algebra lineal

- **Tabla de símbolos**
    - K cuerpo
    - R cuerpo de los números reales
    - C cuerpo de los números complejos
    - K´´ producto cartesiano K x….x K
    - K[x] anillo de polinomios en una indeterminada x con coeficientes en k
    - $K_n[x]$ anillo de polinomios con coeficiente en K y grado menor o igual que n
    - $M_{mxn}\,(K)$ matriz de tamaño m x n con entradas en K
    - $M_n(K)$ matrices cuadradas de orden n con entradas en K
    - a_{ij} elemento de la fila i y columna j
    - A_{ij} submatriz de A obtenida eliminando la fila i y columna j
    - $A^t, \bar{A}$, A* matriz traspuesta, conjugada y traspuestas conjugadas de A
    - $A \sim_f B$ A es equivalente por filas a B
    - $A \sim_c B$ A es equivalente por columnas a B
    - A $\sim B$ A es equivalente a B
    - $H_f(A), H_c(A)$ forma de hermite por filas y columnas de A
    - $rg(A)$ rango de una matriz A
    - $rg\{\, v_1, \dots, v_n\}$ rango de un conjunto de vectores
    - $\det(A)$ determinante de una matriz A
    - Adj(A) matriz adjunta de A
    - Δ_i menor principal de orden i de una matriz
    - α_{ij} menor adjunto del elemento a_{ij} de A
    - δ_{ij} delta de kronecker
    - $AX = B$ representación matricial de un sistema lineal
    - V espacio vectorial
    - $V*$ espacio dual
    - V/U espacio cociente de V modulo U
    - B base de un espacio vectorial de dimensión n
    - $L(\, v_1, \dots, v_n)$ subespacio vectorial generado por los vectores ($v_1, \dots, v_n$)
    - $M_{BB'}$ matriz de cambio de base de B a B´
    - $M_B\{\, v_1, \dots, v_n\,\}$ matriz de coordenadas por columnas de $\{v_1, \dots, v_n\}$ respecto de B
    - $M_{BB'}$(f) matriz de una aplicación lineal f respecto de las bases B y B´
    - $M_B(f)$ matriz de un endomorfismo f respecto de una base B
    - $Ker(f)$ núcleo de una aplicación lineal
    - $Im(f)$ imagen de una aplicación lineal
    - $f|u$ aplicación restricción de f a un subespacio U
    - $L(U,V)$ espacio vectorial de las aplicaciones f: U -> V
    - $L(V)$ espacio vectorial de los endoformismos de V
    - $GL(U,V)$ grupo general lineal de V formado por los automorfismos de V
    - GL(n, K) grupo de matrices cuadradas de orden n regulares.
- **Matrices**
    - **Definiciones de matrices pg 10**
        - Una **matriz** A de tamaño m x n es un conjunto de m . n escalares o elementos de un cuerpo K que están ordenados en m filas y n columnas
        - La **entrada** (i , j) es el elemento de A que se encuentra en la fila i y en la columna j
        - Una **matriz cuadrada** es una matriz de igual numero de filas y columna
        - El **orden** de una matriz es el numero de filas y columnas
        - La **diagonal principal** de A es diag(A) = (a11,a22,a33,ann)

- La **subdiagonal** de A es (a21,a32,….an,n-1)
- La **superdiagonal** de A es (a12,a23,….an-1,n)
- La **matriz traspuesta** de la matriz A= Mm x n es la matriz A^t M n x m
- Una **matriz simétrica** es una matriz que coincide con su traspuesta
- Una **matriz antisimétrica** es una matriz cuadrada que coincide con su matriz traspuesta cambiada de signo
- La **matriz traspuesta conjugada**, es el numero complejo conjugado de la entrada (j , i)
- Una **matriz hermítica** es una matriz cuadrada que coincide con su matriz traspuesta conjugada
- Una **matriz triangular** superior es una matriz de orden n con todas sus entradas situadas por debajo de su diagonal principal iguales a 0.
- Una **matriz triangular** inferior es una matriz de orden n con todas las entradas situadas por encima de su diagonal principal iguales a 0
- Una **matriz diagonal** es una matriz de orden n tal que todas las entradas que no están situadas en su diagonal principal es igual a 0
- La **identidad** de orden n, es la matriz con todas las entradas situadas en su diagonal principal igual a 0
- Una **matriz nula** es una matriz con todas sus entradas iguales a 0
- Una **fila nula** es si todas sus entradas en esa fila son igual a 0 = a una **columna nula**
- Una **submatriz** de A es cualquier matriz que se obtenga a partir de A, eliminado algunas de sus filas y columnas.

- **Operaciones con matrices**
  - Suma de dos matrices
  - Producto escalar de una matriz λ por una matriz
  - Demostraciones de todas las propiedades fundamentales de operaciones elementales entre matrices.
  - **Leyes de la suma de matrices y del producto por escalares**:
    - Asociativa
    - Conmutativa
    - Existencia de elemento neutro
    - Existencia de elemento inverso
  - **Para el producto por escalares se cumplen las leyes**
    - Distributiva respecto de la suma de matrices
    - Distributiva respecta de la suma de escalares
    - Asociativa respecto del producto por escalares
    - La unidad del cuerpo 1
  - **Leyes del producto de matrices**
    - Asociativa
    - Existencia de elemento neutra por la derecha
    - Existencia de elemento neutro por la izquierda
    - Asociativa respecto del producto por escalares
    - Distributiva respecto de la suma de matrices por la derecha
    - Distributiva respecto de la suma de matrices por la izquierda
    - Puede ocurrir que AB = 0 siendo A y B no nulas
  - **Producto de matrices por bloques**
  - **Las potencias de una matriz cuadrada**
    - Matriz **idempotente**
      - A^2= A
    - Matriz **nilpotente**
      - Si existe un entero k $>$0 tal que A^k = 0
    - Matriz **involutiva**
      - Si A^2 = I_n
  - Propiedades de la matriz traspuesta

- Si la suma o el producto de matrices tiene sentido en cada uno de los casos que enunciamos a continuación, entonces son ciertas las afirmaciones:
    -
    -
    -
    -
    -
- Si A es una matriz cuadrada A entonces
    - A + At es simétrica y A – At es antisimétrica
    - A se puede escribir como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica
    - AAt es simétrica

- **Método de gauss**
    - La forma de Hermite por filas de una matriz
    - Resolver sistemas lineales
    - Determinar la dependencia lineal de un conjunto de vectores
    - Determinar unas ecuaciones implícitas de un subespacio vectorial
  - Combinación lineal
    - **Dependientes**
      - Si existe alguna combinación línea entre las filas
    - **Independientes**
      - Si no existe ninguna combinación lineal entre las filas
    - Se llama una **combinación lineal trivial** de matrices fila a aquella en la que todos los coeficientes son 0.
  - Operaciones elementales de filas
    - Tipo I: intercambiar dos filas
    - Tipo II: sumar a una fila otra multiplicada por un escalar
    - Tipo III: multiplicar una fila por un escalar no nulo
  - Operaciones elementales por columnas
    - Tipo I
    - Tipo II
    - Tipo III
  - Matriz **elemental**
    - Una matriz elemental de orden n es la matriz resultante de aplicar a la matriz identidad In una operación elemental de filas, las hay de tres tipos.
  - Matrices **escalonadas**
    - Si A tiene k filas nulas, estas son las k ultimas
    - Todo pivote de A tiene mas ceros a su izquierda que el pivote de la fila anterior, como es lógico, esta propiedad no afecta al pivote de la primera fila
  - Matrices **escalonadas reducidas**
    - Todos los pivotes de A son iguales a 1
    - Toda entrada de A situada en la misma columna que un pivote es igual a 0.
  - **Matriz equivalente por filas**
    - Cuando aplicamos una sucesión de operaciones elementales de filas a una matriz estamos estableciendo una conexión entre la matriz original y la matriz final
    - Dos matrices A y B son equivalente por filas A ~ B, si A = B o si se puede transformar A en B mediante una succesion finita de operaciones elementales de filas o, equivalentemente, si existen matrices elemtales E1,….Ek tales que B= Ek ….E1 A
    - La equivalencia por filas es una relación de equivalencia
      - Reflexiva
      - Simétrica
      - Transitiva
    - Combinación lineal de filas en **matrices equivalentes por filas**

            - Si A ~ B entonces toda fila de B es combinación lineal de filas de A
        - **Equivalencia por filas a una matriz escalonada**
            - Toda matriz es equivalente por filas a una matriz escalonada
        - **Equivalencia por filas a una matriz escalonada reducida**
            - Toda matriz equivalente por filas a una matriz escalonada reducida
        - **La forma de Hermite** por filas de una matriz
            - Si A y B son matrices escalonadas reducidas y A ~ B entonces A = B
            - Toda matriz es equivalente por fials a una única matriz escolando reducida
            - La forma de Hermite por filas o forma escalonada reducida de A es la matriz escalonada reducida equivalente por filas de A. la denotaremos por Hf(A)
            - A y B son equivalentes por filas si y solo si Hf(A) = Hf(B)
    - **Matriz equivalencia por columnas**
        - Dos matrices A y B son equivalentes por columnas A ~ B sise puede transformar A en B mediante una sucesión finita de operaciones elementales de columnas o, equivalente, si existe matrices elementales F1,….,Fh tales que B = AF1….Fh
        - La equivalencias por columnas es una relación de equivalencia
    - **Matrices equivalentes**
        - dos matrices A y B son equivalentes A ~ B, si se puede transformar A en B mediante una sucesión finita de operaciones elementales por filas op columnas, equivalentemente, si existen matrices elementales E1,….,Ek, F1,….,Fh tales que B = Ek…E1 AF1…Fh
        - la equivalencia de matrices es una relación de equivalencia.
- **Rango** de una matriz
    - Es el máximo de numero de filas independientes que tiene una matriz
    - El rango de una matriz escalonada es igual al numero de filas no nulas
    - Dos matrices equivalentes por filas tienen igual rango
    - El rango de una matriz es el numero de filas no nulas de cualquier matriz escalonada equivalente por filas
    - Sea A una matriz de orden n. son equivalentes las afirmaciones:
        - Rg(A) = n
        - A ~f In
        - A es producto de matrices elementales de orden n
    - **Matrices equivalencia y rango**
        - Sean Hr = $\begin{pmatrix} Ir & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y Hs = $\begin{pmatrix} Is & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de igual tamaño. Entonces Hr ~ Hs si y sola si r = s
        - Sean A y Hr = $\begin{pmatrix} Ir & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de igual tamaño. Entonces A ~ Hr si y solo si rg(A) = r
        - Dos matrices son equivalentes si y solo si tienen igual rango
        - La forma de hermite de A, H(A), es la matriz $\begin{pmatrix} Ir & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ del tamaño de A y con r = rg(A)

    - **Rango de la matriz traspuesta**
        - Sean A y B dos matrices de tamaño m x n. Son ciertas las afirmaciones:
            - A ~ B si y solo si At ~ Bt
            - Si A es cuadrada entonces A ~ At
            - Rg(A) = rg(At)
            - Si A tiene tamaño m x n entonces rg(A) ≤ min {m,n}
        - El numero de columnas linealmente independientes se A es igual al numero de filas linealmente independientes de At. Teniendo en cuenta rg(A) = rg(At) llegamos a la conclusión de que **el rango de una matrices es el máximo numero de columnas independietes que tiene.** esto es anologo a la definición de rango de una matriz utilizando su estructura por columnas en lugar de su estructura por filas. Todos los resultados que relacionan el rango de una matriz con su estructura de filas pueden ser enunciados en relación a su estructura de columnas.

- El rango de la suma y del producto de matrices
  - Sean A, B ∈ Mm x n (K) y D ∈ Mn x p (K). son ciertas las afirmaciones:
    - $|rg(A) – rg(B)| \leq rg(A + B) \leq rg(A) + rg(B)$
    - $Rg(A) = rg(\alpha A)$ para todo $\alpha \in K$ con $\alpha \neq 0$
    - $Rg(AD) \leq \min \{rg(A), rg(D)\}$
    - Si C ∈ Mn(K) y rg(C) = n entonces rg (AC) = rg(A)
    - Si C ∈ Mn(K) y rg(C) = n entonces rg (CD) = rg(D)
- **Inversa de una matriz cuadrada**
  - El producto de matrices cuadradas de orden n es una operación interna en Mn(K), es asociativo, no conmutativo y la matriz identidad de orden n es su elemento neutro. Esto nos lleva a preguntar por la existencia de elemento inverso
  - La matriz A de orden n es invertible o regular si existe una matriz de orden n, que se llama matriz inversa de A y se denota por A^{-1} , tal que A . A^{-1} = In = A^{-1} . A y la matriz A es singular si no tiene inversa
  - Una matriz invertible tiene una única inversa
  - Sean A, B, A1,…,Ak matrices invertibles de orden n. son ciertas las afirmaciones:
    - $(At)^{-1}$ = $(A^{-1})t$
    - $(AB)^{-1}$ = $B^{-1}A^{-1}$
    - $(A1 \dots Ak)^{-1}$ = Ak^{-1}… $A1^{-1}$
  - **Caracterización de las matrices invertibles**
    - ¿Cuándo A tiene una inversa? Podemos responder a esta pregunta de variadas formas.
    - Sea A una matriz de orden n. son equivalentes las afirmaciones:
      - A tiene inversa
      - BA = CA implica B = C
      - A tiene rango n
      - La forma de hermite por filas de A es la identidad.
      - A es un producto de matrices elementales
    - Sea A una matriz de orden n. son equivalentes las afirmaciones:
      - A tiene inversa
      - Si AB = AC entonces B = C
      - Si AB = 0 entonces B = 0
      - La forma de hermite por columnas de A es la identidad
    - Sean A y B matrices de orden n. son ciertas las afirmaciones:
      - Si AB = In entonces B = A^{-1}
      - Si BA = In entonces B = A^{-1}
    - Sean A y B matrices del mismo tamaño. Son ciertas las afirmaciones:
      - A ~ B si y solo si existe una matriz invertible P tal que PA = B
      - A ~ B si y solo si existe matrices invertible Q tal que AQ = B
      - A ~ B si y solo si existen matrices invertibles P y Q tales que PAQ = B
    - **Inversas laterales**: sea A una matriz de tamaño m x n.
      - Una inversa por la izquierda de A es una matriz X de tamaño n x m tal que XA = In
      - Una inversa por la derecha de A es una mariz Y de tamaño n x m tal que AY = Im
    - Una matriz A de m x n tiene inversa por la izquierda si y solo si rg (A) = n, y tiene inversa por la derecha si y solo si rg(A) = m. si rg(A) = m = n entonces la inversa de A coincide con la única inversa de A por la izquierda y con la única inversa de A por la derecha
- **Determinante de una matriz**
  - Menor adjunto
  - Formula de Laplace
  - Regla de Sarrus
  - Si A es una matriz triangular superior el determinante de A es el producto de los elementos de su diagonal principal
  - Si A tiene dos filas iguales entonces el de(A)=0

- Si A tiene una fila entonces det(A)=0
- Propiedades del determinante
  - Sean A y B dos marices de orden n. son las afirmaciones:
    - Det(A) $\neq$ 0 si y solo si A es invertible
    - Det(AB) = det(A) det(B)
    - Det(A) = det(At)
- Determinante de una matriz triangular por bloques
- Calculo de la inversa utilizando el determinante
- El rango de A es mayor o igual que el rango de una submatriz de A
- El rango de A es igual al mayor orden de un menor no nulo de A

- **Sistemas lineales**
  - **Definiciones:**
    - **Ecuación lineal**
      - Una ecuación lineal con n incógnitas tiene la forma a1x1 + a2x2 + … + anxn = b
    - **Termino independiente** es b
    - **Coeficientes** a1,….,an
    - **Incógnitas** x1,…,xn
    - **Solución**
      - (s1,…,sn) de n elementos de K es una solución de la ecuación lineal si la ecuación se cumple cuando sustituimos las incógnitas x1,….,xn por los valores s1,…,sn, esto es si…
    - **Ecuación trivial**
      - 0x1 + … + 0xn = 0 (o simplemente 0 = 0)
    - **Solución general**
      - La solución general del sistema del sistema es el conjunto formado por todas las soluciones del sistema.
    - **Homogéneo**
      - El sistema lineal A se dice que es homogéneo cuando los términos independientes de todas las ecuaciones lineales son iguales a cero, esto es, b1 = … = bm = 0. Tdo sistema lineal homogéneo tiene al menos una solución, la dada por x1 = 0,…,xn = 0
    - Dos sistemas lineales son equivalentes si coincide su solución general.
  - **Matrices asociadas a un sistema lineal**
    - Dado el sistema lineal de m ecuaciones y n incógnitas
      - A$\equiv \begin{cases} a11x1 + \cdots + a1nxn = b1 \\ \vdots \\ am1x1 + \cdots + amnxn = bm \end{cases}$
    - Definimos las siguientes matrices asociadas al sistema A
      - Matriz de coeficientes A = $\begin{pmatrix} a11 & \cdots & a1n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ am1 & \cdots & amn \end{pmatrix}$
      - Matriz de incógnitas X = $\begin{pmatrix} x1 \\ . \\ . \\ xn \end{pmatrix}$
      - Matriz de términos independientes B = $\begin{pmatrix} b1 \\ . \\ . \\ bm \end{pmatrix}$
      - Matriz ampliada (A | B) = $\left(\begin{matrix} a11 & a1n \\ am1 & amn \end{matrix}\middle| \begin{matrix} b1 \\ bm \end{matrix}\right)$
    - Sistemas lineales equivalentes por transformaciones elementales
      - Para cada constante no nula α ∈ K son equivalentes los sistemas lineales

- Dos sistemas lineales con matrices ampliadas equivalentes por filas son sistemas equivalentes

- **Discusión y resolución de sistemas lineales AX=B**
  - Un sistema lineal puede tener 0, una o infinitas soluciones:
  - Un sistema lineal A se caracteriza por el número de soluciones:
    - **Incompatible** si no tiene solución
    - **Compatible determinado** si tiene una única solución
    - **Compatible indeterminado** si tiene infinitas soluciones
    - Resolver A es encontrar su solución general
    - Discutir A es determinar si es incompatible, compatible determinado o compatible indeterminado
  - Especialmente fácil de resolver son aquellos sistemas cuya matriz ampliada es escalonada (o escalonada reducida), a los que llamaremos sistemas escalonados (o escalonados reducidos) en un sistema escalonado hay dos tipos d ecuaciones que generan situaciones especiales:
    - Una ecuación del tipo 0 = b con $b \neq 0$ que no tiene solución, y que es equivalente a tener un pivote en la última columna de la matriz ampliada. En tal caso el sistema es incompatible
    - Una ecuación trivial del tipo 0 = 0 que siempre se cumple, y que es equivalentes a tener fila nula en la matriz ampliada. Las ecuaciones de este tipo las eliminaremos si aparecen pues no aportan ninguna información al sistema
  - resolución de sistemas lineales escalonados
    - hay incógnitas principales y incógnitas secundarias, las que están en los pivotes de las entradas serán las principales y las que no estén en los pivotes serán las secundarias, a las incógnitas secundarias se les dan otros valores o parámetros como Alpha para poner resolverlos.
  - Resolución de sistemas lineales triangulares
    - Los sistemas triangulares son compatibles determinados, pues carecen de incógnitas secundarias. Se resuelven fácilmente despejando incógnitas de abajo hacia arriba (si es triangular superior) o de arriba abajo (si es triangular inferior)
  - Resolución de sistemas lineales escalonados reducidos
    - Los sistemas escalonados reducidos son un caso particular de sistemas escalonadas cuya resolución es algo más sencillas.
  - Discusión de los sistemas lineales escalonados
    - Sea A un sistema lineal escalonado con n incógnitas y sea (A| B) su matriz ampliada
      - Si (A|B) tiene pivote en la última columna entonces A es incompatible
      - Si (A|B) no tiene n pivotes en la última columna y si además
        - (A|B) tiene n pivotes entonces A es compatible determinado
        - (A|B) tiene menos de n pivotes entonces A es compatible indeterminado.
  - Teorema de Rouche-Frobenius
    - Sea A un sistema lineal con n incógnitas y sea (A|B) su matriz ampliada
      - A es incompatible si y solo si rg(A) < rg(A|B)
      - A es compatible determinado si y solo si rg(A) = rg (A|B) = n
      - A es compatible indeterminado si y solo si rg(A) = rg(A|B) < n
    - Un sistema lineal AX = B con A de orden n tiene soluciones únicas si y solo si es invertible
  - Regla de Cramer
    - Un sistema lineal AX = B es un sistema regular de orden n o sistema de Cramer si A es una matriz de orden n invertible
      - La única solucion de un sistema regular de orden n AX = B viene dada por

        $$x1=\frac{\triangle_1}{\det(A)},\ x2=\frac{\triangle_2}{\det(A)},\ldots\ldots,\ xn=\frac{\triangle_n}{\det(A)}$$

        Donde $\triangle$ es el determinante de la matriz que se obtiene cambiando la columna i de A por B

- Factorización LU

- **Espacios vectoriales**
  - **Definición y propiedades de los espacios vectoriales**
    - Un conjunto V no vacío es un espacio vectorial sobre un cuerpo K 0 K-espacio vectorial si:
      - En V está definida una operación interna(suma) tal que (V, +) es un **grupo abeliano**, si se cumplen las siguientes propiedades:
        - Conmutativa: u + v = v + u para todo u, v ∈ V
        - Asociativa: u + (v + w) = (u + v) + w para todo u, v, w ∈ V
        - Existe elemento neutro: el 0 ∈ V, tal que u + 0 = u para todo u ∈ V
        - Existe elemento opuesto ∀u ∈ V, existe -u ∈ V tal que u + (-u) = 0
      - En V está definida una operación externa (producto de escalares), si cumple las siguientes propiedades:

        K x V → V

        (α,u) → α.u
        - Asociativa: α . (β . u) = (α . β) . u, para todo α, β ∈ K. y todo u ∈ V
        - El elemento unidad del cuerpo, 1 ∈ K, cumple 1 . u = u, para todo u ∈ V
        - Distributiva del producto respecto de la suma en V
        - Distributiva del producto respecto de la suma de escalares
      - Los elementos de un espacio vectorial son los vectores, y los del cuerpo K los escalares
      - Presentamos algunos espacios vectoriales:
        -
    - **Leyes de la suma de vectores y del producto por escalares**
      - Sea V un K-espacio vectorial, u, v, w ∈ V y α, β ∈ K. Son ciertas las afirmaciones:
        - α0 = 0
        - 0u = 0
        - αu = 0 ⇔ α = 0 o u = 0
        - u + v = u + w ⇔ v = w
        - αu = βu y u ≠ 0 ⟹ α = β
        - αu = αv y α ≠ 0 ⟹ u = v
        - (-α)u = -αu = α(-u)
  - **Dependencia e independencia lineal**
    - Combinación lineal
      - Estamos interesados en saber cuándo un conjunto de vectores de un espacio vectorial V tiene la propiedad de que cualquier vector de V se puede obtener como combinación lineal única de los vectores del conjunto. Esto cuestión da lugar al concepto de **base.**
        - **Linealmente dependientes** si alguno de ellos es combinación lineal de los demás
        - **Linealmente independientes** si ninguno de ellos es combinación lineal de los demás
      - Sea V un K- espacio vectorial. Son ciertas las afirmaciones
        - Si 0 ∈ {v1,….,vm} entonces v1,…,vm son linealmente independientes
        - v1….,vm son linealmente dependientes si y solo si existen escalares α1,…,αm no todos iguales a 0 para los que se cumple que α1v1+…+αmvm=0
        - v1,…, vm son linealmente independientes si y solo si los únicos escalares para los que se cumple que α1v1 + … + αmvm = 0 son α1 = … = αm = 0
  - **Sistemas generadores**
    - Un sistema generador es un espacio vectorial V es un conjunto de S de vectores de V tal que todo vector de V es combinación lineal de los vectores de S. El espacio V es una **dimensión finita** si existe un sistema generador de V con un numero finito de vectores.
    - Si { v1,…..,vm} es un sistema generador de V y um es una combinación lineal de v1,….,vm-1 entonces {v1,…..,vm-1} es un sistema generador de V
    - Sea V un espacio vectorial. Si v1,…,vr son vectorws linealmente independientes de V y {w1,….,ws} es un sistema generador de V entonces r≤s

- **Bases**
  - Una base de un espacio vectorial V es un conjunto ordenado B+{v1,….,vn} de vectores de V linealmente independientes que forman un sistema generador de V.
  - Todas las bases de un espacio vectorial finito V tiene igual número de vectores.
  - La dimensión de V, dim(v), es el número de vectores de cualquier base de V
  - Base canónica b=(1,0,0)(0,1,0)(0,0,1)
  - Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Son ciertas las afirmaciones:
    - Un sistema generador de V tiene como mínimo n vectores.
    - Un conjunto de vectores linealmente independientes de V tiene como máximo n vectores.
    - Todo sistema generador de V de n vectores es una base de V.
    - Todo conjunto de n vectores linealmente independientes de V es una base de V.
  - Teorema de ampliación de base
  - Coordenadas de un vector respecto de una base
    - Isomorfismo de coordenadas
- **Rango de un conjunto de vectores**
  - El rango de un conjunto de vectores es el mayor número de vectores linealmente independientes que contiene.
  - Dos conjuntos de vectores son equivalentes si podemos transformar uno en otro mediante operaciones elementales
- **Matriz cambio de base**
  - Si A, B y C son tres bases de un espacio vectorial entonces Mab=McbMac
- **Subespacios vectoriales**
  - Un subespacio vectorial es un subconjunto no vacío de un espacio vectorial que contiene a todas las combinaciones lineales de sus vectores
  - **Subespacio trivial**
    - Si U =- {0}, entonces U se denomina subespacio trivial de V y , por convenio, dim(U) = 0
  - **Recta vectorial**
    - Si dim (U) = 1 se denomina recta vectorial
  - **Plano vectorial**
    - Si dim (U) = 2 plano vectorial
  - **Hiperplano vectorial**
    - Si dim (U) = n-1 se denomina hiperplano vectorial
  - **Subespacio total**
    - Si dim(U) = n, entonces U = V se denomina subespacio total de V
  - **Subespacio propio**
    - Si U es distinto del trivial y del total entonces se dice que U es un subespacio propio de V
  - Todo subespacio vectorial U de V contiene el vector 0. Esto se deduce tomando $\alpha = 0$ en la condición (ii) de la definición 3.40
  - Subespacios vectoriales generado por un conjunto de vectores
    - El subespacio vectorial generado por un conjunto no vacío de S de V es el conjunto
    - L(S) es cerrado con respecto a la suma y al producto por escalares, ya que contiene todas las combinaciones lineales de los vectores de S, luego L(S) es un subespacio vectorial
    - Sea un conjunto no vacío de vectores de V. son ciertas las afirmaciones:
      - L(S) es el menor subespacio vectorial de V que contiene a S
      - Si S es un subespacio vectorial de V entonces L(S) = S
      - Si R es tal que $S\subseteq R\subseteq V$ entonces $L(S)\subseteq L(R)\subseteq V$
  - Un sistema generador de un subespacio vectorial U de V es un conjunto{v1,….,vm} de vectores de U tal que L(v1,….,vm)=U
  - Si los conjuntos de vectores R y S son equivalentes entonces L(R)=L(S)
  - Si U = L(v1,….,vm) entonces dim(U)=rg{v1,….,vm}
  - Paso de un sistema generador a una base

- **Ecuaciones paramétricas**
  - Subespacio U respecto de la base B son cualquiera de las expresiones…. Observamos que para construir unas ecuaciones paramétricas necesitamos conocer una base { a1,….,an} de U y las coordenadas de sus vectores respecto de B.
  - Y a la inversa podemos construir una base de U y las coordenadas de sus vectores respecto de B siempre que conozcamos unas ecuaciones paramétricas de Y respecto de B.
- **Ecuaciones implícitas**
  - Subespacio U respecto de la base B son una colección de r = n - , ecuaciones lineales homogéneas no redundantes en las variables x1,….,xn
  - Calculo de unas ecuaciones implícitas dado un sistema generador
  - Calculo de unas ecuaciones paramétricas dadas unas implícitas
- **Intersección y suma de subespacios vectoriales** pg 153
  - Si V es un espacio vectorial de dimensión n y U un subespacio vectorial de V de dimensión k, entonces U es interse4ccion de n – k hiperplanos
  - Suma de subespacio vectoriales
  - Suma directa de subespacios vectoriales
- **El espacio cociente modulo un subespacio vectorial**

- **Aplicaciones lineales**
  - Recordamos que las operaciones esenciales que definen a un espacio vectorial son dos, es natural estudiar aquellas aplicaciones entre espacios vectoriales que respeten estas operaciones, esto es, que la suma de un vector le hagan corresponder la suma de sus imágenes y que al producto de un escalar por un vector le hagan corresponder el escalar por la imagen del vector, esto es lo que se denomina aplicaciones lineales.
    - Se pueden sumar vectores
    - Se puede multiplicar un vector por un escalar
  - Ejemplos de aplicaciones lineales
    - Si U es un subespacio vectorial de V, entonces la **inclusión**:
    - La aplicación **nula** 0:
    - Para cualquier escalar λ ∈ K la **homotecia** dada por:
    - La **trasposición** de matrices:
    - Dada la matriz A ∈ Mmxn (K) la aplicación
    - Toda matriz A ∈ Mmxn (K) define una aplicación lineal
    - La aplicación que cada polinomio real de R[x] le asigna su derivada
    - La aplicación que a cada función real continua en el intervalo [a,b] le asigna si integral
    - Si U es un subespacio vectorial de V, entonces la **proyección canónica**:
  - **Propiedades básicas de las aplicaciones lineales:**
    - Se f : U → V una aplicación lineal. Son ciertas las afirmaciones:
      - F (0u) = 0v
      - F (α1u1 + …. + αnun) = α1 f (u1) + …. + anf(un)
    - Una aplicación lineal queda completamente determinada conociendo las imágenes de los vectores de una base
  - **El núcleo y la imagen de una aplicación lineal**
    - El **núcleo** de f, que es el subespacio vectorial de U formado por todos aquellos vectores de U cuya imagen por f es el vector 0:
    - La **imagen** de f, que es el subespacio vectorial de V formado por aquellos vectores de V que son imagen por f de algún vector de U:
    - Fromula de dimensiones
      - Para tofa aplicación lineal f: U -> V se cumple la igualdad:
        - Dim(U) = dim (ker(f)) + dim(Im(f))
  - **Tipos de aplicaciones lineales**
    - Sea f : A→B una aplicación entre dos conjuntos cualquieras A y B recordemos que:

            - F es **inyectiva** si para cada a1, a2 ∈ A con a1 ≠ a2 se cumple que f(a1) ≠ f(a2)
            - F es **sobreyectiva** si para cada b ∈ B existe a ∈ A tal que f(a)=b. esto es si f(A)=B
            - F es **biyectiva** si es a la vez inyectiva y sobreyectiva
        - Sea f : U→V una aplicación lineal, también denominada homomorfismo. Decimos que:
            - F es un **monomorfismo** si f es un homomorfismo inyectivo
            - F es un **epimorfismo** si f es un homomorfismo sobreyectivo
            - F es un **isomorfismo** si f es un homomorfismo biyectivo
        - Sea f: U -> V una aplicación lineal. Son equivalentes las afirmaciones:
            - F es un monomorfismo
            - Su u1,…,um son vectores linealmente independietes de U entonces f(u1)…..f(um) son vectores linealmente independientes de V.
            - Si { u1,…,um es una base de Uentoces {f(u1),….,f(um)} es una base de Im(f)
            - Dim(U) = dim (Im(f))
            - Ker(f) = {0}
        - Sea f : U -> V una aplicación lineal. Son equivalentes las afirmaciones:
            - F es un epimorfismo
            - Si{ u1,….,um} es un sistema generador de U entonces { f(u1),….,f(um)} es un sistema generador de V
        - A continuación damos algunos resultados que caracterizan los isomorfismos y sus propiedades:
            - F perteneciente L(U,V) es un isomorfismo si y solo si Ker(f) = 0 e Im(f) = V
            - Sea f: U -> V una aplicación lineal y sea dim(U) = dim(V) = n. son equivalentes :
                - f es monomorfismo
                - f es epimorfismo
                - f es isomorfismo
        - ser isomorfo es una relación de equivalencia entre K-espacios vectoriales. Es decir, dasdos los K-espacios vecotriales U, V y W se cumple que:
            - U es isomorfismo a U
            - Si U es isomorfismo a V entonces V es isomorfismo a U
            - Si U es isomorfismo a V y V es isomorfismo a W entonces U es isomorfismo a W.
        - Dos K-espacios vectoriales son isomorfos si y solo si tiene igual dimension
    - **Matriz de una aplicación lineal**
        - El rango de una aplicación lineal es el rango de cualquiera de sus matrices.
    - **Endomorfismos**
        - Un endomorfismo es una aplicación lineal de un espacio vectorial en si mismo. Y un automorfismo es un endomorfismo que, además, es isomorfismo. Al conjunto de endomorfismo de un K espacio vectorial V lo denotaremos L(V,V)
        - A,B ∈ Mn(K) son **semejantes** si existe P ∈ Mn(K) MN(K) invertible tal que A = P^{-1}BP
    - **Proyecciones y simetrías pg 208**
    - **El espacio dual pg 212**