Lenguaje matemático, conjuntos y números

Pregunta 1 (3 puntos)
Sea $(A, \preccurlyeq)$ un conjunto ordenado con al menos dos elementos distintos. Consideremos las siguientes proposiciones:

p; $\forall x \in A \ \exists y \in A \setminus \{x\}$ tal que $x \preccurlyeq y$
q; $\forall x \in A \ \forall y \in A \setminus \{x\}$ se tiene que $x \preccurlyeq y$
r; $\exists x \in A \ \exists y \in A \setminus \{x\}$ tales que $x \preccurlyeq y$
s; $\exists x \in A$ tal que $\forall y \in A \setminus \{x\}$ se tiene $x \preccurlyeq y$

¿De las siguientes afirmaciones cuáles son siempre verdaderas y cuáles no? Justifique las respuestas en el caso de que el condicional sea siempre verdadero y ponga un contraejemplo en caso contrario.

a) $p \to q$ b) $q \to p$ c) $p \to r$ d) $r \to p$ e) $p \to s$ f) $s \to p$

Solución:
a) La afirmación de a) no es siempre verdadera. Por ejemplo, considerando el orden usual en $A = \mathbb{N}$, p es verdadera, basta tomar $y = x + 1$, mientras que q es falsa, basta tomar dos elementos distintos, $x = 2$ e $y = 1$ que no cumplen $2 \leqslant 1$. Por tanto la proposición $p \to q$ es falsa.

b) La afirmación de b) es siempre verdadera. Observemos que q siempre es falsa pues si fuera verdadera, tomando dos elementos distintos x, y de A, que existen pues A tiene al menos dos elementos, tendríamos que $x \preccurlyeq y$ e $y \preccurlyeq x$. Aplicando la propiedad antisimétrica de la relación de orden, se deduciría que $x = y$, en contradicción con la elección de $x \neq y$. Al ser el antecedente falso, el condicional $q \to p$ es verdadero independientemente del valor de p.

c) La afirmación de c) es verdadera. En efecto, supongamos que p es verdadera y sea x un elemento fijo de A, que existe pues A tiene al menos dos elementos, Para ese x existe $y \in A \setminus \{x\}$ tal que $x \preccurlyeq y$. Y por tanto r es verdadera. En consecuencia, $p \to r$ es verdadera.

d) La afirmación de d) no es siempre verdadera. Por ejemplo, considerando el orden usual de $\mathbb{N}$ en $A = \{1, 2\}$, se tiene que p es falsa pues para $x = 2$ no existe ningún elemento en $y \in A \setminus \{2\}$ tal que $x \leqslant y$, mientras que r es verdadera, tomando $x = 1$ e $y = 2$. Por tanto, la proposición $r \to p$ es falsa.

e) La afirmación de e) no es siempre verdadera. Por ejemplo, considerando el orden usual en $A = \mathbb{Z}$, p es verdadera, basta tomar $y = x + 1$, mientras que s es falsa, pues $\mathbb{Z}$ no es un conjunto acotado inferiormente. Por tanto, la proposición $p \to s$ es falsa.
f) La afirmación de f) no es siempre verdadera. Por ejemplo, considerando el orden usual de $\mathbb{N}$ en $A = \{1, 2\}$, vimos en el apartado d) que p es falsa, mientras que s es verdadera, tomando $x = 1$. Por tanto, la proposición $s \to p$ es falsa.

Pregunta 2 (2 puntos)
Se define en $\mathbb{N}$ la relación definida para todo $x, y \in \mathbb{N}$ mediante:

$$x \,\mathcal{R}\, y \ \text{ si y sólo si } \ \exists\ p, q \ \in \mathbb{N}^* \text{ tales que } y = px^q$$

Determine si la relación $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

Solución: Veamos las propiedades de $\mathcal{R}$ que nos piden.
Es reflexiva: para todo $x \in \mathbb{N}$ se tiene que $x \,\mathcal{R}\, x$ ya que $x \,\mathcal{R}\, x$ pues $\exists\ p, q \ \in \mathbb{N}^*$ tales que $x = px^q$. Se toma $p = q = 1$

Es antisimétrica: para todo $x, y \in \mathbb{N}$ si $x \,\mathcal{R}\, y$ e $y \,\mathcal{R}\, x$ entonces $\exists\ p, q \ \in \mathbb{N}^*$ tales que $y = px^q$ y $\exists\ p', q' \ \in \mathbb{N}^*$ tales que $x = p'y^{q'}$. Sustituyendo la expresión de y en la segunda igualdad se obtiene:

$$x = p'(px^q)^{q'} = p'p\ x^{qq'}$$

Si $x = 0$, entonces se obtiene que $y = px^q = p0^q = 0 = x$.

Si $x \neq 0$, teniendo en cuenta que $p, p', q, q' \in \mathbb{N}^*$, de $x = p'p\, x^{qq'}$ se deduce que $p'p = qq' = 1$ y en consecuencia $p = p' = q = q' = 1$. Por tanto $x = y$.

No es simétrica. Por ejemplo $1 \,\mathcal{R}\, 7$ pues $7 = 7 \cdot 1^q$ para cualquier $q \in \mathbb{N}^*$ mientras que no es cierto que $7 \,\mathcal{R}\, 1$ pues la ecuación $1 = p \cdot 7^q$ no tiene solución $p, q \in \mathbb{N}^*$.

Es transitiva: sean $x, y, z \in \mathbb{N}$ tales que $x \,\mathcal{R}\, y$ e $y \,\mathcal{R}\, z$. Por tanto, $\exists\ p, q \in \mathbb{N}^*$ tales que $y = px^q$ y $\exists\ p', q' \in \mathbb{N}^*$ tales que $z = p'y^{q'}$. Sustituyendo la expresión de y en la segunda igualdad se obtiene:

$$z = p'(px^q)^{q'} = p'p\, x^{qq'}$$

En consecuencia $x \,\mathcal{R}\, z$ pues $p'p$ y $qq' \in \mathbb{N}^*$.

Pregunta 3 (2 puntos)
¿Cuántas aplicaciones biyectivas f del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ en sí mismo hay cumpliendo las siguientes propiedades:
a) Si n es par entonces $f(n)$ es par.
b) Si n es divisible por 3 entonces $f(n)$ es divisible por 3.
c) Las aplicaciones cumplen las propiedades de a) y b) simultáneamente.
d) Repita la cuestión a) pero contando el número de aplicaciones distintas (biyectivas o no) de $\{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ en sí mismo.

Solución:
a) Sean $A = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$. Toda biyección f de A en A tal que si n es par entonces $f(n)$ es par, está formada por un par de biyecciones (f_1, f_2) siendo f_1 una biyección de B en B y f_2 una biyección de $A \setminus B$ en $A \setminus B$. Como hay 6! biyecciones de B en B y otras tantas de $A \setminus B$ en $A \setminus B$ el número de biyecciones que transforman pares en pares es $(6!)^2$.

b) Sean $A = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ y $C = \{3, 6, 9, 12\}$. Toda biyección f de A en A tal que si n es es divisible por 3 entonces $f(n)$ es divisible por 3 está formada por un par de biyecciones (f_1, f_2) siendo f_1 una biyección de C en C y f_2 una biyección de $A \setminus C$ en $A \setminus C$. Como hay 4! biyecciones de B en B y 8! biyecciones de $A \setminus B$ en $A \setminus B$ el número de biyecciones que transforman múltiplos de 3 es $4!\, 8!$.

c) Necesariamente una biyección que cumple las propiedades de a) y b) simultánemente transforma un par múltiplo de 3 en un par múltiplo de 3, y un impar múltiplo de 3 en un impar múltiplo de 3 y lo mismo con los pares e impares que no son múltiplo de 3. Sean pues los conjuntos $D = \{6, 12\}$, $F = \{3, 19\}$, $G = \{2, 4, 8, 10\}$ y $H = \{1, 5, 7, 11\}$. En consecuencia, una biyección que cumpla las dos propiedades de a) y b) simultáneamente está compuesta por cuatro biyecciones, de D en D, de F en F, de G en G y de H en H. Por tanto el número es $(2!)^2(4!)^2$.

d) Si $A = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, la diferencia ahora sobre el apartado a), es que toda aplicación f de A en A tal que si n es par entonces $f(n)$ es par, está formada por un par de aplicaciones (f_1, f_2) siendo f_1 una aplicación de B en B y f_2 una aplicación de $A \setminus B$ en A. Observemos que en este caso la imagen de un número impar podría ser par pues f no es necesariamente inyectiva. Por tanto el número es $6^6 12^6$.

Pregunta 4 (3 puntos)

a) Calcule las raíces n-ésimas de $z_1 = 1 + i$ y de $z_2 = -i$.
b) Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación: $z^2 - z + 1 - i = 0$.
c) Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación: $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$.

Solución:
a) Teniendo en cuenta que $z_1 = 1 + i = \sqrt{2}_{\pi/4}$ las raíces n-ésimas de $z_1 = 1 + i$ se obtienen resolviendo la ecuación $(R^n)_{n\alpha} = \sqrt{2}_{\pi/4}$. Por tanto,

$$R^n = \sqrt{2} \ \text{ y } n\alpha = \pi/4 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Resolviendo se obtienen n raíces distintas

$$R = \sqrt[2n]{2} \ \text{ y } \alpha = \pi/(4n) + 2k\pi/n = \frac{(1 + 8k)\pi}{4n},\ k = 0, 1, \cdots, n - 1$$

Análogamente para $z_2 = -i = 1_{3\pi/2}$ se obtiene

$$r^n = 1 \ \text{ y } n\beta = 3\pi/2 + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

Resolviendo se obtienen n raíces distintas

$$r = 1 \ \text{ y } \beta = 3\pi/(2n) + 2k\pi/n = \frac{(3+4k)\pi}{2n}, \ k = 0, 1, \cdots, n-1$$

b) El discriminante de la ecuación es $z^2 - z + 1 - i = 0$ es $\Delta = 1 - 4(1-i) = -3 + 4i$. Buscamos una raíz cuadrada de Δ: $(a+bi)^2 = -3 + 4i$ y por tanto $\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 - b^2 & = & -3 \\ 2ab & = & 4 \end{array} \right.$

Teniendo en cuenta que $|a+bi|^2 = |\Delta|$, resulta:

$$a^2 + b^2 = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Al despejar $b^2 = 5 - a^2$ y sustituir b^2 en la primera ecuación del sistema se obtiene:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 - 5 + a^2 & = & -3 \\ ab & = & 2 \end{array} \right. \qquad \text{es decir,} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} a^2 & = & 1 \\ ab & = & 2 \end{array} \right.$$

de donde las raíces cuadradas de Δ son $w_0 = 1 + 2i$ y $w_1 = -1 - 2i$. Las soluciones de la ecuación son $\dfrac{1 + (1+2i)}{2} = 1 + i$ y $\dfrac{1 - (1+2i)}{2} = -i$.

c) Haciendo el cambio $Z = z^n$ en $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$ se obtiene la ecuación $Z^2 - Z + 1 - i = 0$, cuyas soluciones son las del apartado b) $Z_1 = 1 + i$ y $Z_2 = -i$. Por tanto las soluciones de la ecuación $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$ son las raíces n-ésimas de $1 + i$ y de $-i$ halladas en el apartado a).