Geometría básica

2019

Duración 2 horas. **Sólo se permite material de dibujo (reglas, compás)**

Justificar concisa y razonadamente todas las respuestas.

Ejercicio 1. (3 puntos)

Sean $\triangle\{A, B, C\}$ y $\triangle\{A', B', C'\}$ dos triángulos tales que $\angle A$ es congruente con $\angle A'$ y $\angle B$ es congruente con $\angle B'$. Probar que existe una semejanza que envía $\triangle\{A, B, C\}$ en $\triangle\{A', B', C'\}$.

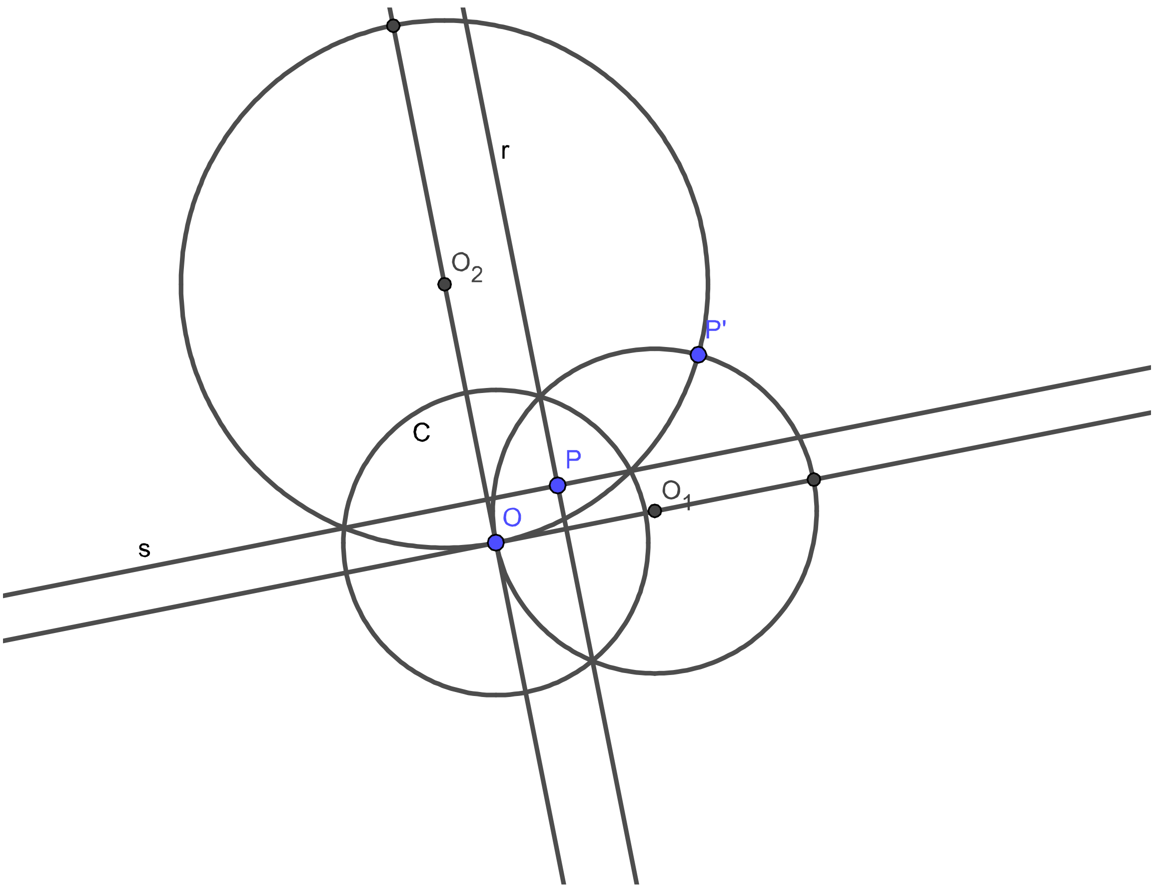
Ejercicio 2. (4 puntos).

Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia de centro O y P un punto del interior de $\mathcal{C}$. Sean r y s dos rectas perpendiculares que se cortan en el punto P. Probar que los conjuntos $\iota_{\mathcal{C}}(r)$ y $\iota_{\mathcal{C}}(s)$ (inversión de r y s respecto a $\mathcal{C}$) están contenidos en dos circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ que se cortan en O y que las rectas tangentes a $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ en O son perpendiculares. (Pueden utilizar sin demostrar cualquier teorema o corolario del curso). Las circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ se cortan en $\iota_{\mathcal{C}}(P)$ ¿son las tangentes a $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ en $\iota_{\mathcal{C}}(P)$ perpendiculares?

Ejercicio 3. (3 puntos)

¿Qué poliedros regulares tienen simetrías que son isometrías inversas y no son reflexiones respecto a planos?

Describa una simetría de un poliedro regular que no sea una reflexión respecto de un plano, ni una reflexión central.



Soluciones

Ejercicio 1.
Ver Teorema 7.15 de la página 127 del texto base

Ejercicio 2.
Por el Teorema 8.18 sabemos que una circunferencia $\mathcal{C}'$ que pasa por O se transforma por $\iota_{\mathcal{C}}$ en una recta ortogonal a $r_{OO'}$, donde O' es el centro de $\mathcal{C}'$. Como $\iota_{\mathcal{C}} \circ \iota_{\mathcal{C}} = \mathrm{id}_{P-\{O\}}$ (Nota 8.15.1) se tiene que $\iota_{\mathcal{C}}(r)$, donde r es una recta, está contenido en una circunferencia que pasa por O y cuyo centro O' verifica que $r_{OO'} \perp r$. Entonces $\iota_{\mathcal{C}}(r)$ y $\iota_{\mathcal{C}}(s)$ están contenidos en dos circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ que se cortan en O. Sabemos que la tangente en un punto a una circunferencia es perpendicular a la recta que une dicho punto con el centro de la circunferencia (Teorema 8.5) luego la recta tangente t_1 en O a $\mathcal{C}_1$ es perpendicular a $r_{OO'}$ y como $r_{OO'} \perp r$ se tiene que $t_1 \| r$. Del mismo modo $t_2 \| s$, donde t_2 es la recta tangente a $\mathcal{C}_2$ en O. Como $r \perp s$ se tiene que $t_1 \perp t_2$.

Toda circunferencia $\mathcal{C}^*$ es simétrica respecto a cualquier recta l que pase por su centro, pues si $P \in \mathcal{C}^*$ y el radio de $\mathcal{C}^*$ es ρ, para todo $P \in \mathcal{C}^*$:

$$\rho = OP = \sigma_l(O)\sigma_l(P) = O\sigma_l(P)$$

Si consideramos la recta $r_{O_1O_2}$ y la reflexión $\sigma_{r_{O_1O_2}}$, entonces $\sigma_{r_{O_1O_2}}(O)$ pertenece a $\mathcal{C}_1$ y a $\mathcal{C}_2$, luego $\iota_{\mathcal{C}}(P) = \sigma_{r_{O_1O_2}}(O)$. Por otra parte las tangentes t_1 y t_2 se transforman por $\sigma_{r_{O_1O_2}}$ en las tangentes a $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ en $\iota_{\mathcal{C}}(P)$. Como $\sigma_{r_{O_1O_2}}$ es isometría y conserva la ortogonalidad, las rectas tangentes a $\mathcal{C}_1$ y a $\mathcal{C}_2$ son ortogonales en $\iota_{\mathcal{C}}(P)$.

Ejercicio 3.

¿Qué poliedros regulares tienen simetrías que son isometrías inversas y no son reflexiones respecto a planos?

Por isometrías inversas se entiende isometrías que invierten la orientación. Prácticamente todos los estudiantes han entendido este término, a aquellos que han entendido otra cosa y su respuesta ha sido bien justificada les ha sido dada por válida.

Todos los poliedros regulares tienene isometrías inversas que no son reflexiones respecto a planos.

El cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro tienen simetría que es una reflexión central, es decir una reflexión-rotación con ángulo de rotación π.

En el caso del tetraedro hay simetrías que son reflexiones-rotaciones cuyo ángulo de rotación es $\pi/2$.

Describa una simetría de un poliedro regular que no sea una reflexión respecto de un plano, ni una reflexión central.

Basta describir cualquier simetría de un poliedro regular que no fuera ninguna de las dos excluidas, por ejempo servía cualquier rotación, ver la última sección del capítulo 13.