FACULTAD DE CIENCIAS
SECCIÓN FÍSICAS
PLAN DE ACOGIDA

TÍTULO: *La derivada y la integral. Máximos y mínimos.*

OBJETIVOS:

- Explicar las ideas de derivada e integral de una función y su significado geométrico.
- Recordar las ideas de máximos y mínimos de una función
- Mostrar las aproximaciones que pueden hacerse en algunos sistemas físicos basadas en los desarrollos en serie.

FORMULACIÓN SIMPLE DEL PROBLEMA

Una función f de una variable independiente x hace corresponder a cada valor de x un valor que denominamos $f(x)$.

Si llamamos $y= f(x)$ podemos representar la función como una curva en un plano XY. Cada punto de la curva tiene como abcisa el valor de la variable independiente x y como ordenada el correspondiente valor de la función $y= f(x)$.

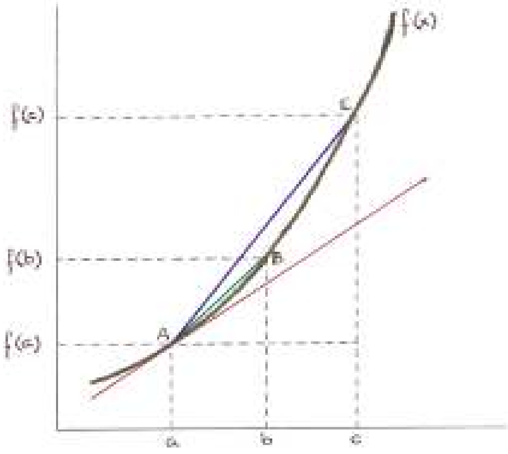
Se dice que w es el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a a si el valor de $f(x)$ se acerca cada vez más a w a medida que x se acerca cada vez más a a. Se representa así

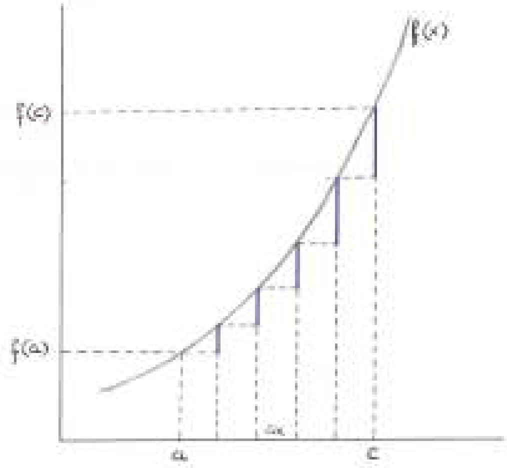
$$\lim_{x \to a} f(x) = w\,.$$

Un caso particular es el límite de una función cuando la variable independiente tiende a infinito. En este caso decimos que la función $f(x)$ tiene un límite finito w si su valor se acerca cada vez más a w a medida que x se hace cada vez mayor. Por ejemplo, el valor de la función $f(x)=e^{-x}$ se acerca cada vez más a cero a medida que crece el valor de x.

Dos funciones de la misma variable pueden tener un mismo límite cuando x tiende a a, pero tender a él de forma diferente. Por ejemplo, tanto la función $u(x) = x$ como la función $v(x) = x^2$ tienden a 0 cuando x tiende a 0 pero la segunda lo hace siempre más rápidamente que la primera. Por ejemplo, aunque $\lim_{\Delta x \to 0} u(x) = \lim_{\Delta x \to 0} v(x) = 0$, el límite de su cociente es $\lim_{x \to 0} u(x)/v(x) = \lim_{x \to 0}(1/x) = \infty$ mientras que $\lim_{x \to 0} v(x)/u(x) = \lim_{x \to 0} x = 0$.

De modo similar, ambas funciones tienden a infinito cuando x tiende a infinito pero ahora $\lim_{x \to \infty} u(x)/v(x) = \lim_{x \to \infty}(x) = \infty$ y $\lim_{x \to \infty} v(x)/u(x) = \lim_{x \to \infty}(1/x) = 0$.





Consideremos la función $f(x)$ representada por la línea curva gruesa en la figura de la izquierda, y sean dos puntos A y C de la misma, de coordenadas $(a,f(a))$ y $(c,f(c))$. Por simple trigonometría es fácil ver que

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=\tan\gamma \qquad \text{o} \qquad f(c)-f(a)=(c-a)\tan\gamma$$

siendo γ el ángulo que forma la secante (en azul) que une los puntos A y C con la horizontal. Análogamente, para un punto B de coordenadas $(b\ ,f(b))$ más próximo a A

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\tan\beta \qquad \text{o} \qquad f(b)-f(a)=(b-a)\tan\beta$$

siendo β el ángulo que forma la secante verde que une A y B con la horizontal.

Si tomamos puntos sobre la curva cada vez más próximos a A, las secantes que unen dichos puntos con A se acercan cada vez más a la recta tangente a la curva en A. Aunque tanto la diferencia de las abcisas como la diferencia de las ordenadas tienden a cero, su cociente se mantiene finito. Así, cuando la abcisa del segundo punto solo difiere de a en una cantidad infinitesimal Δx tenemos con mucha aproximación

$$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\approx\tan\alpha \qquad \text{o} \qquad f(a+\Delta x)-f(a)\approx\Delta x\cdot\tan\alpha$$

El límite

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

es la **derivada** de la función $f(x)$ en el punto a.

En general, para cada punto de coordenada x existe una recta tangente a la curva que representa a $f(x)$. Es decir, la derivada de la función $f(x)$ es una nueva función $g(x)$ y se representa

$$g(x)=\frac{df(x)}{dx}.$$

Recíprocamente, si $g(x)$ es la derivada de $f(x)$, se dice que $f(x)$ es función primitiva de $g(x)$.

Supongamos el intervalo (a,c) del eje X dividido en n subintervalos de longitud $\Delta x=(c-a)/n$, como en la figura superior derecha. (En este caso concreto $n=5$.) Es decir, entre A y C escogemos 4 puntos de abcisas $a+\Delta x$, $a+2\Delta x$, $a+2\Delta x$, y $a+4\Delta x$. Entonces $f(c)$ - $f(a)$ es la suma de los segmentos verticales azules.

$$f(c)-f(a)=\left[f(a+5\Delta x)-f(a+4\Delta x)\right]+\left[f(a+4\Delta x)-f(a+3\Delta x)\right]+$$
$$+\left[f(a+3\Delta x)-f(a+2\Delta x)\right]+\left[f(a+2\Delta x)-f(a+\Delta x)\right]+\left[f(a+\Delta x)-f(a)\right]$$

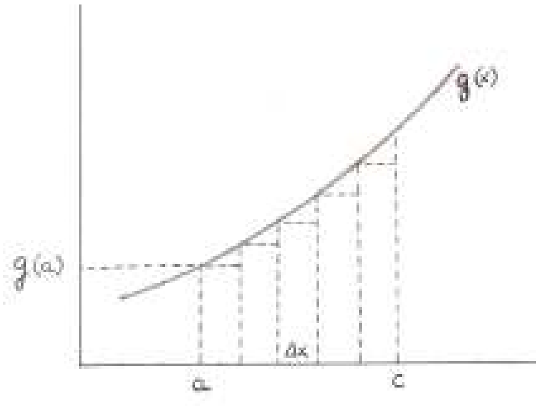
Pero, como ya hemos visto, $f(a+\Delta x)-f(a)\approx g(a)\Delta x$, $f(a+2\Delta x)-f(a+\Delta x)\approx g(a+\Delta x)\Delta x$, etc., y así

$$f(c)-f(a)\approx\sum_{j=0}^{4}g(a+j\Delta x)\Delta x$$

Si el número de subintervalos crece y Δx tiende a cero tenemos una suma de infinitos términos

$$f(c)-f(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{j=0}^{\infty}g(a+j\Delta x)\Delta x=\int_a^c g(x)dx$$

que se denomina **integral** de $g(x)$ entre los límites a y c. Es decir, la diferencia entre los valores de la función $f(x)$ en los puntos de abcisas a y c es la integral de la función $g(x)$, derivada de $f(x)$, entre ambos puntos



Veámoslo de otra forma. En la figura superior hemos representado la función $g(x)$ derivada de $f(x)$. Dividamos, como antes, el intervalo $(a,\ c)$ en n subintervalos de anchura Δx. Construyamos ahora n rectángulos de la misma anchura Δx y alturas $g(a+j\Delta x)$. Entonces, el área de cada rectángulo es $g(a+j\Delta x)\Delta x$, y el área de todos los rectángulos es la suma $\sum g(a+j\Delta x)\Delta x$

De nuevo, en el límite en que el número de subintervalos se hace infinito y Δx tiende a 0

$$area=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{j=0}^{\infty}g(x+j\Delta x)\Delta x=\int_a^c g(x)dx=f(c)-f(a)$$

Es decir, el área encerrado dentro de la curva de la función *g(x)*, el eje OX y las rectas verticales en $x=a$ y $x=c$ es la diferencia entre los valores de su función primitiva $f(x)$ en c y a.

Algunas propiedades simples de las derivadas son

$$\frac{d(u(x)+v(x))}{dx}=\frac{du(x)}{dx}+\frac{dv(x)}{dx}$$
$$\frac{d(u(x)v(x))}{dx}=\frac{du(x)}{dx}v(x)+u(x)\frac{dv(x)}{dx}$$
$$\frac{d(u(x)/v(x))}{dx}=\frac{\frac{du(x)}{dx}v(x)-u(x)\frac{dv(x)}{dx}}{\left[v(x)\right]^2}$$

Una función *f* puede depender de *x* a través de otra función. (Por ejemplo, la función $f(x)=\cos^2 x$ puede escribirse también como $f(u)=u^2$ con $u(x)=\cos x$). Entonces se tiene

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{df(u)}{du}\frac{du(x)}{dx}$$

Algunas derivadas importantes son

$$\frac{d\left(x^n\right)}{dx}=nx^{n-1} \qquad \frac{d(e^x)}{dx}=e^x \qquad \frac{d\left(\log x\right)}{dx}=\frac{1}{x}$$

$$\frac{d\left(\text{ sen } x\right)}{dx}=\cos x \qquad \frac{d\left(\cos x\right)}{dx}=-\text{ sen } x \qquad \frac{d(\tan x)}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

Por supuesto la derivada $g(x)=df(x)/dx$ de una función $f(x)$ también tiene una derivada. La derivada primera de $g(x)$ es entonces la derivada segunda de $f(x)$ y se escribe

$$g(x)=\frac{df(x)}{dx} \qquad h(x)=\frac{dg(x)}{dx}=\frac{d\left(df(x)/dx\right)}{dx}=\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

y lo mismo para las derivadas terceras, cuartas, etc.

Es habitual representar las derivadas por tildes: así $df(x)/dx=f'(x)$ $d^2 f(x)/dx^2=f''(x)$, etc. Sin embargo, cuando la derivada es de un orden muy alto es más sencillo representarla por $f^{(n)}(x)=d^n f(x)/dx^n$.

Por otra parte, muchas veces en física la variable independiente es el tiempo *t* y la dependiente es el desplazamiento, que entonces se escribe $x(t)$. Las derivadas con respecto al tiempo suelen representarse por puntos: $dx(t)/dt=\dot{x}(t)$, $d^2x(t)/dt^2=\ddot{x}(t)$, etc.

Nota: En el caso particular en que una función sea constante, $u(x)=\mathrm{C}$, es evidente que $du(x)/dx=d\mathrm{C}/dx=0$ y así $d(f(x)+\mathrm{C})/dx=df(x)/dx$. Es decir, dos funciones que difieren en una constante tienen la misma derivada. Recíprocamente, si una función tiene una primitiva, entonces tiene infinitas primitivas que difieren en una constante.

Nótese que el sumar una constante a una función $f(x)$ no altera las diferencias $f(c)$-$f(a)$ entre los valores de la función en dos puntos. Esto es importante en física porque existen magnitudes como las energías potenciales que están definidas salvo una constante aditiva arbitraria. Lo que tiene significado físico no son los valores absolutos sino las diferencias de las energías potenciales entre dos puntos.

Máximos y mínimos

Una función $f(x)$ tiene un comportamiento creciente en un punto de abcisa $x=a$ si el valor de la función aumenta cuando aumenta el valor de la variable *x*. Es decir, cuando $f(a+\Delta x)-f(a)>0$ para $\Delta x>0$. Por lo que ya hemos visto, esto es equivalente a que la derivada de la función en $x=a$ sea positiva, es decir, $f'(a)=\left(df(x)/dx\right)_{x=a}>0$. Análogamente, se dice que una función tiene un comportamiento decreciente en $x=a$ cuando $f(a+\Delta x)-f(a)<0$ para $\Delta x>0$, es decir, su derivada en $x=a$ es negativa. En el caso intermedio en que la función conserva su valor cuando la variable sufre un cambio Δx infinitesimal, ya sea positivo o negativo, se dice que la función tiene un extremo. En este caso la derivada de la función es nula. Teniendo en cuenta el significado geométrico de la derivada, esto quiere decir que la recta tangente a la curva que representa a $f(x)$ en dicho extremo es una recta horizontal (de pendiente nula).

Hay dos tipos de extremos. En el primero la función $f(x)$ pasa de tener un comportamiento creciente para $x<a$ a tener un comportamiento decreciente para $x>a$. La función alcanza así un valor **máximo relativo** para $x=a$. Puesto que la derivada primera $f'(x)$ pasa de ser positiva para $x<a$ a negativa para $x>a$, su comportamiento en $x=a$ es decreciente y su derivada $f''(x)$ es negativa en $x=a$, es decir, $f''(a)<0$. Por el contrario, si la función $f(x)$ alcanza un valor **mínimo relativo** en $x=a$, su derivada primera $f'(x)$ pasa de negativa a positiva, es decir, tiene un comportamiento creciente en $x=a$ y, por lo tanto, $f''(a)>0$. En resumen

$$f(x) \text{ tiene un maximo en } x=a \text{ si} \qquad f'(a)=\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=a}=0 \qquad f''(a)=\left(\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right)_{x=a}<0$$

$$f(x) \text{ tiene un minimo en } x=a \text{ si} \qquad f'(a)=\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=a}=0 \qquad f''(a)=\left(\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right)_{x=a}>0$$

Desarrollos en serie de potencias

Ya se ha dicho que la expresión

$$f(a+\Delta x)=f(a)+\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=a}\Delta x$$

sólo es exacta en el límite $\Delta x \to 0$. Puede demostrarse que para Δx finitos $f(a+\Delta x)$ puede escribirse como una suma infinita

$$f(a+\Delta x)=f(a)+\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=a}\Delta x+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right)_{x=a}(\Delta x)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{d^3f(x)}{dx^3}\right)_{x=a}(\Delta x)^3+\ldots$$

que se denomina **desarrollo en serie de potencias** en torno a a. (Aunque la suma es en principio infinita, no tiene por qué serlo siempre, pues las derivadas se pueden hacer nulas a partir de un orden dado.)

Por otra parte, aunque las sumas sean infinitas, si $\Delta x=(x-a)<1$ cada sumando es en general más pequeño que el anterior. Así, para valores de Δx muy pequeños podemos obtener aproximaciones muy buenas a $f(x+\Delta x)$ tomando simplemente los primeros términos de la suma. Por ejemplo, si una función tiene un mínimo en $x=a$, en las proximidades de dicho punto la función podrá aproximarse por la expresión

$$f(a+\Delta x)=f(a)+\frac{1}{2}k(\Delta x)^2 \qquad \text{con} \quad k=\left(\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right)_{x=0}$$

que corresponde a una parábola abierta hacia arriba. Esto es lo que justifica que para pequeñas oscilaciones en torno a un punto de equilibrio una masa se mueva aproximadamente como un oscilador armónico.

Si hacemos $a=0$ y utilizamos la tabla de derivadas anterior es fácil escribir algunas funciones importantes como series de potencias

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

$$\operatorname{sen} x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

El desarrollo en serie de potencias de la función e^x es también válido para e^{ix}, siendo i la unidad imaginaria $i=\sqrt{-1}$. Comparando los desarrollos en serie de e^{ix}, sen x y cos x es fácil ver la importante relación

$$e^{ix}=\cos x+i\,\operatorname{sen} x$$

EJEMPLO

ENUNCIADO

La ecuación de movimiento de un péndulo es

$$l\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -g\ \text{sen}\theta\,,$$

siendo l la longitud del péndulo y θ el ángulo que forma con la vertical. Suponiendo que las oscilaciones del péndulo son pequeñas, comprobar que la función $\theta(t) = A\sin\left[\left(\sqrt{g/l}\right)t\right]$ es solución de la ecuación.

RESOLUCIÓN

Si θ es pequeño, entonces $\theta^3/3!$ es muy pequeño frente a θ. Por ejemplo, si la amplitud de oscilación es de 20º, esto corresponde a $\theta_{\max} = (20/360)\times 2\pi \approx 0{,}35$ radianes. Pero entonces $\theta^3/3!$=0,007. Así, el segundo término del desarrollo en serie de sen θ es muy pequeño frente al primero (y los términos siguientes son todavía mucho más pequeños) de modo que podemos sustituir sen θ por θ, y la ecuación queda

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta(t)\,,$$

Derivando la solución propuesta y teniendo en cuenta la tabla dada antes

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = A\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t \qquad \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -A\frac{g}{l}\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t = -\frac{g}{l}\theta(t)$$

EJERCICIO DE AUTOCOMPROBACIÓN

ENUNCIADO

La trayectoria que describe un proyectil lanzado con una velocidad de módulo v_0 que forma un ángulo θ con la horizontal es

$$y(x) = \left(\tan\theta\right)x - \frac{g}{2v_0^{\,2}\cos^2\theta}x^2$$

donde y es la altura y x es la distancia horizontal al punto de lanzamiento. ¿A qué distancia a alcanza el proyectil la máxima altura? ¿Cuál es esta altura máxima?

RESULTADO

$$a = \frac{v_0^{\,2}\text{sen}2\theta}{2g} \qquad y_{\max} = \frac{v_0^{\,2}\text{sen}^2\theta}{2g}$$

REFERENCIA

Proyecto Descartes. http://descartes.cnice.mec.es

AUTOR

Javier García Sanz