Funciones de varias variables I

Nelson

Resumen

Este es un resumen del tema 1 al 3.3 de la sexta edición del libro *Cálculo vectorial*, temario correspondiente a la asignatura Funciones de varias variables I de primer curso del grado en Matemáticas de la UNED.

El resumen incluye todos los teoremas, definiciones, proposiciones, lemas y textos relevantes del libro respetando su nomenclatura y numeración para facilitar su uso en relación a la fuente original.

El resumen no incluye ejemplos (salvo textos relevantes), demostraciones ni ejercicios.

Puede contener erratas (consulte la fuente original).

Índice

1. Geometría del espacio euclídeo

1.1. Vectores en los espacios de dos y tres dimensiones

Los puntos P del plano se representan mediante pares ordenados de números naturales (a_1, a_2); los números a_1 y a_2 se denominan ***coordenadas cartesianas*** de P.

Vamos a dibujar dos rectas perpendiculares, que denominaremos ejes x e y, y a continuación trazamos perpendiculares desde P a dichos ejes. Después de designar a la intersección de los ejes x e y como el origen y seleccionar las unidades en dichos ejes, definimos dos distancias con signo a_1 y a_2, que corresponden a la distancia entre el origen y la intersección de las linias que pasan por P y cortan perpendicularmente los ejes; decimos que a_1 es la ***coordenada x*** de P y a_2 es la ***coordenada y*** de P.

De forma similar, los puntos del espacio se pueden representar como ternas ordenadas de números reales. Para ellos, elegimos tres rectas perpendiculares entre sí que se corten en un punto del espacio. Estas rectas se denominan ***eje x, eje y*** y ***eje z***, y el punto en que se cortan es el ***origen***. Decimos que a_1 es la ***coordenada x***, a_2 es la ***coordenada y*** y a_3 es la ***coordenada z*** de P.

Vamos a emplear la siguiente notación para la recta, el plano y el espacio tridimensional:

1. La recta de los números reales se denota por $\mathbb{R}^1$ o simplemente $\mathbb{R}$.
2. El conjunto de los pares ordenados (x, y) de números reales de designa como $\mathbb{R}^2$.
3. El conjunto de las ternas ordenadas (x, y, z) de números reales se designa como $\mathbb{R}^3$.

Suma de vectores y multiplicación por un escalar

La operación de la suma se puede extender de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$ y a $\mathbb{R}^3$. Para $\mathbb{R}^3$, se hace como sigue.

Dadas las dos ternas (a_1, a_2, a_3) y (b_1, b_2, b_3), definimos su ***suma*** como

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

El elemento $(0, 0, 0)$ se denomina ***elemento cero*** (o simplemente cero) de $\mathbb{R}^3$. El elemento $(-a_1, -a2, -a_3)$ es el ***opuesto*** de (a_1, a_2, a_3). Cuando se suma un vector con su opuesto, el resultado es cero.

Dado un escalar (número real) α y una terna (a_1, a_2, a_3), definimos la ***multiplicación por un escalar*** como

$$\alpha(a_1, a_2, a_3) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)$$

La suma de ternas y la multiplicación por un escalar satisfacen las siguientes propiedades:

1. asociativa; $(\alpha\beta)(a_1, a_2, a_3) = \alpha[\beta(a_1, a_2, a_3)]$
2. distributiva; $(\alpha + \beta)(a_1, a_2, a_3) = \alpha(a_1, a_2, a_3) + \beta(a_1, a_2, a_3)$

3. distributiva; $\alpha[(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3)] = \alpha(a_1, a_2, a_3) + \alpha(b_1, b_2, b_3)$

4. propiedad del cero; $\alpha(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$

5. propiedad del cero; $0(a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0)$

6. propiedad del elemento unidad; $1(a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2, a_3)$

Geometría de las operaciones vectoriales

Definimos un ***vector*** como un segmento recto que nace en el origen; es decir, un segmento recto con un tamaño y una dirección específicos que parte del origen. Los vectores suelen denotarse como $\overrightarrow{a}$.

Usando esta definición de vector, asociamos con cada vector $\overrightarrow{a}$ el punto (a_1, a_2, a_3) donde termina dicho vector, recíprocamente, podemos asociar un vector con cada punto en el espacio. Por tanto, identificaremos $\overrightarrow{a}$ con (a_1, a_2, a_3) y escribiremos $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$. La terna $(0, 0, 0)$ se denota como $\overrightarrow{0}$. Decimos que a_1, a_2 y a_3) son las ***componentes*** de $\overrightarrow{a}$, o si pensamos en $\overrightarrow{a}$ como un punto, decimos que son sus ***coordenadas***.

Dos vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ son iguales si y sólo si $a_1 = b_1, a_2 = b_2$ y $a_3 = b_3$. Geométricamente, esto quiere decir que $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ tienen la misma dirección y sentido, y la misma longitud.

Geométricamente, definimos la suma de vectores de la siguiente forma. En el plano que contiene las vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$, se forma el paralelogramo cuyos lados adyacentes son $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$. La suma $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ es el segmento que parte del origen y recorre la diagonal del paralelogramo.

Cuando el extremo inicial de los vectores se encuentra en el origen, hablamos de ***vectores fijos***. Cuando el extremo inicial de los vectores se encuentra en cualquier otro punto, entonces diremos que tenemos ***vectores libres*** o simplemente ***vectores***.

Vectores Los vectores (también denominados *vectores libres*) se representan mediante segmentos de recta dirigidos en [el plano o] espacio con extremo inicial (cola) y un extremo final (cabeza). Los segmentos de recta dirigidos obtenidos a partir de otro mediante una traslación en paralelo (sin giro) representan el mismo vector.

Las componentes (a_1, a_2, a_3) de $\overrightarrow{a}$ tienen las longitudes (con signo) de las proyecciones de $\overrightarrow{a}$ sobre los tres ejes de coordenadas; de forma equivalente, quedan definidas colocando la cola de $\overrightarrow{a}$ en el origen y haciendo que la cabeza se coloque en el punto (a_1, a_2, a_3). Así escribimos $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

La multiplicación de vectores por un escalar también tiene una interpretación geometrica. Si α es un escalar y $\overrightarrow{a}$ un vector, definimos $\alpha\overrightarrow{a}$ como un vector cuya longitud es $|\alpha|$ veces la longitud de $\overrightarrow{a}$ y que tiene el mismo sentido que $\overrightarrow{a}$ si $\alpha > 0$ y sentido opuesto si $\alpha < 0$

Vectores de la base canónica

Para describir vectores en el espacio, es conveniente presentar tres vectores especiales a lo largo de los ejes x, y y z:

i: el vector de componentes $(1, 0, 0)$

j: el vector de componentes $(0, 1, 0)$

k: el vector de componentes $(0, 0, 1)$

Sea $\overrightarrow{a}$ cualquier vector y sean (a_1, a_2, a_3) sus componentes. entonces
$\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{k}$

El vector que une dos puntos

Si el punto P tiene coordenadas (x, y, z) y P'tiene coordenadas (x', y', z'), entonces el vector $\overrightarrow{PP'}$ que va desde la punta de P hasta las punta de P'tiene las componentes $(x' - x, y' - y, z' - z)$.

Ecuaciones de rectas

Vamos a definir la *ecuación de una línea l que pasa por el extremo del vector $\overrightarrow{a}$ y tiene la dirección del vector $\overrightarrow{v}$*; es decir la recta l es paralela al vector $\overrightarrow{v}$.

Según t recorre el conjunto de los números reales, los puntos de la forma $t\overrightarrow{v}$ son todos los múltiplos escalares del vector $\overrightarrow{v}$ y por tanto recorre los puntos de la recta *que pasa por el origen* en la dirección de $\overrightarrow{v}$. Como cada punto de l es el extremo de la diagonal de un paralelogramo con lados $\overrightarrow{a}$ y $t\overrightarrow{\overrightarrow{v}}$ para algún valor real de t, comprobamos que todos los puntos de l son de la forma $\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{v}$. Por tanto, la recta l se puede expresar mediante la ecuación $\overrightarrow{l}(t) = \overrightarrow{a} + t\overrightarrow{v}$. En este caso, decimos que l está expresada ***en forma paramétrica*** con el parámetro t.

Forma punto-vector de una recta La ecuación de la recta l que pasa por la punta de $\overrightarrow{a}$ y apunta en la dirección del vector $\overrightarrow{v}$ es $\overrightarrow{l}(t) = \overrightarrow{a} + t\overrightarrow{v}$, donde el parámetro t toma todos los valores reales. Usando coordenadas, las ecuaciones son

$$\begin{aligned} x &= x_1 + at \\ y &= y_1 + bt \\ z &= z_1 + ct \end{aligned}$$

donde $\overrightarrow{a} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$. Para rectas en el plano xy, no es necesario tener en cuenta la componente z.

Ecuaciones paramétricas de una recta que pasa por dos puntos Las ecuaciones paramétricas de la recta l que pasa por los puntos $P = (x_1, y_1, z_1)$ y $Q = (x_2, y_2, z_2)$ son

$$\begin{aligned} x &= x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y &= y_1 + (y_2 - y_1)t \\ z &= z_1 + (z_2 - z1)t \end{aligned}$$

donde (x, y, z) es un punto genérico de l y el parámetro t recorre todos los números reales.

Eliminando t también podemos escribir estas ecuaciones como
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

1.2. Producto escalar, longitud y distancia

Producto escalar

Sean $\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{k}$ y $\overrightarrow{b} = b_1\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j} + b_3\overrightarrow{k}$. Definimos el ***producto escalar*** de $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$, y lo expresamos como $a \cdot b$, como el número real
$$a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Si $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{c}$ son vectores en $\mathbb{R}^3$ y α y β son números reales, entonces

1. $0 \leqslant \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}$; $\quad \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = 0$ si y sólo si $\overrightarrow{a} = 0$.
2. $\alpha\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \alpha(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})$ y $\overrightarrow{a} \cdot \beta\overrightarrow{b} = \beta(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})$.
3. $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}$ y $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}$.
4. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$

A partir del teorema de Pitágoras se deduce que la ***longitud*** del vector $\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{k})$ es $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. La longitud del vector $\overrightarrow{a}$ se denota mediante $||\overrightarrow{a}||$. Esta magnitud a menudo se denomina ***norma*** de $\overrightarrow{a}$. Puesto que $a \cdot a = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$, se sigue que
$$||\overrightarrow{a}|| = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a})^{1/2}$$

Vectores unitarios

Los vectores con norma 1 se denominan ***vectores unitarios***. Para cualquier vector $\overrightarrow{a}$, se tiene que $\overrightarrow{a}/||\overrightarrow{a}||$ es un vector unitario; cuando dividimos $\overrightarrow{a}$ entre $||\overrightarrow{a}||$, decimos que hemos ***normalizado*** $\overrightarrow{a}$.

En el plano, definimos el vector $\overrightarrow{i}_\theta =$

Distancia

Producto escalar y longitud Dados $\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{k}$ y $\overrightarrow{b} = b_1\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j} + b_3\overrightarrow{k}$, su ***producto escalar*** es
$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$
y la ***longitud*** de $\overrightarrow{a}$ es
$$||\overrightarrow{a}|| = \sqrt{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$
Para ***normalizar*** un vector $\overrightarrow{a}$, basta con hacer
$$\frac{\overrightarrow{a}}{||\overrightarrow{a}||}$$

Distancia La ***distancia entre*** los extremos de $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ es $||\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}||$ y la ***distancia entre*** P y Q es $||\overrightarrow{PQ}||$

Ángulo entre dos vectores

Teorema 1 Sean $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$ y sea θ, donde $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, el ángulo entre ellos. entonces
$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = ||a||||b|| \cos\theta$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz

Corolario Desigualdad de Cauchy-Schwarz Para cualquier par de vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$, se tiene
$$|\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}| \leqslant ||a||||b||$$
donde la igualdad se satisface si y sólo si $\overrightarrow{a}$ es un múltiplo escalar de $\overrightarrow{b}$, o alguno de ellos es $\overrightarrow{0}$.

Si $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ son vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$ y θ es el ángulo que forman, entonces $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$ si y sólo si $\cos\theta = 0$. Por tanto, *el producto escalar de dos vectores no nulos es cero si y sólo si los vectores son perpendiculares.*

A menudo diremos que los vectores perpendiculares son ***ortogonales***. Los vectores de la base canónica $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ y $\overrightarrow{k}$ son ortogonales entre sí y tienen longitud 1; estos sistemas de vectores se llaman ***ortonormales.*** Vamos a adoptar el convenio de que el vector cero es ortogonal a todos los vectores.

Proyección ortogonal

Si $\overrightarrow{v}$ es un vector y l es la recta que pasa por el origen en la dirección del vector $\overrightarrow{a}$, entonces la ***proyección ortogonal de*** $\overrightarrow{v}$ ***sobre*** $\overrightarrow{a}$ es el vector $\overrightarrow{p}$ cuyo extremo final se obtiene trazando una recta perpendicular a l desde el extremo final de $\overrightarrow{v}$.

Proyección ortogonal La ***proyección ortogonal*** de $\overrightarrow{v}$ sobre $\overrightarrow{a}$ es el vector
$$\overrightarrow{p} = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{a}||^2}\overrightarrow{a}$$

Desigualdad triangular

Teorema 2 Desigualdad triangular Para dos vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ cualesquiera en el espacio,
$$||\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|| \leqslant ||\overrightarrow{a}|| + ||\overrightarrow{b}||$$

Aplicaciones de lso vectores a la física

El ***vector desplazamiento*** $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{PQ}$ que une P con Q nos dice en qué sentido y qué distancia tenemos que recorrer para ir del punto P al punto Q.

Si un objeto se mueve uniformemente a lo largo de una recta, el ***vector velocidad*** es *el vector desplazamiento desde su posición en cualquier instante a su posición 1 unidad de tiempo posterior.*

Desplazamiento y velocidad Si un objeto tiene un vector velocidad (constante) $\overrightarrow{v}$, entonces en t unidades de tiempo, el vector desplazamiento resultante del objeto es $\overrightarrow{d} = t\overrightarrow{v}$; por tanto, después de $t = 1$, el vector desplazamiento es igual al vector velocidad.

1.3. Matrices, determinantes y producto vectorial

Matrices 2×2

Definimos una ***matriz*** 2×2 como una tabla u ordenación (*array*)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

donde $a_{11}, a_{1,2}, a_{2,1}$ y a_{22} son cuatro escalares.

El ***determinante***de dicha matriz es el número real definido por la ecuación

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Matrices 3×3

Una ***matriz*** 3×3 es una ordenación

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

donde, de nuevo, cada a_{ij} es un escalar; a_{ij} denota el elemento de la matriz que está en la fila i-ésima y la columna j-ésima. Definimos el ***determinante*** de una matriz 3×3 mediante la regla

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

La regla que hay que aprender es que recorremos la primera fila multiplicando a_{1j} por el determinante de la matriz 2×2 obtenida al eliminar la primera fila y la j-ésima columna, y despues sumamos todo, recordando poner un signo menos delante del término a_{12}

Propiedades de los determinantes

- El intercambio de dos filas o de dos columnas da lugar a un cambio de signo en el determinante.

- Podemos sacar como factor común escalares de cualquier fila o columna. En particular, si cualquier fila o columna contiene únicamente ceros, el valor del determinante es cero.

- Si cambiamos una fila (o columna) sumándole otra fila (o, respectivamente, otra columna) el valor del determinante no cambia.

- Podemos desarrollar un determinante 3×3 recorriendo cualquier fila o columna usando los signos indicados en el siguiente patrón

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Producto vectorial

Definición de producto vectorial Supongamos que $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$ y $\vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$ son vectores en $\mathbb{R}^3$. El ***producto vectorial*** o ***producto cruz*** de $\vec{a}$ y $\vec{b}$, denotado por $\vec{a} \times \vec{b}$, se define como el vector

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

o, formalmente,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Algunas propiedades algebraicas del producto vectorial, si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son vectores y α, β y γ son escalares, entonces

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
2. $\vec{a} \times (\beta \vec{b} + \gamma \vec{c}) = \beta(\vec{a} \times \vec{b}) + \gamma(\vec{a} \times \vec{c})$ y $(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) \times \vec{c} = \alpha(\vec{a} \times \vec{c}) + \beta(\vec{b} \times \vec{c})$

Observese que $\vec{a} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{a})$, por lo tanto, $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$. En particular,

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}, \quad \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}, \quad \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$

También,

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

Dados tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, el número real

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

se denomina ***producto mixto*** de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ (en este orden).

Entonces,

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3$$

Este es el desarrollo por menores de la tercera fila del determinante, de modo que

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Si $\vec{c}$ es un vector del plano generado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, entonces la tercera fila del determinante anterior es una combinación lineal de la primera y la segunda filas, y por tanto $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{0}$. En otra palabras, *el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es ortogonal a cualquier vector del plano generado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$.*

Si calculamos la longitud de $\vec{a} \times \vec{b}$, observamos que

$$||\vec{a} \times \vec{b}||^2 = ||a||^2 ||b||^2 \operatorname{sen}^2 \theta$$

donde θ es el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Sacando raíces cuadradas y sabiendo que $\sqrt{k^2} = |k|$, obtenemos que $||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}|| ||\vec{b}|| \operatorname{sen} \theta$.

Vemos que esta longitud es también el area del paralelogramo (con base $||\overrightarrow{a}||$ y altura $||\overrightarrow{b}\,\mathrm{sen}\,\theta||$) generado por $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$.

Existen dos vectores que satisfacen las propiedades anteriormente descritas, la siguiente regla de la mano derecha"determina la dirección de $a \times b$ en general. La *mano derecha* se coloca de tal modo que los dedos se curven de $\overrightarrow{a}$ hacia $\overrightarrow{b}$ a través del ángulo *agudo* θ que forman ambos. Entonces el dedo pulgar apunta en la dirección de $a \times b$.

Producto vectorial *Definición geomética:* $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ es el vector tal que:

1. $||\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|| = ||\overrightarrow{a}||||\overrightarrow{b}||\,\mathrm{sen}\,\theta$, el área del paralelogramo generado por $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$; $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

2. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ es perpendicular a $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$, y la terna $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$ satisface la regla de la mano derecha.

Fórmula con componentes:

$$(a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{k}) \times (b_1\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j} + b_3\overrightarrow{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\overrightarrow{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\overrightarrow{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\overrightarrow{k}$$

Reglas algebraicas:

1. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ si y sólo si $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ son paralelos o si $\overrightarrow{a}$ o $\overrightarrow{b}$ es cero.

2. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a})$.

3. $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}$.

4. $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$.

5. $(\alpha\overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \alpha(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$.

Tabla de multiplicación:

		Segundo factor		
	$\times$	i	j	k
	i	0	k	$-j$
Primer	j	$-k$	0	i
factor	k	j	$-i$	0

Geometría de los determinantes

Geometría de los determinantes 2×2 El valor absoluto del determinante $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ es el área del paralelogramo cuyos lados adyacentes son los vectores $\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j}$ y $\overrightarrow{b} = b_1\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j}$. El signo del determinante es $+$ cuando el ángulo que forman $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$, al girar en sentido antihorario, es menor que π.

Geometría de los determinantes 3×3 El valor absoluto del determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

es el volumen del paralelepípedo cuyos lados adyacentes son los vectores

$$\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{k}, \quad \overrightarrow{b} = b_1\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j} + b_3\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{c} = c_1\overrightarrow{i} + c_2\overrightarrow{j} + c_3\overrightarrow{k}.$$

Ecuación de un plano

Sea $\mathcal{P}$ un plano en el espacio, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto en dicho plano y supongamos que $\overrightarrow{n} = A\overrightarrow{i} + B\overrightarrow{j} + C\overrightarrow{k}$ es un vector normal a dicho plano. Sea $P = (x, y, z)$ un punto en $\mathbb{R}^3$. Entonces P esta en el plano $\mathcal{P}$ si y sólo si el vector $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0)\overrightarrow{i} + (y - y_0)\overrightarrow{j} + (z - z_0)\overrightarrow{k}$ es perpendicular a $\overrightarrow{n}$, es decir, $\overrightarrow{P_0P} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.

Ecuación de un plano en el espacio La ecuación del plano $\mathcal{P}$ que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) y tiene por vector normal $\overrightarrow{n} = A\overrightarrow{i} + B\overrightarrow{j} + C\overrightarrow{k}$ es

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0;$$

es decit, $(x, y, z) \in \mathcal{P}$ si y sólo si

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

donde $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Los cuatro números A, B, C y D no están determinados de forma unívoca por el plano $\mathcal{P}$. Observese que (x, y, z) satisface la ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ si y sólo si también satisface la relación

$$(\lambda A)x + (\lambda B)y + (\lambda C)z + (\lambda D) = 0$$

para cualquier constante $\lambda \neq 0$. Además, si A, B, C, D y A', B', C', D' determinan el mismo plano, entonces $A = \lambda A', B = \lambda B', C = \lambda C', D = \lambda D'$ para un escalar λ. En consecuencia, A, B, C, D están ***determinados por*** $\mathcal{P}$ ***salvo un múltiplo escalar.***

Dos planos se llaman ***paralelos*** cuando sus vectores normales son paralelos.

Distancia de un punto a un plano

La distancia desde (x_1, y_1, z_1) al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ es

$$\text{Distancia} = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

1.4. Coordenadas cilíndricas y esféricas

Las coordenadas polares (r, θ) en el plano están relacionadas con las coordenadas rectangulares (x, y) mediante las fórmulas $x = r\cos\theta$ y $y = r\sin\theta$, donde normalmente tomamos $0 \leqslant r$ y $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Coordenadas cilíndricas

Definición Las ***coordenadas cilíndricas*** (r, θ, z) de un punto (x, y, z) están definidas por

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$$

Observese, que si se cumplen las condiciones $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$ y si $r = a$ es una constante positiva, entonces el lugar geométrico de estos puntos es un cilindro de radio a.

Coordenadas esféricas

Dado un punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, sea

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

y representamos x e y mediante coordenadas polares en el plano xy

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. La coordenada z viene dada por

$$z = \rho\cos\phi,$$

donde ϕ es el ángulo (entre 0 y π, ambos inclusive) que forma el radio vector $\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ con el eje positivo z, en el plano que contiene el $\overrightarrow{v}$ y el eje z. Utilizando el producto escalar podemos expresar ϕ como sigue:

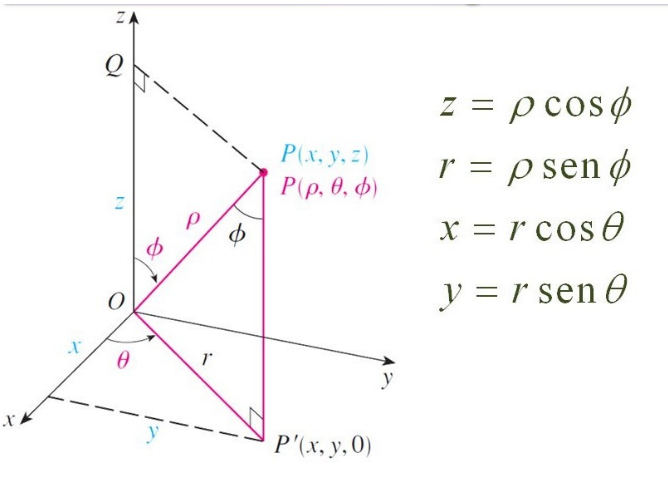
$$\cos\phi = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{k}}{||\overrightarrow{v}||}$$

Definición Las ***coordenadas esféricas*** de (x, y, z) en el espacio son las ternas (ρ, θ, ϕ), y se definen como sigue:

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\phi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\phi,$$

donde

$$0 \leqslant \rho, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi.$$



1.5. Espacio euclídeo n-dimensional

Vectores en el espacio n-dimensional

Podemos pensar en $\mathbb{R}^3$ de estas formas:

1. Algebraicamente, como un conjunto de ternas (x, y, z), donde x, y y z son números reales.
2. Geométricamente, como un conjunto de segmentos rectos dirigidos.

Estas dos formas de ver $\mathbb{R}^3$ son equivalentes. Para hacer una generalización es más fácil utilizar la definición 1. Podemos definir $\mathbb{R}^n$, donde n es un entero positivo, como el conjunto de todas las n-tuplas ordenadas $(x_1, x_2, ..., x_n)$, donde los x_i son números reales.

El conjunto R^n así definido se conoce como ***espacio euclidiano n-dimensional*** y sus elementos, que se denotan mediante $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ y se llaman ***vectores*** o ***vectores n-dimensionales***. Haciendo $n = 1, 2$ o 3, obtenemos la recta, el plano y el espacio tridimensional, respectivamente.

En R^n se definen la suma y la multiplicación por un escalar como:

1. $(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$
2. para cualquier número real α,

$$\alpha(x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$$

Los n vectores

$$\overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0, ..., 0), \quad \overrightarrow{e_2} = (0, 1, 0, ..., 0), \quad ...$$

$$..., \quad \overrightarrow{e_n} = (0, 0, ..., 0, 1)$$

se denominan ***vectores de la base canónica*** de R^n y generalizan los tres vectores unitarios otrogonales $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ de $\mathbb{R}^3$.

Para $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ de R^n, definimos el ***producto escalar*** de $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$ como $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$.

Definimos el concepto de ***longitud*** o ***norma*** de un vector $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$ mediante la fórmula

$$||\overrightarrow{x}|| = \sqrt{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$$

Teorema 3 Para $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z} \in \mathbb{R}^3$ y α, β, números reales, tenemos

1. $(\alpha\overrightarrow{x} + \beta\overrightarrow{y}) \cdot \overrightarrow{z} = \alpha(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{z}) + \beta(\overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{z})$
2. $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{x}$
3. $0 \leqslant \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x}$
4. $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} = 0$ si y sólo si $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$

Teorema 4 Desigualdad de Cauchy-Schwarz en R^n Sean $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Entonces

$$|\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}| \leqslant ||\overrightarrow{x}||||\overrightarrow{y}||$$

Corolario **Desigualdad triangular en $\mathbb{R}^n$** Sean $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Entonces

$$||\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}|| \leqslant ||\overrightarrow{x}|| + ||\overrightarrow{y}||$$

Matrices generales

Podemos considerar matrices $m \times n$, que son ordenaciones de mn números:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

También escribiremos A como $[a_{ij}]$. Definimos la suma y la multiplicación por un escalar componente a componente, como hicimos con los vectores. Dadas dos matrices $m \times n$, A y B, podemos sumarlas para obtener una nueva matriz $m \times n$, $C = A + B$, cuyo ij-ésimo elemento c_{ij} es la suma de a_{ij} y b_{ij}. Está claro que $A + B = B + A$.

Dado un escalar δ y una matriz $m \times n$, A, podemos multiplicar A por δ para obtener una nueva matriz $m \times n$, $\delta A = C$, cuyo elemento ij-ésimo, c_{ij}, es el producto δa_{ij}.

Si $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son matrices $n \times n$, entonces el producto $AB = C$ tiene elementos dados por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$

que es el producto escalar de la fila i-ésima de A por la columna j-ésima de B.

De forma similar, podemos multiplicar una matriz $m \times n$ por una matriz $m \times p$ mediante la misma regla. Observese que para AB esté definido, el número de *columnas* de A tiene que ser igual al número de *filas* de B.

Cualquier matriz $m \times n$, determina una aplicación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ definida como sigue: sea $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$; consideremos la matriz columna $n \times 1$ asociada a $\overrightarrow{x}$

$$\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}$$

y multiplicamos A por $\overrightarrow{x}$ para obtener una nueva matriz $m \times 1$

$$A\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ ... \\ y_m \end{bmatrix} = \overrightarrow{y}$$

que corresponde al vector $\overrightarrow{y} = (y_1, ..., y_m)$.

La regla $\overrightarrow{x} \longmapsto A\overrightarrow{x}$ define por lo tanto una aplicación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Esta aplicación es lineal; es decir, satisface

$$\begin{matrix} A(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}) = A\overrightarrow{x} + A\overrightarrow{y} \\ A(\alpha\overrightarrow{x}) = \alpha(A\overrightarrow{x}) \end{matrix} \quad , \quad \alpha \text{ es un escalar.}$$

Propiedades de las matrices

En general la multiplicación de matrices no es ***conmutativa***. Se dice que una matriz $n \times n$ es ***invertible*** si existe una matriz B tal que $AB = BA = I_n$, donde

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

es la matriz identidad $n \times n : I_n$ y tiene la propiedad de que $I_n C = C I_n = C$ para cualquier matriz $n \times n$ C. Denotamos B por A^{-1} y la llamamos la ***inversa*** de A. La inversa, cuando existe, es única.

2. Diferenciación

2.1. Geometría de funciones con valores reales

Funciones y aplicaciones

Sea f una función cuyo dominio es un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ y que tiene un rango contenido en $\mathbb{R}^m$. Con esto queremos decir que a cada $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n) \in A$, f asigna un valor $f(x)$, una m-tupla de $\mathbb{R}^m$. Estas funciones se denominan ***funciones con valores vectoriales*** si $m > 1$ y ***funciones con valores escalares*** si $m = 1$.

En general, la notación $\overrightarrow{x} \longmapsto f(\overrightarrow{x})$ resulta útil para indicar el valor al que se envía un punto $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$. Escribimos $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ para indicar que A es el dominio y $\mathbb{R}^m$ contiene el recorrido de f. Estas funciones f se denominan ***funciones de varias variables*** si $A \subset \mathbb{R}^n$, $n > 1$.

Cuando $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, decimos que f es una ***función de n variables con valores reales y dominio*** U

Gráficas de funciones

Definición **Gráfica de una función** Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Definimos la ***gráfica*** de f como el subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ formado por los puntos

$$(x_1, ..., x_n; f(x_1, ..., x_n))$$

de $\mathbb{R}^{n+1}$ en los que $(x_1, ..., x_n)$ es un punto de U.

Para $n = 1$, la gráfica es una curva en $\mathbb{R}^2$, para $n = 2$ es una superficie en $\mathbb{R}^3$, pero para $n = 3$ introducimos la idea de conjuntos de nivel para poder visualizar mejor el concepto.

Conjuntos, curvas y superficies de nivel

Un ***conjunto de nivel*** es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ en el que f es constante.

El comportamiento o estructura de una función quedan determinados en parte por la forma de sus conjuntos de nivel. Los conjuntos de nivel también resultan útiles para entender las funciones de dos variables $f(x, y)$, en cuyo caso hablamos de ***curvas de nivel***.

Definición Curvas y superficies de nivel Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces el ***conjunto de nivel del valor*** c se define como el conjunto de aquellos puntos $\overrightarrow{x} \in U$ en los que $f(\overrightarrow{x}) = c$. Si $n = 2$ hablamos de una ***curva de nivel***. En símbolos, el conjunto de nivel de valor c se escribe

$$\{\overrightarrow{x} \in U | f(\overrightarrow{x}) = c\} \subset \mathbb{R}^n$$

Obsérvese que el conjunto de nivel siempre está en el dominio de la función.

El método de las secciones

Por ***sección*** de la gráfica de f entendemos la intersección de la gráfica con un plano (vertical).

2.2. Límites y continuidad

Conjuntos abiertos

Sea $\overrightarrow{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y sea r un número real positivo. El ***disco abierto*** de radio r y centro $\overrightarrow{x}_0$ se define como el conjunto de puntos $\overrightarrow{x}$ tales que $||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_0|| < r$. Este conjunto se denota mediante $D_r(\overrightarrow{x}_0)$ y es el conjunto de puntos $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ cuya distancia a $\overrightarrow{x}_0$ es menor que r.

Definición Conjuntos abiertos Sea $U \in \mathbb{R}^n$. Llamamos a U ***conjunto abierto*** si para todo punto $\overrightarrow{x}_0$ en U existe $r > 0$ tal que $D_r(\overrightarrow{x}_0)$ está contenido dentro de U.

Establecemos por convenio que el conjunto vacío $\emptyset$ (el conjunto que no tiene elementos) es abierto.

Teorema 1 Para todo $\overrightarrow{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y para todo $r > 0$, $D_r(\overrightarrow{x}_0)$ es un conjunto abierto.

Por ***entorno*** de $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ se entiende un conjunto abierto U que contiene al punto $\overrightarrow{x}$.

Frontera

Definición Puntos frontera Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Un punto $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ se llama ***punto frontera*** de A si todo entorno de $\overrightarrow{x}$ contiene al menos un punto de A y al menos un punto que no está en A.

El mismo $\overrightarrow{x}$ de la definición anterior puede o no estar en A.

Límites

A continuación vamos a desarrollar el método de los entornos para definir los límites. El método épsilon-delta se deja como estudio opcional al final de la sección.

Definición Límite Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, donde A es un conjunto abierto. Sea $\overrightarrow{x}_0$ un punto de A o un punto frontera de A y sea N un entorno de $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$. Decimos que f ***finaliza en*** N ***cuando*** $\overrightarrow{x}$ ***tiende a*** $\overrightarrow{x}_0$ si existe un entorno U de $\overrightarrow{x}_0$ tal que $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{x}_0, \overrightarrow{x} \in U$ y $\overrightarrow{x} \in A$ implican $f(\overrightarrow{x}) \in N$. Decimos que $f(\overrightarrow{x})$ ***tiende a*** $\overrightarrow{b}$ cuando $\overrightarrow{x}$ tiende a $\overrightarrow{x}_0$, o simbólicamente,

$$\lim_{x \to x_0} f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b} \quad \text{o} \quad f(\overrightarrow{x}) \to \overrightarrow{b} \text{ cuando } \overrightarrow{x} \to \overrightarrow{x}_0,$$

si, dado *cualquier* entorno N de $\overrightarrow{b}$, f finaliza en N cuando $\overrightarrow{x}$ tiende a $\overrightarrow{x}_0$ [es decir, "$f(\overrightarrow{x})$ está cerca de $\overrightarrow{b}$ si $\overrightarrow{x}$ está cerca de $\overrightarrow{x}_0$"]. Puede ocurrir que cuando $\overrightarrow{x}$ tiende a $\overrightarrow{x}_0$, los valores de $f(\overrightarrow{x})$ no se acerquen a ningún valor concreto. En este caso, decimos que $\lim_{x \to x_0} f(\overrightarrow{x})$ ***no existe***.

Propiedades de los límites

Teorema 2 Unicidad del límite Si $\lim_{x \to x_0} f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b}_1$ y $\lim_{x \to x_0} f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b}_2$, entonces $\overrightarrow{b}_1 = \overrightarrow{b}_2$.

Teorema 3 Propiedades de los límites Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\overrightarrow{x}_0$ un punto de A o un punto frontera de A, $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}$; entonces:

1. Si $\lim_{x \to x_0} f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b}$, entonces $\lim_{x \to x_0} cf(\overrightarrow{x}) = c\overrightarrow{b}$, donde $cf : A \to \mathbb{R}^m$ se define mediante $\overrightarrow{x} \longmapsto c(f(\overrightarrow{x}))$.
2. Si $\lim_{x \to x_0} f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b}_1$ y $\lim_{x \to x_0} g(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b}_2$, entonces $\lim_{x \to x_0} (f + g)(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b}_1 + \overrightarrow{b}_2$, donde $(f + g) : A \to \mathbb{R}^m$ se define mediante $\overrightarrow{x} \longmapsto f(\overrightarrow{x}) + g(\overrightarrow{x})$.
3. Si $m = 1$, $\lim_{x \to x_0} f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b}_1$, y $\lim_{x \to x_0} g(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b}_2$, entonces $\lim_{x \to x_0} fg(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b}_1\overrightarrow{b}_2$, donde $(fg) : A \to \mathbb{R}$ se define mediante $\overrightarrow{x} \longmapsto f(\overrightarrow{x})g(\overrightarrow{x})$.
4. Si $m = 1$, $\lim_{x \to x_0} f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b} \neq 0$ y $f(x) \neq 0$ para todo $\overrightarrow{x} \in A$, entonces $\lim_{x \to x_0} 1/f(\overrightarrow{x}) = 1/\overrightarrow{b}$, donde $1/f : A \to \mathbb{R}$ se define mediante $\overrightarrow{x} \longmapsto 1/f(\overrightarrow{x})$.
5. Si $f(\overrightarrow{x}) = (f_1(\overrightarrow{x}), ..., f_m(\overrightarrow{x}))$ donde $f_i : A \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., m$, son las componentes de la función f, entonces $\lim_{x \to x_0} f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b} = (b_1, ..., b_m)$ si y sólo si $\lim_{x \to x_0} f_i(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b}_i$ para cada $i = 1, ..., m$.

Funciones continuas

Definición Continuidad Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función dada con dominio A. Sea $\overrightarrow{x}_0 \in A$. Decimos que f es ***continua*** en $\overrightarrow{x}_0$ si y sólo si

$$\lim_{x \to x_0} f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x}_0).$$

Si decimos solamente que f es ***continua***, queremos decir que f es continua en cada punto de A. Si f no es continua en $\overrightarrow{x}_0$ decimos que f es ***discontinua*** en $\overrightarrow{x}_0$. Si f es discontinua en algún punto de su dominio, decimos que f es ***discontinua***.

Teorema 4 Propiedades de las funciones continuas Supóngase que $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y sea c un número real.

1. Si f es continua en $\overrightarrow{x}_0$, también lo es cf, donde $(cf)(\overrightarrow{x}) = c[f(\overrightarrow{x})]$.

2. Si f y g son continuas en $\overrightarrow{x}_0$, también lo es $f + g$, donde la suma de f y g se define como $(f + g)(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x})g(\overrightarrow{x})$.

3. Si f y g son continuas en $\overrightarrow{x}_0$ y $m = 1$, entonces la función producto fg definida por $(fg)(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x})g(\overrightarrow{x})$ es continua en $\overrightarrow{x}_0$.

4. Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua en $\overrightarrow{x}_0$ y no se anula en A, entonces el cociente $1/f$ es continuo en $\overrightarrow{x}_0$, donde $(1/f)(\overrightarrow{x}) = 1/f(\overrightarrow{x})$.

5. Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $f(\overrightarrow{x}) = (f_1(\overrightarrow{x}), ..., f_m(\overrightarrow{x}))$, entonces f es continua en $\overrightarrow{x}_0$ si y sólo si cada una de las funciones con valores reales $f_1, ..., f_m$ es continua en $\overrightarrow{x}_0$.

Composición

Si g aplica A en B y f aplica B en C, la ***composición de** g **con** f*, o de f sobre g, que se denota por $f \circ g$, aplica A en C y lleva $\overrightarrow{x} \longmapsto f(g(\overrightarrow{x}))$.

Teorema 5 Continuidad de las composiciones Sea $g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y sea $f : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$. Supongamos que $g(A) \subset B$, de modo que $f \circ g$ está definida en A. Si g es continua en $\overrightarrow{x}_0 \in A$ y f es continua en $\overrightarrow{y}_0 = g(\overrightarrow{x}_0)$, entonces $f \circ g$ es continua en $\overrightarrow{x}_0$.

Límites en términos de ϵ y δ

Teorema 6 Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y sea $\overrightarrow{x}_0$ un punto de A o un punto frontera de A. Entonces $\lim\limits_{x \to x_0} f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b}$ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo $\overrightarrow{x} \in A$ que satisface $0 < ||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_0|| < \delta$ se tiene que $||f(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{b}|| < \epsilon$.

Teorema 7 Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada. Entonces f es continua en $\overrightarrow{x}_0$ si y sólo si para todo número $\epsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

$$\overrightarrow{x} \in A \quad \text{y} \quad ||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_0|| < \delta$$

implica

$$||f(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{x}_0)|| < \epsilon$$

Derivadas parciales

Definición Derivadas parciales Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y supongamos que $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función con valores reales. Entonces $\partial f/\partial x_1, ..., \partial f/\partial x_n$, las ***derivadas parciales*** de f respecto de la primera, segunda, ..., n-ésima variable son las funciones de n variables con valores reales, que en el punto $(x_1, ..., x_n) = \overrightarrow{x}$, se definen como

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, ..., x_n) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, ..., x_j + h, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_n)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(\overrightarrow{x} + h\overrightarrow{e}_j) - f(\overrightarrow{x})}{h}$$

si los límites existen, donde $1 \leqslant j \leqslant n$ y $\overrightarrow{e}_j$ es el vector j-ésimo de la base canónica definido por $\overrightarrow{e}_j = (0, ..., 1, ..., 0)$, con 1 en la posición j-ésima. El dominio de la función $\partial f/\partial x_j$ es el conjunto de $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ para los que el límite existe.

En otras palabras, $\partial f/\partial x_j$ es la derivada de f respecto de la variable x_j, considerando fijas las restantes variables.

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, entonces podemos escribir

$$f(x_1, ..., x_n) = (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n)),$$

de modo que podemos hablar de derivadas parciales de cada componente.

Aproximación lineal o afín

En $\mathbb{R}3$, un plano no vertical tiene una ecuación de la forma

$$z = ax + by + c$$

Si este fuera el plano tangente a la gráfica de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en (x_0, y_0), las pendientes a lo largo de los ejes x e y tienen que ser iguales a $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$, que son las variaciones de f con respecto a x e y. Por tanto $a = \partial f/\partial x$, $b = \partial f/\partial y$ (evaluadas en (x_0, y_0)). Por último podemos determinar la constante c a partir del hecho de que $z = f(x_0, y_0)$ cuando $x = x_0, y = y_0$. Así obtenemos la ***aproximación lineal***(o, con mayor precisión, ***aproximación afín***):

$$f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0),$$

que debe ser la ecuación del plano tangente a la gráfica f en (x_0, y_0) si f es "suficientemente suave".

Diferenciabilidad de funciones de dos variables

Definición Diferenciabilidad: dos variables Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Decimos que f es ***diferenciable*** en (x_0, y_0), si $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ existen en (x_0, y_0) y si

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) - \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right]}{||(x, y) - (x_0, y_0)||} \to 0$$

cuando $(x, y) \to (x_0, y_0)$. Esta ecuación especifica lo que queremos expresar cuando decimos que

$$f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0),$$

es una ***buena aproximación*** a la función f.

Plano tangente

Definición Plano tangente Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\overrightarrow{x}_0 = (x_0, y_0)$. El plano z en $\mathbb{R}^3$ definido por la ecuación

$$f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0),$$

se denomina ***plano tangente*** a la gráfica de f en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Escribimos $\mathbf{D}f(x_0, y_0)$ para denotar la matriz fila

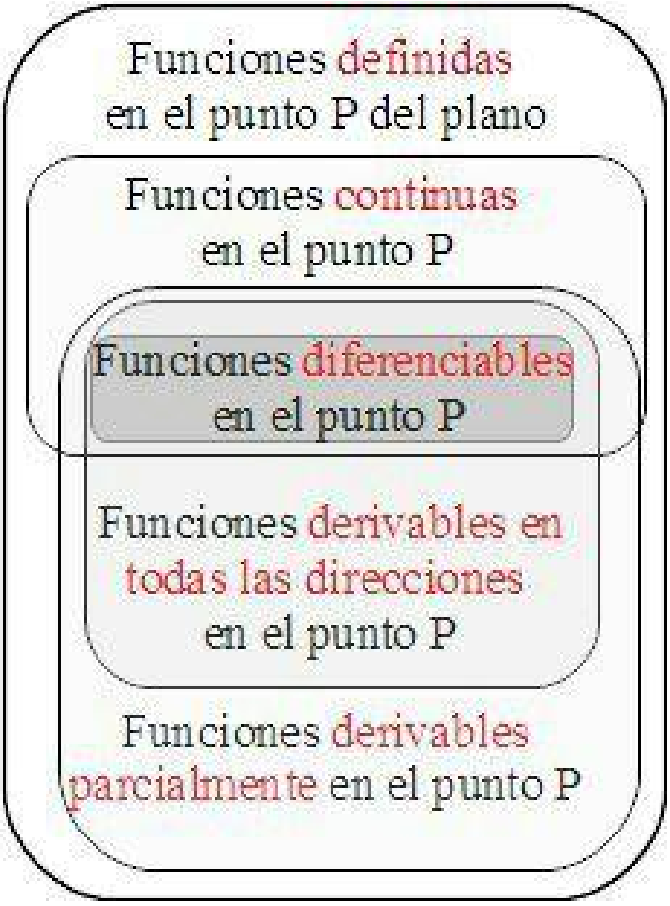
$$\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{array}\right],$$

de modo que la definición de diferenciabilidad afirma que

$$f(x_0, y_0) + \mathbf{D}f(x_0, y_0)\left[\begin{array}{c} x - x_0 \\ y - y_0 \end{array}\right]$$

$$= f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0)$$

es una buena aproximación de f cerca de (x_0, y_0). Como anteriormente, "buena"se toma en el sentido de que la expresión anterior difiere de $f(x, y)$ en algo pequeño multiplicado por $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Decimos que la expresión anterior es la ***mejor aproximación lineal*** de f cerca de (x_0, y_0).



Diferenciabilidad: caso general

La derivada $\mathbf{D}f(\overrightarrow{x}_0) = (f_1, ..., f_m)$ en un punto $\overrightarrow{x}_0$ es una matriz $\mathbf{T}$ cuyos elementos son $t_{ij} = \partial f_i/\partial x_j$ evaluados en $\overrightarrow{x}_0$.

Definición Diferenciable, n variables, m funciones Sea U un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ y sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función dada. Decimos que f es ***diferenciable*** en $\overrightarrow{x}_0 \in U$ si las derivadas parciales de f existen en $\overrightarrow{x}_0$ y si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{||f(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{x}_0) - \mathbf{T}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_0)||}{||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_0||} = 0$$

donde $\mathbf{T} = \mathbf{D}f(\overrightarrow{x}_0)$ es la matriz $m \times n$ con elementos $\partial f_i/\partial x_j$ evaluadas en $\overrightarrow{x}_0$ y $\mathbf{T}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_0)$ es el producto de $\mathbf{T}$ por $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_0$ (visto como una matriz columna). Decimos que $\mathbf{T}$ es la ***derivada*** de f en $\overrightarrow{x}_0$.

Para el caso general en el que f está definida sobre un subconjunto $\mathbb{R}^n$ y tiene valores en $\mathbb{R}^m$, la derivada es la matriz $m \times n$ dada por

$$\mathbf{D}f(\overrightarrow{x}_0) = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ ... & & ... \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{array}\right],$$

donde $\partial f_i/\partial x_j$ se evalúa en $\overrightarrow{x}_0$. La matriz $\mathbf{D}f(\overrightarrow{x}_0)$ se denomina, apropiadamente, ***matriz de derivadas parciales de f en $\overrightarrow{x}_0$***.

Gradientes

Definición Gradiente Consideramos el caso especial $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Entonces $\mathbf{D}f(\overrightarrow{x})$ es una matriz $1 \times n$:

$$\mathbf{D}f(\overrightarrow{x}) = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{array}\right].$$

Podemos formar el vector correspondiente $(\partial f/\partial x_1, ..., \partial f/\partial x_n)$, que es el ***gradiente*** de f y se denota mediante ∇f, o grad f.

Algunos teoremas básicos

Teorema 8 Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en $\overrightarrow{x}_0 \in U$. Entonces f es continua en $\overrightarrow{x}_0$.

Teorema 9 Sea $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$. Supongamos que todas las derivadas parciales $\partial f_i/\partial x_j$ de f existen y son continuas en un entorno de un punto $\overrightarrow{x} \in U$. Entonces f es diferenciable en $\overrightarrow{x}$.

Observación: Cada uno de los enunciados recíprocos, obtenidos invirtiendo una implicación cualquiera, es falso.

Se dice que una función cuyas derivadas parciales existen y son continuas es de ***clase*** C^1. Por lo tanto, por el teorema 9, *toda función C^1 es diferenciable.*

2.3. Introdución a trayectorias y curvas

Trayectorias y curvas Una ***trayectoria*** en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $\mathbf{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$; es una ***trayectoria en el plano*** si $n = 2$ y una ***trayectoria en el espacio*** si $n = 3$.

La colección C de puntos $\mathbf{c}(t)$ cuando t varía en $[a, b]$ se llama ***curva***, y $\mathbf{c}(a)$ y $\mathbf{c}(b)$ son sus ***extremos***. Se dice que la trayectoria $\mathbf{c}$ ***parametriza*** la curva C. También decimos que $\mathbf{c}(t)$ ***traza*** C cuando t varía.

Si $\mathbf{c}$ es una trayectoria en $\mathbb{R}^3$, podemos escribir $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ y llamamos a $x(t), y(t)$ y $z(t)$ ***funciones componentes*** de $\mathbf{c}$. Las funciones componentes en $\mathbb{R}^2$ o, en general, en $\mathbb{R}^n$ se forman de modo similar.

Velocidad y tangente a una trayectoria

Definición Vector velocidad Si $\mathbf{c}$ es una trayectoria y es diferenciable, decimos que $\mathbf{c}$ es una ***trayectoria diferenciable***. La ***velocidad*** de $\mathbf{c}$ en el instante t se define como

$$\mathbf{c}'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{c}(t+h) - \mathbf{c}(t)}{h}$$

Normalmente dibujamos el vector $\mathbf{c}'(t)$ con su origen en el punto $\mathbf{c}(t)$. La ***rapidez*** de la trayectoria $\mathbf{c}(t)$ es $s = ||\mathbf{c}'(t)||$, la longitud del vector velocidad.

Vector tangente La velocidad $\mathbf{c}'(t)$ es un vector ***tangente*** a la trayectoria $\mathbf{c}(t)$ en el instante t. Si C es la curva trazada por $\mathbf{c}$ y si $\mathbf{c}'(t)$ no es igual a $\overrightarrow{0}$, entonces $\mathbf{c}'(t)$ es un vector tangente a la curva C en el punto $\mathbf{c}(t)$.

Recta tangente

Recta tangente a una trayectoria Si $\mathbf{c}(t)$ es una trayectoria y $\mathbf{c}'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, la ecuación de su ***reta tangente*** en el punto $\mathbf{c}(t_0)$ es

$$\mathbf{l}(t) = \mathbf{c}(t_0) + (t - t_0)\mathbf{c}'(t).$$

Si C es la curva que traza $\mathbf{c}$, entonces la línea que traza $\mathbf{l}$ es la recta tangente a la curva C en $\mathbf{c}(t_0)$.

2.4. Propiedades de la derivada

Sumas, productos, cocientes

Teorema 10

1. **Regla de la multiplicación por una constante.** Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en $\overrightarrow{x}_0$ y sea c un número real. Entonces $h(\overrightarrow{x}) = cf(\overrightarrow{x})$ es diferenciable en $\overrightarrow{x}_0$ y

$$\mathbf{D}h(\overrightarrow{x}_0) = c\mathbf{D}f(\overrightarrow{x}_0) \quad \text{(igualdad de matrices).}$$

2. **Regla de la suma.** Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciables en $\overrightarrow{x}_0$. Entonces $h(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x}) + g(\overrightarrow{xx})$ es diferenciable en $\overrightarrow{x}_0$ y

$$textbfDh(\overrightarrow{x}_0) = \mathbf{D}f(\overrightarrow{x}_0) + \mathbf{D}g(\overrightarrow{x}_0) \quad \text{(suma de matrices).}$$

3. **Regla del producto.** Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciables en $\overrightarrow{x}_0$ y sea $h(\overrightarrow{x}) = g(\overrightarrow{x})f(\overrightarrow{x})$. Entonces $h : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $\overrightarrow{x}_0$ y

$$\mathbf{D}h(\overrightarrow{x_0}) = g(\overrightarrow{x}_0)\mathbf{D}f(\overrightarrow{x}) + f(\overrightarrow{x})\mathbf{D}g(\overrightarrow{x}_0).$$

4. **Regla del cociente.** Con las mismas hipótesis que en la regla 3, sea $h(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x})/g(\overrightarrow{x})$ y supongamos que g nunca se anula en U. Entonces h es diferenciable en $\overrightarrow{x}_0$ y

$$\mathbf{D}h(\overrightarrow{x}_0) = \frac{g(\overrightarrow{x}_0)\mathbf{D}f(\overrightarrow{x}_0) - f(\overrightarrow{x}_0)\mathbf{D}g(\overrightarrow{x}_0)}{[g(\overrightarrow{x}_0)]^2}$$

La regla de la cadena

Teorema 11 Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos abiertos. Sean $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $f : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ funciones tales que g lleva U en V, de modo que $f \circ g$ está definida. Suponemos que g es diferenciable en $\overrightarrow{x}_0$ y f es diferenciable en $\overrightarrow{y}_0 = g(\overrightarrow{x}_0)$. Entonces $f \circ g$ es diferenciable en $\overrightarrow{x}_0$ y

$$\mathbf{D}(f \circ g)(\overrightarrow{x}_0) = \mathbf{D}f(\overrightarrow{y}_0)\mathbf{D}g(\overrightarrow{x}_0).$$

El miembro de la derecha es la matriz producto de $\mathbf{D}f(\overrightarrow{y}_0)$ y $\mathbf{D}g(\overrightarrow{x}_0)$.

2.5. Gradientes y derivadas direccionales

2.5.1. Gradientes en $\mathbb{R}^3$

Definición Gradiente Si $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es diferenciable, el ***gradiente*** de f en (x, y, z) es el vector del espacio dado por

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Este vector también se denota por $\nabla f(x, y, z)$. Por tanto, ∇f es exactamente la matriz de la derivada $\mathbf{D}f$, escrita como vector.

Derivadas direccionales

Definición Derivadas direccionales Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, la ***derivada direccional*** de f en $\overrightarrow{x}$ según el vector $\overrightarrow{v}$ está dada por

$$\left.\frac{d}{dt} f(\overrightarrow{x} + t\overrightarrow{v})\right|_{t=0}$$

si este valor existe.

En la definición de una derivada direccional, normalmente elegimos $\overrightarrow{v}$ para que sea un vector *unitario*. En este caso, nos movemos en la dirección $\overrightarrow{v}$ con velocidad uno y nos referimos a $\left.\frac{d}{dt} f(\overrightarrow{x} + t\overrightarrow{v})\right|_{t=0}$ como la ***derivada direccional de f en la direccion $\overrightarrow{v}$***.

A partir de la definición, podemos ver que la derivada direccional se puede definir mediante la fórmula

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\overrightarrow{x} + h\overrightarrow{v}) - f(\overrightarrow{x})}{h}$$

Teorema 12 Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es diferenciable, entonces todas las derivadas direccionales existen. La derivada direccional en $\overrightarrow{x}$ en la dirección $\overrightarrow{v}$ está dada por

$$\mathbf{D}f(\overrightarrow{x})\overrightarrow{v} = \nabla f(\overrightarrow{x}) \cdot \overrightarrow{v}$$
$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\overrightarrow{x})\right] v_1 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(\overrightarrow{x})\right] v_2 + \left[\frac{\partial f}{\partial z}(\overrightarrow{x})\right] v_3$$

donde $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

Direcciones de máximo crecimiento

Supongamos que $\nabla f(\overrightarrow{x}) \neq \overrightarrow{0}$. Entonces $\nabla f(\overrightarrow{x})$ apunta en la dirección en la que f crece más rápidamente.

Gradientes y planos tangentes a los conjuntos de nivel

Teorema 14 El gradiente es normal a las superficies de nivel Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una aplicación de clase C^1 y sea (x_0, y_0, z_0) un punto de la superficie de nivel S definida por $f(x, y, z) = k$, para una constante k. Entonces $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ es normal a la superficie de nivel en el sentido siguiente: si $\overrightarrow{v}$ es el vector tangente en $t = 0$ de una trayectoria $\mathbf{c}(t)$ en S con $\mathbf{c}(0) = (x_0, y_0, z_0)$, entonces $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \overrightarrow{v} = 0$

Definición Planos tangente a superficies de nivel Sea S la superficie que está formada por aquellos (x, y, z) tales que $f(x, y, z) = k$ para k constante. El ***plano tangente*** a S en un punto (x_0, y_0, z_0) de S se define mediante la ecuación

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

si $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq \overrightarrow{0}$. Es decir, el plano tangente es el conjunto de puntos (x, y, z) que satisfacen la ecuación.

Campo vectorial gradiente

A menudo nos referimos a ∇f como un ***campo vectorial gradiente***. La palabra campo significa que ∇f asigna un vector a cada punto en el dominio de f.

3. Derivadas de orden superior: máximos y mínimos

3.1. Derivadas parciales iteradas

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Si las derivadas parciales de f, a su vez, tienen derivadas parciales continuas, decimos que f es de clase C^2, o que es ***dos veces diferenciable con continuidad***. Del mismo modo, si decimos que f es de clase C^3, significa que f tiene derivadas parciales iteradas de tercer orden, y así sucesivamente.

Si f es una función solo de x e y, y $\partial f/\partial x, \partial f/\partial y$ son diferenciables con continuidad, entonces al tomar las derivadas parciales segundas obtenemos cuatro funciones

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \text{ y } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Por supuesto, este proceso se puede extender para las derivadas de tercer orden, y así sucesivamente, así como para funciones con cualquier número variables.

Todas ellas reciben el nombre de ***derivadas parciales iteradas***, mientras que $\partial^2 f/\partial x \partial y$ y $\partial^2/\partial y \partial x$ se denominan ***derivadas parciales cruzadas***.

Las derivadas parciales cruzadas son iguales

Teorema 1 Igualdad de las derivadas parciales cruzadas Si $f(x, y)$ es una función de clase C^2 (es dos veces diferenciable con continuidad), entonces las derivadas parciales cruzadas son iguales; es decir,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}.$$

3.2. Teorema de Taylor

Teorema de Taylor para una variable

Para una función suave $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de una variable, el teorema de Taylor afirma que:

$$f(x_0+h) = f(x_0)+f'(x_0)\cdot h+\frac{f''(x_0)}{2}h^2+...+\frac{f^{(k)}}{k!}h^k+R_k(x_0, h),$$

donde

$$R_k(x_0, h) = \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0 + h - \tau)^k}{k!} f^{k+1}(\tau)d\tau$$

es el resto.

Teorema de Taylor para varias variables

Teorema 2 Fórumla de Taylor de primer orden Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\overrightarrow{x}_0 \in U$. Entonces

$$f(\overrightarrow{x}_0 + \overrightarrow{h}) = f(\overrightarrow{x}) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overrightarrow{x}_0) + R_1(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{h}),$$

donde $R_1(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{h})/||\overrightarrow{h}|| \to 0$ cuando $\overrightarrow{h} \to 0$ en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3 Fórmula de Taylor de segundo orden Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas de tercer orden. Entonces podemos escribir

$$f(\overrightarrow{x}_0 + \overrightarrow{h}) =$$

$$f(\overrightarrow{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overrightarrow{x}_0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overrightarrow{x}_0) + R_2(\overrightarrow{x}_0, \overrightarrow{h})$$

donde $R_2(\overrightarrow{x}_0, \overrightarrow{h})/||\overrightarrow{h}||^2 \to 0$ cuando $\overrightarrow{h} \to \overrightarrow{0}$ y la segunda suma es sobre todos los i y j comprendidos entre 1 y n (de modo que hay n^2 términos).

Formas del resto En el Teorema 2,

$$R_1(\overrightarrow{x}_0, \overrightarrow{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^1 (1-t)\frac{\partial 2f}{\partial x_i \partial x_j}(\overrightarrow{x}_0, t\overrightarrow{h})h_i h_j \, dt$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overrightarrow{c}_{ij})h_i h_j,$$

donde $\overrightarrow{c}_{ij}$ es un punto de la recta que une $\overrightarrow{x}_0$ con $\overrightarrow{x}_0 + \overrightarrow{h}$.

En el Teorema 3,

$$R_2(\overrightarrow{x}_0, \overrightarrow{h}) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_0^1 \frac{(t-1)^2}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\overrightarrow{x}_0+t\overrightarrow{h})h_i h_j h_k \, dt$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\overrightarrow{c}_{ijk})h_i h_j h_k,$$

donde $\overrightarrow{c}_{ijk}$ es un punto de la recta que une $\overrightarrow{x}_0$ con $\overrightarrow{x}_0 + \overrightarrow{h}$.

Las fórmulas con $\overrightarrow{c}_{ij}$ y $\overrightarrow{c}_{ijk}$ (llamadas formas de Lagrange del resto) se obtienen haciendo uso del *segundo teorema del valor medio para integrales.*

3.3. Extremos de funciones con valores reales

Punto de extremo

Definición Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función escalar dada, se dice que un punto $\overrightarrow{x}_0 \in U$ es un punto de ***mínimo local*** de f si existe un entorno V de $\overrightarrow{x}_0$ tal que para todos los puntos $\overrightarrow{x}$ de V, $f(\overrightarrow{x}) \geqslant f(\overrightarrow{x}_0)$. De forma similar, $\overrightarrow{x}_0 \in U$ es un punto de ***máximo local*** si existe un entorno V de $\overrightarrow{x}_0$ tal que $f(\overrightarrow{x}) \leqslant f(\overrightarrow{x}_0)$ para todo $\overrightarrow{x} \in V$. Se dice que el punto $\overrightarrow{x}_0 \in U$ es un punto de ***extremo local***, o ***relativo***, si es un mínimo local o un máximo local. Un punto $\overrightarrow{x}_0$ es un ***punto crítico*** de f si bien f *no es diferenciable en* $\overrightarrow{x}_0$, o bien $\mathbf{D}f(\overrightarrow{x}_0) = \overrightarrow{0}$. Un punto crítico que no es un extremo local se denomina ***punto de silla***.

Condición de la primera derivada para puntos de extremo local

Teorema 4 Condición de la primera derivada para puntos de extremo local Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, la función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable y $\overrightarrow{x}_0 \in U$ es un punto de extremo local, entonces $\mathbf{D}f(\overrightarrow{x}_0) = \overrightarrow{0}$; es decir, $\overrightarrow{x}_0$ es un punto crítico de f.

Criterio de la derivada segunda para puntos de extremo local

Las ***formas cuadráticas*** son funciones $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ del tipo

$$g(h_1, ..., h_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j$$

donde $[a_{ij}]$ es una matriz $n \times n$. En términos de multiplicación de matrices, podemos escribir

$$g(h_1, ..., h_n) = \begin{bmatrix} h_1 & ... & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ ... \\ h_n \end{bmatrix}$$

Defnición Supongamos que $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tiene derivadas parciales continuas de segundo orden $(\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j)(\overrightarrow{x}_0)$, para $i, j = 1, ..., n$, en un punto $\overrightarrow{x}_0 \in U$. La ***hessiana de f en*** $\overrightarrow{x}_0$ es la forma cuadrática definida por

$$Hf(\overrightarrow{x}_0)(\overrightarrow{h}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overrightarrow{x}_0) h_i h_j$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h_1 & ... & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ ... & & ... \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ ... \\ h_n \end{bmatrix}$$

Obsérvese que, por la desigualdad de las derivadas parciales cruzadas, la matriz de las derivadas segundas es simétrica.

Teorema 5 Criterio de la derivada segunda para puntos de extremo local Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una funció de clase C^3, $\overrightarrow{x}_0 \in U$ es un punto crítico de f, y la hessiana $Hf(\overrightarrow{x}_0)$ es definida positiva, entonces $\overrightarrow{x}_0$ es un punto de mínimo relativo de f. Del mismo modo, si $Hf(\overrightarrow{x}_0)$ es definida negativa, entonces $\overrightarrow{x}_0$ es un punto de máximo relativo.

Lema 1 Si $B = [b_{ij}]$ es una matriz $n \times n$ real y si la forma cuadrática asociada

$$H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ (h_1, ..., h_n) \longmapsto \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} h_i h_j$$

es definida positiva, entonces existe una constante $M > 0$ tal que para todo $\overrightarrow{h} \in \mathbb{R}^n$;

$$H(\overrightarrow{h}) \geqslant M ||\overrightarrow{h}||^2.$$

Lema 2 Sea

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad H(\overrightarrow{h}) = \frac{1}{2} [h_1, h_2] B \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}.$$

Entonces $H(\overrightarrow{h})$ es definida positiva si y sólo si $a > 0$ y $\det B = ac - b^2 > 0$.

Criterio del determinante para ver si una forma cuadrática es definida positiva

Consideremos las n submatrices cuadradas a lo largo de la diagonal. B es definida positiva (es decir, la forma cuadrática asociada con B es definida positiva) si y sólo si los determinantes de estas submatrices diagonales son todos ellos mayores que cero. Para B definida negativa, los signos deben ser alternativamente < 0 y > 0. Cuando los determinantes de las submatrices diagonales son todos distintos de cero, pero la matriz hessiana no es definida positiva ni negativa, el punto crítico es de ***tipo silla***.

Los menores principales proporcionan el siguiente método de clasificación de las formas cuadráticas:

Caso general		Caso particular n=3
1) Q definida positiva	$H_i > 0 \quad i = 1, \ldots, n$	$H_1 > 0, \ H_2 > 0, \ H_3 > 0$
1) Q definida negativa	$\left.\begin{matrix} H_i < 0 & i \ impar \\ H_i > 0 & i \ par \end{matrix}\right\}$	$H_1 < 0, \ H_2 > 0, \ H_3 < 0$
2) Q semidefinida positiva	$H_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, n$	$H_1 \geq 0, \ H_2 \geq 0, \ H_3 \geq 0$
2) Q semidefinida negativa	$\left.\begin{matrix} H_i \leq 0 & i \ impar \\ H_i \geq 0 & i \ par \end{matrix}\right\}$	$H_1 \leq 0, \ H_2 \geq 0, \ H_3 \leq 0$
3) Q indefinida	Otros casos	Otros casos

Criterio general de la derivada segunda (n variables)

Supóngase que $\overrightarrow{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ es un punto crítico para una función de clase C^2 $f : U \to \mathbb{R}$, y U es un conjunto abierto que contiene $\overrightarrow{x}_0$; es decir, $\frac{\partial f}{\partial x_i = 0}$, $i = 1, ..., n$. Supóngase que la matriz hessiana $\{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overrightarrow{x}_0)\}$ es definida postivia; entonces $\overrightarrow{x}_0$ es un punto mínimo local estricto para f. Si la matriz hessiana es definida negativa, $\overrightarrow{x}_0$ es un punto de máximo local estricto. Si la matriz hessiana no es ni definida positiva ni definida negativa, pero su determinante es distinto de cero, entonces es de ***tipo silla***. Si el determinante de la forma hessiana es cero, se dice que es de ***tipo degenerado*** y no se puede decir nada acerca de la naturaleza del punto crítico sin realizar un análisis en mayor profundidad.

Criterio de la derivada segunda (dos variables)

Teorema 6 Criterio de la segunda derivada para los puntos de máximo y mínimo de funciones de dos variables Sea $f(x,y)$ de clase C^2 en un conjunto abierto U de $\mathbb{R}^2$. Un punto (x_0, y_0) es un punto mínimo local (estricto) de f si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$
2. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$
3. $D = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$ en (x_0, y_0)

   (D es el ***discriminante*** de la forma cuadrática hessiana.) Si en 2. tenemos < 0 en lugar de > 0 y la condición de 3. no cambia, entonces tenemos un punto máximo local (estricto).

Máximos y mínimos globales

Definición Supongamos que $f : A \to \mathbb{R}$ es una función definida en un conjunto A en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Se dice que un punto $\overrightarrow{x}_0 \in A$ es un ***punto de máximo absoluto*** (o un punto de ***mínimo absoluto***) de f si $f(\overrightarrow{x}) \leqslant f(\overrightarrow{x}_0)$ [o $f(\overrightarrow{x}) \geqslant f(\overrightarrow{x}_0)$] para todo $\overrightarrow{x} \in A$.

DEfinición Se dice que un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ está ***acotado*** si existe un número $M > 0$ tal que $||\overrightarrow{x}|| < M$ para todo $\overrightarrow{x} \in D$. Un conjunto es ***cerrado*** si contiene todos los puntos de su frontera.

Veamos un ejemplo importante. Obsérvese que los conjuntos de nivel $\{(x_1, x_2, ..., x_n)|f(x_1, x_2, ..., x_n) = c\}$ de una función continua f son siempre cerrados.

Teorema 7 Teorema de existencia de máximos y mínimos globales Sea D cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$ y sea $f : D \to \mathbb{R}$ continua. Entonces f alcanza sus valores de máximo y de mínimo absolutos en ciertos puntos $\overrightarrow{x}_0$ y $\overrightarrow{x}_1$ de D.

Estrategia para hallar los valores máximo y mínimo absolutos en una región con frontera Sea f una función continua de dos variables definida en una región cerrada y acotada D de $\mathbb{R}^2$, que está limitada por una curva cerrada suave. Para hallar el máximo y el mínimo absolutos de f en D:

1. Localizar todos los puntos críticos de f en U.
2. Hallar todos los puntos críticos de f considerada como una función definida solo en ∂U.
3. Calcular el valor de f para todos estos puntos críticos.
4. Comparar todos estos valores y seleccionar el más grande y el más pequeño.