GEOMETRÍA BÁSICA Junio 2018

Todas las respuestas deben estar justificadas razonadamente.

Se permite calculadora no programable e instrumentos de dibujo.

Ejercicio 1. (3 puntos) Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos circunferencias concéntricas distintas con centro en el punto O. Sean $\iota_{\mathcal{C}_1}$ y $\iota_{\mathcal{C}_2}$ las inversiones respecto a dichas circunferencias. La composición $\iota_{\mathcal{C}_1} \circ \iota_{\mathcal{C}_2}$ ¿es una homotecia restringida al plano menos O? ¿Cuál sería su razón? Justifique sus respuestas.

Ejercicio 2. (4 puntos)

a) Enunciar la fórmula del coseno para triángulos.

b) Demostrar la fórmula enunciada en el apartado a) para triángulos acutángulos usando el teorema de Pitágoras.

c) Enunciar y demostrar el recíproco del teorema de Pitágoras.

Ejercicio 3. (3 puntos)

a) Sea $\mathcal{P}$ un poliedro convexo con ocho caras: cuatro triángulos y cuatro hexágonos. ¿Cuántos vértices tiene $\mathcal{P}$?

b) Estudiar si tales poliedros podrían tener una simetría que fuera una rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$.

Soluciones

Ejercicio 1.

Sea P un punto del plano distinto de O. Llamaremos $\iota_{\mathcal{C}_2}(P) = P'$ y $\iota_{\mathcal{C}_1}(P') = P''$. Se tiene que $OP \times OP' = r_2^2$ y $OP' \times OP'' = r_1^2$. Dividiendo la segunda igualdad por la primera tenemos $\frac{OP''}{OP} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$, luego $OP'' = \frac{r_1^2}{r_2^2} OP$. Por otro lado P'' está en la recta r_{OP} y en la semirrecta con vértice O determinada por P. Con lo que P'' es la imagen de P por una homotecia de centro O y razón $\frac{r_1^2}{r_2^2}$.

Atención: para concluir que $\iota_{\mathcal{C}_1} \circ \iota_{\mathcal{C}_2}$ es homotecia no basta con llegar a que $OP'' = \frac{r_1^2}{r_2^2} OP$, sino que hay que es esencial observar que P'' está en la recta r_{OP} y en la semirrecta con vértice O determinada por P.

Ejercicio 2.

Páginas 104 - 105 del libro de teoría.

Ejercicio 3.

a) Por la fórmula de Euler-Descartes tenemos $\#caras - \#aristas + \#vértices = 2$.

El número de caras es 4 triángulos + 4 hexágonos = 8.

Como cada arista pertenece a exactamente dos caras, el número de aristas es $\frac{1}{2}(3 \times \#triángulos + 6 \times \#hexágonos) = \frac{12+24}{2} = 18$.

Por tanto tenemos: $8 - 18 + \#vértices = 2$, luego el número de vértices es 12.

b) Supongamos que existe tal simetría r que es una rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$. El eje de dicha rotación no puede pasar por el centro de una arista, pues en ese caso forzosamente sería una media vuelta. Tampoco puede pasar por un vértice, pues en tal caso habría seis caras triangulares o seis caras hexagonales compartiendo tal vértice, por tanto el eje debe pasar por el centro de caras del poliedro. El eje de la rotación r no puede pasar por el centro de un triángulo, pues en ese caso quedaría invariante tal cara y r sería una simetría de tal triángulo, pero los triángulos solo tienen simetrías que son rotaciones de ángulo $\frac{2\pi}{3}$ o bien $\frac{4\pi}{3}$. Si el eje de r no pasa por ninguna cara triángular y si T es una de dichas caras $T, r(T), r^2(T), ..., r^5(T)$ serían seis caras triangulares distintas del poliedro, lo que contradice el hecho de que el poliedro tiene cuatro caras triangulares.

Otro argumento que ha presentado un estudiante y que también es válido: En primer lugar se llega a que el eje de rotación debe pasar por el centro de dos caras hexagonales situadas en dos planos paralelos (razonando igual que en las dos primeras líneas del párrafo anterior). Por el apartado a) sabemos que todos los vértices del poliedro (que son 12) son los vértices de los dos hexágonos regulares situados en dos planos paralelos del espacio. Pero con estos vértices es imposible que el poliedro tenga una cara más que sea un hexágono, al menos tiene que compartir tres vértices con uno de los dos hexágonos, por lo que estaría en uno de los planos paralelos y se solaparía con la otra cara hexagonal de tal plano.