

No se permite el uso de ningún tipo de material

Todas las respuestas deben estar justificadas

Ejercicio 1. (2 puntos) Se considera la sucesión (a_n) de números reales definida por recurrencia mediante

$$a_n = \sqrt{1 + 2a_{n-1}} - 1, \quad a_1 > 0.$$

a) Comprobar que (a_n) es convergente y calcular su límite.

b) Calcular $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Ejercicio 2. (2 puntos) Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto de \mathbb{R} (no necesariamente un intervalo).

a) Definir punto adherente a A y punto de acumulación de A .

b) ¿Es cierto que todo punto adherente también es punto de acumulación? Demostrarlo en caso afirmativo, dar un contraejemplo en caso negativo.

c) ¿Es cierto que todo punto de acumulación también es punto adherente? Demostrarlo en caso afirmativo, dar un contraejemplo en caso negativo.

Ejercicio 3. (2 puntos) Calcular, si existe, el valor de $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^x = 4.$$

Ejercicio 4. (2 puntos) Determinar, si existen, los extremos de la función

$$f(x) = 3 - |x - 3|$$

en el intervalo cerrado $[-1, 5]$.

Ejercicio 5 (2 puntos) Estudiar la convergencia absoluta y condicional de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{3^n n!}.$$

Tiempo: 2 horas