Geometría básica

2019

Duración 2 horas. **Sólo se permite material de dibujo (reglas, compás)**

Justificar concisa y razonadamente todas las respuestas.

Ejercicio 1. (4 puntos, los tres primeros apartados 2 puntos y apartado d) 2 puntos)

Sea $\angle V = \angle\{\bar{r}, \bar{s}\}$ el ángulo con vértice el punto V y cuyos lados son dos semirectas distintas del plano: $\bar{r}$ y $\bar{s}$, supongamos además que $\angle V$ mide menos que la mitad de un ángulo recto. Sea r la recta que contiene a la semirrecta $\bar{r}$ y σ_r la reflexión sobre la recta r. Para cada punto Q de $\bar{r}$ sea $\pi(Q)$ el punto de s de modo que $r_{Q,\pi(Q)}$ es perpendicular a s. Sea P un punto del interior del ángulo $\angle V$.

a) Probar que para todo Q de $\bar{r}$ se tiene que: $\sigma_r(P)\pi(Q) \leq \sigma_r(P)Q + Q\pi(Q)$.

b) Sea N el punto de intersección de r con la recta perpendicular a s que pasa por $\sigma_r(P)$. Probar que $\sigma_r(P)N + N\pi(N) = \sigma_r(P)\pi(N)$.

c) Probar que $\sigma_r(P)\pi(N) \leq \sigma_r(P)\pi(Q)$, para cualquier Q perteneciente a $\bar{r}$.

d) Probar que para todo Q de $\bar{r}$ se tiene la siguiente desigualdad:

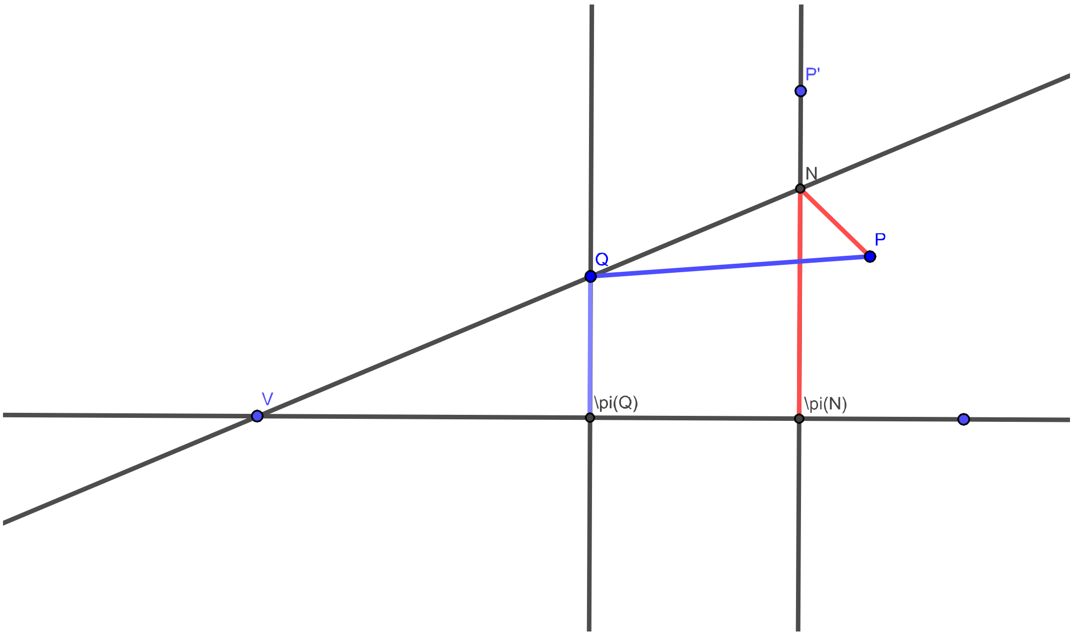
$$NP + N\pi(N) \leq QP + Q\pi(Q)$$

Ejercicio 2. (3 puntos)

Sea $[A, B]$ un segmento cuyos extremos son A y B, y $\eta_{C,k}$ una homotecia de centro C y razón k. Demostrar que la imagen por $\eta_{C,k}$ del segmento $[A, B]$ es el segmento $[\eta_{C,k}(A), \eta_{C,k}(B)]$, es decir $\eta_{C,k}([A, B]) = [\eta_{C,k}(A), \eta_{C,k}(B)]$.

Ejercicio 3. (3 puntos)

En el espacio euclidiano se consideran dos rectas perpendiculares r y s y que se cortan en un punto P. Sea π el plano que contiene a r y s, y sea t la recta perpendicular a π que pasa por P. Sean ρ_r, ρ_s y ρ_t las medias vueltas con eje r, s y t respectivamente. Clasificar la isometría $\rho_r \circ \rho_s \circ \rho_t$.



Soluciones

Ejercicio 1.

a) La desigualdad triangular nos dice $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$. Tomando $A = \sigma_r(P)$, $B = \pi(Q)$ y $C = Q$, tenemos la desigualdad: $\sigma_r(P)\pi(Q) \leq \sigma_r(P)Q + Q\pi(Q)$.

b) La recta t perpendicular a s y pasa por $\sigma_r(P)$, pasa también por $N = t \cap r$. Por otra parte la recta t' que pasa por N y $\pi(N)$ es perpendicular a s y pasa por N, luego $t' = t$, con lo que tenemos que $\sigma_r(P)$, N y $\pi(N)$ están alineados.

Hay una errata en el enunciado, debería decir que $\angle V$ mide menos que la mitad de un ángulo recto y no que $\angle V$ mide menos que un ángulo recto, esta propiedad asegura que $N \in [\sigma_r(P), \pi(N)]$ y por tanto $\sigma_r(P)N + N\pi(N) = \sigma_r(P)\pi(N)$. Por ser $\measuredangle V < \pi/4$ se tiene que $\angle\{\bar{s}, \sigma_r(\bar{s})\}$ mide menos que un recto, y como cualquier punto del interior de $\angle\{\bar{r}, \bar{s}\}$ se transforma en un punto del interior de $\angle\{\bar{r}, \sigma_r(\bar{s})\} \subset \angle\{\bar{s}, \sigma_r(\bar{s})\}$, entonces la perpendicular a s desde $\sigma_r(P)$ corta primero a $\bar{r}$ y después a $\bar{s}$. Esta última parte del ejercicio no se ha tenido en cuenta en la corrección a causa de la errata y se ha dado por válida la respuesta simplemente con la observación de que $\sigma_r(P)$, N y $\pi(N)$ están alineados.

c) Si $\pi(Q) = \pi(N)$ la desigualdad es evidentemente una igualdad.

Si $\pi(Q) \neq \pi(N)$ tenemos que $\sigma_r(P)$, $\pi(N)$, $\pi(Q)$ son los vértices de un triángulo rectángulo. Como $\sigma_r(P)\pi(Q)$ es la medida de la hipotenusa tenemos que $\sigma_r(P)\pi(N) < \sigma_r(P)\pi(Q)$.

d) Por ser σ_r una isometría y $N \in r$, tenemos: $NP = \sigma_r(N)\sigma_r(P) = N\sigma_r(P)$.

Entonces $NP + N\pi(N) = N\sigma_r(P) + N\pi(N) = \sigma_r(P)\pi(N)$, la última igualdad es por apartado b).

Ahora aplicamos el apartado c): $NP + N\pi(N) = \sigma_r(P)\pi(N) \leq \sigma_r(P)\pi(Q)$ y por el apartado a): $NP+N\pi(N) \leq \sigma_r(P)\pi(Q) \leq \sigma_r(P)Q+Q\pi(Q)$.

Ejercicio 2.

Es el Corolario 7.5 del texto base (página 124 de la nueva edición)

Ejercicio 3.

Sea π_{rt} el plano que contiene a r y t y π_{st} el plano que contiene a r y t.

Entonces: $\rho_r = \pi \circ \pi_{rt} = \pi_{rt} \circ \pi$, $\rho_s = \pi \circ \pi_{st} = \pi_{st} \circ \pi$ y $\rho_t = \pi_{rt} \circ \pi_{st} = \pi_{st} \circ \pi_{rt}$.

Tenemos que: $\rho_r \circ \rho_s \circ \rho_t = (\pi_{rt} \circ \pi) \circ (\pi \circ \pi_{st}) \circ (\pi_{st} \circ \pi_{rt}) = \pi_{rt} \circ (\pi \circ \pi) \circ (\pi_{st} \circ \pi_{st}) \circ \pi_{rt} = \pi_{rt} \circ \mathrm{id} \circ \mathrm{id} \circ \pi_{rt} = \pi_{rt} \circ \pi_{rt} = \mathrm{id}$.

Por tanto $\rho_r \circ \rho_s \circ \rho_t$ es la identidad del espacio.