

No se permite el uso de ningún tipo de material

Todas las respuestas deben estar justificadas

Ejercicio 1. (2 puntos) Se define por recurrencia la sucesión $(a_n) \subset \mathbb{R}$ dada por

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n^2 + 1 \quad \text{para } n \geq 1 \quad \text{con } a_1 \leq 2.$$

Estudiar la convergencia de la sucesión (a_n) . En caso de ser convergente, calcular su límite.

Ejercicio 2. (2 puntos) Se define la función *parte entera* $[\] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como $[x] =$ mayor número entero que es menor o igual que x . Discutir la existencia del siguiente límite y calcular su valor si existe.

$$\lim_{x \rightarrow 1} x \left[\frac{3}{x} \right]$$

Ejercicio 3. (2 puntos) Calcular el número de soluciones reales de la ecuación

$$e^x(x-1) = a$$

en función del valor de $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4. (2 puntos) Hallar las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}.$$

Ejercicio 5 (2 puntos) Estudiar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n} \right)^{-n^2}.$$

Tiempo: 2 horas