Geometría Básica

Capítulo IV: Ángulos

Jackie Harjani y Belén López.

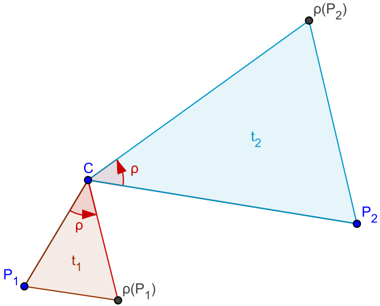
UNED, C.A. Las Palmas

Marzo 2011

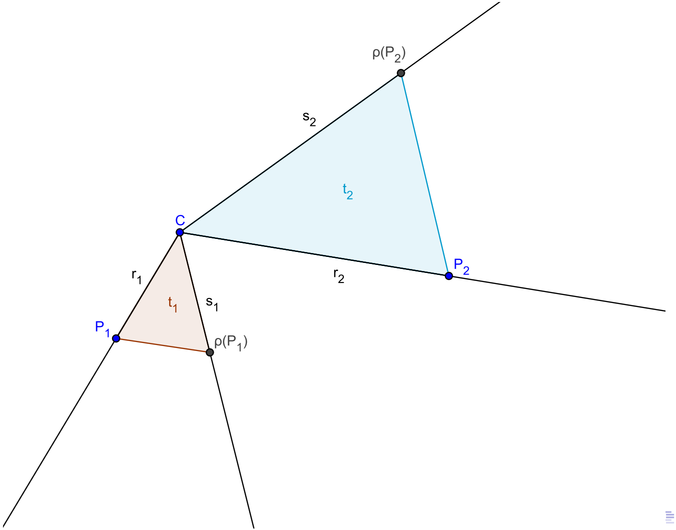
Ejercicio 4.9

Sea $\rho \in \mathsf{Isom}(\mathbf{P})$ una rotación de centro C, pero no una media vuelta. Sean P_1 y P_2 dos puntos del plano distintos de C. Sean $t_1 = \triangle\{C, P_1, \rho(P_1)\}$ y $t_2 = \triangle\{C, P_2, \rho(P_2)\}$. Probar que el ángulo $\angle_{t_1} C$ y el ángulo $\angle_{t_2} C$ son congruentes. La clase de congruencia del ángulo $\angle_{t_1} C$ se denomina ángulo de rotación $\angle\rho$ de ρ. Para la media vuelta el ángulo de rotación es el ángulo llano.
(Sigue una importante observación, ver pág 80).

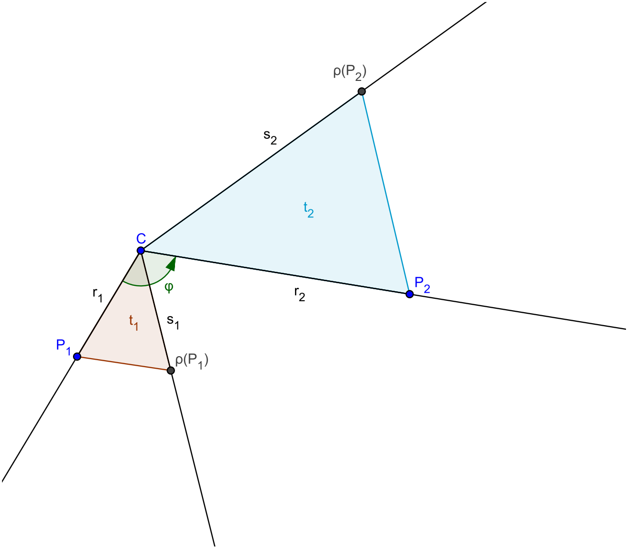
La siguiente figura muestra las condiciones del enunciado.



Sean $\bar{r}_1$ (en la figura r_1) la semirrecta de vértice C pasando por P_1 y $\bar{s}_1$ (en la figura s_1) la semirrecta de vértice C pasando por $\rho(P_1)$. Análogamente se definirían $\bar{r}_2$ (en la figura r_2) y $\bar{s}_2$ (en la figura s_2).

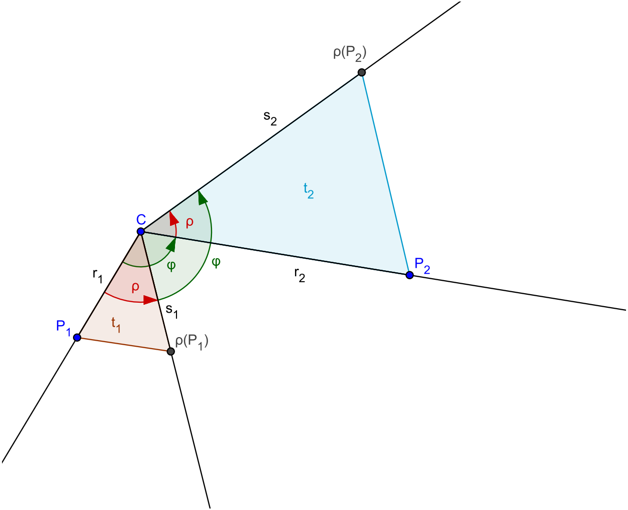


Existe una rotación φ de centro C que envía $\bar{r}_1$ a $\bar{r}_2$



Sabemos que las rotaciones del plano con centro C junto con la identidad, forman un grupo conmutativo, de donde se obtiene:

$$\varphi(\bar{s}_1) = \varphi\big(\rho(\bar{r}_1)\big) = \rho\big(\varphi(\bar{r}_1)\big) = \rho(\bar{r}_2) = \bar{s}_2$$



De esta manera, hemos encontrado una isometría φ tal que:

$$\varphi(\angle\{\bar{r}_1, \bar{s}_1\}) = \angle\{\bar{r}_2, \bar{s}_2\}$$

es decir, ambos ángulos son congruentes.
A la clase formada por todos los ángulos congruentes a $\angle\{\bar{r}_1, \bar{s}_1\}$ la llamamos **ángulo de rotación de $\boldsymbol{\rho}$**, $\angle\boldsymbol{\rho}$.