Tema 10. Ondas.

Problemas resueltos.

Problema 1.- Calcule la velocidad con la que se propaga la onda descrita por la ecuación $y(x,t) = A$ sen $(4\pi x - 1400\pi t)$. Aquí x se expresa en metros y t en segundos.

Solución:

La función de onda más general que describe una onda armónica que se propaga de izquierda a derecha es:

$$y(x,t) = A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t),$$

donde $k = 2\pi/\lambda$ es el número de ondas y $\omega = 2\pi/T$ es la frecuencia angular.

Fijándonos en la ecuación que nos dan en el enunciado obtenemos:

$$4\pi = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = 0,5m$$

$$1400\pi = \frac{2\pi}{T} \qquad \Longrightarrow \qquad T = \frac{1}{700}s.$$

Puesto que la longitud de onda, la velocidad de propagación y el periodo están relacionados por $\lambda = vT$, tenemos:

$$v = \frac{\lambda}{T} = 350 \text{ m/s}.$$

Nota: Este valor es muy cercano al de la velocidad del sonido, por lo que cabe esperar que se trate de una onda sonora.

Problema 2.- La ecuación de una onda armónica trasversal que se propaga por una cuerda unidimensional es: $y(x,t) = 0,5\,\mathrm{sen}\,[\pi(x - 0,1t - 1/3)]$, donde todos los datos están en el SI de unidades.
Determine:
a) La amplitud, el periodo y la longitud de la onda.
b) La frecuencia y la frecuencia angular.
c) La velocidad de propagación de la onda.
d) La velocidad máxima de un punto de la cuerda.

Solución:

a) De la propia ecuación podemos deducir los valores de la amplitud $A = 0,5$ m, el periodo $T = 2\pi/\omega = 20$ s, y la longitud de onda $\lambda = 2\pi/k = 2$ m.
b) La frecuencia es la inversa del periodo $\nu = 1/T = 0{,}05$ Hz.

La frecuencia angular viene directamente en la fórmula que se presenta en el enunciado: $\omega = 0,1\pi = 0,31$ rad/s.
c) La velocidad de propagación de la cuerda puede obtenerse de la longitud de onda y del periodo del movimiento, $v = \lambda/T = 0,1$ m/s.
d) La velocidad de vibración de un punto de la cuerda se puede obtener derivando la expresión y(x,t)con respecto al tiempo:

$$v(x,t)=\frac{dy(x,t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left[0,5\,\mathrm{sen}\,\pi\left(x-0,1t-\frac{1}{3}\right)\right]=-0,05\pi\cos\left[\pi\left(x-0,1t-\frac{1}{3}\right)\right]\ \mathrm{m/s}.$$

Para que su valor sea máximo el coseno debe valer -1. Por lo tanto el valor máximo de la velocidad es:

$$v_{max}=0,16\ \mathrm{m/s}.$$

Problema 3.- Una onda sinusoidal transversal se propaga de derecha a izquierda (en la dirección −x). Tiene una longitud de onda de 20 m, una amplitud de 4 m y una velocidad de propagación de 200 m/s.
Determine:
a) La ecuación de onda.
b) La máxima velocidad transversal que puede tener un punto debido a la vibración.
c) La máxima aceleración de un punto de la cuerda.

Solución:
a) Comenzamos por determinar el número de onda y la frecuencia angular del movimiento ondulatorio.

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi}{20}=\frac{\pi}{10}\ \mathrm{m}^{-1}.$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\lambda/v}=\frac{2\pi}{20/200}=20\pi\ \mathrm{rad/s}.$$

En el enunciado nos dice que se propaga de derecha a izquierda (en la dirección $-x$), por lo que podemos suponer que la onda es:

$$y(x,t)=A\,\mathrm{sen}\,[kx+\omega t+\phi_0]=4\,\mathrm{sen}\left[\frac{\pi}{10}x+20\pi t+\phi_o\right].$$

Con los datos que nos dan en el enunciado no podemos decidir cuál es el valor de ϕ_o.
b) La velocidad de vibración es la derivada de la función $y(x,t)$ con respecto al tiempo:

$$v(x,t)=\frac{dy(x,t)}{dt}=80\pi\cos\left[\frac{\pi}{10}x+20\pi t+\phi_0\right].$$

Para calcular la máxima velocidad basta con imponer la condición de que el coseno valga uno:

$$v_{max}=80\pi\ \mathrm{m/s}.$$

c) Para la aceleración actuamos de la misma forma.

$$a(x,t)=\frac{dv(x,t)}{dt}=-1600\pi^2\,\mathrm{sen}\left[\frac{\pi}{10}x+20\pi t+\phi_0\right],$$

siendo su valor máximo

$$a_{max}=1600\pi^2\ \mathrm{m/s^2}.$$

Problema 4.- Determinar la diferencia de fase que hay entre dos puntos de una cuerda que se encuentran a 10 y 16 m de uno de sus extremos, que consideraremos el origen.

Sabemos que la velocidad de propagación de la onda en la cuerda es de 300 m/s y que el periodo de la misma es de 0,04 s.

Solución:
En general la fase de la onda es el argumento de la función que define la onda. Es decir, si

$$y(x,t) = A\,\mathrm{sen}\,[kx - \omega t + \phi_0]$$

es la onda, la fase viene dada por $kx - \omega t + \phi_o$. Sustituyendo los valores de dos puntos diferentes de la onda x_1 y x_2 obtenemos la diferencia de fase entre los dos puntos:

$$\Delta\phi = (kx_2 - \omega t + \phi) - (kx_1 - \omega t_1 + \phi) = k(x_2 - x_1) - \omega(t_2 - t_1)$$

Como en el enunciado no se indica nada, decidimos que la diferencia de fase se pide en un instante de tiempo fijo, por lo que el segundo término de la ecuación se anula, esto es:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1).$$

Para calcularla debemos conocer primero la longitud de onda ($\lambda = vT = 12$ m), y después obtenemos de manera directa la diferencia de fase:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{12}(16 - 10) = \pi \ \text{ rad}.$$

Problema 5.- Dos ondas armónicas y longitudinales se propagan por un medio no dispersivo en la misma dirección. Las funciones de onda de cada una de ellas son:

$$y_1(x,t) = 0,01\,\mathrm{sen}\,(\omega_1 t - k_1 x)$$

$$y_2(x,t) = 0,01\,\mathrm{sen}\,(\omega_2 t - k_2 x)$$

Se sabe que el periodo de la primera de ellas es de $0,01$ s y su longitud de onda es de 0,5 m. De la segunda se sabe que el periodo es un 10 % mayor que el de la primera y que su longitud de onda es la misma.
Calcule:
a) La velocidad de propagación de cada una de las dos ondas.
b) La frecuencia de onda ω_2 y el número de onda k_2.
c) La función de onda que resulta de la superposición de las dos ondas.

Solución:
a) Calculamos cada una de las velocidades de propagación a partir de las longitudes de onda y los periodos de cada una de ellas (el periodo de la segunda onda sabemos que es un 10 % mayor que el de la primera onda, es decir, $T_2 = 0,011$ s).

$$v_1 = \frac{\lambda_1}{T_1} = \frac{0,5}{0,01} = 50 \text{ m/s}, \qquad v_2 = \frac{\lambda_2}{T_2} = \frac{0,50}{0,011} = 45,45 \text{ m/s}.$$

b) La frecuencia de la segunda onda se obtiene de su periodo, $\omega_2 = 2\pi/T_2 = 571,2$ rad/s. El número de ondas es: $k_2 = 2\pi/\lambda_2 = 12,57$ m^{-1}. Como la longitud de onda es la misma en los dos casos, tenemos que $k_2 = k_1$.
c) La onda que resulta de la superposición de las dos ondas es:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = 0,01\,\mathrm{sen}\,(\omega_1 t - k_1 x) + 0,01\,\mathrm{sen}\,(\omega_2 t - k_2 x)$$

Recordando la fórmula de la suma de senos, $\text{sen}\, A + \text{sen}\, B = 2\,\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$, obtenemos:

$$y(x,t) = 0,02\,\text{sen}\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t - \frac{k_1+k_2}{2}x\right)\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t - \frac{k_1-k_2}{2}x\right)$$

La frecuencia angular de la primera onda es $\omega_1 = 2\pi/T_1 = 628,3$ rad/s, y como $k_1 = k_2 = k$, la forma final de la ecuación de ondas es

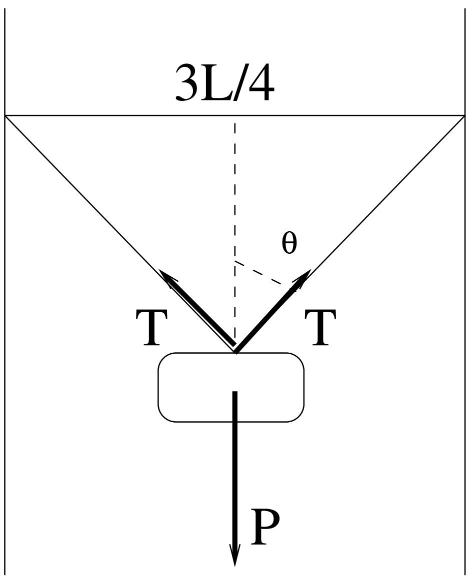
$$y(x,t) = 0,02\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\text{sen}\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t - kx\right) = 0,02\cos(28,55t)\,\text{sen}\,(599,75t - 12,57x)$$

Problema 6.- Una onda sinusoidal se desplaza en la dirección x positiva y tiene una amplitud de 15 cm, una longitud de onda de 40 cm y una frecuencia de 8 Hz. El desplazamiento vertical medido para t=0 y x=0 es también de 15 cm.
Calcule:
a) El número de onda y el periodo.
b) La frecuencia angular y la velocidad de la onda.
c) Dé la ecuación de la onda.

Solución:
a) El número de onda está dado por: $k = 2\pi/\lambda = 0,157$ rad·cm^{-1} $= 15,7$ rad·m^{-1}. El periodo viene dado por: $T = 1/\nu = 0,125$s.
b) La frecuencia angular se puede obtener de la frecuencia (que viene en Hz) $\omega = 2\pi\nu = 16\pi$ rad/s. La velocidad de la onda es $v = \lambda\nu = 320$ cm/s
c) La ecuación que caracteriza esta onda es $y(x,t) = 15\,\text{sen}\,(0,157x - 16\pi t + \phi_o)$. Para obtener la constante de fase (ϕ_o), utilizamos la condición inicial, $y(0,0) = 15$, de forma que $y(0,0) = 15\,\text{sen}\,\phi_o = 15 \Rightarrow \phi_o = \pi/2$.

Por lo tanto, la ecuación de la onda es $y(x,t) = 15\cos(0,157x - 16\pi t)$

Problema 7.- Una cuerda con una densidad de masa de 0.8 kg/m tiene sus extremos atados a dos paredes que están separadas entre sí una distancia que es igual a tres cuartas partes de la longitud (L) total de la cuerda. Se cuelga una masa en el centro de la misma de forma que el sistema queda en la posición marcada en la figura.
a) Escriba la expresión de la velocidad de las ondas trasversales que se puedan generar en la cuerda en función de la masa que cuelga de la misma.
b) ¿Cuál es la masa que se debería colgar si se quiere que esa velocidad sea de 60 m/s?.
c) Discuta si la velocidad de las ondas aumenta o disminuye cuando se dobla el valor de la carga que se cuelga.



Solución:
a) En la figura se puede ver que las fuerzas que actúan en el sistema son el peso del cuerpo y las tensiones de las cuerdas. Por simetría, las tensiones T en ambos lados de la cuerda son iguales, y forman un mismo ángulo con la vertical. Por consiguiente, las componentes horizontales de las tensiones se anulan entre sí. Las componentes verticales se suman y el equilibrio se alcanza porque las componentes verticales de las tensiones compensan el peso P de la masa, mg.

La ecuación de equilibro en el sentido vertical es

$$2T\cos\theta = P = mg,$$

de la que se puede despejar la tensión.

Con la tensión se puede calcular la velocidad de las ondas en la cuerda:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{mg}{2\mu\cos\theta}}.$$

b) Utilizando la expresión anterior, podemos calcular de manera directa que $m = 215{,}96$ kg.
c) Como vemos, en la expresión de la velocidad hay una dependencia lineal entre la velocidad y la raíz cuadrada de la masa colgada; por tanto si aumenta la masa, aumenta la velocidad de las ondas. En el caso concreto en que la masa se multiplica por dos, la velocidad se debe multiplicar por un factor $\sqrt{2}$.