exista un abierto (resp. cerrado) $V \subset \mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(U) = A \cap V$.*

Demostración: Supongamos en primer lugar que f es continua en A y sea

$U \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto. Si $f^{-1}(U)=\phi$, el conjunto $V=\phi$ satisface el enunciado. En otro caso, para cada $a \in f^{-1}(U)$ es $b=f(a) \in U$ y como U es abierto, una bola $B(b, r_b)$ está contenida en U. Como f es continua en a, existe una bola $B(a, r_a)$ tal que

$$f(A \cap B(a, r_a)) \subset B(b, r_b) \subset U$$

Sea V la unión de todas las bolas $B(a, r_a)$ asi obtenidas. Entonces V es abierto como unión de abiertos y, por construcción, se verifica $f(A \cap V) \subset U$, luego $A \cap V \subset f^{-1}(U)$. Además, si $a \in f^{-1}(U)$ entonces $a \in A \cap B(a, r_a) \subset A \cap V$, luego $f^{-1}(U) \subset A \cap V$.

Recíprocamente, supongamos que se verifica la condición del enunciado y sea $a \in A$. Tenemos que probar que f es continua en a, es decir, que para cada bola $B(f(a), \varepsilon)$ existe una bola $B(a, \delta)$ tal que $f(A \cap B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$. Por hipótesis, para el abierto $U=B(f(a), \varepsilon)$ existe un abierto V tal que $f^{-1}(U)=A \cap V$. Como $f(a) \in U$, es $a \in f^{-1}(U)$ luego $a \in V$ y como V es abierto, una bola $B(a, \delta)$ está contenida en V. En consecuencia,

$$A \cap B(a, \delta) \subset A \cap V=f^{-1}(U)$$

y, por tanto, $f(A \cap B(a, \delta)) \subset U$ como queríamos demostrar.

La demostración para el caso de cerrados resulta de la anterior tomando complementarios.

En el caso de que el dominio de definición A de la función f sea abierto (resp. cerrado), la proposición anterior nos dice que f es continua en A si y sólo si $f^{-1}(U)$ es abierto (resp. cerrado) para todo conjunto abierto (resp. cerrado) U de $\mathbb{R}^m$. Esto se cumple, en particular, cuando $A=\mathbb{R}^n$.

5.2.5. **Proposición:** *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y $f: A \to \mathbb{R}^m$ una función continua. Entonces el conjunto $f(A)$ es compacto.*

Demostración: Hay que probar que de todo recubrimiento abierto de $f(A)$ se puede extraer un subrecubrimiento finito.

Sea pues $\{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de $f(A)$. Por la proposición anterior, para cada $i \in I$ existe un abierto V_i de $\mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(U_i)=A \cap V_i$.

Si $x \in A$ entonces $f(x) \in f(A)$ y existirá un $i \in I$ tal que $f(x) \in U_i$. Entonces $x \in f^{-1}(U_i)$ y, por tanto, $x \in V_i$. Por consiguiente, A está contenido en la unión de los V_i, es decir, $\{V_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento abierto del compacto A del que se podrá extraer un subrecubrimiento finito $V_{i_1},...,V_{i_n}$.

Cada $x \in A$ pertenece al menos a uno de estos V_{i_j}, luego cada $f(x)$ pertenece a uno de los conjuntos $f(V_{i_j})$ y como

$$f(V_{i_j}) \subset f(A \cap V_{i_j})=f(f^{-1}(U_{i_j})) \subset U_{i_j},$$

cada $f(x)$ pertenece al menos a uno de los conjuntos $U_{i_1},...,U_{i_n}$ y, por tanto, $\{U_{i_1}, ..., U_{i_n}\}$ es un recubrimiento abierto finito de $f(A)$ extraído del $\{U_i\}_{i \in I}$.

Proposición (Teorema de Weierstrass): *Sean A un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ y $f: A \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f tiene un mínimo y un máximo en A, es decir, existen x_0, $x_1 \in A$ tales que $f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant f(x_1)$ para todo $x \in A$.*

Demostración: Por la proposición anterior, $f(A)$ es compacto y, por tanto, cerrado y acotado.

Por ser $f(A)$ acotado existen $m = \inf f(A)$ y $M = \sup f(A)$ y se verifica $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para todo $x \in A$. Además, m y M pertenecen a la adherencia de $f(A)$ pues, por definición de ínfimo, cualquier bola de centro m contiene puntos de $f(A)$ y, por definición de supremo, cualquier bola de centro M contiene puntos de $f(A)$. Pero por ser $f(A)$ cerrado es adh $f(A) = f(A)$, luego m y M pertenecen a $f(A)$, es decir, existen x_0, $x_1 \in A$ tales que $f(x_0) = m$ y $f(x_1) = M$.

5.3. CONTINUIDAD UNIFORME

Definición: *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $f: A \to \mathbb{R}^m$. Se dice que f es uniformemente continua en A cuando para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ para todo par de puntos x e y de A tales que $\|x - y\| < \delta$.*

Está claro que si f es uniformemente continua en A, entonces f es continua en A. El recíproco, en general, no es cierto. Sin embargo, se verifica la siguiente

Proposición: *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y $f: A \to \mathbb{R}^m$ una función continua. Entonces f es uniformemente continua en A.*

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua en A, para cada $x \in A$ existe un $\delta_x > 0$ tal que $\|f(y) - f(x)\| < \varepsilon/2$ para todo $y \in A$ tal que $\|y - x\| < \delta_x$. La colección de bolas abiertas $B(x, \delta_x/2)$, $x \in A$ es un recubrimiento abierto del compacto A del que se podrá extraer un subrecubrimiento finito. Sean x_1, ..., x_n los centros de las bolas de este subrecubrimiento, $\delta_1/2$, ..., $\delta_n/2$ sus radios y sea $\delta = \min\{\delta_1/2, ..., \delta_n/2\}$. Si x e y son puntos de A tales que $\|x - y\| < \delta$, como A está contenido en la unión de las bolas $B(x_i, \delta_i/2)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, existirá un i tal que $x \in B(x_i, \delta_i/2)$ y como

$$\|y - x_i\| \leqslant \|y - x\| + \|x - x_i\| < \delta + \delta_i/2 \leqslant \delta_i/2 + \delta_i/2 = \delta_i,$$

x e y pertenecen a $B(x_i, \delta_i)$ y, por tanto,

$$\|f(x) - f(x_i)\| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad \|f(y) - f(x_i)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

luego

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|f(x) - f(x_i)\| + \|f(x_i) - f(y)\| < \varepsilon.$$

Por consiguiente, f es uniformemente continua en A.

Ejercicios de autocomprobación

1. Demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

2. Probar que el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^4}$$

no existe.

3. Estudiar la continuidad en (0, 0) de las funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ siguientes:

a) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2+y^4}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$.

b) $g(x, y) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $g(0, 0) = 0$.

c) $h(x, y) = (x+y)\operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $h(0, 0) = 0$.

4. Estudiar la continuidad de la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leqslant |y| \\ 0 & \text{si } |x| > |y| \end{cases}$$

5. Sean f, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas. Demostrar que el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < g(x)\}$$

es abierto y que los conjuntos

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leqslant g(x)\} \qquad \text{y} \qquad C = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = g(x)\}$$

son cerrados.

6. Probar que el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 4, \ 9x^2 + y^2 \leqslant 9\}$$

es compacto.

7. Demostrar que el conjunto de los puntos de discontinuidad de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2 + y^2 - 1} & \text{si} \quad x^2 + y^2 \neq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

es un conjunto compacto.

8. Demostrar que el conjunto de los puntos de discontinuidad de la función $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de componentes

$$f_1(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \ f_1(0, 0) = 0,$$

$$f_2(x, y) = \frac{1}{x^2 - y} \quad \text{si } y \neq x^2, \ f_2(x, x^2) = 0$$

es un conjunto cerrado.

9. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $f = (f_1, \ldots, f_m)$ una función de A en $\mathbb{R}^m$. Probar que f es uniformemente continua en A si y sólo si todas las f_i son uniformemente continuas en A.

10. Demostrar que la función $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x) = (\log x, \operatorname{sen} x)$ es uniformemente continua en el intervalo $(1, +\infty)$.

Soluciones a los ejercicios de autocomprobación

1. Las desigualdades

$$x^2-2xy+y^2=(x-y)^2\geqslant 0,\ x^2+2xy+y^2=(x+y)^2\geqslant 0$$

se pueden escribir

$$xy\leqslant\frac{1}{2}\ (x^2+y^2),\qquad -xy\leqslant\frac{1}{2}\ (x^2+y^2)$$

y de estas últimas se deduce

$$|xy|\leqslant\frac{1}{2}\ (x^2+y^2)\leqslant x^2+y^2$$

con lo que

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}$$

y como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}=0,$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

2. Sea $A_\lambda=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2:x=\lambda y^2\}$. Entonces

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A_\lambda}}\frac{x^2}{x^2+y^4}=\lim_{y\to 0}\frac{\lambda^2y^4}{\lambda^2y^4+y^4}=\frac{\lambda^2}{\lambda^2+1}\,,$$

luego los límites sobre cada A_λ son distintos y, por la proposición 5.1.2, el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^4}$$

no existe.

3. a) Si $A_\lambda=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2: y=\lambda x\}$ se tiene

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A_\lambda}} f(x,\ y)=\lim_{x\to 0}\frac{\lambda x^2}{x^2+\lambda^4x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\lambda}{1+\lambda^4x^2}=\lambda$$

luego los límites sobre cada A_λ son distintos y, por tanto, no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,\ y)$ y f no es continua en $(0,\ 0)$.

b) Como

$$0\leqslant g(x,\ y)\leqslant\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}$$

y

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}=0$$

se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,\ y)=0=g(0,\ 0)$$

y, por tanto, g es continua en $(0,\ 0)$.

c) Como

$$0\leqslant|h(x,\ y)|\leqslant x+y \qquad \text{y} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)=0$$

se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,\ y)=0=h(0,\ 0)$$

y, por tanto, h es continua en $(0,\ 0)$.

4. La función f es constante y, por tanto, continua en cada uno de los conjuntos abiertos

$$A=\{(x,\ y)\in \mathbb{R}^2:|x|<|y|\} \qquad \text{y} \qquad B\{(x,\ y)\in \mathbb{R}^2:|x|>|y|\}.$$

Veamos lo que ocurre en el conjunto

$$C=\{(x,\ y)\in \mathbb{R}^2:|x|=|y|\}.$$

Los puntos de C son los de la forma $(a,\ a)$ y los de la forma $(-a,\ a)$ donde $a\in\mathbb{R}$. El límite de f cuando $(x,\ y)$ tiende hacia $(a,\ a)$ sobre la recta $y=x$ es igual a 1, puesto que sobre esta recta es $f(x,\ y)=1$. Si $a\geqslant 0$, el límite de f cuando $(x,\ y)$ tiende hacia $(a,\ a)$ sobre la semirrecta $y=a$, $x\geqslant a$ es igual a 0, puesto que sobre esta semirrecta es $f(x,\ y)=0$. Si $a<0$, el límite de f cuando $(x,\ y)$ tiende hacia $(a,\ a)$ sobre la semirrecta $y=a$, $x\leqslant a$ es igual a 0, puesto que sobre esta semirrecta es $f(x,\ y)=0$. Por consiguiente, no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(a,a)} f(x,\ y)$.

De manera análoga, se prueba que tampoco existe $\lim\limits_{(x,y)\to(-a,a)} f(x,\ y)$, y la función f es, pues, discontinua en cada punto del conjunto C.

5. Como

$$A=\{x\in\mathbb{R}^n:(f-g)\ (x)<0\}=\{x\in\mathbb{R}^n:(f-g)\ (x)\in(-\infty,\ 0)\},$$

el conjunto A es imagen inversa por $f-g$ de $(-\infty,\ 0)$ y como $f-g$ es continua en $\mathbb{R}^n$ y el intervalo $(-\infty,\ 0)$ es un conjunto abierto, A es abierto.

Análogamente, como

$$B=(f-g)^{-1}((-\infty,\ 0]) \ \text{y} \ C=(f-g)^{-1}(\{0\})$$

y los conjuntos $(-\infty,\ 0]$ y $\{0\}$ son cerrados, B y C son cerrados.

6. A es la intersección de los conjuntos

$$A_1=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2\leqslant 4\} \qquad \text{y} \qquad A_2=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2:9x^2+y^2\leqslant 9\}.$$

Estos conjuntos son cerrados por ser imágenes inversas del cerrado $(-\infty,\ 0]$ por las funciones continuas $f(x,\ y)=x^2+y^2-4$ y $g(x,\ y)=9x^2+y^2-9$, respectivamente, luego A es cerrado por ser intersección de dos cerrados.

Además, A es acotado, pues está contenido en A_1, que es la bola cerrada de centro el origen y radio 2.

Así pues, A es cerrado y acotado, luego es compacto.

7. Está claro que f es continua en todo punto $(a,\ b)\in\mathbb{R}^2$ tal que $a^2+b^2\neq 1$, puesto que es un cociente de funciones continuas cuyo denominador no se anula en $(a,\ b)$.

Por otra parte, si $a^2+b^2=1$, no existe $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$, puesto que el límite de f cuando (x, y) tiende hacia (a, b) sobre la circunferencia $x^2+y^2=1$ es igual a 1, ya que sobre esta circunferencia es $f(x, y)=1$, y el límite de f cuando (x, y) tiende hacia (a, b) sobre la recta $x=a$ es 0 si $a=0$ e ∞ si $a\neq 0$. Por consiguiente, f no es continua en (a, b).

Así pues, el conjunto de los puntos de discontinuidad de f es

$$D=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}.$$

Este conjunto es cerrado (es imagen inversa de $\{0\}$ por la función continua $g(x, y)=x^2+y^2-1$) y acotado (está contenido en la bola de centro el origen y radio 2), luego es compacto.

8. La función f_1 es continua en todo punto $(x, y)\neq(0, 0)$ por ser cociente de funciones continuas con el denominador distinto de cero. También es continua en $(0, 0)$, puesto que por ser

$$|f_1(x, y)|=\frac{|x|x^2}{x^2+y^2}\leqslant\frac{|x|(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=|x|$$

y

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x|=0,$$

se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x, y)=0=f_1(0, 0).$$

La función f_2 es continua en todo punto (x, y) que no pertenezca a la parábola $y=x^2$ por ser cociente de funciones continuas con el denominador distinto de cero. En los puntos de la parábola, es decir, en los puntos de la forma (a, a^2), la función f_2 es discontinua. En efecto, el límite de f_2 cuando (x, y) tiende hacia (a, a^2) sobre la parábola $y=x^2$ es igual a 0, puesto que $f_2(x, x^2)=0$ para todo $x\in\mathbb{R}$; el límite de f_2 cuando (x, y) tiende hacia (a, a^2) sobre la recta $y=a^2$ es ∞; por tanto, no existe $\lim_{(x,y)\to(a,a2)} f(x, y)$.

Por consiguiente, la función f es discontinua en todos los puntos del conjunto

$$D=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 : y=x^2\}.$$

Este conjunto es cerrado por ser imagen inversa del cerrado $\{0\}$ por la función continua $g(x, y)=y-x^2$.

9. Supongamos, en primer lugar, que f es uniformemente continua en A. Entonces, para cada $\varepsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal que $\|f(x)-f(y)\|<\varepsilon$ para cualquier par de puntos $x, y\in A$ tales que $\|x-y\|<\delta$, y como para $i=1, ..., m$ se verifica

$$|f_i(x)-f_i(y)|\leqslant\|f(x)-f(y)\|,$$

también es $|f_i(x)-f_i(y)|<\varepsilon$ para cualquier par de puntos x, $y\in A$ tales que $\|x-y\|<\delta$, luego f_i es uniformemente continua en A.

Supongamos ahora que para $i=1, ..., m$ la función f_i es uniformemente continua en A. Entonces, para cada $\varepsilon>0$ existe un $\delta_i>0$ tal que $|f_i(x)-f_i(y)|<\varepsilon/\sqrt{m}$ para cualquier par de puntos x, $y\in A$ tales que $\|x-y\|<\delta_i$, y si $\delta=\min\{\delta_1, ..., \delta_m\}$ se verifica

$$\|f(x)-f(y)\|=\left[\sum_{i=1}^{m}(f_i(x)-f_i(y))^2\right]^{1/2}<\left(m\frac{\varepsilon^2}{m}\right)^{1/2}=\varepsilon$$

para cualquier par de puntos x, $y\in A$ tales que $\|x-y\|<\delta$, luego f es uniformemente continua en A.

10. Las componentes de f son las funciones f_1 y f_2 de $(0, \infty)$ en $\mathbb{R}$ definidas por $f_1(x)=\log x$ y $f_2(x)=\operatorname{sen} x$ para cada $x\in(0, +\infty)$.

Sean x e y dos puntos del intervalo $(1, +\infty)$. Por el teorema del valor medio existen dos puntos z y t del intervalo abierto de extremos x e y tales que

$$|f_1(x)-f_1(y)|=|f'_1(z)|\cdot|x-y|$$

y

$$|f_2(x)-f_2(y)|=|f'_2(t)|\cdot|x-y|.$$

Por ser $z>1$ se tiene $|f'_1(z)|=1/z<1$. Además, $|f'_2(t)|=|\cos t|\leqslant 1$. Por tanto,

$$|f_1(x)-f_1(y)|<|x-y| \qquad \text{y} \qquad |f_2(x)-f_2(y)|\leqslant|x-y|.$$

De estas desigualdades resulta inmediatamente que f_1 y f_2 son uniformemente continuas en $(1, +\infty)$ y, por tanto, f es uniformemente continua en $(1, +\infty)$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACION A DISTANCIA

ANALISIS MATEMATICO I

Unidad didáctica/6

Temario:

I. Diferencial de una función.
II. Fórmula de Taylor. Máximos y mínimos.
III. Funciones inversas e implícitas.
IV. Integrales múltiples.

JESUS FERNANDEZ NOVOA
Doctor en Ciencias Matemáticas

TEMA I

Diferencial de una función

Esquema/Resumen

1.1. *Derivada según un vector de una función real de variable vectorial. Derivadas parciales.*

1.2. *Diferencial de una función vectorial de variable vectorial.*

1.3. *Matriz jacobiana.*

Sea f una función real de una variable real derivable en un punto a. Entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

y si $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la aplicación lineal definida por $\lambda(h) = f'(a)h$ para cada $h \in \mathbb{R}$, podemos poner

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \lambda(h)}{h} = 0$$

Así pues, si la función f es derivable en a, existe una aplicación lineal $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifica la igualdad anterior. Recíprocamente, si la aplicación lineal $\lambda(h) = ch$ verifica dicha igualdad, si tiene

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = c$$

y, por tanto, f es derivable en a y $f'(a) = c$.

Por consiguiente, la derivabilidad de una función puede definirse también en los siguientes términos:

Una función real de una variable real f es derivable en un punto a cuando existe una aplicación lineal $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a) - \lambda(h)}{h} = 0.$$

Formulada así, la definición de derivabilidad puede extenderse fácilmente a funciones vectoriales de variable vectorial:

Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, f una función de A en $\mathbb{R}^m$ y $a \in A$. Se dice que f es diferenciable en a cuando existe una aplicación lineal $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(a + h) - f(a) - \lambda(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

La aplicación lineal λ, que como veremos es única, se llama diferencial de f en a y se designa por $Df(a)$.

1.1. DERIVADA SEGUN UN VECTOR DE UNA FUNCION REAL DE VARIABLE VECTORIAL. DERIVADAS PARCIALES

En todo este párrafo, f es una función definida en un abierto A de $\mathbb{R}^n$ y que toma valores en $\mathbb{R}$ y $a = (a_1, ..., a_n)$ es un punto de A.

Definición: *Sea $v = (v_1, ..., v_n)$ un vector no nulo de $\mathbb{R}^n$. El límite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + hv_1, ..., a_n + hv_n) - f(a_1, ..., a_n)}{h},$$

si existe, se llama derivada según el vector v de la función f en el punto a y se designa por $D_v f(a)$. Si $\|v\| = 1$, entonces $D_v f(a)$ se llama derivada direccional según el vector v de la función f en el punto a.

La derivada según el vector v de la función f en el punto a es la derivada en el punto 0 de una cierta función real de variable real. En efecto, consideremos el conjunto de números reales $V = \{h \in \mathbb{R} : a + hv \in A\}$ y la función $g : V \to \mathbb{R}^n$ definida por $g(h) = a + hv$ para cada $h \in V$; entonces la función $F = f \circ g : V \to \mathbb{R}$ es derivable en 0 y

$$F'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h} = D_v f(a).$$

Las derivadas de f según los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$ se llaman derivadas parciales de la función f.

Definición: *Sea $e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$ el i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. La derivada $D_{e_i} f(a)$, si existe, se llama derivada parcial respecto de la variable x_i de la función f en el punto a y se designa por $D_i f(a)$.*

Así, pues,

$$D_i f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_i + h, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_i, ..., a_n)}{h}$$

y $D_i f(a)$ es la derivada en el punto a_i de la función real de variable real definida por $F(x) = f(a_1, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_n)$ y, por tanto, para calcular derivadas parciales se puede aplicar el formalismo conocido del cálculo de derivadas para funciones reales de una variable real. Así, $D_i f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)$ se calcula derivando la función de x_i obtenida al considerar en $f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)$ todas las x_j para $j \neq i$ constantes.

Ejemplo: Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Está claro que las derivadas parciales de f existen en todo punto $(x, y) \neq (0, 0)$, puesto que en el abierto $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ f es un cociente de funciones derivables respecto de x y de y (polinomios) con el denominador distinto de cero. Aplicando la regla de derivación de un cociente y considerando y constante en el primer caso y x constante en el segundo, se obtienen

$$D_1 f(x, y) = \frac{3x^2(x^2 + y^2) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2(x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

y

$$D_2 f(x, y) = \frac{0 \cdot (x^2 + y^2) - 2x^3 y}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{2x^3 y}{(x^2 + y^2)^2}$$

para cada $(x, y) \neq (0, 0)$.

También existen las derivadas parciales de f en $(0, 0)$, pues para $h \neq 0$,

$$\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

y para $k \neq 0$,

$$\frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \frac{0}{k} = 0$$

y, por tanto,

$$D_1 f(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 1$$

y

$$D_2 f(0, 0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = 0.$$

1.2. DIFERENCIAL DE UNA FUNCION VECTORIAL DE VARIABLE VECTORIAL

Definición: *Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, f una función de A en $\mathbb{R}^m$ y $a \in A$. Se dice que f es diferenciable en a cuando existe una aplicación lineal $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Obsérvese que h es un punto de $\mathbb{R}^n$. La aplicación lineal λ, necesariamente única, como veremos en la siguiente proposición, se llama *diferencial de f en a* y se designa por $Df(a)$.

Proposición: *Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, f una función de A en $\mathbb{R}^m$ y $a \in A$. Si f es diferenciable en a, existe una aplicación lineal única $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Demostración: Sea $\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - \mu(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Sea $h \neq 0$ un punto de $\mathbb{R}^n$ tal que $a + h \in A$. Entonces,

$$\frac{\|\lambda(h) - \mu(h)\|}{\|h\|} = \frac{\|\lambda(h) - f(a+h) + f(a) + f(a+h) - f(a) - \mu(h)\|}{\|h\|}$$
$$\leqslant \frac{\|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)\|}{\|h\|} + \frac{\|f(a+h) - f(a) - \mu(h)\|}{\|h\|}$$

y como, por hipótesis, cada uno de estos dos sumandos tiende a cero cuando h tiende a cero,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|\lambda(h) - \mu(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Sea ahora $x \neq 0$ un punto arbitrario de $\mathbb{R}^n$. Si $h = tx$ con $t \in \mathbb{R}$, entonces $h \to 0$ cuando $t \to 0$ y como λ y μ son aplicaciones lineales,

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{\|\lambda(tx) - \mu(tx)\|}{\|tx\|} = \lim_{t \to 0} \frac{\|t[\lambda(x) - \mu(x)]\|}{\|tx\|} = \frac{\|\lambda(x) - \mu(x)\|}{\|x\|}$$

luego $\|\lambda(x) - \mu(x)\| = 0$ y, por tanto, $\lambda(x) = \mu(x)$. También, por ser λ y μ aplicaciones lineales, $\lambda(0) = 0 = \mu(0)$, luego $\lambda(x) = \mu(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, es decir, $\lambda = \mu$.

Proposición: *Si $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación lineal, existe una constante $M > 0$ tal que $\|\lambda(x)\| \leqslant M\|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

Demostración: Sea (a_{ij}) la matriz de orden $m \times n$ que define la aplicación lineal λ y sea

$$k = \max \{|a_{ij}| : 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n\}.$$

Si $x = (x_1, ..., x_n)$ es un elemento arbitrario de $\mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, ..., y_m) = \lambda(x)$ entonces

$$|y_j| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| \leqslant k \sum_{j=1}^{n} |x_j| \leqslant kn\|x\|$$

para $i = 1, 2, ..., m$ y, por tanto,

$$\|\lambda(x)\| = \|y\| = \left(\sum_{i=1}^{m} y_i^2\right)^{1/2} \leqslant (mk^2n^2\|x\|^2)^{1/2} = m^{1/2}kn\|x\|$$

y basta tomar $M = m^{1/2}kn$.

Proposición: *Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, f una función de A en $\mathbb{R}^m$ y $a \in A$. Si f es diferenciable en a, entonces f es continua en a.*

Demostración: Sea $\lambda = Df(a)$ y para cada $x \neq a$ sea

$$R(x - a) = \frac{f(x) - f(a) - \lambda(x - a)}{\|x - a\|}.$$

Entonces, para todo $x \in A$ se tiene

$$f(x) = f(a) + \lambda(x - a) + \|x - a\|R(x - a).$$

Ahora bien, por la proposición anterior, existe una constante $M > 0$ tal que $\|\lambda(x - a)\| \leqslant \leqslant M\|x - a\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y, por tanto,

$$\lim_{x \to a} \lambda(x - a) = 0.$$

Por otra parte, como f es diferenciable en a, $\lim\limits_{x \to a} R(x - a) = 0$ y

$$\lim_{x \to a} \|x - a\|R(x - a) = 0.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

luego f es continua en a.

Definición: *Sea A un abierto de $\mathbb{R}^n$. Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en A cuando lo es en cada punto de A.*

Ejemplos:

1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la función constante definida por $f(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces f es diferenciable en $\mathbb{R}^n$ y la diferencial de f en cualquier punto es la

aplicación lineal $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ idénticamente nula, pues cualesquiera que sean los puntos a y $h \neq 0$ de $\mathbb{R}^n$ se verifica

$$\frac{\|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)\|}{\|h\|} = \frac{\|c - c - 0\|}{\|h\|} = 0.$$

2. Una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \to \quad ^m$ es diferenciable y la diferencial de f en cualquier punto de $\mathbb{R}^n$ es f, pues cualesquiera que sean los puntos a y $h \neq 0$ de $\mathbb{R}^n$ se verifica

$$\frac{\|f(a+h) - f(a) - f(h)\|}{\|h\|} = \frac{0}{\|h\|} = 0.$$

Proposición: *Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $a \in A$ y f y g dos funciones de A en $\mathbb{R}$ diferenciables en a. Entonces las funciones $f + g$ y fg son diferenciables en a y*

$$D(f+g)(a) = Df(a) + Dg(a),$$
$$D(fg)(a) = g(a)Df(a) + f(a)Dg(a).$$

Si además es $g(a) \neq 0$ entonces la función f/g es también diferenciable en a y

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a)Df(a) - f(a)Dg(a)}{[g(a)]^2}.$$

Demostración: Pongamos $\lambda = Df(a)$ y $\mu = Dg(a)$. Entonces,

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)|}{\|h\|} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{h \to 0} \frac{|g(a+h) - g(a) - \mu(h)|}{\|h\|} = 0$$

y como

$$\frac{|(f+g)(a+h) - (f+g)(a) - (\lambda + \mu)(h)|}{\|h\|} \leqslant \frac{|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)|}{\|h\|} + \\ + \frac{|g(a+h) - g(a) - \mu(h)|}{\|h\|},$$

resulta

$$\lim_{h \to 0} \frac{|(f+g)(a+h) - (f+g)(a) - (\lambda + \mu)(h)|}{\|h\|} = 0$$

luego $f + g$ es diferenciable en a y

$$D(f+g)(a) = \lambda + \mu = Df(a) + Dg(a).$$

Por otra parte, sumando y restando $f(a+h)g(a) + f(a+h)\mu(h)$ al numerador de la fracción

$$\frac{(fg)(a+h) - (fg)(a) - (g(a)\lambda + f(a)\mu)(h)}{\|h\|}$$

resulta que el valor absoluto de esta fracción es menor o igual que

$$|f(a+h)|\frac{|g(a+h)-g(a)-\mu(h)|}{\|h\|}+|g(a)|\frac{|f(a+h)-f(a)-\lambda(h)|}{\|h\|}+\frac{|\mu(h)|}{\|h\|}|f(a+h)-f(a)|.$$

Ahora bien, cuando $h \to 0$ los dos primeros sumandos de esta suma tienden a cero (por ser f diferenciable en a, es continua en a y $\lim_{h\to 0} f(a+h)=f(a)$. Además, por ser μ una aplicación lineal, existe una constante $M>0$ tal que $|\mu(h)|<M\|h\|$ para todo $h\in\mathbb{R}^n$ y, por tanto,

$$\frac{|\mu(h)|}{\|h\|}|f(a+h)-f(a)|\leqslant M|f(a+h)-f(a)|$$

y como f es continua en a, el tercer sumando también tiende a cero. Por consiguiente,

$$\lim_{h\to 0}\frac{|(fg)(a+h)-(fg)(a)-(g(a)\lambda+f(a)\mu)(h)|}{\|h\|}=0$$

luego fg es diferenciable en a y

$$D(fg)(a)=g(a)\lambda+f(a)\mu=g(a)Df(a)+f(a)Dg(a).$$

Para terminar, bastará probar que si $g(a)\neq 0$ entonces

$$D\left(\frac{1}{g}\right)(a)=-\frac{Dg(a)}{[g(a)]^2}$$

puesto que aplicando después la regla de diferenciación de un producto resulta

$$\begin{aligned}D\left(\frac{f}{g}\right)(a)&=D\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)(a)=\frac{1}{g(a)}Df(a)+f(a)D\left(\frac{1}{g}\right)(a)\\&=\frac{1}{g(a)}Df(a)-f(a)\frac{Dg(a)}{[g(a)]^2}=\frac{g(a)Df(a)-f(a)Dg(a)}{[g(a)]^2}.\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\|h\|}\left|\left(\frac{1}{g}\right)(a+h)-\left(\frac{1}{g}\right)(a)+\frac{\mu(h)}{[g(a)]^2}\right|=\frac{1}{\|h\|}\left|-\frac{g(a+h)-g(a)}{g(a+h)g(a)}+\frac{\mu(h)}{[g(a)]^2}\right|\\&=\frac{1}{\|h\|}\left|-\frac{g(a+h)-g(a)-\mu(h)}{g(a+h)g(a)}-\frac{\mu(h)}{g(a+h)g(a)}+\frac{\mu(h)}{[g(a)]^2}\right|\\&=\frac{1}{\|h\|}\left|-\frac{g(a+h)-g(a)-\mu(h)}{g(a+h)g(a)}+\frac{\mu(h)}{g(a)}\cdot\frac{g(a+h)-g(a)}{g(a+h)g(a)}\right|\\&\leqslant\frac{1}{|g(a+h)g(a)|}\left(\frac{|g(a+h)-g(a)-\mu(h)|}{\|h\|}+\frac{|\mu(h)|}{\|h\|}\left|\frac{g(a+h)-g(a)}{g(a)}\right|\right),\end{aligned}$$

y como g es diferenciable y, por tanto, continua en a y μ es una aplicación lineal,

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\|h\|}\left|\left(\frac{1}{g}\right)(a+h)-\left(\frac{1}{g}\right)(a)+\frac{\mu(h)}{[g(a)]^2}\right|=0$$

luego efectivamente,

$$D\left(\frac{1}{g}\right)(a)=-\frac{\mu}{[g(a)]^2}=-\frac{Dg(a)}{[g(a)]^2}.$$

Proposición *(Regla de la cadena): Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, B un abierto de $\mathbb{R}^m$, $f: A \to B$ una función diferenciable en $a \in A$ y $g: B \to \mathbb{R}^p$ una función diferenciable en $f(a)$. Entonces la función compuesta $g \circ f$ es diferenciable en a y*

$$D(g\circ f)(a)=Dg(f(a))\circ Df(a).$$

Demostración: Pongamos $b = f(a)$, $\lambda = Df(a)$ y $\mu = Dg(f(a))$ y sean

$$F(x)=f(x)-f(a)-\lambda(x-a),\quad G(y)=g(y)-g(b)-\mu(y-b)$$

y

$$H(x)=(g\circ f)(x)-(g\circ f)(a)-(\mu\circ\lambda)(x-a).$$

Entonces, por hipótesis,

$$\lim_{x\to a}\frac{\|F(x)\|}{\|x-a\|}=0 \quad \text{y} \quad \lim_{y\to b}\frac{\|G(y)\|}{\|y-b\|}=0$$

y hemos de probar que

$$\lim_{x\to a}\frac{\|H(x)\|}{\|x-a\|}=0.$$

Pero como

$$\begin{aligned} H(x) &= g(f(x))-g(f(a))-\mu(\lambda(x-a)) \\ &= g(f(x))-g(f(a))-\mu(f(x)-f(a)-F(x)) \\ &= G(f(x))+\mu(F(x)) \end{aligned}$$

se tiene

$$\frac{\|H(x)\|}{\|x-a\|}\leqslant\frac{\|G(f(x))\|}{\|x-a\|}+\frac{\|\mu(F(x))\|}{\|x-a\|}$$

y, por tanto, bastará probar que

$$\lim_{x\to a}\frac{\|G(f(x))\|}{\|x-a\|}=0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a}\frac{\|\mu(F(x))\|}{\|x-a\|}=0.$$

Ahora bien, por ser μ una aplicación lineal, existe un $M > 0$ tal que $\|\mu(F(x))\| \leqslant M\|F(x)\|$ y, por tanto,

$$\frac{\|\mu(F(x))\|}{\|x - a\|} \leqslant M \frac{\|F(x)\|}{\|x - a\|}$$

y como por hipótesis es

$$\lim_{x \to a} \frac{\|F(x)\|}{\|x - a\|} = 0,$$

resulta

$$\lim_{x \to a} \frac{\|\mu(F(x))\|}{\|x - a\|} = 0.$$

Probemos ahora que

$$\lim_{x \to a} \frac{\|G(f(x))\|}{\|x - a\|} = 0.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como λ es una aplicación lineal, existe un $M_1 > 0$ tal que

$$\|\lambda(x)\| \leqslant M_1\|x\|$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Pongamos $\varepsilon' = \varepsilon/(1 + M_1)$. Como

$$\lim_{y \to b} \frac{\|G(y)\|}{\|y - b\|} = 0,$$

existe un $\alpha > 0$ tal que

$$\|G(y)\| < \varepsilon'\|y - b\|$$

para todo $y \in B$ tal que $0 < \|y - b\| < \alpha$, y como f es continua en a, existe un $\delta_1 > 0$ tal que para todo $x \in A$ que verifique $\|x - a\| < \delta_1$ se cumple $\|f(x) - b\| < \alpha$ y, por tanto,

$$\|G(f(x))\| < \varepsilon'\|f(x) - b\|.$$

Además, como

$$\lim_{x \to a} \frac{\|F(x)\|}{\|x - a\|} = 0,$$

existe un $\delta_2 > 0$ tal que

$$\|F(x)\| < \|x - a\|$$

para todo $x \in A$ tal que $0 < \|x - a\| < \delta_2$. Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Entonces, para todo $x \in A$ tal que $0 < \|x - a\| < \delta$ se verifica

$$\begin{aligned}\|G(f(x))\| &< \varepsilon'\|f(x) - b\| = \varepsilon'\|F(x) + \lambda(x - a)\| \\ &\leqslant \varepsilon'\|F(x)\| + \varepsilon'\|\lambda(x - a)\| < \varepsilon'\|x - a\| + \varepsilon' M_1\|x - a\| \\ &= \varepsilon'(1 + M_1)\|x - a\| = \varepsilon\|x - a\|\end{aligned}$$

y, por consiguiente,

$$\frac{\|G(f(x))\|}{\|x - a\|} < \varepsilon$$

luego

$$\lim_{x \to a} \frac{\|G(f(x))\|}{\|x - a\|} = 0$$

como queríamos demostrar.

Proposición: *Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $a \in A$. Una función $f = (f_1, \ldots, f_m)$ de A en $\mathbb{R}^m$ es diferenciable en a si y sólo si sus funciones componentes $f_1, \ldots, f_m$ son diferenciables en a y, en este caso, $Df(a)$ es la aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ que tiene por componentes $Df_1(a), \ldots, Df_m(a)$.*

Demostración: Supongamos en primer lugar que f es diferenciable en a. Para $i = 1, \ldots, m$, f_i es la función compuesta $\pi_i \circ f$, donde π_i es la función de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}$ que a cada vector $(y_1, \ldots, y_m)$ de $\mathbb{R}^m$ hace corresponder su i-ésima componente y_i. Pero π_i es lineal y, por tanto, diferenciable en $\mathbb{R}^n$ y su diferencial en cualquier punto de $\mathbb{R}^n$ es π_i y, por la regla de la cadena, f_i es diferenciable en a y

$$Df_i(a) = D\pi_i(f(a)) \circ Df(a) = \pi_i \circ Df(a)$$

luego $Df_i(a)$ es la componente i-ésima de $Df(a)$.

Recíprocamente, supongamos que para $i = 1, \ldots, m$, f_i es diferenciable en a. Entonces,

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f_i(a + h) - f_i(a) - Df_i(a)(h)|}{\|h\|} = 0$$

para $i = 1, \ldots, m$ y si λ es la aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ de componentes $Df_1(a), \ldots, Df_m(a)$, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\|f(a + h) - f(a) - \lambda(h)\|}{\|h\|} &= \frac{1}{\|h\|}\left[\sum_{i=1}^{m} (f_i(a + h) - f_i(a) - Df_i(a)(h))^2\right]^{1/2} \\ &\leqslant \frac{1}{\|h\|}\left[\left(\sum_{i=1}^{m} |f_i(a + h) - f_i(a) - Df_i(a)(h)|\right)^2\right]^{1/2} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{|f_i(a + h) - f_i(a) - Df_i(a)(h)|}{\|h\|}\end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)\|}{\|h\|} = 0$$

luego f es diferenciable en a y

$$Df(a) = \lambda = (Df_1(a), \ldots, Df_m(a)).$$

1.3. MATRIZ JACOBIANA

Proposición: *Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $a \in A$. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es diferenciable en a, entonces existe $D_v f(a)$ para todo $v \neq 0$ de $\mathbb{R}^n$ y*

$$D_v f(a) = Df(a)(v).$$

Demostración: Por ser f diferenciable en a,

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)|}{\|h\|} = 0.$$

En particular (haciendo $h = tv$),

$$\lim_{t\to 0} \frac{|f(a+tv) - f(a) - Df(a)(tv)|}{\|tv\|} = 0$$

y como $Df(a)$ es una aplicación lineal,

$$\frac{1}{\|v\|} \lim_{t\to 0} \left| \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} - Df(a)(v) \right| = 0$$

luego

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = Df(a)(v)$$

es decir,

$$D_v f(a) = Df(a)(v).$$

Definición: *Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $a \in A$ y $f = (f_1, \ldots, f_m)$ una función de A en $\mathbb{R}^m$ cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales respecto de cada variable en el punto a. La matriz*

$$\begin{pmatrix} D_1 f_1(a), & D_2 f_1(a), & \ldots, & D_n f_1(a) \\ D_1 f_2(a), & D_2 f_2(a), & \ldots, & D_n f_2(a) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_1 f_m(a), & D_2 f_m(a), & \ldots, & D_n f_m(a) \end{pmatrix}$$

se llama matriz jacobiana de f en el punto a y se designa por $f'(a)$.

Proposición: *Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $a \in A$ y $f = (f_1, \dots, f_m)$ una función de A en $\mathbb{R}^m$ diferenciable en a. Entonces las funciones componentes de f tienen derivadas parciales respecto de cada variable en el punto a y la matriz de la aplicación lineal $Df(a)$ respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ es la matriz jacobiana de f en a.*

Demostración: Supongamos en primer lugar que $m = 1$ y sea $(d_1 \cdots d_n)$ la matriz de $Df(a)$ respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}$. Si $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ es el j-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, se tiene

$$Df(a)(e_j) = (d_1 \cdots d_j \cdots d_n)\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = d_j$$

y por la proposición anterior, existe $D_{e_j}f(a)$ y

$$D_{e_j}f(a) = Df(a)(e_j),$$

luego

$$D_jf(a) = d_j.$$

Esto demuestra la proposición en el caso particular de que sea $m = 1$. En el caso general, m arbitrario, según acabamos de demostrar, para $i = 1, \dots, m$ y todo $v = (v_1, \dots, v_n) \neq 0$ de $\mathbb{R}^n$ se verifica

$$Df_i(a)(v) = (D_1f_i(a) \cdots D_2f_i(a) \cdots D_nf_i(a))\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} D_jf_i(a) \cdot v_j$$

y como por la última proposición de 1.2,

$$Df(a) = (Df_1(a), Df_2(a), \dots, Df_m(a)),$$

se tiene

$$Df(a)(v) = \begin{pmatrix} Df_1(a)(v) \\ Df_2(a)(v) \\ \vdots \\ Df_m(a)(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} D_jf_1(a) \cdot v_j \\ \sum_{j=1}^{n} D_jf_2(a) \cdot v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} D_jf_m(a) \cdot v_j \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} D_1f_1(a) & D_2f_1(a) & \cdots & D_nf_1(a) \\ D_1f_2(a) & D_2f_2(a) & \cdots & D_nf_2(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_1f_m(a) & D_2f_m(a) & \cdots & D_nf_m(a) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

luego, efectivamente, la matriz de $Df(a)$ es $f'(a)$.

La recíproca de la proposición anterior no es cierta en general (véase el ejercicio $2c$). Sin embargo, sí se verifica la siguiente

Proposición: *Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $a \in A$ y $f = (f_1, ..., f_m)$ una función de A en $\mathbb{R}^m$. Si existen las derivadas parciales de las funciones componentes de f en una bola de centro a y son continuas en a, entonces f es diferenciable en a.*

Demostración: Como f es diferenciable en a si y sólo si lo son todas las f_i, podemos limitarnos a considerar el caso $m = 1$. Así, pues, supondremos que f es una función de A en $\mathbb{R}$ y tendremos que probar que cuando $x = (x_1, ..., x_n)$ tiende hacia $a = (a_1, ..., a_n)$ el cociente

$$\frac{\left| f(x) - f(a) - \sum_{j=1}^{n} D_j f(a) \cdot (x_j - a_j) \right|}{\|x - a\|}$$

tiende a cero. Ahora bien,

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= f(x_1, a_2, a_3, ..., a_n) - f(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) \\ &+ f(x_1, x_2, a_3, ..., a_n) - f(x_1, a_2, a_3, ..., a_n) \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, a_n), \end{aligned}$$

y como para j $= 1, 2, ..., n$, la función real de una variable real

$$g_j(t) = f(x_1, ..., x_{j-1}, t, a_{j+1}, ..., a_n)$$

es continua en el intervalo cerrado de extremos a_j y x_j y derivable en su interior, por el teorema del valor medio, existe un b_j comprendido entre a_j y x_j tal que

$$g_j(x_j) - g_j(a_j) = (x_j - a_j) g_j'(b_j)$$

es decir,

$$\begin{aligned} f(x_1, ..., x_{j-1}, x_j, a_{j+1}, ..., a_n) &- f(x_1, ..., x_{j-1}, a_j, a_{j+1}, ..., a_n) \\ &= (x_j - a_j) D_j f(x_1, ..., x_{j-1}, b_j, a_{j+1}, ..., a_n), \end{aligned}$$

y si, para simplificar la escritura, ponemos

$$c_j(x_1, ..., x_{j-1}, b_j, a_{j+1}, ..., a_n),$$

podemos escribir

$$\frac{\left| f(x) - f(a) - \sum_{j=1}^{n} D_j f(a) \cdot (x_j - a_j) \right|}{\|x - a\|}$$

$$= \frac{\left| \sum_{j=1}^{n} (D_j f(c_j) - D_j f(a))(x_j - a_j) \right|}{\|x - a\|}$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} |D_j f(c_j) - D_j f(a)| \cdot \frac{|x_j - a_j|}{\|x - a\|}$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} |D_j f(c_j) - D_j f(a)|.$$

Pero $\|c_j - a\| \leqslant \|x - a\|$, luego $c_j \to a$ cuando $x \to a$, y como las derivadas parciales de f son continuas en a,

$$\lim_{x \to a} (D_j f(c_j) - D_j f(a)) = 0.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{x \to a} \frac{\left| f(x) - f(a) - \sum_{j=1}^{n} D_j f(a) \cdot (x_j - a_j) \right|}{\|x - a\|} = 0$$

conforme queríamos demostrar.

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \quad \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0), f(0, 0) = 0.$$

Probar que $D_v f(0, 0)$ existe para todo vector $v = (a, b) \neq (0, 0)$ y que f no es continua en $(0, 0)$.

2. Estudiar, en cada caso, la continuidad, la existencia de derivadas parciales y la diferenciabilidad en $(0, 0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

a) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^3}$ si $(x, y) \neq (0, 0), f(0, 0) = 0,$

b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},$

c) $f(x, y) = y\,\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0), f(0, 0) = 0,$

d) $f(x, y) = xy \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0), f(0, 0) = 0,$

e) $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2 - y + 7.$

3. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ las funciones definidas, respectivamente, por

$$f(x, y) = (x^2 + y^2, \cos xy, e^{x+y}),$$
$$g(x, y, z) = (x + y + z, xyz).$$

Probar que la función compuesta $g \circ f$ es diferenciable en $(0, 0)$ y calcular $D(g \circ f)(0, 0)$.

4. Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, B un abierto de $\mathbb{R}^m$, $f = (f_1, ..., f_m) : A \to B$ una función diferenciable en un punto $a \in A$, $g : B \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $f(a)$ y sea $h : A \to \mathbb{R}$ la función compuesta $h = g \circ f$. Demostrar que para $i = 1, ..., n$ se verifica

$$D_i h(a) = \sum_{j=1}^{m} D_j g(f(a)) \cdot D_i f_j(a).$$

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Para $(a, b) \neq (0,0)$ y $h \neq 0$ se tiene

$$\frac{f(ha, hb) - f(0,0)}{h} = \frac{h^3ab^2}{h(h^2a^2 + h^4b^4)} = \frac{ab^2}{a^2 + h^2b^4}$$

y, por tanto,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(ha, hb) - f(0,0)}{h} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a = 0 \\ \dfrac{b^2}{a} & \text{si} \quad a \neq 0 \end{cases}$$

luego, efectivamente, para todo $v = (a, b) \neq (0,0)$ existe $D_v f(0,0)$ y

$$D_v f(0,0) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a = 0 \\ \dfrac{b^2}{a} & \text{si} \quad a \neq 0 \end{cases}$$

Sin embargo, f no es continua en $(0,0)$ porque no existe:

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$$

puesto que si $A_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \lambda y^2\}$,

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in A_\lambda}} f(x, y) = \lim_{y \to 0} \frac{\lambda y^4}{\lambda^2 y^4 + y^4} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1}$$

y, por tanto, los límites sobre cada A_λ son distintos.

2. *a*) Sea $A_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \lambda x\}$. Entonces

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A_\lambda}} f(x, y) = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda x^2}{x^2 + \lambda^3 x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda}{1 + \lambda^3 x} = \lambda$$

y, por tanto, no existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$$

luego f no es continua en $(0, 0)$.

Por otra parte,

$$D_1 f(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

y

$$D_2 f(0, 0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = 0.$$

Finalmente, f no es diferenciable en $(0, 0)$ porque no es continua en $(0, 0)$.

b) Es evidente que f es continua en todo punto. Para $h \neq 0$ es

$$\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} -1 & \text{si } h < 0 \\ 1 & \text{si } h > 0 \end{cases}$$

y, por tanto,

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 1$$

y no existe

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h}$$

es decir, no existe $D_1 f(0, 0)$. Procediendo de manera análoga se ve que $D_2 f(0, 0)$ tampoco existe.

En consecuencia, f no es diferenciable en $(0, 0)$.

c) Como

$$|f(x, y)| = |y| \cdot \left|\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right| \leqslant |y|,$$

se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$$

y, por tanto, f es continua en $(0,0)$.

Por otra parte,

$$D_1 f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

y

$$D_2 f(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{-k^3/k}{k} = -1,$$

y si f fuese diferenciable en $(0,0)$, su diferencial en $(0,0)$ sería la aplicación lineal $\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\lambda(h,k) = (0 \quad -1)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = -k$$

para cada $(h,k) \in \mathbb{R}^2$. Para que así fuera, debería verificarse

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{|f(h,k) - f(0,0) - \lambda(h,k)|}{\|(h,k)\|} = 0$$

pero si $A_\mu = \{(h,k) \in \mathbb{R}^2 : k = \mu h\}$,

$$\lim_{\substack{(h,k) \to (0,0) \\ (h,k) \in A_\mu}} \frac{|f(h,k) - f(0,0) - \lambda(h,k)|}{\|(h,k)\|} = \lim_{h \to 0} \frac{\left|\mu h \dfrac{h^2 - \mu^2 h^2}{h^2 + \mu^2 h^2} + \mu h\right|}{\sqrt{h^2 + \mu^2 h^2}}$$

$$= \frac{\left|\mu \dfrac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2} + \mu\right|}{\sqrt{1 + \mu^2}} = \frac{2|\mu|}{(1 + \mu^2)^{3/2}}$$

y, por tanto, no existe:

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{|f(h,k) - f(0,0) - \lambda(h,k)|}{\|(h,k)\|}$$

luego f no es diferenciable en $(0,0)$.

d) Como $|f(x,y)| \leqslant |xy|$, se tiene

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

y, por tanto, f es continua en $(0,0)$.

Por otra parte,

$$D_1f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

y

$$D_2f(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{0}{k} = 0$$

y si f fuese diferenciable en $(0,0)$, su diferencial en $(0,0)$ sería la aplicación lineal $\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\lambda(h,k) = (0 \quad 0)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = 0$$

para cada $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, y efectivamente así es, puesto que

$$\frac{|f(h,k) - f(0,0) - \lambda(h,k)|}{\|(h,k)\|} = \frac{\left| hk \operatorname{sen} \dfrac{1}{h^2+k^2} \right|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leqslant \frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$
$$\leqslant \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{h^2+k^2}$$

y, por tanto,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(h,k) - f(0,0) - \lambda(h,k)|}{\|(h,k)\|} = 0.$$

e) Es evidente que f es continua en todo punto. Por otra parte, las derivadas parciales de f

$$D_1f(x,y) = 2x + 3y, \quad D_2f(x,y) = 3x + 2y - 1$$

son también continuas en todo punto, luego f es diferenciable en todo punto y $Df(x,y)$ es la aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$Df(x,y)(h,k) = (2x + 3y \quad 3x + 2y - 1)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = (2x+3y)h + (3x+2y-1)k.$$

En particular, $Df(0,0)$ es la aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$Df(0,0)(h,k) = -k$$

para cada $(h,k) \in \mathbb{R}^2$.

3. Las funciones componentes de f,

$$f_1(x,y) = x^2 + y^2, \quad f_2(x,y) = \cos xy, \quad f_3(x,y) = e^{x+y}$$

tienen derivadas parciales continuas en todo punto:

$$\begin{aligned} D_1 f_1(x, y) &= 2x, & D_2 f_1(x, y) &= 2y, \\ D_1 f_2(x, y) &= -y \operatorname{sen} xy, & D_2 f_2(x, y) &= -x \operatorname{sen} xy, \\ D_1 f_3(x, y) &= e^{x+y}, & D_2 f_3(x, y) &= e^{x+y}. \end{aligned}$$

Por tanto, f es diferenciable en todo punto y la matriz jacobiana de f en un punto (x, y) es

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -y \operatorname{sen} xy & -x \operatorname{sen} xy \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix}$$

Las funciones componentes de g

$$g_1(x, y, z) = x + y + z, \quad g_2(x, y, z) = xyz$$

tienen derivadas parciales continuas en todo punto:

$$\begin{aligned} D_1 g_1(x, y, z) &= 1, & D_2 g_1(x, y, z) &= 1, & D_3 g_1(x, y, z) &= 1, \\ D_1 g_2(x, y, z) &= yz, & D_2 g_2(x, y, z) &= xz, & D_3 g_2(x, y, z) &= xy. \end{aligned}$$

Por consiguiente, g es diferenciable en todo punto y la matriz jacobiana de g en un punto (x, y) es

$$g'(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}.$$

En particular, f es diferenciable en $(0, 0)$ y

$$f'(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

g es diferenciable en $f(0, 0) = (0, 1, 1)$ y

$$g'(0, 1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y, por la regla de la cadena, $g \circ f$ es diferenciable en $(0, 0)$ y

$$D(g \circ f)(0, 0) = Dg(f(0, 0)) \circ Df(0, 0)$$

y como la matriz de la composición de dos aplicaciones lineales es igual al producto de las matrices de éstas,

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(0, 0) &= g'(f(0, 0)) \cdot f'(0, 0) = g'(0, 1, 1) \cdot f'(0, 0) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y como

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h + k \\ 0 \end{pmatrix},$$

$D(g \circ f)(0, 0)$ es la aplicación lineal $\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\lambda(h, k) = (h + k, 0)$$

para cada $(h, k) \in \mathbb{R}^2$.

4. Por la regla de la cadena h es diferenciable en a y su matriz jacobiana es

$$\begin{aligned} h'(a) &= g'(f(a)) \cdot f'(a) \\ &= (D_1 g(f(a)) \cdots D_m g(f(a))) \cdot \begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & \cdots & D_n f_1(a) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ D_1 f_m(a) & \cdots & D_n f_m(a) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora bien, $h'(a)$ y el producto de las dos últimas matrices son dos matrices de orden $1 \times n$ cuyos elementos i-ésimos son $D_i h(a)$ y $\sum_{j=1}^{m} D_j g(f(a)) \cdot D_i f_j(a)$, respectivamente; luego

$$D_i h(a) = \sum_{j=1}^{m} D_j g(f(a)) \cdot D_i f_j(a)$$

para $i = 1, \ldots, n$.

TEMA II

Fórmula de Taylor

Máximos y mínimos

Esquema/Resumen

2.1. *Derivadas de orden superior*
2.2. *Fórmula de Taylor*
2.3. *Máximos y mínimos relativos*
2.4. *Máximos y mínimos condicionados*

2.1. DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

2.1.1. Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y f una función de A en $\mathbb{R}$. Supongamos que la derivada parcial $D_i f(x)$ existe para todo $x \in A$ y sea $\varphi_i : A \to \mathbb{R}$ la función definida por $\varphi_i(x) = D_i f(x)$. Si para un $a \in A$ existe $D_j \varphi_i(a)$, esta derivada parcial se llama *derivada parcial segunda* respecto de las variables x_i, x_j de la función f en el punto a y se designa por $D_{ij} f(a)$.

Si existe $D_{ij} f(x)$ para todo $x \in A$ y $\varphi_{ij} : A \to \mathbb{R}$ es la función definida por $\varphi_{ij}(x) = D_{ij} f(x)$, la derivada parcial $D_k \varphi_{ij}(a)$, si existe, se llama *derivada parcial tercera* respecto de las variables x_i, x_j, x_k de la función f en el punto a y se designa por $D_{ijk} f(a)$.

Repitiendo este procedimiento, se pueden definir las derivadas parciales de orden $q = 4, 5, \ldots$, de f. La *derivada parcial q-ésima* respecto de las variables $x_{i_1}, \ldots, x_{i_q}$ de f en a se designa por $D_{i_1, \ldots, i_q} f(a)$.

Si todas las derivadas parciales de orden q de f existen en cada punto de A y son continuas en A, entonces se dice que f es una función de clase C^q en A y se escribe $f \in C^q(A)$.

Si $f \in C^q(A)$ para todo $q \in \mathbf{N}$, se dice que f es de clase C^∞ en A y se escribe $f \in C^\infty(A)$.

Sea ahora $f = (f_1, \ldots, f_m)$ una función de A en $\mathbb{R}^m$. Se dice que f es de clase C^q en A si cada una de sus componentes es de clase C^q en A.

Ejemplos:

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$$

para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Entonces

$$D_1 f(x, y) = 2x + 3y, \quad D_2 f(x, y) = 3x - 2y,$$
$$D_{11} f(x, y) = 2, \quad D_{12} f(x, y) = 3, \quad D_{21} f(x, y) = 3, \quad D_{22} f(x, y) = -2$$

y las derivadas parciales de f de orden superior a 2 son todas nulas.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$$

para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Las derivadas parciales primeras de f son

$$D_1 f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y, \quad D_2 f(x, y) = e^x \cos y.$$

Las derivadas parciales segundas de f son

$$D_{11} f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y, \quad D_{12} f(x, y) = e^x \cos y,$$
$$D_{21} f(x, y) = e^x \cos y, \quad D_{22} f(x, y) = -e^x \operatorname{sen} y.$$

Derivando éstas, primero respecto de x y después respecto de y, se obtienen las derivadas terceras:

$$\begin{aligned}
D_{111} f(x, y) &= e^x \operatorname{sen} y, & D_{121} f(x, y) &= e^x \cos y,\\
D_{211} f(x, y) &= e^x \cos y, & D_{221} f(x, y) &= -e^x \operatorname{sen} y,\\
D_{112} f(x, y) &= e^x \cos y, & D_{122} f(x, y) &= -e^x \operatorname{sen} y,\\
D_{212} f(x, y) &= -e^x \operatorname{sen} y, & D_{222} f(x, y) &= -e^x \cos y.
\end{aligned}$$

Derivando cada una de estas últimas, primero respecto de x y después respecto de y, obtendríamos las derivadas parciales de orden 4, y así podríamos continuar indefinidamente.

2.1.2. En los dos ejemplos anteriores se verifica

$$D_{12} f(x, y) = D_{21} f(x, y).$$

Esta igualdad de las derivadas parciales mixtas es consecuencia de la continuidad.

Proposición: *Sean A un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 en A y supongamos que para cada $(x, y) \in A$ existe $D_{12} f(x, y)$ y que la función $D_{12} f$ es continua en un punto $(a, b) \in A$. Entonces existe $D_{21} f(a, b)$ y se verifica*

$$D_{21} f(a, b) = D_{12} f(a, b).$$

Demostración: Hay que probar que el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{D_2 f(a + h, b) - D_2 f(a, b)}{h}$$

existe y es igual a $D_{12}f(a, b)$, es decir, que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{D_2f(a+h, b) - D_2f(a, b)}{h} - D_{12}f(a, b)\right| < \varepsilon$$

para $0 < |h| < \delta$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como A es abierto y $D_{12}f$ es continua en (a, b), existe un $\delta > 0$ tal que

$$(a+h, b+k) \in A \quad \text{y} \quad |D_{12}f(a+h, b+k) - D_{12}f(a, b)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para $|h| < \delta$ y $|k| < \delta$.

Ahora bien, como

$$\frac{D_2f(a+h, b) - D_2f(a, b)}{h} = \frac{1}{h}\lim_{k\to 0}\left[\frac{f(a+h, b+k) - f(a+h, b)}{k} - \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}\right]$$

si para $0 < |h| < \delta$ y $0 < |k| < \delta$ ponemos

$$A(h, k) = \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b)}{hk},$$

resulta

$$\frac{D_2f(a+h, b) - D_2f(a, b)}{h} = \lim_{k\to 0} A(h, k).$$

Sea $F : [a-\delta, a+\delta] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$F(x) = f(x, b+k) - f(x, b)$$

para cada $x \in [a-\delta, a+\delta]$. Entonces

$$A(h, k) = \frac{F(a+h) - F(a)}{hk}$$

y como por hipótesis F es derivable y

$$F'(x) = D_1f(x, b+k) - D_1f(x, b),$$

por el teorema del valor medio, existe un $\theta_1 \in (0, 1)$ tal que

$$A(h, k) = \frac{1}{k}F'(a+\theta_1 h) = \frac{1}{k}[D_1f(a+\theta_1 h, b+k) - D_1f(a+\theta_1 h, b)].$$

Sea ahora $G : [b-\delta, b+\delta] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$G(y) = D_1f(a+\theta_1 h, y)$$

para cada $y \in [b - \delta, b + \delta]$. Se tiene

$$A(h, k) = \frac{G(b + k) - G(b)}{k}$$

y como por hipótesis, G es derivable y

$$G'(y) = D_{12}f(a + \theta_1 h, y),$$

por el teorema del valor medio existe un $\theta_2 \in (0, 1)$ tal que

$$A(h, k) = G'(b + \theta_2 k) = D_{12}f(a + \theta_1 h, b + \theta_2 k).$$

Pero $|\theta_1 h| < \delta$ y $|\delta_2 k| < \delta$ y, por tanto,

$$|A(h, k) - D_{12}f(a, b)| = |D_{12}f(a + \theta_1 h, b + \theta_2 k) - D_{12}f(a, b)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y pasando al límite cuando $k \to 0$, se obtiene

$$\left| \frac{D_2 f(a + h, b) - D_2 f(a\, b)}{h} - D_{12}f(a, b) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

conforme queríamos demostrar.

Observación: La hipótesis de continuidad de $D_{12}f$ es esencial en la proposición anterior. Si no se cumple, puede ocurrir que las derivadas mixtas sean distintas, como lo prueba el siguiente

Ejemplo: Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Si $(x, y) \neq (0, 0)$, se tiene

$$D_1 f(x, y) = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{(x^2 + y^2)2x - (x^2 - y^2)2x}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= y \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

y por otra parte,

$$D_1 f(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Así, pues,

$$D_1 f(x, y) = \begin{cases} y\dfrac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

y de manera análoga se obtiene

$$D_2 f(x, y) = \begin{cases} x\dfrac{x^4 - 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Por consiguiente,

$$D_{12} f(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{D_1 f(0, k) - D_1 f(0, 0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{-k}{k} = -1$$

y

$$D_{21} f(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{D_2 f(h, 0) - D_2 f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

y $D_{12} f(0, 0) \neq D_{21} f(0, 0)$.

Esto se debe a que $D_{12} f$ no es continua en $(0, 0)$, pues si $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$D_{12} f(x, y) = \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3}$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ y = \lambda x}} D_{12} f(x, y) &= \lim_{x \to 0} \frac{x^6 + 9\lambda^2 x^6 - 9\lambda^4 x^6 - \lambda^6 x^6}{(x^2 + \lambda^2 x^2)^3} \\ &= \frac{1 + 9\lambda^2 - 9\lambda^4 - \lambda^6}{(1 + \lambda^2)^3} \end{aligned}$$

lo que prueba que el límite

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} D_{12} f(x, y)$$

no existe.

2.1.3. La proposición anterior se extiende fácilmente para funciones de n variables.

Proposición: *Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 en A y supongamos que para cada $x \in A$ existe $D_{ij} f(x)$ y que la función $D_{ij} f$ es continua en un punto $a \in A$. Entonces existe $D_{ji} f(a)$ y se verifica*

$$D_{ij} f(a) = D_{ji} f(a).$$

Demostración: Si es $a = (a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n)$, la función

$$F(x, y) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \ldots, a_n)$$

verifica las hipótesis de la proposición anterior en un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ que contiene al punto (a_i, a_j), luego existe $D_{21}F(a_i, a_j) = D_{ji}f(a)$ y es igual a $D_{12}F(a_i, a_j) = D_{ij}f(a)$.

Observación: Procediendo por inducción, se puede probar que si $f \in C^q(A)$ e $(i_1, \ldots, i_p)$ es una permutación de $(j_1, \ldots, j_p)$, $p \leqslant q$, entonces

$$D_{i_1, \ldots, i_p} f(a) = D_{j_1, \ldots, j_p} f(a).$$

2.2. FORMULA DE TAYLOR

Sean a y h dos puntos de $\mathbb{R}^n$. El segmento que los une es el conjunto

$$[a, a + h] = \{x = a + th : 0 \leqslant t \leqslant 1\}.$$

Proposición (Fórmula de Taylor): *Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $a \in A$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función de clase C^q en A y $h = (h_1, \ldots, h_n)$ un punto de $\mathbb{R}^n$ tal que el segmento que une a con $a + h$ está contenido en A. Entonces existe un $\theta \in (0, 1)$ tal que*

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i D_i f(a) + \frac{1}{2!} \sum_{i, j=1}^{n} h_i h_j D_{ij} f(a) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{(q-1)!} \sum_{i_1, \ldots, i_{q-1}=1}^{n} h_{i_1} \cdots h_{i_{q-1}} D_{i_1, \ldots, i_{q-1}} f(a) +$$

$$+ \frac{1}{q!} \sum_{i_1, \ldots, i_q=1}^{n} h_{i_1} \cdots h_{i_q} D_{i_1, \ldots, i_q} f(a + \theta h).$$

Demostración: Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ la función definida por $g(t) = a + th$. Está claro que $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ y que $g([0, 1]) = [a, a + h] \subset A$, luego $g^{-1}(A)$ es un abierto de $\mathbb{R}$ que contiene a $[0, 1]$. Por la regla de la cadena, la función $F : g^{-1}(A) \to \mathbb{R}$ definida por $F(t) = (f \circ g)(t) = f(a + th)$ es de clase C^q en $g^{-1}(A)$ y para cada $t \in g^{-1}(A)$, son

$$F'(t) = f'(a + th) \cdot \sum_{i=1}^{n} h_i D_i f(a + th),$$

$$F''(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i (D_i f)'(a + th) \cdot h = \sum_{i=1}^{n} h_i \sum_{j=1}^{n} h_j D_{ij} f(a + th)$$

$$= \sum_{i, j=1}^{n} h_i h_j D_{ij} f(a + th),$$

y, por inducción,

$$F^{(p)}(t) = \sum_{i_1, \ldots, i_p=1}^{n} h_{i_1} \cdots h_{i_p} D_{i_1, \ldots, i_p} f(a + th)$$

para $p = 1, 2, ..., q$. Pero por la fórmula de Taylor para funciones reales de una variable real, existe un $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0) + \cdots + \frac{1}{(q-1)!}F^{(q-1)}(0) + \frac{1}{q!}F^{(q)}(\theta)$$

y sustituyendo en esta igualdad los valores de F y los de sus derivadas, se obtiene la fórmula del enunciado.

Observación: Si es $p \geqslant 2$, en la suma

$$\sum_{i_1, ..., i_p = 1}^{n} h_{i_1} \cdots h_{i_p} D_{i_1, ..., i_p} f(x)$$

hay varios términos iguales, ya que si $(j_1, ..., j_p)$ es una permutación de $(i_1, ..., i_p)$, entonces

$$D_{j_1, ..., j_p} f(x) = D_{i_1, ..., i_p} f(x).$$

Por esta razón, la suma anterior se escribe a veces en la forma

$$(h_1 D_1 + \cdots + h_n D_n)^p f(x)$$

entendiendo que la potencia ha de calcularse por la fórmula de Newton, como si los $h_i D_i$ fuesen elementos de un anillo conmutativo en el que el producto esté definido por $(h_i D_i)(h_j D_j) = h_i h_j D_{ij}$. Así, por ejemplo, si $n = 2$,

$$(h_1 D_1 + h_2 D_2)^2 f(x) = h_1^2 D_{11} f(x) + 2h_1 h_2 D_{12} f(x) + h_2^2 D_{22} f(x),$$
$$(h_1 D_1 + h_2 D_2)^3 f(x) = h_1^3 D_{111} f(x) + 3h_1^2 h_2 D_{112} f(x) + \\ + 3h_1 h_2^2 D_{122} f(x) + h_2^3 D_{222} f(x),$$

y así sucesivamente.

2.3. MAXIMOS Y MINIMOS RELATIVOS

2.3.1. Definición: *Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y f una función de A en $\mathbb{R}$. Se dice que $a \in A$ es un punto de máximo (respectivamente, mínimo) relativo de f en A cuando existe una bola $B(a, r)$ tal que $f(a) \geqslant f(x)$ (resp. $f(a) \leqslant f(x)$) para todo $x \in A \cap B(a, r)$.*

Proposición: *Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y f una función de A en $\mathbb{R}$. Si $a \in A$ es un punto de extremo relativo de f y para un $v \in \mathbb{R}^n$ existe $D_v f(a)$, entonces $D_v f(a) = 0$.*

Demostración: La función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definida por $g(t) = a + tv$ es evidentemente de clase C^∞ y, por tanto, el conjunto $g^{-1}(A)$ es abierto en $\mathbb{R}$. Además, $g(0) = a \in A$, luego $0 \in g^{-1}(A)$. Sea $F : g^{-1}(A) \to \mathbb{R}$ la función definida por $F(t) = (f \circ g)(t) = f(a + tv)$ para cada $t \in g^{-1}(A)$. Entonces F es derivable en 0 y $F'(0) = D_v f(a)$, y si f tiene un extremo relativo en a, F tiene un extremo relativo en 0, luego $F'(0) = 0$ y, por consiguiente, $D_v f(a) = 0$.

Proposición: *Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y f una función de A en $\mathbb{R}$. Si $a \in A$ es un punto de extremo relativo de f y existe $D_i f(a)$, entonces $D_i f(a) = 0$.*

Demostración: Es consecuencia inmediata de la proposición anterior.

Definición: *Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y f una función de A en $\mathbb{R}$ con derivadas parciales en un punto $a \in A$. Si $D_i f(a) = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, se dice que a es un punto crítico de f.*

La última proposición nos dice que si f tiene derivadas parciales en un punto a de extremo relativo de f, entonces a es un punto crítico de f. Sin embargo, una función puede tener puntos críticos que no sean de extremo relativo.

Ejemplo: Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y) = xy - x^3$ para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Entonces $D_1 f(0,0) = 0 = D_2 f(0,0)$, luego $(0,0)$ es un punto crítico de f. Sin embargo, $(0,0)$ no es un punto de extremo relativo de f, pues $f(0,0) = 0$ y en toda bola de centro $(0,0)$ hay puntos (x, y) para los que $f(x, y) > 0$ y puntos (x, y) para los que $f(x, y) < 0$.

2.3.2. La siguiente proposición, cuya demostración omitiremos, nos da condiciones suficientes para que un punto crítico de una función sea un punto de extremo relativo.

Proposición: *Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en A. Supongamos que $a \in A$ es un punto crítico de f y designemos por Δ_k el determinante de la matriz $(D_{ij} f(a))$, $1 \leqslant i, j \leqslant k$.*

a) *Si es $\Delta_k > 0$ para $k = 1, 2, \ldots, n$, entonces a es un punto de mínimo relativo de f.*

b) *Si es $(-1)^k \Delta_k > 0$ para $k = 1, 2, \ldots, n$, entonces a es un punto de máximo relativo de f.*

Ejemplo: Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$$

para cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Su único punto crítico es $a = (-2/3, -1/3, 1)$ y como

$$\Delta_1 = D_{11} f(a) = 2 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} D_{11} f(a) & D_{12} f(a) \\ D_{21} f(a) & D_{22} f(a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 > 0$$

y

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} D_{11} f(a) & D_{12} f(a) & D_{13} f(a) \\ D_{21} f(a) & D_{22} f(a) & D_{23} f(a) \\ D_{31} f(a) & D_{32} f(a) & D_{33} f(a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 10 > 0,$$

f tiene en a un mínimo relativo.

2.3.3. En el caso $n = 2$, el estudio del determinante Δ_2 proporciona más información que en el caso general.

Proposición: *Sean A un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en A. Supongamos que $a \in A$ es un punto crítico de f y designemos por Δ_k el determinante de la matriz $(D_{ij}f(a))$, $1 \leqslant i,j \leqslant k$.*

a) *Si son $\Delta_2 > 0$ y $\Delta_1 > 0$, entonces a es un punto de mínimo relativo de f.*

b) *Si son $\Delta_2 > 0$ y $\Delta_1 < 0$, entonces a es un punto de máximo relativo de f.*

c) *Si es $\Delta_2 < 0$, entonces a no es punto de extremo relativo de f.*

d) *Si es $\Delta_2 = 0$, entonces a puede ser punto de extremo relativo de f o no.*

Ejemplos:

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y) = x^2 + xy$ para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Su único punto crítico es $(0, 0)$ y como

$$\begin{vmatrix} D_{11}f(0,0) & D_{12}f(0,0) \\ D_{21}f(0,0) & D_{22}f(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

y $D_{11}f(0,0) = 2 > 0$, f tiene en $(0,0)$ un mínimo relativo.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y) = -(4x^2 + 5y^2)$ para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Su único punto crítico es $(0, 0)$ y como

$$\begin{vmatrix} D_{11}f(0,0) & D_{11}f(0,0) \\ D_{21}f(0,0) & D_{22}f(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -10 \end{vmatrix} = 80 > 0$$

y $D_{11}f(0, 0) = -8 > 0$, f tiene en $(0, 0)$ un máximo relativo.

Obsérvese que por ser $f(x, y) \leqslant 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(0, 0) = 0$ es el máximo absoluto de f.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y) = y^2 - x^2$ para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Su único punto crítico es $(0, 0)$ y como

$$\begin{vmatrix} D_{11}f(0,0) & D_{12}f(0,0) \\ D_{21}f(0,0) & D_{22}f(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0,$$

$(0, 0)$ no es un punto de extremo relativo de f.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y) = x^3 + y^3$ para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Su único punto crítico es $(0, 0)$ y como

$$\begin{vmatrix} D_{11}f(0,0) & D_{12}f(0,0) \\ D_{21}f(0,0) & D_{22}f(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

estamos ante un caso dudoso. Ahora bien, como $f(0, 0) = 0$ y en toda bola de centro $(0, 0)$ hay puntos (x, y) para los que $f(x, y) > 0$ y puntos (x, y) para los que $f(x, y) < 0$, $(0, 0)$ no es un punto de extremo relativo de f.

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y) = x^2y^2$ para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Su único punto crítico es $(0, 0)$ y como

$$\begin{vmatrix} D_{11}f(0,0) & D_{12}f(0,0) \\ D_{21}f(0,0) & D_{22}f(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

estamos ante un caso dudoso. Ahora bien, como $f(0, 0) = 0$ y $f(x, y) \geqslant 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(0, 0)$ es un punto de mínimo relativo (y absoluto) de f.

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y) = 1 - x^2y^4$ para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Su único punto crítico es $(0, 0)$ y como

$$\begin{vmatrix} D_{11}f(0,0) & D_{12}f(0,0) \\ D_{21}f(0,0) & D_{22}f(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

estamos ante un caso dudoso. Ahora bien, como $f(0, 0) = 1$ y $f(x, y) \leqslant 1$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(0, 0)$ es un punto de máximo relativo (y absoluto) de f.

2.4. MAXIMOS Y MINIMOS CONDICIONADOS

Sea A un abierto de $\mathbb{R}^n$. El problema de determinar los extremos de una función $f : A \to \mathbb{R}$ sobre un conjunto $M \subset A$, se llama *problema de extremos condicionados*, aludiendo al hecho de que las variables $x_1, \ldots, x_n$ están sometidas a la condición de que $(x_1, \ldots, x_n) \in M$.

En el caso de que f sea de clase C^1 en A y el conjunto M sea el conjunto de los puntos de A en los que se anula una cierta función $g = (g_1, \ldots, g_m) : A \to \mathbb{R}^m$, $m < n$, de clase C^1 en A, se puede demostrar una proposición que se conoce como *teorema de los multiplicadores de Lagrange* y que establece una *condición necesaria* para que un $x \in M$ sea un punto de extremo de f sobre M.

Proposición (Teorema de los multiplicadores de Lagrange): *Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 en A, $g = (g_1, \ldots, g_m) : A \to \mathbb{R}^m$, $m < n$, una función de clase C^1 en A y M el conjunto de los puntos $x \in A$ tales que $g(x) = 0$. Si $a \in M$ es un punto de extremo relativo de f sobre M y* $\det(D_i g_j(a)) \neq 0$, *entonces existen m números reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tales que a es un punto crítico de la función*

$$F = f + \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_m g_m.$$

Ejemplo: Determinar los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y, z) = xyz$ en el conjunto

$$M = \{(x, y, z) : x + y + z = 5, xy + xz + yz = 8\}.$$

Solución: Observemos en primer lugar que por ser f una función continua y M un conjunto compacto, f tiene un máximo y un mínimo en M.

Por el teorema de los multiplicadores de Lagrange, los posibles puntos de extremo de f en M están entre los puntos críticos de la función

$$F(x, y, z) = xyz + \lambda(x + y + z - 5) + \mu(xy + xz + yz - 8)$$

para ciertos valores de λ y μ. Por tanto, deberán verificar el sistema

$$\left.\begin{array}{r} D_1F(x,y,z) = yz + \lambda + \mu(y+z) = 0 \\ D_2F(x,y,z) = xz + \lambda + \mu(x+z) = 0 \\ D_3F(x,y,z) = xy + \lambda + \mu(x+y) = 0 \\ x+y+z = 5 \\ xy+xz+yz = 8 \end{array}\right|$$

Restando las dos primeras ecuaciones resulta $(y-x)(z+\mu) = 0$, y restando la primera y la tercera se obtiene $(z-x)(y+\mu) = 0$. Estas dos últimas ecuaciones se verifican en cada uno de los cuatro casos siguientes:

1) $y = x, z = x$; 2) $y = x, y = -\mu$; 3) $z = -\mu, z = x$; 4) $z = -\mu, y = -\mu$

En el primer caso resulta el sistema

$$\left.\begin{array}{r} y = x \\ z = x \\ x+y+z = 5 \\ xy+xz+yz = 8 \end{array}\right\}$$

que es incompatible. En el segundo caso resulta el sistema

$$\left.\begin{array}{r} y = x \\ x+y+z = 5 \\ xy+xz+yz = 8 \end{array}\right\}$$

cuyas soluciones son $(2, 2, 1)$ y $(4/3, 4/3, 7/3)$. En el tercer caso resulta el sistema

$$\left.\begin{array}{r} z = x \\ x+y+z = 5 \\ xy+xz+yz = 8 \end{array}\right\}$$

cuyas soluciones son $(2, 1, 2)$ y $(4/3, 7/3, 4/3)$. En el cuarto caso resulta el sistema

$$\left.\begin{array}{r} z = y \\ x+y+z = 5 \\ xy+xz+yz = 8 \end{array}\right\}$$

cuyas soluciones son $(1, 2, 2)$ y $(7/3, 4/3, 4/3)$.

Finalmente, como

$$f(2,2,1) = f(2,1,2) = f(1,2,2) = 4$$

y

$$f\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right) = f\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right) = f\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right) = \frac{112}{27},$$

el máximo de f sobre M es $112/27$ y se alcanza en los puntos $(4/3, 4/3, 7/3)$, $(4/3, 7/3, 4/3)$ y $(7/3, 4/3, 4/3)$, y el mínimo es 4 y se alcanza en los puntos $(2, 2, 1)$, $(2, 1, 2)$ y $(1, 2, 2)$.

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{y}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Calcular $D_{12}f(0,0)$ y $D_{21}f(0,0)$.

2. Sean A un abierto de $\mathbb{R}^2$ y f y g dos funciones de A en $\mathbb{R}$ de clase C^2 que para todo $(x, y) \in A$ verifican

$$D_1 f(x, y) = -D_2 g(x, y), \quad D_2 f(x, y) = D_1 g(x, y).$$

Probar que para todo $(x, y) \in A$ se cumple

$$D_{11} f(x, y) + D_{22} f(x, y) = 0.$$

3. Utilizar la fórmula de Taylor para desarrollar la función

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4$$

en potencias de $x - 1$, $y - 1$, $z - 1$.

4. Hallar el polinomio de Taylor de segundo grado de la función $f(x, y) = \log(1 + xy)$ en el punto $(2, 3)$.

5. Determinar los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

y estudiar si son o no puntos de extremo relativo de f.

6. Hallar los vértices de la elipse

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9.$$

7. Probar que la función $f(x, y) = x^2 + y^2 + x + y$ alcanza un valor máximo y un valor mínimo en el conjunto

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 4, y \leqslant 1\}$$

y determinar estos valores extremos.

8. Determinar los extremos absolutos de la función

$$f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x + y)$$

en el compacto

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant \pi/2, 0 \leqslant y \leqslant \pi/2\}.$$

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Para $x \neq 0$ son

$$D_1 f(x, y) = 2x \operatorname{sen} \frac{y}{x} - y \cos \frac{y}{x} \quad , \quad D_2 f(x, y) = x \cos \frac{y}{x},$$

mientras que

$$D_1 f(0, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, y) - f(0, y)}{h} = \lim_{h \to 0} h \operatorname{sen} \frac{y}{h} = 0$$

y

$$D_2 f(0, y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0, y + k) - f(0, y)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{0}{k} = 0.$$

Por consiguiente,

$$D_{12} f(0, 0) = \lim_{k \to 0} \frac{D_1 f(0, k) - D_1 f(0, 0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{0}{k} = 0$$

y

$$D_{21} f(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{D_2 f(h, 0) - D_2 f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1.$$

2. Derivando las igualdades del enunciado se obtienen

$$D_{11} f(x, y) = -D_{21} g(x, y), \quad D_{22} f(x, y) = D_{12} g(x, y)$$

Pero por la proposición 2.1.2, para todo $(x, y) \in A$ se verifica $D_{12}g(x, y) = D_{21}g(x, y)$, luego

$$D_{11} f(x, y) + D_{22} f(x, y) = 0.$$

3. Pondremos en la fórmula de Taylor $a = (1, 1, 1)$ y $h = (x - 1, y - 1, z - 1)$. Como $f(1, 1, 1) = 0$ y

$$D_1 f(1, 1, 1) = D_2 f(1, 1, 1) = D_3 f(1, 1, 1) = 0,$$

resulta

$$[(x - 1)D_1 + (y - 1)D_2 + (z - 1)D_3] f(1, 1, 1) = 0.$$

Además, como

$$D_{11} f(1, 1, 1) = 2, \quad D_{12} f(1, 1, 1) = 2, \quad D_{13} f(1, 1, 1) = 0,$$
$$D_{22} f(1, 1, 1) = 2, \quad D_{23} f(1, 1, 1) = -1, \quad D_{33} f(1, 1, 1) = 2,$$

se obtiene

$$\frac{1}{2}[(x - 1)D_1 + (y - 1)D_2 + (z - 1)D_3]^2 f(1, 1, 1) =$$
$$= (x - 1)^2 + 2(x - 1)(y - 1) + (y - 1)^2 - (y - 1)(z - 1) + (z - 1)^2,$$

y como las derivadas parciales de orden superior a 2 son nulas,

$$f(x, y, z) = (x - 1)^2 + 2(x - 1)(y - 1) + (y - 1)^2 - (y - 1)(z - 1) + (z - 1)^2.$$

4. Como

$$f(2, 3) = \log 7, \quad D_1 f(2, 3) = \frac{3}{7}, \quad D_2 f(2, 3) = \frac{2}{7},$$

$$D_{11} f(2, 3) = -\frac{9}{49}, \quad D_{12} f(2, 3) = \frac{1}{49}, \quad D_{22} f(2, 3) = -\frac{4}{49},$$

se tiene

$$f(2, 3) + [(x - 2)D_1 + (y - 3)D_2] f(2, 3) + \frac{1}{2}[x - 2)D_1 + (y - 3)D_2]^2 f(2, 3) =$$
$$= \log 7 + \frac{3}{7}(x - 2) + \frac{2}{7}(y - 3) - \frac{9}{98}(x - 2)^2 + \frac{1}{49}(x - 2)(y - 3) - \frac{2}{49}(y - 3)^2.$$

5. Del sistema

$$\left.\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ D_2 f(x, y) &= 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{aligned}\right\}$$

se deduce fácilmente $y = -x$, y de la primera ecuación se obtiene $4x(x^2 - 2) = 0$, luego $x = 0$, $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$, y los puntos críticos de f son $(0, 0)$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Como

$$\begin{vmatrix} D_{11}f(0,0) & D_{12}f(0,0) \\ D_{21}f(0,0) & D_{22}f(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

$(0,0)$ es un punto dudoso. Pero $f(0,0) = 0$ y como

$$f(x,0) = x^4 - 2x^2 = x^2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}),$$

para $0 < x < \sqrt{2}$ es $f(x,0) < 0$ mientras que para $-\sqrt{2} < x < 0$ es $f(x,0) > 0$, luego $(0,0)$ no es un punto de extremo relativo de f.

Por otra parte, para $a = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y para $a = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ se tiene

$$\begin{vmatrix} D_{11}f(a) & D_{12}f(a) \\ D_{21}f(a) & D_{22}f(a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = 384 > 0$$

y $D_{11}f(a) = 20) > 0$, luego f tiene mínimos relativos en $a = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y en $a = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

6. La ecuación de la elipse no se altera cuando se cambian simultáneamente x por $-x$ e y por $-y$, luego el origen de coordenadas es el centro de simetría de la elipse y sus vértices son, pues, los puntos de la elipse cuyas distancias al origen son máxima y mínima. Pero el cuadrado de la distancia del origen de coordenadas a un punto (x, y) es $x^2 + y^2$, y si el punto (x, y) está en la elipse, verificará su ecuación. Se trata, pues, de hallar los puntos de extremo de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ sobre el compacto

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9 = 0\right\}.$$

Por el teorema de los multiplicadores de Lagrange, los posibles puntos de extremo de f en M son puntos críticos de la función

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9)$$

para un cierto $\lambda \in \mathbb{R}$ y, por tanto, verificarán el sistema

$$\left.\begin{aligned} D_1F(x, y) &= 2x + 10\lambda x + 8\lambda y = 0 \\ D_2F(x, y) &= 2y + 8\lambda x + 10\lambda y = 0 \\ 5x^2 + 8xy &+ 5y^2 - 9 = 0 \end{aligned}\right\}$$

De las dos primeras ecuaciones se obtiene $y^2 = x^2$ y, por tanto, $y = \pm x$. Para $y = x$, de la tercera ecuación resulta $18x^2 = 9$, luego $x = \pm 1/\sqrt{2}$ y dos de los vértices son los puntos $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ y $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, y para $y = -x$ se obtiene $2x^2 = 9$, luego $x = \pm 3/\sqrt{2}$, y los otros dos vértices de la elipse son los puntos $(3/\sqrt{2}, -3/\sqrt{2})$ y $(-3/\sqrt{2}, 3/\sqrt{2})$.

7. La función f es continua. Además, el conjunto K es cerrado, pues si g_1 y g_2 son las funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ definidas respectivamente por $g_1(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ y $g_2(x, y) = y - 1$, K es la intersección de los dos conjuntos

$$K_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g_1(x, y) \leqslant 0\} = g_1^{-1}((-\infty, 0])$$

y

$$K_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g_2(x, y) \leqslant 0\} = g_2^{-1}((-\infty, 0])$$

que son cerrados por ser imágenes inversas del cerrado $(-\infty, 0]$ de $\mathbb{R}$ por las funciones continuas g_1 y g_2. El conjunto K es también acotado, pues está contenido en la bola de centro $(0,0)$ y radio 2. Por tanto, K es compacto y la función continua f alcanza un máximo y un mínimo en K (teorema de Weierstrass).

Sea (a, b) un punto de K en el que f alcanza uno de sus valores extremos. Si (a, b) está en el interior de K (que es abierto), entonces (a, b) es un punto crítico de f (2.3.1). Si (a, b) no está en el interior de K, entonces (a, b) está en la frontera de K, que es la unión de los conjuntos

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4,\ y < 1\}, \\ A_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4,\ y = 1\}, \\ A_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4,\ y = 1\}. \end{aligned}$$

Bastará, pues, determinar los puntos críticos de f interiores a K y los puntos de extremo de f en A_1, A_2 y A_3 y hallar los valores de f en cada uno de los puntos obtenidos. El mayor de todos ellos será el máximo de f en K y el menor, el mínimo.

El sistema

$$\left.\begin{aligned} D_1f(x, y) &= 2x + 1 = 0 \\ D_2f(x, y) &= 2y + 1 = 0 \end{aligned}\right\}$$

nos da $(-1/2, -1/2)$ como único punto crítico de f y este punto es interior a K.

Por el teorema de los multiplicadores de Lagrange, los posibles puntos de extremo de f en A_1 son puntos críticos de la función

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

para un $\lambda \in \mathbb{R}$ y verificarán, pues, el sistema

$$\left.\begin{aligned} D_1F(x, y) &= 2x + 1 + 2\lambda x = 0 \\ D_2F(x, y) &= 2y + 1 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

De las dos primeras ecuaciones resulta $y = x$, y de la tercera se obtiene $2x^2 - 4 = 0$, luego $x = \pm\sqrt{2}$ y las soluciones del sistema son $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Pero como $\sqrt{2} > 1$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \notin A_1$.

De manera análoga, los posibles puntos de extremo de f en A_2 son puntos críticos de la función

$$G(x, y) = f(x, y) + \mu(y - 1)$$

para un $\mu \in \mathbb{R}$ y verificarán, pues, el sistema

$$\left.\begin{aligned} D_1G(x,y) &= 2x + 1 = 0 \\ D_2G(x, y) &= 2y + 1 + \mu = 0 \\ y - 1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

La única solución de este sistema es $(-1/2, 1)$ que evidentemente pertenece a A_2.

Finalmente, el conjunto A_3 consta únicamente de los puntos $(\sqrt{3}, 1)$ y $(-\sqrt{3}, 1)$.

Por consiguiente, los posibles puntos de extremo de f en K son

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), \quad \left(-\frac{1}{2}, 1\right), \quad (\sqrt{3}, 1) \quad \text{y} \quad (-\sqrt{3}, 1),$$

y como

$$f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}, \quad f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 4 - 2\sqrt{2}, \quad f\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{7}{4},$$
$$f(\sqrt{3}, 1) = 5 + \sqrt{3}, \quad f(-\sqrt{3}, 1) = 5 - \sqrt{3},$$

el máximo de f en K es $f(\sqrt{3}, 1) = 5 + \sqrt{3}$ y el mínimo, $f(-1/2, -1/2) = -1/2$.

8. Por el teorema de Weierstrass, la función continua f tiene un máximo y un mínimo en el conjunto K. Sea (a, b) un punto de K en el que f alcanza uno de sus valores extremos. Si (a, b) está en el interior de K (que es abierto), entonces (a, b) es un punto crítico de f (2.3.1). Si (a, b) no está en el interior de K, entonces (a, b) está en la frontera de K que es la unión de los cuatro segmentos:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, &&0 \leqslant y \leqslant \pi/2\},\\
A_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \pi/2, &&0 \leqslant y \leqslant \pi/2\},\\
A_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, &&0 \leqslant x \leqslant \pi/2\},\\
A_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \pi/2, &&0 \leqslant x \leqslant \pi/2\}.
\end{aligned}$$

Bastará, pues, determinar los puntos críticos de f interiores a K y los puntos de extremo de f en A_1, A_2, A_3 y A_4 y hallar los valores de f en cada uno de los puntos obtenidos. El mayor de todos ellos será el máximo de f en K y el menor, el mínimo.

Los puntos críticos de f interiores a K son las soluciones del sistema

$$\left.\begin{aligned}
D_1 f(x, y) &= \cos x + \cos(x + y) = 0\\
D_2 f(x, y) &= \cos y + \cos(x + y) = 0
\end{aligned}\right\}$$

que verifican $0 < x < \pi/2$, $0 < y < \pi/2$. Restando las dos ecuaciones se deduce $\cos x = \cos y$, y como x e y están comprendidos entre 0 y $\pi/2$, será $y = x$. Sustituyendo en la primera ecuación resulta $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$, y de esta ecuación de segundo grado en $\cos x$ se obtienen $\cos x = 1/2$ y $\cos x = -1$. Como $0 < x < \pi/2$, no puede ser $\cos x = -1$, luego es $\cos x = 1/2$ y, por tanto, $x = \pi/3$ e $y = \pi/3$, y el único punto crítico de f interior a K es $(\pi/3, \pi/3)$.

Al restringir f a A_1 se obtiene la función $f_1 : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ definida por $f_1(y) = f(0, y) = 2 \operatorname{sen} y$. Como $f_1'(y) = 2\cos y > 0$ para todo $y \in (0, \pi/2)$, f_1 es creciente y alcanza su mínimo en $y = 0$ y su máximo en $y = \pi/2$, luego los puntos de extremo de f en A_1 son $(0, 0)$ y $(0, \pi/2)$.

Al restringir f a A_2 se obtiene la función $f_2 : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ definida por $f_2(y) = f(\pi/2, y) = 1 + \operatorname{sen} y + \cos y$. Como $f_2'(y) = \cos y - \operatorname{sen} y$, es $f_2'(y) = 0$ para $y = \pi/4$ y como $f_2(0) = f_2(\pi/2) = 2$ y $f_2(\pi/4) = 1 + \sqrt{2}$, f_2 alcanza su minimo en los puntos $y = 0$ e $y = \pi/2$ y su máximo en el punto $y = \pi/4$, luego los puntos de extremo de f sobre A_2 son $(\pi/2, 0)$, $(\pi/2, \pi/2)$ y $(\pi/2, \pi/4)$.

De manera análoga se obtienen los puntos de extremo de f en A_3, que son $(0, 0)$ y $(\pi/2, 0)$, y los puntos de extremo de f en A_4, que son $(0, \pi/2)$, $(\pi/2, \pi/2)$ y $(\pi/4, \pi/2)$.

Finalmente, como

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad f(0, 0) = 0, \quad f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 2, \quad f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 2,$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 2, \quad f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) = 1 + \sqrt{2}, \quad f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sqrt{2},$$

el máximo de f en K es $f(\pi/3, \pi/3) = 3\sqrt{3}/2$ y el mínimo es $f(0, 0) = 0$.

Observación: También podriamos haber procedido como en el ejercicio anterior, teniendo en cuenta que la frontera de K es la unión de los conjuntos

$$\begin{aligned}
B_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, 0 < y < \pi/2\}, \\
B_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \pi/2, 0 < y < \pi/2\}, \\
B_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, 0 < x < \pi/2\}, \\
B_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \pi/2, 0 < x < \pi/2\}, \\
B_5 &= \{(0, 0), (0, \pi/2), (\pi/2, \pi/2), (\pi/2, 0)\},
\end{aligned}$$

y que por el teorema de los multiplicadores de Lagrange, los posibles puntos de extremo de f en cada uno de los conjuntos B_1, B_2, B_3 y B_4 son, respectivamente, puntos criticos de las funciones

$$f(x, y) + \lambda x, \quad f(x, y) + \mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \quad f(x, y) + \nu y, \quad f(x, y) + \xi\left(y - \frac{\pi}{2}\right)$$

y serán, por tanto, las soluciones de cada uno de los sistemas

$$\left.\begin{aligned}
\cos x + \cos(x + y) + \lambda &= 0 \\
\cos y + \cos(x + y) &= 0 \\
x &= 0
\end{aligned}\right\} \qquad
\left.\begin{aligned}
\cos x + \cos(x + y) + \mu &= 0 \\
\cos y + \cos(x + y) &= 0 \\
x - \pi/2 &= 0
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos x + \cos(x + y) &= 0 \\
\cos x + \cos(x + y) + \nu &= 0 \\
y &= 0
\end{aligned}\right\} \qquad
\left.\begin{aligned}
\cos x + \cos(x + y) &= 0 \\
\cos x + \cos(x + y) + \xi &= 0 \\
y - \pi/2 &= 0
\end{aligned}\right\}$$

pertenecientes, respectivamente, a B_1, B_2, B_3 y B_4. La solución del primer sistema es $x = 0$, $y = \pi/2$, pero el punto $(0, \pi/2)$ no pertenece a B_1. El segundo sistema da $x = \pi/2$, $y = \pi/4$. El tercer sistema da $x = \pi/2$, $y = 0$, pero el punto $(\pi/2, 0)$ no pertenece a B_3. El cuarto sistema da $x = \pi/4$, $y = \pi/2$. Con esto, los posibles puntos de extremo de f en la frontera de K son $(\pi/2, \pi/4)$, $(\pi/4, \pi/2)$ y los cuatro puntos de B_5.

TEMA III

Funciones inversas e implícitas

Esquema/Resumen

3.1. *El teorema de la función inversa*

3.2. *El teorema de la función implícita*

3.1. EL TEOREMA DE LA FUNCION INVERSA

3.1.1. Sea $f = (f_1, ..., f_n)$ una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Si f es inyectiva, su función inversa f^{-1} podrá determinarse explícitamente si se sabe resolver el sistema

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, ..., x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = f_n(x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

y expresar las x_i en función de las y_j. Pero esto suele ser difícil.

Sería deseable encontrar un criterio que permitiera asegurar, por una parte, la existencia de f^{-1} y por otra, que f^{-1} hereda las buenas propiedades de la función f (continuidad, diferenciabilidad, etc.).

Cuando la función f es lineal, el sistema anterior es un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

y f será inversible si y sólo si la matriz (a_{ij}) lo es, lo que ocurre cuando y sólo cuando el determinante de (a_{ij}) es distinto de cero.

Sea ahora f una función diferenciable en una bola de centro a. Entonces la función $F(x) = f(a) + Df(a)(x - a)$ es una aproximación de la función f en el sentido de que

$$\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - F(x)\|}{\|x - a\|} = 0,$$

y como $Df(a)$ es lineal y la matriz que la define es

$$f'(a) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & \cdots & D_n f_1(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ D_1 f_n(a) & \cdots & D_n f_n(a) \end{pmatrix},$$

parece lógico pensar que f será inversible (al menos en una bola de centro a) si

$$\det f'(a) \neq 0.$$

Y así es, en efecto:

Proposición (Teorema de la función inversa): *Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^q en A, $a \in A$ y supongamos que* $\det f'(a) \neq 0$. *Entonces existen un abierto V que contiene a y un abierto W que contiene $f(a)$ tales que* $\det f'(x) \neq 0$ *para todo $x \in V$, $f(V) = W$, la restricción de f a V tiene una inversa $f^{-1} : W \to V$ de clase C^q y para cada $y \in W$ se verifica*

$$(f^{-1})'(y) = [f'(f^{-1}(y))]^{-1}.$$

La demostración de esta proposición puede verse, por ejemplo, en el libro de Spivak, *Cálculo en variedades*, pág. 33, o en el de Fleming, *Functions of several variables*, pág. 111. Esta demostración consiste en hacer rigurosa la idea que apuntábamos sobre la aproximación local de f por su diferencial.

3.1.2. Obsérvese que la fórmula

$$(f^{-1})'(y) = [f'(f^{-1}(y))]^{-1}$$

es inmediata una vez probadas la existencia y la diferenciabilidad de f^{-1}, pues

$$f \circ f^{-1} = I_W \text{ (identidad en } W) \quad \text{y} \quad f^{-1} \circ f = I_V \text{ (identidad en } V)$$

y si $y = f(x)$, aplicando la regla de la cadena se obtiene

$$f'(x) \cdot (f^{-1})'(y) = I \quad \text{y} \quad (f^{-1})'(y) \cdot f'(x) = I$$

donde I designa la matriz unidad de orden $n \times n$, luego la matriz $f'(x)$ es inversible y

$$[f'(x)]^{-1} = (f^{-1})'(y).$$

3.1.3. El teorema de la función inversa es esencialmente local. Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ puede verificar todas las hipótesis del teorema en cualquier punto $a \in \mathbb{R}^n$, lo que garantiza la existencia de una inversa local diferenciable para cada $a \in \mathbb{R}^n$ y no ser inyectiva, con lo que no tendrá inversa global.

Ejemplo: La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = (e^x \cos y,\ e^x \operatorname{sen} y)$$

es evidentemente de clase C^∞ en $\mathbb{R}^2$ y

$$\begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \operatorname{sen} y \\ e^x \operatorname{sen} y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} > 0$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, luego f verifica las hipótesis del teorema de la función inversa en todo punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Por consiguiente, para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ existen un abierto V que contiene (x, y) y un abierto W que contiene $f(x, y)$ tales que $f(V) = W$ y la restricción de f a V tiene una inversa de clase C^∞. Con otras palabras, f tiene una inversa local de clase C^∞ en un entorno de cada punto. Sin embargo, f no tiene inversa global, pues $f(x, y) = f(x, y + 2\pi)$ y, por tanto, f no es inyectiva en $\mathbb{R}^2$.

3.2. EL TEOREMA DE LA FUNCION IMPLICITA

3.2.1. Sean $f_1, ..., f_m$ m funciones de $\mathbb{R}^{n+m}$ en $\mathbb{R}$. Puede suceder que para cada $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ el sistema

$$\begin{cases} f_1(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = 0 \end{cases}$$

admita una única solución $(y_1, ..., y_m)$. En este caso, el sistema define a $y_1, ..., y_m$ como funciones de $x_1, ..., x_n$:

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, ..., x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = g_m(x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

Estas funciones se llaman *funciones implícitas* definidas por el sistema anterior, y están caracterizadas por verificar

$$\begin{cases} f_1(x_1, ..., x_n, g_1(x_1, ..., x_n), ..., g_m(x_1, ..., x_n)) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m(x_1, ..., x_n, g_1(x_1, ..., x_n), ..., g_m(x_1, ..., x_n)) = 0 \end{cases}$$

Con otras palabras, el conjunto de puntos $(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) \in \mathbb{R}^{n+m}$ tales que

$$\begin{cases} f_1(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = 0 \end{cases}$$

coincide con el conjunto de puntos $(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) \in \mathbb{R}^{n+m}$ tales que

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, ..., x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = g_m(x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

Esta situación que acabamos de plantear se puede expresar de manera más breve: si para cada $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ y cada $y = (y_1, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$ designamos por (x, y) el punto de $\mathbb{R}^{n+m}$ cuyas n primeras coordenadas son las de x y las m últimas las de y, y si llamamos f a la función de $\mathbb{R}^{n+m}$ en $\mathbb{R}^m$ que tiene como componentes las funciones

$f_1, \ldots, f_m$, y g a la función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ que tiene como componentes las funciones $g_1, \ldots, g_m$. Con estas notaciones abreviadas, el sistema inicial se escribe como una sola ecuación:

$$f(x, y) = 0,$$

y si para cada $x \in \mathbb{R}^n$ esta ecuación admite una única solución $y \in \mathbb{R}^m$, dicha ecuación define a y como una función $y = g(x)$, que se llama función implícita definida por ella y está caracterizada por verificar

$$f(x, g(x)) = 0,$$

o lo que es igual,

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} : f(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} : y = g(x)\}.$$

Sin embargo, esta situación no suele producirse. Puede ser que para algunos $x \in \mathbb{R}^n$ la ecuación $f(x, y) = 0$ no tenga solución en y y que para otros tenga varias soluciones.

Cuando la función $f = (f_1, \ldots, f_m)$ es lineal, el sistema

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \end{cases}$$

es un sistema homogéneo de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + a_{1n+1}y_1 + \cdots + a_{1n+m}y_m = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + a_{mn+1}y_1 + \cdots + a_{mn+m}y_m = 0 \end{cases}$$

del que si

$$\begin{vmatrix} a_{1n+1} & \cdots & a_{1n+m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{mn+1} & \cdots & a_{mn+m} \end{vmatrix} \neq 0,$$

se podrán despejar las variables $y_1, \ldots, y_m$ en función de las $x_1, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}x_1 + \cdots + b_{1n}x_n = g_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = b_{m1}x_1 + \cdots + b_{mn}x_n = g_m(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

Sean ahora $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ y $f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en una bola de centro (a, b) y tal que $f(a, b) = 0$. Entonces f se puede aproximar por la función $F(x, y) = Df(a, b)(x - a, x - b)$ y como $Df(a, b)$ es lineal y la matriz que la define es

$$\begin{pmatrix} D_1f_1(a, b) & \cdots & D_nf_1(a, b) D_{n+1}f_1(a, b) & \cdots & D_{n+m}f_1(a, b) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_1f_m(a, b) & \cdots & D_nf_m(a, b) D_{n+1}f_m(a, b) & \cdots & D_{n+m}f_m(a, b) \end{pmatrix}$$

parece lógico pensar que el sistema

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \end{cases}$$

definirá a $y_1, \ldots, y_m$ como funciones de $x_1, \ldots, x_n$ (al menos en una bola de centro (a, b)) si

$$\begin{vmatrix} D_{n+1}f_1(a, b) & \cdots & D_{n+m}f_1(a, b) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{n+1}f_m(a, b) & \cdots & D_{n+m}f_m(a, b) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Y así es, en efecto:

Proposición (Teorema de la función implícita): *Sean A un abierto de $\mathbb{R}^{n+m}$, $(a, b) \in A$, $f : A \to \mathbb{R}^m$ una función de clase C^q en A y supongamos que el determinante de la matriz $(D_{n+i}f_j(a, b))$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$, es distinto de cero. Entonces existen un abierto $V \subset A$ que contiene (a, b), un abierto $W \subset \mathbb{R}^n$ que contiene a y una función $g : W \to \mathbb{R}^m$ de clase C^q en W tales que el determinante de la matriz $(D_{n+i}f_j(x, y))$ es distinto de cero para todo $(x, y) \in V$ y*

$$\{(x, y) \in V : f(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in V : x \in W, y = g(x)\}.$$

La demostración de esta proposición puede verse, por ejemplo, en Spivak, *Cálculo en variedades*, pág. 39, o en Fleming, *Functions of several variables*, pág. 117.

3.2.2. En las condiciones del teorema de la función implícita, si $f = (f_1, \ldots, f_m)$ y $g = (g_1, \ldots, g_m)$, las derivadas parciales de las g_i pueden calcularse derivando miembro a miembro las ecuaciones del sistema

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n, g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n, g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)) = 0 \end{cases}$$

Así, derivando respecto de x_j se obtiene el sistema

$$\begin{cases} D_jf_1(x, g(x)) + \sum_{i=1}^{n} D_{n+i}f_1(x, g(x))D_jg_i(x) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ D_jf_m(x, g(x)) + \sum_{i=1}^{n} D_{n+i}f_m(x, g(x))D_jg_i(x) = 0 \end{cases}$$

que es un sistema de m ecuaciones lineales en las incógnitas $D_jg_1(x), \ldots, D_jg_m(x)$, que puede resolverse por la regla de Cramer, pues el determinante de la matriz $(D_{n+i}f_j(x, g(x)))$ es distinto de cero.

Ejemplo: La función $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y, z, t) = (x^2 + y^2 - 2zt, x^3 - y^3 + z^3 - t^3)$$

es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^4$ y verifica $f(1, 1, 1, 1) = (0, 0)$ y

$$\begin{vmatrix} D_3f_1(1,1,1,1) & D_4f_1(1,1,1,1) \\ D_3f_2(1,1,1,1) & D_4f_2(1,1,1,1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$$

Por el teorema de la función implícita, existen un abierto $V \subset \mathbb{R}^4$ que contiene $(1, 1, 1, 1)$, un abierto $W \subset \mathbb{R}^2$ que contiene $(1, 1)$ y una función $g = (g_1, g_2) : W \to \mathbb{R}^2$ de clase C^∞ tales que el conjunto

$$X = \{(x, y, z, t) \in V : f(x, y, z, t) = (0, 0)\}$$

coincide con el conjunto

$$Y = \{(x, y, z, t) \in V : (x, y) \in W, z = g_1(x, y), t = g_2(x, y)\}.$$

En particular, como $(1, 1, 1, 1) \in X$ se tiene $g_1(1, 1) = 1$ y $g_2(1, 1) = 1$.

Derivando miembro a miembro, primero respecto de x y después respecto de y, las ecuaciones del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2g_1(x, y)g_2(x, y) = 0 \\ x^3 - y^3 + [g_1(x, y)]^3 - [g_2(x, y)]^3 = 0 \end{cases}$$

resultan los sistemas

$$(a) \quad \begin{cases} 2x - 2g_2(x, y)D_1g_1(x, y) - 2g_1(x, y)D_1g_2(x, y) = 0 \\ 3x^2 + 3[g_1(x, y)]^2 D_1g_1(x, y) - 3[g_2(x, y)]^2 D_1g_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

y

$$(b) \quad \begin{cases} 2y - 2g_2(x, y)D_2g_1(x, y) - 2g_1(x, y)D_2g_2(x, y) = 0 \\ -3y^2 + 3[g_1(x, y)]^2 D_2g_1(x, y) - 3[g_2(x, y)]^2 D_2g_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

que, para $(x, y) = (1, 1)$, se convierten en

$$\begin{cases} 2 - 2D_1g_1(1, 1) - 2D_1g_2(1, 1) = 0 \\ 3 + 3D_1g_1(1, 1) - 3D_1g_2(1, 1) = 0 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} 2 - 2D_2g_1(1, 1) - 2D_2g_2(1, 1) = 0 \\ -3 + 3D_2g_1(1, 1) - 3D_2g_2(1, 1) = 0 \end{cases}$$

de los que se obtienen

$$\begin{aligned} D_1g_1(1, 1) &= 0, \quad D_1g_2(1, 1) = 1, \\ D_2g_1(1, 1) &= 1, \quad D_2g_2(1, 1) = 0. \end{aligned}$$

Si se quisieran obtener las derivadas parciales de segundo orden de g_1 y de g_2, habría que derivar respecto de x y de y las ecuaciones de los sistemas (a) y (b).

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Probar que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

tiene inversa local de clase C^∞ en cada punto $(x, y) \neq (0, 0)$.

2. Demostrar que la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y, z) = (xz, xy, yz)$$

tiene función inversa de clase C^∞ en un entorno de $(1, 1, 1)$ y calcular $(f^{-1})'(1, 1, 1)$.

3. Probar que la ecuación

$$x + y + z + \cos xyz = 0$$

define a z como función implícita de clase C^∞ $z = g(x, y)$ en un entorno del punto $(0, 0, -1)$ y calcular $D_1g(0, 0)$ y $D_2g(0, 0)$.

4. Demostrar que el sistema

$$\begin{cases} x + y + z + u = 2 \\ x + 2y + z^3 + u^4 = 2 \end{cases}$$

define a z y a u como funciones implícitas de clase C^∞ $z = g_1(x, y)$, $u = g_2(x, y)$ en un entorno de $(0, 0, 1, 1)$ y que la función $g(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$ tiene inversa de clase C^∞ en un entorno de $(0, 0)$.

5. Probar que el sistema

$$\begin{cases} y^2 z + e^{xz} + \cos xy = 3 \\ yz^2 + e^{xy} + \operatorname{sen} xz = 2 \end{cases}$$

define a y y a z como funciones implícitas de clase C^∞ $y = g_1(x)$, $z = g_2(x)$ en un entorno de $(0, 1, 1)$ y que la función $h(x) = x + g_1(x) + g_2(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = 0$.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. La función f es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^2$ puesto que sus componentes

$$f_1(x, y) = x^2 - y^2, \quad f_2(x, y) = 2xy$$

tienen derivadas parciales de cualquier orden continuas en todo punto. Además, para $(x, y) \neq (0, 0)$ es

$$\det f'(x, y) = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 2(x^2 + y^2) > 0$$

y por el teorema de la función inversa, f tiene inversa local de clase C^∞ en cada punto $(x, y) \neq (0, 0)$.

2. La función f es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^3$ puesto que sus componentes

$$f_1(x, y, z) = xz, \quad f_2(x, y, z) = xy, \quad f_3(x, y, z) = yz$$

tienen derivadas parciales de cualquier orden continuas en todo punto. Además,

$$\det f'(x, y, z) = \begin{vmatrix} z & 0 & x \\ y & x & 0 \\ 0 & z & y \end{vmatrix} = 2xyz$$

y, por tanto, $\det f'(1, 1, 1) = 2 \neq 0$ y por el teorema de la función inversa, existen un abierto V que contiene $(1, 1, 1)$ y un abierto W que contiene $f(1, 1, 1) = (1, 1, 1)$ tales que $\det f'(x, y, z) \neq 0$ para todo $(x, y, z) \in V$, $f(V) = W$, la restricción de f a V tiene una inversa $f^{-1} : W \to V$ de clase C^∞ y para cada $(\xi, \eta, \zeta) \in W$ se verifica

$$(f^{-1})'(\xi, \eta, \zeta) = [f'(f^{-1}(\xi, \eta, \zeta))]^{-1}.$$

En particular, para $(\xi, \eta, \zeta) = f(1,1,1) = (1,1,1)$, se tiene $f^{-1}(\xi, \eta, \zeta) = (1,1,1)$ y, por tanto,

$$(f^{-1})'(1,1,1) = [f'(1,1,1)]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

3. La función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y, z) = x + y + z + \cos xyz$$

es evidentemente de clase C^∞ en $\mathbb{R}^3$ y verifica $f(0,0,-1) = 0$ y $D_3 f(0,0,-1) = 1 \neq 0$ y por el teorema de la función implícita, existen un abierto $V \subset \mathbb{R}^3$ que contiene $(0,0,-1)$, un abierto $W \subset \mathbb{R}^2$ que contiene $(0,0)$ y una función $g : W \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ tales que el conjunto

$$X = \{(x, y, z) \in V : f(x, y, z) = 0\}$$

coincide con el conjunto

$$Y = \{(x, y, z) \in V : (x, y) \in W,\ z = g(x, y)\}.$$

En particular, como $(0,0,-1)$ pertenece a X, también pertenece a Y y, por tanto, $g(0,0) = -1$.

Derivando primero respecto de x y después respecto de y la ecuación

$$x + y + g(x, y) + \cos xyg(x, y) = 0$$

resulta el sistema

$$\begin{cases} 1 + D_1 g(x, y) - y[g(x, y) + xD_1 g(x, y)] \operatorname{sen} xyg(x, y) = 0 \\ 1 + D_2 g(x, y) - x[g(x, y) + yD_2 g(x, y)] \operatorname{sen} xyg(x, y) = 0 \end{cases}$$

y haciendo ahora $x = y = 0$ se obtiene

$$\begin{cases} 1 + D_1 g(0,0) = 0 \\ 1 + D_2 g(0,0) = 0 \end{cases}$$

luego

$$D_1 g(0,0) = -1 \quad \text{y} \quad D_2 g(0,0) = -1.$$

4. La función $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y, z, u) = (x + y + z + u - 2, x + 2y + z^3 + u^4 - 2)$$

es evidentemente de clase C^∞ en $\mathbb{R}^4$ y verifica $f(0,0,1,1) = (0,0)$ y

$$\begin{vmatrix} D_3 f_1(0,0,1,1) & D_4 f_1(0,0,1,1) \\ D_3 f_2(0,0,1,1) & D_4 f_2(0,0,1,1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

y por el teorema de la función implícita, existen un abierto $V \subset \mathbb{R}^4$ que contiene $(0,0,1,1)$, un abierto $W \subset \mathbb{R}^2$ que contiene $(0,0)$ y una función $g = (g_1, g_2) : W \to \mathbb{R}^2$ de clase C^∞ tales que el conjunto

$$X = \{(x, y, z, u) \in V : f(x, y, z, u) = (0,0)\}$$

coincide con el conjunto

$$Y = \{(x, y, z, u) \in V : (x, y) \in W, z = g_1(x, y), u = g_2(x, y)\}.$$

En particular, como $(0, 0, 1, 1)$ pertenece a X, también pertenece a Y y, por tanto, $g_1(0,0) = 1$ y $g_2(0,0) = 1$.

Derivando primero respecto de x y después respecto de y las dos ecuaciones del sistema

$$\begin{cases} x + y + g_1(x, y) + g_2(x,y) = 2 \\ x + 2y + [g_1(x, y)]^3 + [g_2(x, y)]^4 = 2 \end{cases}$$

resultan los sistemas

$$\begin{cases} 1 + D_1g_1(x, y) + D_1g_2(x, y) = 0 \\ 1 + 3[g_1(x, y)]^2 D_1g_1(x, y) + 4[g_2(x, y)]^3 D_1g_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} 1 + D_2g_1(x, y) + D_2g_2(x, y) = 0 \\ 2 + 3[g_1(x, y)]^2 D_2g_1(x, y) + 4[g_2(x, y)]^3 D_2g_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

y haciendo en estos últimos $x = y = 0$ se obtienen los sistemas

$$\begin{cases} 1 + D_1g_1(0, 0) + D_1g_2(0, 0) = 0 \\ 1 + 3D_1g_1(0, 0) + 4D_1g_2(0, 0) = 0 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} 1 + D_2g_1(0, 0) + D_2g_2(0, 0) = 0 \\ 2 + 3D_2g_1(0, 0) + 4D_2g_2(0, 0) = 0 \end{cases}$$

de los que se deducen

$$D_1g_1(0, 0) = -3, \quad D_1g_2(0, 0) = 2, \quad D_2g_1(0, 0) = -2, \quad D_2g_2(0, 0) = 1.$$

Por consiguiente,

$$\det g'(0, 0) = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

y por el teorema de la función inversa, la función $g = (g_1, g_2)$ tiene inversa de clase C^∞ en un entorno de $(0, 0)$.

5. La función $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y, z) = (y^2 z + e^{xz} + \cos xy - 3, yz^2 + e^{xy} + \operatorname{sen} xz - 2)$$

es evidentemente de clase C^∞ en $\mathbb{R}^3$ y verifica $f(0, 1, 1) = (0, 0)$ y

$$\begin{vmatrix} D_2 f_1(0,1,1) & D_3 f_1(0,1,1) \\ D_2 f_2(0,1,1) & D_3 f_2(0,1,1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

y por el teorema de la función implícita, existen un abierto $V \subset \mathbb{R}^3$ que contiene $(0, 1, 1)$, un abierto $W \subset \mathbb{R}$ que contiene 0 y una función $g = (g_1, g_2) : W \to \mathbb{R}^2$ de clase C^∞ tales que el conjunto

$$X = \{(x, y, z) \in V : f(x, y, z) = (0, 0)\}$$

coincide con el conjunto

$$Y = \{(x, y, z) \in V : x \in W, y = g_1(x), z = g_2(x)\}.$$

En particular, como $(0, 1, 1)$ pertenece a X, también pertenece a Y y, por tanto, $g_1(0) = 1$ y $g_2(0) = 1$.

Derivando dos veces las ecuaciones del sistema

$$\begin{cases} [g_1(x)]^2 g_2(x) + e^{xg_2(x)} + \cos xg_1(x) - 3 = 0 \\ g_1(x)[g_2(x)]^2 + e^{xg_1(x)} + \operatorname{sen} xg_2(x) - 2 = 0 \end{cases}$$

y haciendo después $x = 0$ resultan los sistemas

$$\begin{cases} 2g_1'(0) + g_2'(0) + 1 = 0 \\ g_1'(0) + 2g_2'(0) + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 2g_1''(0) + g_2''(0) - 2 = 0 \\ g_1''(0) + 2g_2''(0) + 1 = 0 \end{cases}$$

de los que se obtienen

$$g_1'(0) = 0, \quad g_2'(0) = -1, \quad g_1''(0) = \frac{5}{3}, \quad g_2''(0) = -\frac{4}{3}.$$

Por consiguiente,

$$h'(0) = 1 + g_1'(0) + g_2'(0) = 0 \quad \text{y} \quad h''(0) = g_1''(0) + g_2''(0) = \frac{1}{3} > 0$$

luego la función $h : W \to \mathbb{R}$ tiene efectivamente un mínimo relativo en $x = 0$.

TEMA IV

Integrales múltiples

Esquema/Resumen

4.1. *Integral doble de una función acotada en un rectángulo*
4.2. *Contenido cero y medida cero*
4.3. *Integración sobre conjuntos acotados. Area de un conjunto plano*
4.4. *Cambio de variables*
4.5. *Integral múltiple*
4.6. *Aplicaciones de las integrales múltiples a la mecánica*

4.1. INTEGRAL DOBLE DE UNA FUNCION ACOTADA EN UN RECTANGULO

4.1.1. El rectángulo cerrado de lados $[a, b]$ y $[c, d]$ es, por definición, el conjunto

$$A = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}.$$

El área $a(A)$ del rectángulo A es el producto de las longitudes de sus lados:

$$a(A) = (b - a)(d - c).$$

Sean $P_1 = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ y $P_2 = \{y_0, y_1, ..., y_m\}$ dos particiones arbitrarias de los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$, respectivamente. Por definición, el conjunto

$$P = P_1 \times P_2 = \{(x_0, y_0), ..., (x_i, y_j), ..., (x_n, y_m)\}$$

es una partición del rectángulo $A = [a, b] \times [c, d]$. Esta partición consta de $(n + 1)(m + 1)$ puntos y descompone al rectángulo A en nm subrectángulos

$$A_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad 1 \leqslant j \leqslant m,$$

que se llaman subrectángulos de la partición.

Dadas dos particiones $P = P_1 \times P_2$ y $Q = Q_1 \times Q_2$ de A, se dice que P es más fina que Q cuando P_1 es más fina que Q_1 y P_2 es más fina que Q_2. Si $P = P_1 \times P_2$ y $Q = Q_1 \times Q_2$ son dos particiones de A, existe una partición R de A más fina que ambas. (Basta tomar $R = (P_1 \cup Q_1) \times (P_2 \cup Q_2)$.)

Sean $A = [a, b] \times [c, d], f : A \to \mathbb{R}$ una función acotada y P una partición de A. Para cada subrectángulo A_{ij} de la partición sean

$$m_{ij} = \inf\{f(x, y) : (x, y) \in A_{ij}\} \quad \text{y} \quad M_{ij} = \sup\{f(x, y) : (x, y) \in A_{ij}\}$$

y sea $a(A_{ij})$ el área de A_{ij}. Los números reales

$$L(f, P) = \sum_{i,j} m_{ij} a(A_{ij}) \quad \text{y} \quad U(f, P) = \sum_{i,j} M_{ij} a(A_{ij})$$

se llaman, respectivamente, *suma inferior* y *suma superior* de la función f respecto de la partición P.

Proposición: *Sean $A = [a, b] \times [c, d]$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función acotada. Se verifican las siguientes propiedades:*

a) *$L(f, P) \leqslant U(f, P)$ para toda partición P de A.*

b) *Si P y Q son dos particiones de A tales que P es más fina que Q, entonces*

$$L(f, P) \leqslant L(f, Q) \quad \text{y} \quad U(f, P) \geqslant U(f, Q).$$

c) *$L(f, P) \leqslant U(f, Q)$ para todo par de particiones P y Q de A.*

Demostración: Es análoga a la de la proposición correspondiente para funciones de una variable.

De esta proposición se deduce que el conjunto de las sumas inferiores de una función acotada $f : A \to \mathbb{R}$ está acotado superiormente por cualquier suma superior y que el conjunto de las sumas superiores está acotado inferiormente por cualquier suma inferior. Por tanto, existen el supremo del primero de estos conjuntos y el ínfimo del segundo y se verifica

$$\sup_P L(f, P) \leqslant \inf_P U(f, P).$$

Definición: *Sean $A = [a, b] \times [c, d]$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función acotada. Se dice que f es integrable en A cuando*

$$\sup_P L(f, P) = \inf_P U(f, P).$$

En este caso, el número real $I = \sup_P L(f, P) = \inf_P U(f, P)$ se llama integral de f en A y se designa por $\int_A f$ o por $\int_A f(x, y)\,dx\,dy$.

Observación: Otra notación usual para la integral de f en A es $\iint_A f$ o bien $\iint_A f(x, y)\,dx\,dy$.

Proposición (Condición de integrabilidad de Riemann): *Sean $A = [a, b] \times [c, d]$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces f es integrable en A si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P de A tal que*

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

Demostración: Es análoga a la de la proposición correspondiente para funciones de una variable.

Proposición: *Sean $A = [a, b] \times [c, d]$, f y g dos funciones de A en $\mathbb{R}$ acotadas e integrables en A y λ un número real. Entonces las funciones $f + g$, λf, fg y $|f|$ son también integrables en A y se verifican las siguientes propiedades:*

a) $\displaystyle\int_A (f + g) = \int_A f + \int_A g.$

b) $\displaystyle\int_A \lambda f = \lambda \int_A f.$

c) *Si $f \leqslant g$ en A, entonces* $\displaystyle\int_A f \leqslant \int_A g.$

d) $\displaystyle\left|\int_A f\right| \leqslant \int_A |f|.$

e) *Si el rectángulo A es la unión de otros dos rectángulos A_1 y A_2 cuya intersección es un segmento, entonces:*

$$\int_A f = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f.$$

Demostración: Se procede de manera análoga a como se hizo para funciones de una variable.

4.1.2. Sean $A = [a, b] \times [c, d]$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función acotada e integrable en A. Para cada $x \in [a, b]$ sea $g_x : [c, d] \to \mathbb{R}$ la función definida por $g_x(y) = f(x, y)$ para cada $y \in [c, d]$. Si cada g_x es integrable en $[c, d]$ (lo que ocurre, por ejemplo, cuando f es continua), entonces la función $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$G(x) = \int_c^d g_x = \int_c^d f(x, y)\, dy$$

es continua y, por tanto, integrable en $[a, b]$, y se verifica

$$\int_A f = \int_a^b G = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx.$$

Análogamente, si para cada $y \in [c, d]$, $h_y : [a, b] \to \mathbb{R}$ es la función definida por $h_y(x) = f(x, y)$ para cada $x \in [a, b]$, y cada h_y es integrable en $[a, b]$ (lo cual ocurre también si f es continua), entonces la función $H : [c, d] \to \mathbb{R}$ definida por

$$H(y) = \int_a^b h_y = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

es continua y, por tanto, integrable en $[c, d]$ y se verifica

$$\int_A f = \int_c^d H = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy.$$

Las integrales

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx \quad \text{y} \quad \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy,$$

si existen, se llaman *integrales reiteradas* de la función f en $[a, b] \times [c, d]$. Cuando f es continua, ambas integrales reiteradas existen y la integral de f en $[a, b] \times [c, d]$ puede calcularse por integración reiterada.

Estas propiedades son consecuencia de un resultado más general, que se conoce como *teorema de Fubini*, y que no presupone la continuidad de la función f.

Si f no es continua, no se puede asegurar la integrabilidad en $[c, d]$ de las g_x. Sin embargo, cada g_x es acotada en $[c, d]$ (puesto que f es acotada en A) y, por tanto, existen el supremo de las sumas inferiores y el ínfimo de las sumas superiores de g_x en $[c, d]$. Estos números se llaman *integral inferior* e *integral superior* de la función g_x en $[c, d]$ y se designan, respectivamente, por

$$\underline{\int_c^d} g_x \quad \text{y} \quad \overline{\int_c^d} g_x.$$

Proposición (Teorema de Fubini): *Sean $A = [a, b] \times [c, d]$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función integrable. Para cada $x \in [a, b]$ sea $g_x : [c, d] \to \mathbb{R}$ la función definida por $g_x(y) = f(x, y)$ para cada $y \in [c, d]$ y pongamos*

$$\mathscr{L}(x) = \underline{\int_c^d} g_x \quad \text{y} \quad \mathscr{U}(x) = \overline{\int_c^d} g_x.$$

Entonces las funciones $\mathscr{L}$ y $\mathscr{U}$ son integrables en $[a, b]$ y

$$\int_a^b \mathscr{L} = \int_A f = \int_a^b \mathscr{U}.$$

Demostración: Sean $P_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ y $P_2 = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$ dos particiones arbitrarias de $[a, b]$ y $[c, d]$, respectivamente. Entonces $P = P_1 \times P_2$ es una partición de A en la que cada subrectángulo A_{ij} es de la forma $A_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, y si m_{ij} designa el ínfimo de f en A_{ij}, se tiene

$$\begin{aligned} L(f, P) &= \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{m} m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \right] (x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Para cada $x \in [x_{i-1}, x_i]$ sea m_j el ínfimo de g_x en $[y_{j-1}, y_j]$. Como A_{ij} contiene al conjunto $\{x\} \times [y_{j-1}, y_j]$, se tiene $m_{ij} \leqslant m_j$ y, por tanto,

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leqslant \sum_{j=1}^{m} m_j(y_j - y_{j-1}) \leqslant \mathscr{L}(x)$$

y como esto es cierto para cada $x \in [x_{i-1}, x_i]$,

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leqslant \inf\{\mathscr{L}(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

con lo que

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{m} m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \right](x_i - x_{i-1}) \leqslant L(\mathscr{L}, P_1)$$

es decir,

$$L(f, P) \leqslant L(\mathscr{L}, P_1).$$

Análogamente se prueba que

$$U(f, P) \geqslant U(\mathscr{U}, P_1).$$

Por consiguiente,

$$L(f, P) \leqslant L(\mathscr{L}, P_1) \leqslant U(\mathscr{L}, P_1) \leqslant U(\mathscr{U}, P_1) \leqslant U(f, P)$$

y también

$$L(f, P) \leqslant L(\mathscr{L}, P_1) \leqslant L(\mathscr{U}, P_1) \leqslant U(\mathscr{U}, P_1) \leqslant U(f, P),$$

y como f es integrable en A,

$$\sup_P L(f, P) = \inf_P U(f, P) = \int_A f$$

luego

$$\sup_{P_1} L(\mathscr{L}, P_1) = \inf_{P_1} U(\mathscr{L}, P_1) = \int_A f$$

y

$$\sup_{P_1} L(\mathscr{U}, P_1) = \inf_{P_1} U(\mathscr{U}, P_1) = \int_A f$$

es decir, $\mathscr{L}$ y $\mathscr{U}$ son integrables en $[a, b]$ y

$$\int_a^b \mathscr{L} = \int_A f = \int_a^b \mathscr{U}.$$

Observación: La proposición anterior asegura que si f es integrable en $A = [a, b] \times$ $\times [c, d]$, entonces

$$\int_A f = \int_a^b \left[\underline{\int_c^d} f(x, y)\, dy \right] dx = \int_a^b \left[\overline{\int_c^d} f(x, y)\, dy \right] dx.$$

De manera análoga se prueba que

$$\int_A f = \int_c^d \left[\underline{\int_a^b} f(x, y)\, dx \right] dy = \int_c^d \left[\overline{\int_a^b} f(x, y)\, dx \right] dy.$$

Ejemplo: Calcular la integral

$$I = \int_A \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen}^2 y\, dx\, dy,$$

donde $A = [0, \pi] \times [0, \pi]$.

Solución: Se tiene

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \left[\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen}^2 y\, dy \right] dx \\ &= \int_0^\pi (\operatorname{sen}^2 x) \left(\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 y\, dy \right) dx \\ &= \left(\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 y\, dy \right) \left(\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x\, dx \right) \end{aligned}$$

y como

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2x)\, dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2},$$

resulta

$$I = \frac{\pi^2}{4}.$$

4.2. CONTENIDO CERO Y MEDIDA CERO

Definición: *Se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ tiene contenido cero cuando para cada $\varepsilon > 0$ existe un número finito de rectángulos cerrados $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tales que*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n A_i \quad y \quad \sum_{i=1}^n a(A_i) < \varepsilon.$$

Son fáciles de probar las siguientes propiedades:

a) Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ tiene contenido cero si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número finito de rectángulos abiertos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tales que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n A_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n a(A_i) < \varepsilon.$$

b) Si $A \subset \mathbb{R}^2$ tiene contenido cero y $B \subset A$, entonces B tiene contenido cero.

c) Si $A \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto finito, entonces A tiene contenido cero.

d) Si $A \subset \mathbb{R}^2$ tiene contenido cero, entonces A es acotado.

e) Si $A \subset \mathbb{R}^2$ tiene contenido cero, entonces adh A tiene contenido cero.

Proposición: *Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces su gráfica*

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, y = g(x)\}$$

tiene contenido cero.

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. Como g es uniformemente continua en $[a, b]$, existe un $\delta > 0$ tal que $|g(x) - g(x')| < \varepsilon/(b - a)$ para todo par de puntos x, x' de $[a, b]$ tales que $|x - x'| < \delta$. Sea $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ una partición de $[a, b]$ tal que $\max(t_i - t_{i-1}) < \delta$ y sean M_i y m_i el máximo y el mínimo de g en $[t_{i-1}, t_i]$. Si x_i y x_i' son puntos de $[t_{i-1}, t_i]$ tales que $M_i = g(x_i)$ y $m_i = g(x_i')$, como $|x_i - x_i'| \leqslant t_i - t_{i-1} < \delta$, se tiene

$$M_i - m_i = g(x_i) - g(x_i') < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

y los n rectángulos $A_i = [t_{i-1}, t_i] \times [m_i, M_i]$ cubren G y

$$\sum_{i=1}^{n} a(A_i) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = \varepsilon.$$

Definición: *Se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ tiene medida cero cuando para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión (A_n) de rectángulos cerrados tal que*

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} a(A_n) < \varepsilon.$$

Pueden demostrarse fácilmente las siguientes propiedades:

a) Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ tiene medida cero si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión (A_n) de rectángulos abiertos tal que

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a(A_n) < \varepsilon.$$

b) Si $A \subset \mathbb{R}^2$ tiene medida cero y $B \subset A$, entonces B tiene medida cero.

c) Si $A \subset \mathbb{R}^2$ tiene contenido cero, entonces A tiene medida cero.

La propiedad recíproca de esta última no es cierta en general. Sin embargo, se verifica la siguiente

Proposición: *Si $A \subset \mathbb{R}^2$ es compacto y tiene medida cero, entonces A tiene contenido cero.*

Demostración: Como A tiene medida cero, para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión (A_n) de rectángulos abiertos tal que

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a(A_n) < \varepsilon.$$

La sucesión (A_n) constituye, pues, un recubrimiento abierto de A y como A es compacto, un número finito $A_{n_1}, \ldots, A_{n_k}$ de los A_n cubre también a A y

$$\sum_{i=1}^{k} a(A_{n_i}) < \sum_{n=1}^{\infty} a(A_n) < \varepsilon.$$

Proposición: *Si (A_n) es una sucesión de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ de medida cero, entonces el conjunto $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ tiene medida cero.*

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. Para cada $k \in \mathbf{N}$ existe una sucesión $A_{1,k}, A_{2,k}, \ldots, A_{n,k}, \ldots$ de rectángulos cerrados que recubre A_k y tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(A_{n,k}) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Entonces la colección de todos los $A_{n,k}$ $(n, k \in \mathbf{N})$ es un recubrimiento numerable de A y la suma de las áreas de todos los $A_{n,k}$ es menor que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon,$$

luego A tiene medida cero.

Proposición (Teorema de Lebesgue): *Sea $A = [a, b] \times [c, d]$. Una función $f: A \to \mathbb{R}$ es integrable en A si y sólo si el conjunto de los puntos de discontinuidad de f en A tiene medida cero.*

Puede verse una demostración del teorema de Lebesgue en el libro de Spivak, *Cálculo en variedades*, pág. 49. El libro de Apóstol, *Análisis Matemático*, pág. 208, da otra demostración para integrales simples que se extiende fácilmente a las integrales dobles.

Del teorema de Lebesgue resulta inmediatamente que si $f: A \to \mathbb{R}$ es continua, entonces f es integrable en A.

Otras propiedades de las funciones integrables pueden deducirse también del teorema de Lebesgue, Así, por ejemplo, si f y g son integrables en A, entonces fg es integrable en A. En efecto, sean D_1, D_2 y D_3 los conjuntos de las discontinuidades de f, g y fg en A, respectivamente. Está claro que $D_3 \subset D_1 \cup D_2$. Por el teorema de Lebesgue, D_1 y D_2 tienen medida cero, luego $D_1 \cup D_2$ tiene medida cero y, por tanto, D_3 tiene también medida cero y fg es integrable en A en virtud de dicho teorema.

4.3. INTEGRACION SOBRE CONJUNTOS ACOTADOS. AREA DE UN CONJUNTO PLANO

Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Para cada función $f : S \to \mathbb{R}$ designaremos por $\tilde{f}$ la función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si} \quad (x, y) \in S \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) \notin S \end{cases}$$

Definición: *Una función acotada $f : S \to \mathbb{R}$ definida sobre un conjunto acotado $S \subset \mathbb{R}^2$ es integrable en S cuando la función $\tilde{f}$ es integrable en algún rectángulo cerrado A que contenga a S y*

$$\int_S f(x, y)\, dx\, dy = \int_A \tilde{f}(x, y)\, dx\, dy.$$

Es fácil comprobar que la integral $\int_A \tilde{f}$ no depende del rectángulo $A \supset S$ elegido. Por este motivo, se escribe simplemente

$$\int_S f = \int \tilde{f}$$

Se llama *función característica* de un subconjunto S de $\mathbb{R}^2$ a la función $\chi_S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\chi_S(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (x, y) \in S \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) \notin S \end{cases}$$

Definición: *S dice que un subconjunto S de $\mathbf{R}^2$ es medible cuando es acotado y su función característica es integrable. En este caso, su área $a(S)$ es el número real*

$$a(S) = \int \chi_S(x, y)\, dx\, dy.$$

El teorema de Lebesgue permite caracterizar los conjuntos medibles:

Proposición: *Un subconjunto acotado S de $\mathbb{R}^2$ es medible si y sólo si su frontera* fr (S) *tiene contenido cero.*

Demostración Como $\mathbb{R}^2 = \operatorname{int}(S) \cup \operatorname{fr}(S) \cup \operatorname{ext}(S)$ y la función característica χ_S es continua en $\operatorname{int}(S) \cup \operatorname{ext}(S)$ y discontinua en $\operatorname{fr}(S)$, por el teorema de Lebesgue S es medible si y sólo si $\operatorname{fr}(S)$ tiene medida cero. Ahora bien, $\operatorname{fr}(S)$ es un conjunto cerrado y, como S es acotado, $\operatorname{fr}(S)$ es compacto, luego $\operatorname{fr}(S)$ tiene medida cero si y sólo si tiene contenido cero.

Proposición: *Sean g_1 y g_2 dos funciones de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ continuas y tales que $g_1 \leqslant g_2$. El conjunto*

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\}$$

es medible y si $f : S \to \mathbb{R}$ es una función acotada en S y continua en $\operatorname{int}(S)$, *entonces f es integrable en S y*

$$\int_S f = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx.$$

En particular,

$$a(S) = \int_S \chi_S = \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)]\, dx.$$

Demostración: S es acotado y la frontera de S es la unión de cuatro conjuntos de contenido cero: las dos gráficas

$$G_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, y = g_1(x)\} \quad \text{y} \quad G_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, y = g_2(x)\}$$

y los dos segmentos

$$\{a\} \times [g_1(a), g_2(a)] \quad \text{y} \quad \{b\} \times [g_1(b), g_2(b)],$$

luego $\operatorname{fr}(S)$ tiene contenido cero y S es medible.

Sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función acotada en S y continua en $\operatorname{int}(S)$ y consideremos la función

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si} \quad (x, y) \in S \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) \notin S \end{cases}$$

Todo punto de discontinuidad de $\tilde{f}$ es un punto frontera de S, pues por hipótesis $\tilde{f}$ es continua en $\operatorname{int}(S)$ y por definición $\tilde{f}$ es continua en $\operatorname{ext}(S)$. Por tanto, el conjunto de las discontinuidades de $\tilde{f}$ está contenido en $\operatorname{fr}(S)$ y tiene contenido cero, luego $\tilde{f}$ es integrable en S.

Además, si $A = [a, b] \times [c, d]$ es un rectángulo que contiene s S, para cada $x \in [a, b]$ la función $\tilde{f}_x : [c, d] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{f}_x(y) = \tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si} \quad g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es discontinua a lo sumo en $g_1(x)$ y en $g_2(x)$, luego es integrable en $[c, d]$ y

$$\int_c^d \tilde{f}_x(y)\, dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy$$

y por el teorema de Fubini:

$$\int_S f = \int_A \tilde{f} = \int_a^b \left[\int_c^d \tilde{f}_x(y)\, dy \right] dx$$
$$= \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx.$$

En particular,

$$a(S) = \int_S \chi_S = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} 1 \cdot dy \right] dx = \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)]\, dx.$$

De manera análoga se prueba la siguiente

Proposición: *Sean h_1 y h_2 dos funciones de $[c, d]$ en $\mathbb{R}$ continuas y tales que $h_1 \leqslant h_2$. El conjunto*

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leqslant y \leqslant d, h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y)\}$$

es medible y si $f : T \to \mathbb{R}$ es una función acotada en T y continua en $\operatorname{int}(T)$, *entonces f es integrable en T y*

$$\int_T f = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx \right] dy.$$

En particular,

$$a(T) = \int_T \chi_T = \int_c^d [h_2(y) - h_1(y)]\, dy.$$

Observación: A veces, un mismo conjunto S puede escribirse en la forma

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\}$$

donde g_1 y g_2 son dos funciones continuas de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$, y en la forma

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leqslant y \leqslant d, h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y)\}$$

donde h_1 y h_2 son dos funciones continuas de $[c, d]$ en $\mathbb{R}$. En este caso, si $f : S \to \mathbb{R}$ es una función acotada en S y continua en $\operatorname{int}(S)$, de las dos proposiciones anteriores resulta

$$\int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx \right] dy.$$

Ejemplos:

1. La integral de una función sobre una región $S \subset \mathbb{R}^2$ se reduce a la integral reiterada

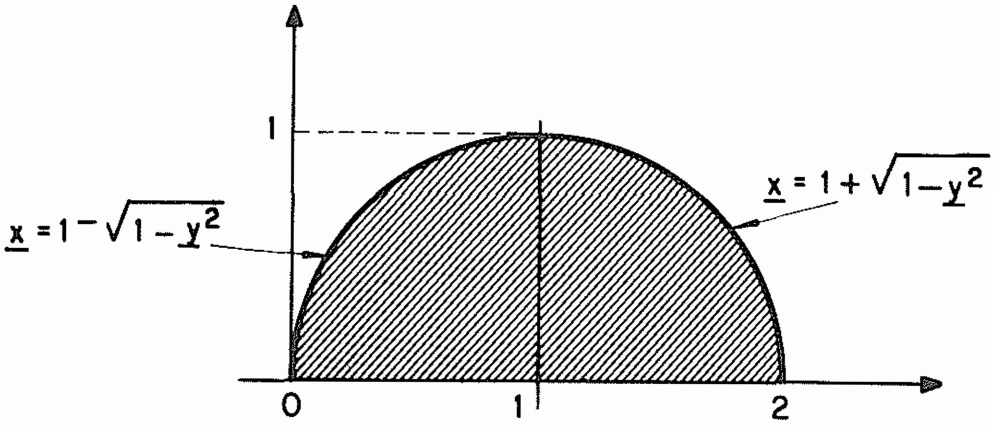
$$\int_0^1 \left[\int_{1 - \sqrt{1 - y^2}}^{1 + \sqrt{1 - y^2}} (x^2 + y^2)\, dx \right] dy.$$

Determinar la región S e invertir el orden de integración.

Solución: Si $x = 1 \pm \sqrt{1 - y^2}$, entonces $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ y la región

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant 1, 1 - \sqrt{1 - y^2} \leqslant x \leqslant 1 + \sqrt{1 - y^2}\}$$

es el semicírculo de la figura



De $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ resulta $y = \pm\sqrt{2x - x^2}$ y también se puede escribir

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{2x - x^2}\}.$$

Por consiguiente,

$$\int_0^1 \left[\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2)\, dx \right] dy = \int_0^2 \left[\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} (x^2 + y^2)\, dy \right] dx.$$

2. Probar que la región S limitada por la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ es medible y calcular su área.

Solución: S es medible, puesto que

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -a \leqslant x \leqslant a, -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \leqslant y \leqslant \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right\}$$

y las funciones

$$g_1(x) = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{y} \quad g_2(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

son continuas en $[-a, a]$.

El área de S es

$$a(S) = 2\frac{b}{a}\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

y haciendo el cambio de variable $x = a \operatorname{sen} t$ se obtiene

$$a(S) = 2ab\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = ab\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\, dt$$

$$= ab\left[t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi ab.$$

4.4. CAMBIO DE VARIABLES

Definición: *Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto. Una función $f : A \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1 en A se dice C^1 inversible en A cuando es inyectiva y su determinante jacobiano* $\det f'$ *es distinto de cero en todo punto de A.*

Definición: *Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto medible. Una función $g : S \to \mathbb{R}$ se dice admisible en S cuando es acotada y el conjunto de los puntos de discontinuidad de la función $\tilde{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si} \quad x \in S \\ 0 & \text{si} \quad x \notin S \end{cases}$$

tiene contenido cero.

Es obvio que toda función admisible en S es integrable en $\dot{S}$.

Proposición (Cambio de variables): *Sean $U \in \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto, $f : U \to \mathbb{R}^2$ una función de clase C^1 en U y $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto medible tal que* $\operatorname{adh}(A) \subset U$. *Si f es C^1-inversible en* $\operatorname{int}(A)$ *y $g : f(A) \to \mathbb{R}$ es una función admisible en $f(A)$, entonces la función compuesta $g \circ f$ es admisible en A y*

$$\int_{f(A)} g = \int_A (g \circ f) \cdot |\det f'|.$$

(Puede verse una demostración de esta proposición en el libro de S. Lang, *Analysis I*, pág. 421 y ss, Editorial Addison-Wesley.)

Ejemplo (Coordenadas polares): Sea

$$U = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : r > 0, 0 < \theta < 2\pi\}.$$

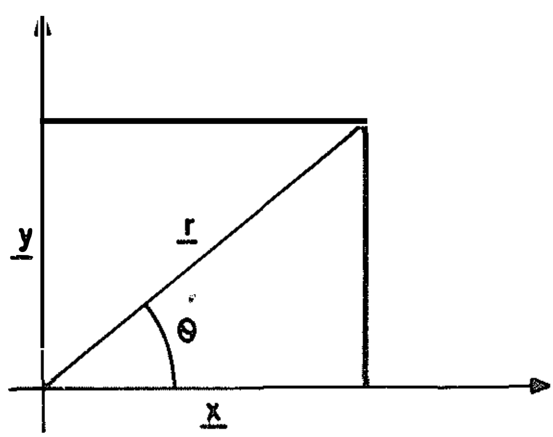
La función $f : U \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(r, \theta) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)$$

para cada $(r, \theta) \in U$ aplica cada punto (r, θ) de U en el punto (x, y) de $f(U)$ dado por las fórmulas

$$x = r\cos\theta, \quad y = r \operatorname{sen}\theta.$$

El significado geométrico de r y θ se pone de manifiesto en la figura siguiente:



La función f es evidentemente de clase C^1 en U. También es inyectiva en U, pues si $f(r_1, \theta_1) = f(r_2, \theta_2)$ serán

$$r_1 \cos \theta_1 = r_2 \cos \theta_2 \quad \text{y} \quad r_1 \operatorname{sen} \theta_1 = r_2 \operatorname{sen} \theta_2$$

y elevando al cuadrado y sumando resulta $r_1^2 = r_2^2$ y como r_1 y r_2 son positivos, $r_1 = r_2$, con lo que $\cos \theta_1 = \cos \theta_2$ y $\operatorname{sen} \theta_1 = \operatorname{sen} \theta_2$, luego también $\theta_1 = \theta_2$. Además,

$$\det f'(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r > 0$$

para todo $(r, \theta) \in U$. Por consiguiente, f es C^1-inversible en U.

Sea ahora A un conjunto medible contenido en

$$\operatorname{adh}(U) = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : r \geqslant 0, 0 \leqslant 0 \leqslant 2\pi\}.$$

Entonces $\operatorname{int}(A) \subset U$ y f es C^1-inversible en $\operatorname{int}(A)$, y si $g : f(A) \to \mathbb{R}$ es una función admisible en $f(A)$, se tiene

$$\int_{f(A)} g(x, y)\, dx\, dy = \int_A g(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)\, r\, dr\, d\theta.$$

Por tanto, para calcular una integral

$$\int_S g(x, y)\, dx\, dy$$

efectuando un cambio a coordenadas polares, tendremos que comprobar que g es admisible en S y determinar un conjunto medible

$$A \subset \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : r \geqslant 0, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$$

tal que $f(A) = S$. Una vez hecho esto, podremos poner

$$\int_S g(x, y)\, dx\, dy = \int_A g(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)\, r\, dr\, d\theta.$$

Calculemos, por ejemplo, la integral

$$\int_S \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$$

donde S es el semicírculo $x^2 + y^2 \leqslant 2ax$, $y \geqslant 0$.

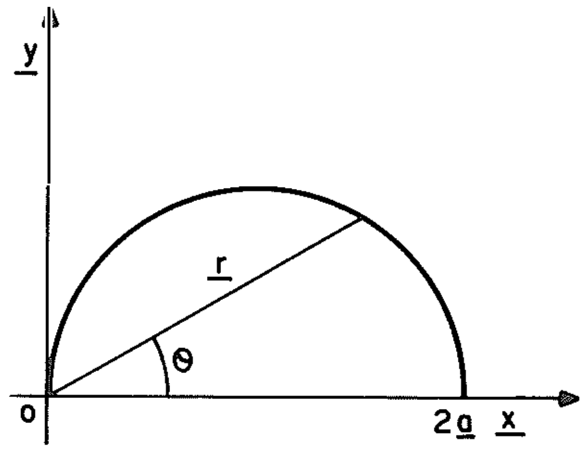
Como

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 2a, 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{2ax - x^2}\},$$

S es medible y la función $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ es admisible en S, puesto que por ser continua en S, las discontinuidades de la función

$$\tilde{g}(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x, y) \in S \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) \notin S \end{cases}$$

están en la frontera de S, que tiene contenido cero por ser S medible.



Por otra parte, poniendo $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$ en la ecuación $x^2 + y^2 = 2ax$ se obtiene $r = 2a\cos\theta$ y de la figura se desprende que los puntos (x, y) de S son imágenes por f de puntos (r, θ) tales que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ y $0 \leqslant r \leqslant 2a\cos\theta$, es decir, $S = f(A)$, siendo

$$A = \left\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant r \leqslant 2a\cos\theta\right\}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\int_S \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy &= \int_A r \cdot r\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{2a\cos\theta} r^2\, dr\right] d\theta \\ &= \frac{8a^3}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^3\theta\, d\theta = \frac{8a^3}{3}\int_0^{\pi/2} (1 - \operatorname{sen}^2\theta)\cos\theta\, d\theta \\ &= \frac{8a^3}{3}\int_0^1 (1 - t^2)\, dt = \frac{16a^3}{9}.\end{aligned}$$

4.5. INTEGRAL MULTIPLE

El rectángulo cerrado de lados $[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n]$ es, por definición, el conjunto

$$A = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n].$$

El volumen $v(A)$ de este rectángulo es el producto de las longitudes de sus lados:

$$v(A) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n).$$

Una partición del rectángulo A es un producto cartesiano $P = P_1 \times \cdots \times P_n$, donde P_i es una partición del intervalo $[a_i, b_i]$. Si P_i divide a $[a_i, b_i]$ en N_i subintervalos, entonces P divide a A en $N_1 \cdots N_n$ subrectángulos

$$A_{i_1,\dots,i_n} = [x_{i_1-1}, x_{i_1}] \times \cdots \times [x_{i_n-1}, x_{i_n}]$$

que se llaman subrectángulos de la partición P.

Dadas dos particiones $P = P_1 \times \cdots \times P_n$ y $Q = Q_1 \times \cdots \times Q_n$ de A, se dice que P es más fina que Q cuando P_i es más fina que Q_i para $i = 1, \dots, n$. Si $P = P_1 \times \cdots \times P_n$ y $Q = Q_1 \times \cdots \times Q_n$ son dos particiones de A, existe una partición R de A más fina que ambas. (Basta tomar $R = (P_1 \cup Q_1) \times \cdots \times (P_n \cup Q_n)$.)

Sean $A = [a_1\ b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función acotada y P una partición de A. Para cada subrectángulo $A_{i_1,\dots,i_n}$ de la partición sean $m_{i_1,\dots,i_n}$ y $M_{i_1,\dots,i_n}$ el ínfimo y el supremo del conjunto

$$\{f(x_1, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_n) \in A_{i_1,\dots,i_n}\}$$

y sea $v(A_{i_1,\dots,i_n})$ el volumen de $A_{i_1,\dots,i_n}$. Los números reales

$$L(f, P) = \sum_{i_1,\dots,i_n} m_{i_1,\dots,i_n} v(A_{i_1,\dots,i_n})$$

y

$$U(f, P) = \sum_{i_1,\dots,i_n} M_{i_1,\dots,i_n} v(A_{i_1,\dots,i_n})$$

se llaman, respectivamente, suma inferior y suma superior de la función f respecto de la partición P.

Las sumas inferiores y superiores verifican las propiedades habituales. En particular, el conjunto de las sumas inferiores está acotado superiormente por cualquier suma superior y el conjunto de las sumas superiores está acotado inferiormente por cualquier suma inferior, luego existen el supremo del primero de estos conjuntos y el ínfimo del segundo y se verifica

$$\sup_P L(f, P) \leqslant \inf_P U(f, P).$$

Se dice que f es integrable en A cuando

$$\sup_P L(f, P) = \inf_P U(f, P).$$

Este número común se llama integral de f en A y se designa por $\int_A f$ o por $\int_A f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$.

Las funciones integrables verifican las propiedades habituales. El teorema de Fubini tiene el siguiente enunciado:

Sean $B \subset \mathbb{R}^k$ y $C \subset \mathbb{R}^{n-k}$ dos rectángulos cerrados, $A = B \times C$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función integrable. Para cada $x \in B$ sea $g_x : C \to \mathbb{R}$ la función definida por $g_x(y) = f(x, y)$ para cada $y \in C$ y pongamos

$$\mathscr{L}(x) = \underline{\int_C} g_x \quad \text{y} \quad \mathscr{U}(x) = \overline{\int_C} g_x.$$

Entonces $\mathscr{L}$ y $\mathscr{U}$ son integrables en B y

$$\int_B \mathscr{L} = \int_A f = \int_B \mathscr{U}.$$

No ofrece ninguna dificultad extender los conceptos de contenido cero y de medida cero para conjuntos de $\mathbb{R}^n$. El teorema de Lebesgue asegura que si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un rectángulo cerrado y $f : A \to \mathbb{R}$ es una función acotada, entonces f es integrable en A si y sólo si el conjunto de los puntos de discontinuidad de f en A tiene medida cero.

Se dice que una función acotada $f : S \to \mathbb{R}$ definida en un conjunto acotado $S \subset \mathbb{R}^n$ es integrable en S cuando la función

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in S \\ 0 & \text{si} \quad x \notin S \end{cases}$$

es integrable en un rectángulo cerrado A que contenga a S y, por definición,

$$\int_S f = \int_A \tilde{f}.$$

Se dice que un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es medible cuando es acotado y su función característica es integrable y, en este caso, su volumen $v(S)$ es el número real

$$v(S) = \int_S \chi_S.$$

De igual manera que en el caso $n = 2$ se prueba que un subconjunto acotado S de $\mathbb{R}^n$ es medible si y sólo si su frontera tiene contenido cero.

El teorema del cambio de variables tiene el siguiente enunciado:

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 en U y $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible tal que $\operatorname{adh}(A) \subset U$. Si f es C^1-inversible en $\operatorname{int}(A)$ y $g : f(A) \to \mathbb{R}$ es una función admisible en $f(A)$, entonces la función compuesta $g \circ f$ es admisible en A y

$$\int_{f(A)} g = \int_A (g \circ f) \cdot |\det f'|.$$

Dos cambios de variables de frecuente uso cuando $n = 3$ son el cambio a coordenadas cilíndricas y el cambio a coordenadas esféricas.

Coordenadas cilíndricas: Sea

$$U = \{(r, \theta, z) : r > 0, 0 < \theta < 2\pi, -\infty < z < +\infty\}.$$

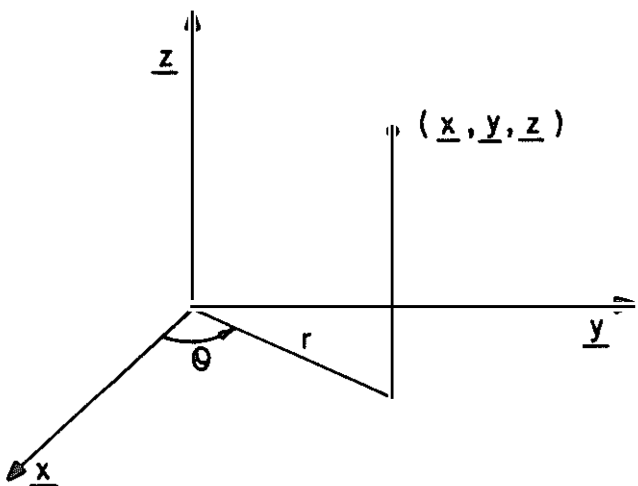
La función $f : U \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, z)$$

para cada $(r, \theta, z) \in U$ aplica cada punto (r, θ, z) de U en el punto (x, y, z) de $f(U)$ dado por las fórmulas

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta, \quad z = z.$$

El significado geométrico de r, θ y z se pone de manifiesto en la figura siguiente:



La función f es de clase C^1 e inyectiva en U. Además,

$$\det f'(r, \theta, z) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r > 0$$

para todo $(r, \theta, z) \in U$. Por consiguiente, f es C^1-inversible en U.

Sea ahora A un conjunto medible contenido en

$$\operatorname{adh}(U) = \{(r, \theta, z) : r \geqslant 0, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, -\infty < z < +\infty\}.$$

Entonces $\operatorname{int}(A) \subset U$ y f es C^1-inversible en $\operatorname{int}(A)$, y si $g : f(A) \to \mathbb{R}$ es una función admisible en $f(A)$, se tiene

$$\int_{f(A)} g(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_A g(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, z)\, r\, dr\, d\theta\, dz.$$

Coordenadas esféricas: Sea

$$U = \{(r, \theta, \varphi) : r > 0, 0 < \theta < 2\pi, 0 < \varphi < \pi\}.$$

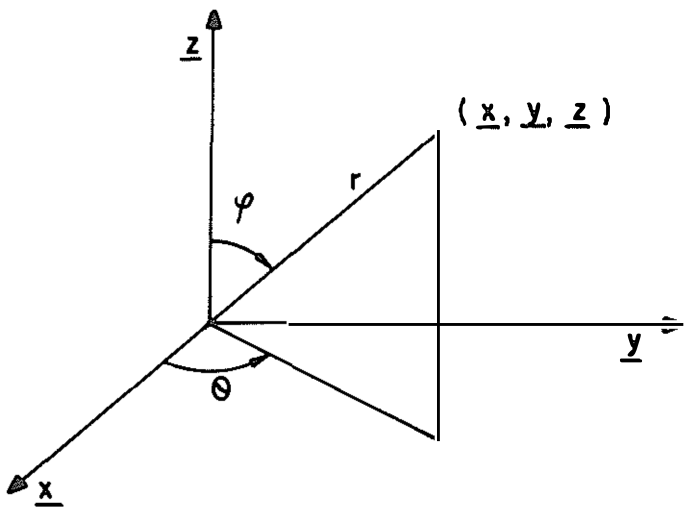
La función $f : U \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(r, \theta, \varphi) = (r \cos\theta \operatorname{sen}\varphi, r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, r \cos\varphi)$$

para cada $(r, \theta, \varphi) \in U$ aplica cada punto (r, θ, φ) de U en el punto (x, y, z) de $f(U)$ dado por las fórmulas

$$x = r \cos\theta \operatorname{sen}\varphi, \quad y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \quad z = r \cos\varphi.$$

El significado geométrico de r, θ y φ se pone de manifiesto en la figura siguiente:



La función f es de clase C^1 en U. También es inyectiva en U. En efecto, si $f(r_1, \theta_1, \varphi_1) = f(r_2, \theta_2, \varphi_2)$ serán

$$r_1 \cos\theta_1 \operatorname{sen}\varphi_1 = r_2 \cos\theta_2 \operatorname{sen}\varphi_2, \quad r_1 \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\varphi_1 = r_2 \operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{sen}\varphi_2,$$
$$r_1 \cos\varphi_1 = r_2 \cos\varphi_2$$

y elevando al cuadrado y sumando resulta $r_1^2 = r_2^2$ y como r_1 y r_2 son positivos, $r_1 = r_2$. Por tanto,

$$\cos\theta_1 \operatorname{sen}\varphi_1 = \cos\theta_2 \operatorname{sen}\varphi_2, \quad \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\varphi_1 = \operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{sen}\varphi_2, \quad \cos\varphi_1 = \cos\varphi_2$$

y elevando al cuadrado las dos primeras y sumando se obtiene $\operatorname{sen}^2\varphi_1 = \operatorname{sen}^2\varphi_2$ y como φ_1 y φ_2 están en $(0, \pi)$, $\operatorname{sen}\varphi_1 = \operatorname{sen}\varphi_2$, igualdad que junto con la $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2$ nos da $\varphi_1 = \varphi_2$. Con esto, las dos primeras igualdades anteriores se convierten en

$$\cos\theta_1 = \cos\theta_2 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\theta_1 = \operatorname{sen}\theta_2,$$

luego también $\theta_1 = \theta_2$. Además,

$$\det f'(r, \theta, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos\theta \operatorname{sen}\varphi & -r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi & r \cos\theta \cos\varphi \\ \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi & r \cos\theta \operatorname{sen}\varphi & r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -r \operatorname{sen}\varphi \end{vmatrix} = -r^2 \operatorname{sen}\varphi < 0$$

para todo $(r, \theta, \varphi) \in U$. Por consiguiente, f es C^1-inversible en U.

Sea ahora A un conjunto medible contenido en

$$\operatorname{adh}(U) = \{(r, \theta, \varphi) : r \geqslant 0, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\}.$$

Entonces $\operatorname{int}(A) \subset U$ y f es C^1-inversible en $\operatorname{int}(A)$ y si $g : f(A) \to \mathbb{R}$ es una función admisible en $f(A)$, se tiene

$$\int_{f(A)} g(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_A g(r \cos\theta \operatorname{sen}\varphi, r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, r\cos\varphi) r^2 \operatorname{sen}\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi.$$

Ejemplos:

1. Calcular la integral

$$\int_S z\, dx\, dy\, dz$$

siendo S el primer octante de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$.

Solución: Como

$$S = \{(x, y, z) : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1 - x^2}, 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{1 - x^2 - y^2}\},$$

se tiene

$$\begin{aligned}
\int_S z\, dx\, dy\, dz &= \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\, dz \right) dy \right] dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\, dy \right] dx \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \int_0^1 (1 - x^2)^{3/2}\, dx \\
&= \frac{\pi}{16}.
\end{aligned}$$

2. Calcular el volumen de una esfera de radio R.

Solución: Consideremos la esfera S de centro el origen y radio R:

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2\}.$$

Pasando a coordenadas esféricas se obtiene

$$v(S) = \int_S dx\, dy\, dz = \int_A r^2 \operatorname{sen}\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

donde

$$A = \{(r, \theta, \varphi) : 0 \leqslant r \leqslant R, 0 \leqslant \theta < 2\pi, 0 \leqslant \varphi < \pi\}$$

y, por tanto,

$$v(S) = \int_0^R \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} r^2 \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi \right) d\theta \right] dr = \int_0^R \left[\int_0^{2\pi} 2r^2 \, d\theta \right] dr$$
$$= \int_0^R 4\pi r^2 \, dr = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

4.6. APLICACIONES DE LAS INTEGRALES MULTIPLES A LA MECANICA

4.6.1. Consideremos una lámina delgada que tenga la forma de una región $S \subset \mathbb{R}^2$ y supongamos que su densidad (masa por unidad de área) en cada punto viene dada por una función integrable $f : S \to \mathbb{R}$. Entonces, la masa total M de la lámina es

$$M = \int_S f(x, y) \, dx \, dy,$$

el centro de masas de la lámina es el punto (ξ, η) de coordenadas

$$\xi = \frac{1}{M} \int_S x f(x, y) \, dx \, dy, \quad \eta = \frac{1}{M} \int_S y f(x, y) \, dx \, dy,$$

y el momento de inercia I_L de la lámina respecto de una recta L de su plano es

$$I_L = \int_S \delta^2(x, y) f(x, y) \, dx \, dy$$

donde para cada $(x, y) \in S$, $\delta(x, y)$ representa la distancia del punto (x, y) a la recta L.

Ejemplo: En una lámina cuadrada de lado a, la densidad en cada punto es proporcional al cuadrado de la distancia de ese punto a uno de los vértices. Hallar el momento de inercia de dicha lámina respecto a uno de los lados que pasan por ese vértice.

Solución: Consideremos el cuadrado S de vértices $(0, 0)$, $(0, a)$, (a, a) y $(a, 0)$. Si la densidad $f(x, y)$ en el punto (x, y) es proporcional al cuadrado de la distancia de (x, y) al vértice $(0, 0)$, para cada $(x, y) \in S$ será

$$f(x, y) = k(x^2 + y^2)$$

donde k es una constante, y el momento de inercia I_x respecto al eje OX será

$$I_x = k \int_S y^2(x^2 + y^2) \, dx \, dy = k \int_0^a \left[\int_0^a y^2(x^2 + y^2) \, dy \right] dx$$
$$= k \int_0^a \left(\frac{a^3}{3} x^2 + \frac{a^5}{5} \right) dx = \frac{14ka^6}{45}.$$

4.6.2. De manera análoga, si $S \subset \mathbb{R}^3$ es un sólido cuya densidad (masa por unidad de volumen) en cada punto viene dada por una función integrable $f : S \to \mathbb{R}$, entonces la masa total M del sólido es

$$M = \int_S f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

el centro de masas del sólido es el punto (ξ, η, ζ) de coordenadas

$$\xi = \frac{1}{M}\int_S xf(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

$$\eta = \frac{1}{M}\int_S yf(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

$$\zeta = \frac{1}{M}\int_S zf(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

y el momento de inercia I del sólido respecto de un plano o respecto de una recta es

$$I = \int_S \delta^2(x, y, z) f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

donde para cada $(x, y, z) \in S$, $\delta(x, y, z)$ representa la distancia del punto (x, y, z) al plano o a la recta en cuestión.

Ejemplo: Determinar el centro de masas de una semiesfera de radio a en la que la densidad en cada punto varía proporcionalmente a la distancia desde ese punto al centro.

Solución: Consideremos la semiesfera

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2, z \geqslant 0\}.$$

Si la densidad en cada punto de S es proporcional a la distancia de ese punto al centro, para cada $(x, y, z) \in S$ será $f(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, donde k es una constante y, por tanto, la masa M de S será

$$M = k\int_S \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz,$$

y pasando a coordenadas esféricas resulta

$$M = k\int_A r^3 \operatorname{sen} \varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

donde

$$A = \left\{(r, \theta, \varphi) : 0 \leqslant r \leqslant a, 0 \leqslant \theta < 2\pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right\},$$

luego

$$M = k\int_0^a\left[\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2} r^3 \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\right) d\theta\right] dr = k\int_0^{2\pi} r^3\, d\theta\Big] dr$$

$$= 2k\pi \int_0^a r^3\, dr = \frac{k}{2} 4\pi^4$$

y las coordenadas ξ, η y ζ del centro de masas serán

$$\xi = \frac{k}{M}\int_S x\sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz = \frac{k}{M}\int_A r^4 \cos\theta \operatorname{sen}^2\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi = 0$$

$$\eta = \frac{k}{M}\int_S y\sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz = \frac{k}{M}\int_A r^4 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}^2\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi = 0,$$

$$\zeta = \frac{k}{M}\int_S z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz = \frac{k}{M}\int_A r^4 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi = \frac{2a}{5}\cdot$$

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Calcular el área de la región S limitada por la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

2. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable. Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$h(t) = \int_0^t \left[\int_x^t g(y)\, dy \right] f(x)\, dx$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. Se pide:

a) Expresar $h(t)$ como una integral doble extendida a un cierto recinto $S \subset \mathbb{R}^2$ e invertir el orden de integración.

b) Probar que la función h es dos veces derivable y calcular $h''(t)$.

3. Sea $A = \{(u, v) : 1 \leqslant u \leqslant 2, 1 \leqslant v \leqslant 2\}$. Determinar la imagen S de A en el plano xy por la aplicación $f(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$, comprobar que en la integral

$$I = \int_S \frac{dx\, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

se puede efectuar el cambio de variables $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$, y calcular el valor de I.

4. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función no negativa. Probar que el volumen del sólido S engendrado al girar la porción de superficie

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

alrededor del eje OX viene dado por

$$v(S) = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx.$$

Aplicación: Calcular el volumen del toro engendrado al girar el círculo $x^2 + (y - b)^2 \leqslant a^2$ $(b \geqslant a)$ alrededor del eje OX.

5. Calcular la integral

$$I = \int_S (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$$

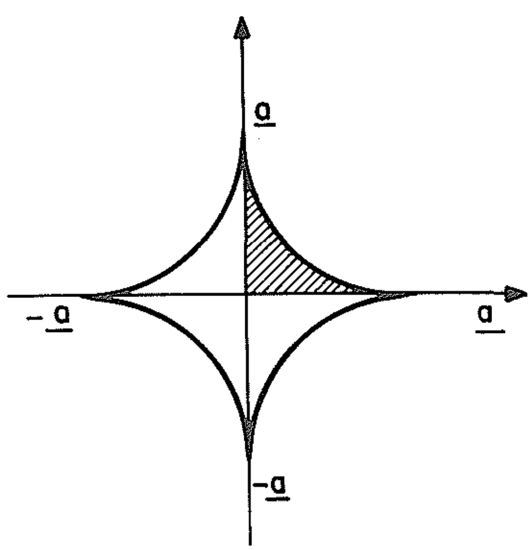
siendo S el primer octante de la esfera de centro el origen y radio a.

6. Calcular el volumen de la región interior a la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = ax$ y a la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. La curva es simétrica respecto a los dos ejes de coordenadas y los corta en los puntos $(-a, 0)$, $(0, a)$, $(a, 0)$ y $(0, -a)$, luego

$$a(S) = 4\int_0^a (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}\, dx$$



y haciendo el cambio de variable $x = a \operatorname{sen}^3 t$, $dx = 3a \operatorname{sen}^2 t \cos t\, dt$, resulta:

$$a(S) = 12a^2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t \cos^4 t\, dt = 6a^2 \beta\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

2. *a*) Se tiene

$$h(t) = \int_S f(x)g(y)\,dx\,dy$$

donde

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant t, x \leqslant y \leqslant t\}$$

y como también

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant t, 0 \leqslant x \leqslant y\}$$

será

$$h(t) = \int_0^t \left[\int_0^y f(x)\,dx \right] g(y)\,dy.$$

b) Por el primer teorema fundamental del cálculo, la función

$$F(y) = \int_0^y f(x)\,dx$$

es derivable y $F'(y) = f(y)$ para todo $y \in \mathbb{R}$, y como

$$h(t) = \int_0^t F(y)g(y)\,dy,$$

volviendo a aplicar el primer teorema fundamental del cálculo se obtiene

$$h'(t) = F(t)g(t)$$

y por ser F y g derivables, h es dos veces derivable y

$$h''(t) = F'(t)g(t) + F(t)g'(t) = f(t)g(t) + g'(t)\int_0^t f(x)\,dx$$

para cada $t \in \mathbb{R}$.

3. *a*) Pongamos $x = u^2 - v^2$ e $y = 2uv$. Para $u = 1$ y $1 \leqslant v \leqslant 2$ son $x = 1 - v^2$, $y = 2v$ y $1 \leqslant v \leqslant 2$, luego $x = 1 - y^2/4$ y $2 \leqslant y \leqslant 4$. Por tanto,

$$f(\{(u, v) : u = 1, 1 \leqslant v \leqslant 2\}) = \left\{(x, y) : x = 1 - \frac{y^2}{4}, 2 \leqslant y \leqslant 4\right\}.$$

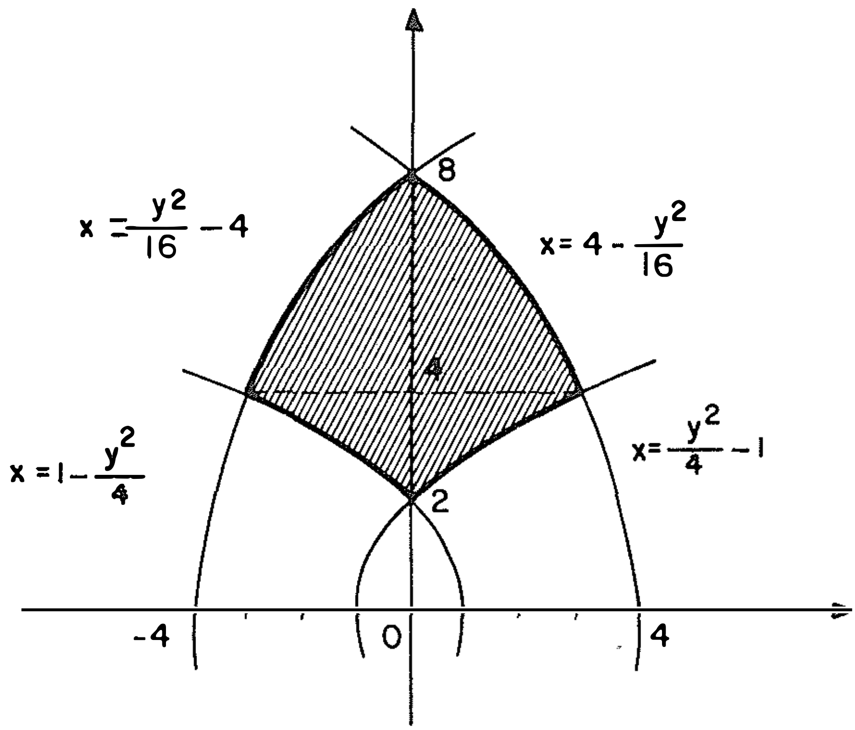
De manera análoga se obtienen

$$f(\{(u, v) : u = 2, 1 \leqslant v \leqslant 2\}) = \left\{(x, y) : x = 4 - \frac{y^2}{16}, 4 \leqslant y \leqslant 8\right\},$$

$$f(\{(u, v) : 1 \leqslant u \leqslant 2, v = 1\}) = \left\{(x, y) : x = \frac{y^2}{4} - 1, 2 \leqslant y \leqslant 4\right\},$$

$$f(\{(u, v) : 1 \leqslant u \leqslant 2, v = 2\}) = \left\{(x, y) : x = \frac{y^2}{16} - 4, 4 \leqslant y \leqslant 8\right\}.$$

Por consiguiente, S es el recinto rayado de la figura



b) La función f es de clase C^1 en $U = \mathbb{R}^2$ porque sus componentes tienen derivadas parciales continuas en todo punto. El conjunto A es medible porque $\mathrm{fr}\,(A)$ tiene contenido cero. Además, evidentemente $\mathrm{adh}\,(A) \subset U$. Por otra parte, f es inyectiva en $\mathrm{int}\,(A)$. En efecto, si $f(u_1, v_1) = f(u_2, v_2)$, entonces

$$u_1^2 - v_1^2 = u_2^2 - v_2^2 \quad \text{y} \quad 2u_1v_1 = 2u_2v_2.$$

Elevando al cuadrado la primera de estas igualdades, multiplicando por 2 la segunda, sumando y extrayendo la raíz cuadrada se obtiene $u_1^2 + v_1^2 = u_2^2 + v_2^2$, que junto con la $u_1^2 - v_1^2 = u_2^2 - v_2^2$ nos da $u_1^2 = u_2^2$ y $v_1^2 = v_2^2$ y como en $\mathrm{int}\,(A)$ u_1, u_2, v_1 y v_2 son positivos, $u_1 = u_2$ y $v_1 = v_2$. Además,

$$\det f'(u, v) = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4(u^2 + v^2) > 0$$

para todo $(u, v) \in \mathrm{int}\,(A)$. Por tanto, f es C^1-inversible en $\mathrm{int}\,(A)$.

Finalmente, la función $g(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$ es admisible en $f(A) = S$ porque las discontinuidades de la función

$$\tilde{g}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si} \quad (x, y) \in S \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) \notin S \end{cases}$$

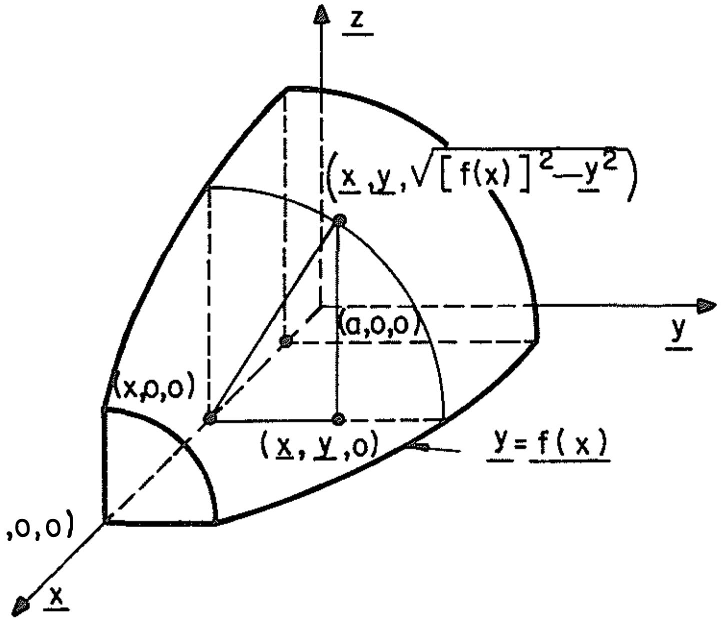
están en la frontera de S que tiene contenido cero.

Por consiguiente,

$$\int_S \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_A \frac{4(u^2+v^2)\,du\,dv}{\sqrt{(u^2-v^2)^2+4u^2v^2}} = 4\int_A du\,dv$$

$$= 4\int_1^2\left[\int_1^2 dv\right]du = 4.$$

4. El volumen de S es el cuádruplo del volumen del sólido de la figura



Por consiguiente,

$$v(S) = 4\int_a^b\left[\int_0^{f(x)}\left(\int_0^{\sqrt{[f(x)]^2-y^2}} dz\right)dy\right]dx$$

$$= 4\int_a^b\left[\int_0^{f(x)}\sqrt{[f(x)]^2-y^2}\,dy\right]dx$$

$$= 4\int_a^b\left[\int_0^{\pi/2}[f(x)]^2\cos^2 t\,dt\right]dx$$

$$= 4\left(\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt\right)\left(\int_a^b[f(x)]^2\,dx\right)$$

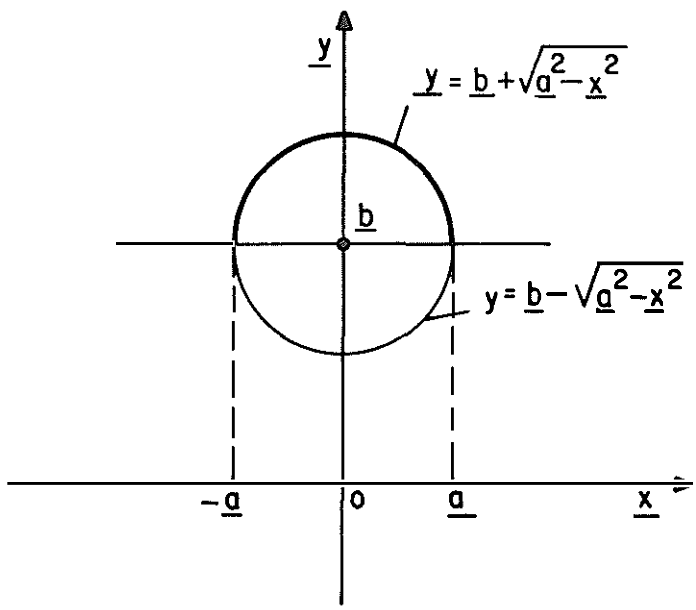
$$= \pi\int_a^b[f(x)]^2\,dx.$$

El volumen del toro es la diferencia de los volúmenes engendrados al girar alrededor de OX las regiones

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -a \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b + \sqrt{a^2 - x^2}\}$$

y

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -a \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b - \sqrt{a^2 - x^2}\}.$$



Por consiguiente,

$$\begin{aligned} v &= \pi \int_{-a}^{a} (b + \sqrt{a^2 - x^2})^2 \, dx - \pi \int_{-a}^{a} (b - \sqrt{a^2 - x^2})^2 \, dx \\ &= 4\pi b \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = 2\pi^2 a^2 b. \end{aligned}$$

5. Pasando a coordenadas esféricas resulta

$$I = \int_A r^4 \operatorname{sen}^3 \varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi,$$

donde

$$A = \left\{(r, \theta, \varphi) : 0 \leqslant r \leqslant a, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$$

y, por tanto,

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^a \left[\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 \varphi \, d\varphi \right) d\theta \right] r^4 \, dr \\
&= \frac{\pi}{2} \left(\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 \varphi \, d\varphi \right) \left(\int_0^a r^4 \, dr \right) \\
&= \frac{\pi a^5}{15}.
\end{aligned}
$$

6. Por razones de simetría el volumen pedido es

$$
v = 4 \int_S dx \, dy \, dz
$$

siendo

$$
S = \{(x, y, z) : 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{ax - x^2}, 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\}
$$

y pasando a coordenadas cilíndricas resulta

$$
v = 4 \int_A r \, dr \, d\theta \, d\varphi
$$

donde

$$
A = \left\{ (r, \theta, z) : 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant r \leqslant a \cos \theta, 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{a^2 - r^2} \right\}.
$$

Por consiguiente,

$$
\begin{aligned}
v &= 4 \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{a \cos \theta} \left(\int_0^{\sqrt{a^2 - r^2}} dz \right) r \, dr \right] d\theta \\
&= 4 \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{a \cos \theta} r \sqrt{a^2 - r^2} \, dr \right] d\theta \\
&= \frac{4a^3}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \operatorname{sen}^3 \theta) \, d\theta \\
&= \frac{2a^3}{9} (3\pi - 4).
\end{aligned}
$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Apóstol, T. M.: *Análisis Matemático.* Editorial Reverté.

[2] Apóstol, T. M.: *Cálculus* (vol. 1 y 2). Editorial Reverté.

[3] Barbolla, R., y otros: *Introducción al análisis real.* Editorial AC.

[4] Bombal, F., y otros: *Problemas de Análisis Matemático.* Editorial AC.

[5] Demidovich, B.: *Problemas y ejercicios de Análisis Matemático.* Editorial Paraninfo.

[6] Fernández Viña, J. A.: *Lecciones de Análisis Matemático I.* Editorial Tecnos.

[7] Fernández Viña, J. A., y Sánchez Mañes, E.: *Ejercicios y complementos de Análisis Matemático I.* Editorial Tecnos.

[8] Fleming, W. H.: *Functions of several variables.* Addison-Wesley.

[9] Lang, S.: *Analysis I.* Addison-Wesley.

[10] Linés, E.: *Análisis Matemático I.* Aparecerá en Editorial Reverté.

[11] Murray, R. Spiegel: *Cálculo superior.* McGraw-Hill. Serie Schum.

[12] Rudin, W.: *Principios de Análisis Matemático.* Ediciones del Castillo.

[13] Spivak, M.: *Cálculo en variedades.* Editorial Reverté.

[14] Spivak, M.: *Cálculus* (vol. 1, 2 y 3). Editorial Reverté.