Lenguaje matemático, conjuntos y números

Pregunta 1 (2 puntos)

Se consideran los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \Big\{x \in \mathbb{R} \;\Big|\; \Big|x - \frac{1}{2}\Big| \leqslant 2\Big\} \;\text{ y }\; B = \big\{x \in \mathbb{R} \mid 4x^2 - 8x - 5 < 0\big\}$$

Obtenga $A \cap B$, $A \cup B$, $B \setminus A$ y $\overline{B}$, expresados mediante intervalos.

Solución: Observemos que

$$\big|x - \frac{1}{2}\big| \leqslant 2 \iff -2 \leqslant x - \frac{1}{2} \leqslant 2 \iff -\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5}{2} \iff x \in \Big[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\Big]$$

y por tanto $A = \Big[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\Big]$.

Por otro lado las raíces de $4x^2 - 8x - 5 = 0$ son $x = \dfrac{8 \pm 12}{8} = \begin{cases} 5/2 \\ -1/2 \end{cases}$ y en este caso se obtiene $B = \Big(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\Big)$.

En consecuencia:

$$A \cap B = \Big[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\Big] \cap \Big(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\Big) = \Big(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\Big)$$

$$A \cup B = \Big[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\Big] \cup \Big(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\Big) = \Big[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\Big]$$

$$B \setminus A = \Big(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\Big) \setminus \Big[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\Big] = \emptyset$$

$$\overline{B} = \mathbb{R} \setminus \Big(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\Big) = \Big(-\infty, -\frac{1}{2}\Big] \cup \Big[\frac{5}{2}, +\infty\Big)$$

Pregunta 2 (2,5 puntos)

Se dice que una relación $\mathcal{R}$ en el conjunto U es circular si satisface la propiedad siguiente:

$$\forall x, y, z \in U \quad \text{si } \; x\mathcal{R}y \text{ e } y\mathcal{R}z, \; \text{ entonces } z\mathcal{R}x.$$

1. Si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia, ¿es $\mathcal{R}$ circular? ¿Por qué?

2. Si $\mathcal{R}$ es reflexiva y circular, ¿es $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia? ¿Por qué?

Solución: 1. Veamos que si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia, entonces $\mathcal{R}$ es circular. En efecto, supongamos que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. Para todo $x, y, z \in U$, si $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$ entonces $x\mathcal{R}z$, pues $\mathcal{R}$ es transitiva. En consecuencia, $z\mathcal{R}x$ pues $\mathcal{R}$ es simétrica. Por tanto, $\mathcal{R}$ es circular.
2. Supongamos ahora que $\mathcal{R}$ es reflexiva y circular. Veamos que $\mathcal{R}$ es simétrica y transitiva.
Simétrica: Sean $x, y \in U$ tales que $x\mathcal{R}y$. Como $\mathcal{R}$ es reflexiva resulta que $y\mathcal{R}y$. Como $\mathcal{R}$ es circular, de $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}y$ resulta que $y\mathcal{R}x$.
Transitiva: Sean $x, y, z \in U$ tales que $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$. Al ser $\mathcal{R}$ circular, resulta que $z\mathcal{R}x$. Pero acabamos de demostrar que si $\mathcal{R}$ es reflexiva y circular entonces $\mathcal{R}$ es simétrica, y por tanto, $x\mathcal{R}z$.

Pregunta 3 (3 puntos)

Se define en $\mathbb{N}$ la operación interna $\star$ y, por inducción, $a^{(n)}$ mediante:

$$a \star b = 2a + b \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a^{(1)} & = & a \\ a^{(n+1)} & = & a^{(n)} \star a \;\; \text{si } n \geqslant 1 \end{array} \right.$$

1. Estudie si la operación $\star$ es conmutativa, asociativa, posee elemento neutro y en su caso, si todo elemento tiene simétrico.
2. Calcule $a^{(2)}$, $a^{(3)}$, $a^{(4)}$ y exprese $a^{(n)}$, respecto de las operaciones usuales de $\mathbb{N}$. Demuestre por inducción la validez de la expresión hallada para $a^{(n)}$ si $n \geqslant 1$.

Solución:

1. La operación $\star$ no es conmutativa pues

$$\begin{aligned} a \star b &= 2a + b \\ b \star a &= 2b + a \end{aligned}$$

y $2a + b \neq 2b + a \quad$ si $a \neq b$.

La operación $\star$ no es asociativa pues

$$\begin{aligned} a \star (b \star c) &= 2a + (b \star c) = 2a + 2b + c \\ (a \star b) \star c &= 2(a \star b) + c = 2(2a + b) + c = 4a + 2b + c \end{aligned}$$

y $4a + 2b + c \neq 2a + 2b + c \quad$ si $a \neq 0$.

No existe elemento neutro para $\star$ pues no existe $e \in \mathbb{N}$ tal que la igualdad $b \star e = e \star b = b$, es decir, $2b + e = 2e + b = b$, sea verdadera para cualquier valor $b \in \mathbb{N}$. Obsérvese que ya sólo con la primera igualdad se obtiene $e = b$ donde se pone de manifiesto que el valor de e no sería independiente de b.

2. Observemos que $a^{(n+1)} = a^{(n)} \star a = 2a^{(n)} + a$ para todo $n \geqslant 1$. Así pues:

$$\begin{aligned} a^{(2)} &= 2a^{(1)} + a = 2a + a = 3a \\ a^{(3)} &= 2a^{(2)} + a = 6a + a = 7a \\ a^{(4)} &= 2a^{(3)} + a = 14a + a = 15a \end{aligned}$$

Veamos por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}^*$ se tiene:

$$a^{(n)} = (2^n - 1)\, a$$

i) La igualdad es verdadera para $n = 1$ pues $a^{(1)} = a$ y $\left(2^1 - 1\right) a = 1 \cdot a = a$.

ii) Supongamos que la igualdad es verdadera para n, esto es, $a^{(n)} = (2^n - 1)\, a$, y veamos que es cierta para $n + 1$, esto es, $a^{(n+1)} = \left(2^{n+1} - 1\right) a$. En efecto:

$$\begin{aligned} a^{(n+1)} &= 2a^{(n)} + a \\ &= 2\,(2^n - 1)\, a + a \quad \text{por la hipótesis de inducción,} \\ &= 2^{n+1}a - 2a + a = 2^{n+1}a - a = \left(2^{n+1} - 1\right) a \end{aligned}$$

Pregunta 4 (2,5 puntos)

Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación:

$$(z - 1 - i)(z + 1 + i)(z - 1 + i)(z + 1 - i) = 5$$

Solución: Observemos que

$$\begin{aligned} (z - 1 - i)(z + 1 + i)(z - 1 + i)(z + 1 - i) &= \big(z - (1 + i)\big)\big(z + (1 + i)\big)\big(z - (1 - i)\big)\big(z + (1 - i)\big) \\ &= \big(z^2 - (1 + i)^2\big)\big(z^2 - (1 - i)^2\big) \\ &= \big(z^2 - (1 - 1 + 2i)\big)\big(z^2 - (1 - 1 - 2i)\big) = \big(z^2 - 2i\big)\big(z^2 + 2i\big) \\ &= z^4 + 4 \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación se obtiene $z^4 + 4 = 5$, esto es,

$$z^4 = 1$$

cuyas soluciones son las raíces de grado cuartas de la unidad, $z_k = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{4}}$, $k = 0, 1, 2, 3 \iff z \in \{1, i, -1, -i\}$.