Examen de Matemática Discreta

NOTA IMPORTANTE: El espacio máximo para escribir las respuestas es de dos folios por las dos caras. Si se envían más de dos folios, solamente se leerán los dos primeros.

Problema 1

a) Demostrar que si $p \geq q \geq 5$, p y q primos, entonces $12 \mid (p^2 - q^2)$. (2 puntos)

b) Estudiar si 713 es primo, utilizando la criba de Eratóstene. (1 punto)

Solución

a) Como p y q son primos, entonces los podemos escribir de la forma

$p = 12k + r$

$q = 12k' + r'$

donde r y r' por ser primos solamente pueden ser 1 ó 5 ó 7 ó 11

$p^2 = 144k^2 + 24kr + r^2$ y $q^2 = 144k'^2 + 24k'r' + r'^2$, así $p^2 - q^2 = 12m + r^2$-r'^2, pero cualquier diferencia entre r^2 y r'^2 siempre es múltiplo de 12.

b) Si no fuera primo, tendría que ser divisible por algún primo menor que 27 $p \leq \sqrt{713} \leq 27$, y estos son $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$ o 23. Pero $713 = 23.31$, luego no es primo.

Problema 2

Sean G un grafo no multígrafo, dígrafo ni pseudografo con v vértices $v \geq 2$. Demuestre las siguientes propiedades:

a) Hay al menos dos vértices con el mismo grado. (2 puntos)

b) Si G es conexo y plano, hay al menos un vértice con grado menor o igual a 5. (2 puntos)

Solución

Si el grafo tiene dos o más vértices de grado 0, no hay nada que demostrar. Supongamos primero que no hay vértices de grado 0. Los posibles grados son los números $1, 2, \ldots, v-1$, ya que se trata de un grafo simple. Por el Principio de Distribución se tiene que debe haber al menos dos vértices del mismo grado. Si hay un vértice de grado 0, consideramos los restantes $v-1$ vértices. Los posibles grados son ahora $1, 2, \ldots, v-2$ y nuevamente el Principio de Distribución nos asegura que hay dos vértices con el mismo grado.

b) Supongamos que no es cierto que haya al menos un vértice de grado menor o igual a 5. Entonces el grado de cada vértice es mayor o igual a 6, lo que implica que el número de de aristas es $a \geq 3v$. Pero entonces el grafo no podría ser plano, ya que una condición necesaria para que un grafo sea plano es que $a \leq 3v - 6$.

Problema 3

Demostrar que para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $k \leq m$ se tiene la siguiente igualdad

$$\binom{m+1}{k+1} = \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{m}{k}.$$

(3 puntos)

Solución

Teorema 3-3.10

Examen de Matemática Discreta

NOTA IMPORTANTE: El espacio máximo para escribir las respuestas es de dos folios por las dos caras. Si se envían más de dos folios, solamente se leerán los dos primeros.

Problema 1

a) Encontrar todas las soluciones en $\mathbb{N}$ de la ecuación

$x^2 - y^2 = 216$. (2 puntos)

b) Estudiar si es compuesto el número 17423. (1 punto)

Solución

a) Como $216 = 2^3.3^3$

Se puede factorizar en dos números con la misma paridad como $216 = 108.2 = 54.4 = 36.6 = 18.12$, luego las soluciones son

$x = \frac{108+2}{2} = 55, y = \frac{108-2}{2} = 53$

$x = \frac{54+4}{2} = 29, y = \frac{54-4}{2} = 25$

$x = \frac{36+6}{2} = 21, y = \frac{36-6}{2} = 15$

$x = \frac{18+12}{2} = 15, y = \frac{18-12}{2} = 3$

b) Lo primero que habrá que determinar es el menor entero q con $q^2 \geq 17423$, en este caso es 132. Entonces, habrá que tomar valores de q entre 132 y $\frac{17423+1}{2} = 8712$ y calcular $q^2 - 17423$ hasta que de un cuadrado. Por lo tanto

$132^2 - 17423 = 1$, es un cuadrado, luego

$17423 = 132^2 - 1^2 = (132-1)(132+1) = 131.133$

Problema 2

Sea G un grafo. Demostrar que si G tiene un camino euleriano entonces o bien todo vértice de G tiene grado par o bien exactamente dos de los vértices tienen grado impar. (3,5 puntos)

Solución

Lema 2-2.11

Problema 3

Un palíndromo es una palabra que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda (análoga a los números capicúa). Estudiar cuántos palíndromos de siete letras se pueden formar con un alfabeto de n letras $(n \geq 5)$, si en cada palabra una letra puede aparecer como máximo tres veces.

(3,5 puntos)

Solución

En un palíndromo de siete letras, las letras de las posiciones $1, 2$ y 3 son

iguales a las de las posiciones 7, 6 y 5, respectivamente. Además estas tres letras tienen que ser distintas, ya que si hubiera dos iguales habría cuatro letras iguales. Así hay dos casos: la letra central es igual a una de las tres primeras letras o es distinta de ellas.

La primera letra puede ser cualquiera de las n del alfabeto. La segunda puede ser una de las $n-1$ restantes, y la tercera una de las $n-2$ restantes. Ahora es cuando hay que considerar la cuarta letra. Si es igual a una de las tres anteriores tenemos 3 posibles opciones. Si es distinta será una de las $n-3$ restantes. En total tendremos

$$n(n-1)(n-2)3 + n(n-1)(n-2)(n-3) = n^2(n-1)(n-2)$$