Álgebra lineal II, Grado en Matemáticas

Junio 2019, 2ª Semana

Versión Tipo Test de muestra para el curso 2019/2020

No se permite el uso de material impreso (libros, apuntes) ni ningún tipo de calculadora.

Defina los siguientes conceptos (2 puntos total: preg correcta 0.5 punto, preg incorrecta -0.25):

Importante: utilice una única cara para las cuatro deficiones. Si utiliza más espacio no se tendrá en cuenta.

0.1. Subespacio invariante y subespacio invariante irreducible. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base. Decir en cuál de las siguientes matrices el subespacio $L(v_1, v_2)$ es un subespacio invariante **irreducible**.

(a) $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (c) $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

0.2. Polinomio anulador y polinomio mínimo. ¿Cuál es el polinomio mínimo anulador de un endomorfismo f dado por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$?

(a) $m_f(t) = (t-1)$, (b) $m_f(t) = (t-1)^2$, (c) $m_f(t) = t^2$

0.3. Forma bilineal. ¿Cuál de las siguientes opciones define a $f : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$ como una forma bilineal?

(a) $f\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = x_1 y_1 + 1$

(b) $f\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = x_1 y_1 + x_2 y_1$

(c) $f\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = x_1^2 y_2$

0.4. Coeficientes de Fourier. Sean $(V, <,>)$ un espacio vectorial euclídeo y $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortogonal. Las coordenadas de un vector $u \in V$, o sus coeficientes de Fourier, respecto a la base $\mathcal{B}$ son:

(a) $u = \left(\dfrac{< u, v_1 >}{||v_1||}, \ldots, \dfrac{< u, v_n >}{||v_n||} \right)$

(b) $u = \left(\dfrac{< v_1, u >}{||v_1||^2}, \ldots, \dfrac{< v_n, u >}{||v_n||^2} \right)$

(c) $u = \left(\dfrac{< u, v_1 >}{||u||}, \ldots, \dfrac{< u, v_n >}{||u||} \right)$.

Ejercicio 1 (2 puntos total: preg correcta 0.5 punto, preg incorrecta -0.25).

Conteste las siguientes cuestiones centradas en la demostración (la que se da en el libro de texto) de: Dada una forma bilineal simétrica $\boldsymbol{f}$ en un espacio vectorial $\boldsymbol{V}$ de dimensión finita $\boldsymbol{n}$, existe una base de vectores conjugados respecto a $\boldsymbol{f}$. Equivalentemente, existe una matriz diagonal de $\boldsymbol{f}$.

1.1. ¿Qué método de demostración se utiliza?
(a) Reducción al absurdo; (b) Inducción; (c) Demostración directa.

1.2. En la demostración se utiliza un resultado anterior ¿cuál de los siguietes tres?
(a) Que toda matriz simétrica es congruente con una matriz diagonal.
(b) Si $\boldsymbol{u}$ es un vector no autoconjugado, entonces se cumple que $\boldsymbol{L(u)^c}$ es un hiperplano y $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L(u)} \oplus \boldsymbol{L(u)^c}$.
(c) Si $\boldsymbol{U, W}$ son subespacios vectoriales de $\boldsymbol{V}$ tal que $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{W}$, entonces $\boldsymbol{W^c} \subset \boldsymbol{U^c}$-

1.3. La base obtenida en la demostración del resultado verifica:
(a) que todos los vectores son todos autoconjugados siempre.
(b) que algunos vectores pueden ser autoconjugados y otros no serlo.
(c) que los vectores obtenidos nunca son autoconjugados.

1.4. ¿Cuál de los siguientes pasos se necesita en la demostración?
(a) $\boldsymbol{U^c} \cap \boldsymbol{W^c} = (\boldsymbol{U} + \boldsymbol{W})^{\boldsymbol{c}}$
(b) Si $\boldsymbol{u, v} \in \mathbf{ker}(\boldsymbol{f})$ y $\boldsymbol{a, b} \in \mathbb{K}$, se comprueba que $\boldsymbol{au} + \boldsymbol{bv} \in \mathbf{ker}(\boldsymbol{f})$.
(c) Se encuentra un hiperplano $\boldsymbol{H}$ conjugado a un vector $\boldsymbol{v_1}$, que no es autoconjugado, y se considera $\boldsymbol{f}|_{\boldsymbol{H}}$.

Solución: Teorema 7.28, página 268.

Ejercicio 2 (3 puntos total: preg correcta 1 punto, preg incorrecta -0.5) .

Determine la forma canónica de Jordan de un endomorfismo $\boldsymbol{f}$ de $\mathbb{K}^4$ que respecto de una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ cumple las siguientes condiciones:

$$f(v_1) = v_1, \qquad f(v_3) = 2v_1 + v_3, \qquad f(v_2) = -v_3 + v_2, \qquad v_4 \in \ker(f).$$

2.1. ¿Cuál de las siguientes matrices corresponde a la forma canónica de Jordan de $\boldsymbol{f}$?

(a) $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (b) $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (c) $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.2. ¿Cuál de las siguientes bases forma una base de Jordan $\mathcal{B}'$ tal que $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = J$? Es decir, ¿la obtenida en el apartado anterior?

(a) $\mathcal{B}' = \{-v_2, v_3, v_1, v_4\}$; (b) $\mathcal{B}' = \left\{-\frac{v_2}{2}, \frac{v_3}{2}, v_1, v_4\right\}$; (c) $\mathcal{B}' = \{v_3, v_2, v_1, v_4\}$.

2.3. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones implícitas en base $\mathcal{B}$ corresponde a un plano invariante irreducible?

(a) $\{x_1 = x_2, \ \ x_3 = 0\}$; (b) $\{x_1 = 0, \ \ x_4 = 0\}$; (c) $\{x_2 = 0, \ \ x_4 = 0\}$.

Solución:

- Como $f(v_1) = v_1$ ya sabemos que $\lambda = 1$ es un autovalor y v_1 es un autovector.
- $f(v_3) = 2v_1 + v_3$ implica $(f - Id)(v_3) = 2v_1$, y a su vez que $(f - Id)(v_3/2) = v_1$
- $f(v_2) = -v_3 + v_2$ implica que $(f - Id)(v_2) = -v_3$, y a su vez que $(f - Id)(-v_2/2) = v_3/2$.
- Como $f(v_4) = 0$ sabemos que $\lambda = 0$ es un autovalor y v_4 es un autovector.

(a) y (b): Por tanto, $\mathcal{B}' = \left\{-\frac{v_2}{2}, \frac{v_3}{2}, v_1, v_4\right\}$ es una base de Jordan y

$$J = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se puede comprobar que:

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = P\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c): El único plano invariante irreducible corresponde a $L(v_1, v_3/2)$ y se puede definir con ecuaciones implíctas como: $L(v_1, v_3/2) = \{x_2 = 0, \quad x_4 = 0\}$.

Ejercicio 3 (3 puntos total: preg correcta 1 punto, preg incorrecta -0.5).
En un espacio vectorial euclídeo, consideramos una base ortonormal positivamente orientada $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$, definimos la recta $\boldsymbol{r} \equiv \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \mathbf{0},\ \boldsymbol{z} = \mathbf{0}\}$ y el ángulo $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\pi}/\mathbf{4}$.

3.1. ¿Cuál sería la matriz de Jordan real de un giro $\boldsymbol{g}$ de $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\pi}/\mathbf{4}$ radiantes respecto de una base ortonormal positivamente orientada $\boldsymbol{\mathcal{B}'} = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_3}\}$ con $\boldsymbol{u_1}$ en el eje de giro $\boldsymbol{r}$?

(a) $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(g) = J_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$

(b) $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(g) = J_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(c) $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(g) = J_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

3.2. Determinar una base ortonormal positivamente orientada $\boldsymbol{\mathcal{B}'} = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_3}\}$ con $\boldsymbol{u_1} \in \boldsymbol{r}$ (de la que se habla en el apartado anterior) en coordenadas de $\boldsymbol{\mathcal{B}}$.

(a) $u_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)_{\mathcal{B}}$, $u_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)_{\mathcal{B}}$, $u_3 = (0, 0, 1)_{\mathcal{B}}$.
(b) $u_1 = (-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3})_{\mathcal{B}}$, $u_2 = (\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)_{\mathcal{B}}$, $u_3 = (0, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})_{\mathcal{B}}$.
(c) $u_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)_{\mathcal{B}}$, $u_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)_{\mathcal{B}}$, $u_3 = (0, 0, 1)_{\mathcal{B}}$.

3.3. ¿Cuál sería la matriz del giro $\boldsymbol{g}$ del primer apartado respecto de $\boldsymbol{\mathcal{B}}$?

(a) $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}+2}{4} & \frac{\sqrt{2}-2}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}-2}{4} & \frac{\sqrt{2}+2}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

(c) $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

Solución: Problema 9.9, página 453.