Examen de Matemática Discreta

NOTA IMPORTANTE: El espacio máximo para escribir las respuestas es de dos folios por las dos caras. Si se envían más de dos folios, solamente se leerán los dos primeros.

Problema

a) Demostrar que si $a \equiv b \bmod(m)$ y $c \equiv d \bmod(m)$, entonces $ac \equiv bd \bmod(m)$ (1,5 puntos)

b) Demostrar que todo número de la forma $2^{2^n} + 1$, con $n \geqq 2$, termina en 7. (2 puntos)

Solución

a) Apartado 4 del teorema 1-5.9 del libro de teoría.

b) El número terminará en 7 si sólo si $2^{2^n} + 1 \equiv 7 \bmod(10)$ Para ello demostraremos que $2^{2^n} \equiv 6 \bmod(10)$, y esto lo haremos por inducción sobre n.

Si $n = 2$ entonces $2^{2^2} \equiv 6 \bmod(10)$, supongamos que $2^{2^{n-1}} \equiv 6 \bmod(10)$, entonces $2^{2^n} = 2^{2^{n-1}2} = 2^{2^{n-1}}.2^{2^{n-1}} \equiv 6.6 \bmod(10) \equiv 6 \bmod(10)$.

Problema

a) Sean G y G' dos grafos con la misma matriz de adyacencia. Demostrar que entonces G y G' son isomorfos. (2 puntos)

b) Dibuje un grafo G cuya matriz de incidencia o adyacencia es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ (1 punto)

Solución

a) 2-3.4 del libro de teoría

b) Puesto que A es una matriz cuadrada, G tiene cinco vértices $v_1 \ldots . v_5$. Hay que dibujar una arista desde v_i hasta v_j si $a_{ij} = 1$.

Problema

a) ¿Cuántas palabras distintas pueden formarse permutando las letras de la palabra UNIVERSIDADES? (1 punto)

b) ¿Que polígono regular tiene el doble número de diagonales que de lados?

¿Cuántos triángulos se pueden formar con los vértices de un polígono regular de n lados si los lados del polígono regular no pueden ser lados de ningún triángulo? (2,5 puntos)

Solución

a) Hay 13 letras. Aparecen dos veces la letra E, la S, la I y la D. Por lo tanto la solución será

$\binom{13}{2\,2\,2\,2\;1\,1\,1\,1\,1} = \frac{13!}{2!2!2!2!}$

b) Un polígono regular de n lados, tiene también n vértices. Dos vértices determinan un lado o una diagonal. Por lo tanto $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ es el número de lados más diagonales, como hay n lados, el número de diagonales es $\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$.

Si $\frac{n(n-3)}{2} = 2n \Rightarrow n^2 - 3n = 4n \Rightarrow n(n-7) = 0 \Rightarrow n = 7$.

El número de triángulos de un polígono regular de n lados es $\binom{n}{3}$. Ahora el número de triángulos con exactamente un lado sobre el polígono n_1 se puede calcular de la siguiente forma, con el número de lados es n, y el número de vértices que puedes elegir es $n-4$, ya que no pueden estar los del lado ni los consecutivos. El número de triángulos con un lado es $n(n-4)$.

El número de triángulos con dos lados n_2 es igual al número de tres vértices consecutivos que existen en el polígono, o las formas de elegir el primer vértice, luego es n. Así el número que queremos es $\binom{n}{3} - n(n-4) - n$.