Matemática Discreta.
Modelos de problemas

1.- Sean p y q dos números primos impares con $p \leq q$. Consideremos la ecuación $x^2 - y^2 = n$. Estudie las posibles soluciones en números naturales de esta ecuación si:

a) $n = 2p^r q^s$, donde r y s son números enteros positivos.

b) $n = 4pq$.

Solución

Aplicamos el método de factorización de Fermat. La ecuación $x^2 - y^2 = n$ tiene solución si n admite una factorización $n = ab$ con a y b de la misma paridad.

a)Sea $n = 2p^r q^s$. Si $n = ab$, y a y b han de tener la misma paridad, entonces ambos deben ser pares, ya que n es par. Pero el factor primo 2 será un factor de a o de b pero no de ambos, por lo que a y b no pueden tener la misma paridad. La ecuación no tiene soluciones en números naturales.

b)Si $n = ab$ con a y b de la misma paridad, entonces ambos deben ser pares. Por tanto las posibles factorizaciones de $n = 4pq$ como producto de dos números pares son $n = 2 \cdot 2pq$ y $n = 2p \cdot 2q$. Las soluciones buscadas serán las soluciones de los sistemas de ecuaciones:

$$x + y = 2pq, \quad x - y = 2,$$

y

$$x + y = 2q, \quad x - y = 2p,$$

cuyas soluciones son $x = pq + 1$, $y = pq - 1$, las del primer sistema y $x = q + p$, $y = q - p$, las del segundo.

* *

2.- Sea el número escrito en base decimal $944X63973Y87641$. Sabemos que es múltiplo de 33 y que el número formado por las cifras $X63973Y$ es múltiplo de 8. Halle las cifras X e Y, justificando la respuesta.

Solución

Como el número es múltiplo de 33, ha de ser múltiplo de 3 y de 11. De la primera condición deducimos que $71 + X + Y$ ha de ser un múltiplo de 3. De la segunda deducimos que $21 - (X + Y)$ ha de ser 0 o un múltiplo de 11. Esto último implica que $X + Y = 10$.

Por otra parte el enunciado nos dice que $X63973Y$ es un múltiplo de 8. Esto exige que el número formado por las tres últimas cifras sea un múltiplo de 8. Por tanto $Y = 6$ y $X = 4$. Y efectivamente, para estos valores el número inicial es múltiplo de 3.

* *

3.- Sean los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7, \ldots, 229\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 228, 229\}$

a) ¿Cuántos elementos del conjunto A son primos con el número 231?

b) ¿Cuántos elementos del conjunto B son primos con el número 231?

Solución

Primero descomponemos 231 en factores primos: $231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$.

a) El conjunto A tiene 115 elementos. Debemos descontar los $x \in A$ tales que $\mathrm{mcd}(x, 231) \neq 1$. Para ello, hay que aplicar el Principio de Inclusión-Exclusión. Sea $A_k = \{x \in A, x$ es múltiplo de $k\}$. Designemos el número de elementos de A_k por $|A_k|$ y por $[t]$ la parte entera de un número t.

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} |A_3| &= [115/3] = 38, \quad |A_7| = [115/7] = 16, \quad |A_{11}| = [115/11] = 10, \\ |A_{21}| &= [115/21] = 5, \quad |A_{33}| = [115/33] = 3, \quad |A_{77}| = [115/77] = 1. \end{aligned}$$

Por el Principio de Inclusión-Exclusión tenemos que:

$$|A_3| + |A_7| + |A_{11}| - |A_{21}| - |A_{33}| - |A_{77}| = 38 + 16 + 10 - (5 + 3 + 1) = 55.$$

Por tanto el resultado es $|A| - 55 = 115 - 55 = 60$, Hay 60 números en el conjunto A que son primos con 231.

b) Para la segunda parte del problema, no necesitamos repetir el método anterior, sino que hacemos uso de la función φ de Euler. Calculamos

$$\varphi(231) = 231 \quad 1 - \frac{1}{3} \quad 1 - \frac{1}{7} \quad 1 - \frac{11}{3} \quad = 2 \cdot 6 \cdot 10 = 120$$

Este número nos indica que hay 120 números primos con 231 más pequeños que 231. Como el número 230 no pertenece a B, y, obviamente, es primo con 231, el número buscado es 119.

* *

4.- Un árbol tiene m vértices de grado 3 con $m > 0$, r vértices de grado 2. y no tiene vértices de grado mayor que 3.

a)Calcule el número de vértices, h, de grado 1.

b)Sea $t = \min\{h, m\}$. Sean $v_1, v_2, \ldots v_t$ vértices distintos de grado 3 y $w_1, w_2, \ldots, w_t$ vértices distintos de grado 1. Añadimos aristas, $\{v_i, w_i\}_{i=1,\ldots,t}$, obteniendo un nuevo grafo G, posiblemente multigrafo. Estudie si G es euleriano o si tiene un camino euleriano.

Solución

a)Como no hay vértices de grado mayor que 3, el número total de vértices es $v = m + r + h$. El número de aristas será

$$2a = 3m + 2r + h$$

En todo árbol se tiene que $v = a + 1$. Por tanto $2v = 2a + 2$, o equivalentemente, $2m + 2r + 2h = 3m + 2r + h + 2$. Así pues, $h = m + 2$.

b)Como $m = h - 2$, añadimos $t = m$ aristas con las condiciones del enunciado. En el grafo G tenemos ahora m vértices de grado 4, $r + h - 2$ vértices de grado 2 y dos vértices de grado 1. Por tanto, el grafo G no puede ser euleriano, pero sí existe un camino euleriano.

* *

5.- Halle la cifra final del número $n = 1! + 2! + 3! + \cdots + 100!$

Solución

La cifra final de un número n escrito en base 10 es el resto de n módulo 10. Observemos que a partir de 5! todos los sumandos son múltiplos de 10 y, por tanto, su resto módulo 10 es 0. Así pues, basta calcular los restos módulo 10 de la suma $1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 2 + 6 + 24 = 33$. Como $33 \equiv 3 \mod(10)$ se tiene que la última cifra de n es un 3.

* *

6.- De cuantas formas pueden colocarse 25 objetos idénticos en cinco estantes numerados el 1 al 5, tales que

a) Haya, al menos, dos objetos en los estantes impares y un objeto al menos, en los estantes pares?

b) En el estante i haya, al menos, el resto de la división de 3^i por 5.

Solución

a) Colocamos primero dos objetos en los estantes impares y un objeto en los estantes pares. Hemos colocado ya ocho objetos. El problema es ahora colocar los 17 objetos restantes de todas las formas posibles, que es equivalente a hallar cuántas soluciones enteras no negativas tiene la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 17.$$

Pero sabemos que el número de soluciones viene dado por el número combinatorio:

$$\binom{17+5-1}{17} = \binom{21}{17} = \frac{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 35 \cdot 171 = 5985.$$

b) Puesto que en el estante i debe haber un número de objetos igual, al menos, al resto de la división de 3^i por 5, empezamos calculando estos restos.

$$3^1 \equiv 3 \bmod(5),$$
$$3^2 \equiv 4 \bmod(5),$$
$$3^3 \equiv 2 \bmod(5),$$
$$3^4 \equiv 1 \bmod(5),$$
$$3^5 \equiv 3 \bmod(5),$$

lo que nos da un total de 13 objetos, que empezamos colocando en los cinco estantes. El problema es ahora equivalente a colocar los 12 objetos restantes en los cinco estantes de todas las maneras posibles, que sabemos que, a su vez, es equivalente a hallar el número de soluciones no negativas de la ecuación:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12.$$

El número de soluciones de esta ecuación es

$$\binom{12+5-1}{12} = \binom{16}{12} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 20 \cdot 91 = 1820.$$

* *

7.- Sea $n = 18923$ del que sabemos que es producto de dos primos impares distintos, p y q, con $p < q$. Sabemos también que $\varphi(n) = 18648$. A partir de estos datos, calcule p y q.

Solución

Como $n = pq$ se tiene que $\varphi(n) = (p-1)(q-1) = pq - (p+q) + 1 = n + 1 - (p+q)$. Así pues, $18648 = 18923 + 1 - (p+q)$, luego $p + q = 276$. Conocemos la suma y el producto de p y q. Por tanto, estos números son las soluciones de la ecuación de segundo grado:

$$x^2 - (p+q)x + pq = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 276x + 18923 = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación son

$$x = \frac{276 \pm \sqrt{276^2 - 4 \cdot 18923}}{2} = \frac{276 \pm \sqrt{484}}{2} = \frac{276 \pm 22}{2}$$

es decir, $p = 127$ y $q = 149$.

* *

8.- Sea G un grafo con $2n + 1$ vértices, $(n > 0)$, que numeraremos $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$. Dos vértices distintos P_i y P_j $(i \neq 0, j \neq 0)$, están unidos por una arista si y sólo si $|i - j|$ es un número par. Además G tiene todas las aristas $\{P_0, P_i\}$ para todo $i = 1, \ldots, 2n$.

a) ¿Cuántas aristas tiene el grafo G?

b) Estudie en función de n cuándo G es euleriano.

c) Estudie si G puede ser hamiltoniano

c) Estudie en función de n cuándo G es plano.

Solución

Como la condición para que haya una arista entre los vértices P_i y P_j es que $|i - j|$ sea un número par, deducimos que los vértices de índice par están todos unidos entre sí. Igualmente, los vértices de índice impar están unidos entre sí. Por tanto, el grado de cada uno de los vértices P_i $(i \neq 0)$ es n. El grado del vértice P_0 es $2n$.

a) El número de aristas es

$$\frac{\sum_{i=0}^{2n} gr(v_i)}{2} = \frac{2n + 2n \cdot n}{2} = n^2 + n.$$

b)El grado de P_0 es siempre par. El grado de P_i es par si y sólo si n es par. Por tanto, el grafo G es euleriano si y sólo si n es par.

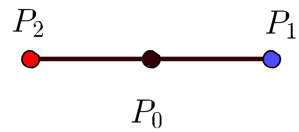
c)El grafo G no puede ser hamiltoniano. Si eliminamos P_0 y todas sus aristas, obtenemos dos componentes.

d)Observemos que los n vértices impares y sus aristas forman un grafo completo K_n. Además, esos n vértices más P_0 y sus aristas forman un grafo completo K_{n+1}. Lo mismo es cierto para los vértices pares y P_0. Por tanto, para $n \geq 4$, el grafo G contiene subgrafos isomorfos a K_5, luego no puede ser plano.

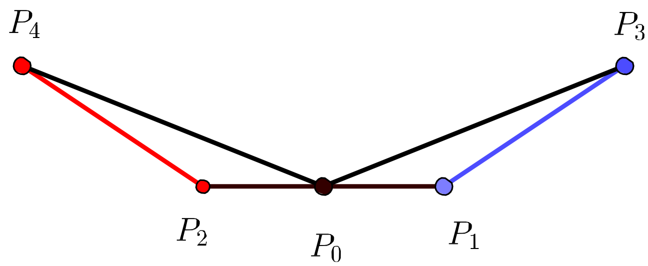
Queda por estudiar los valores $n = 1, 2$ y 3. Sabemos que una condición necesaria para que un grafo sea plano es que $a \leq 3v - 6$. En nuestro caso, esto es equivalente a

$$n^2 + n \leq 6n + 3 - 6, \quad \Leftrightarrow \quad n^2 + 3 \leq 5n.$$

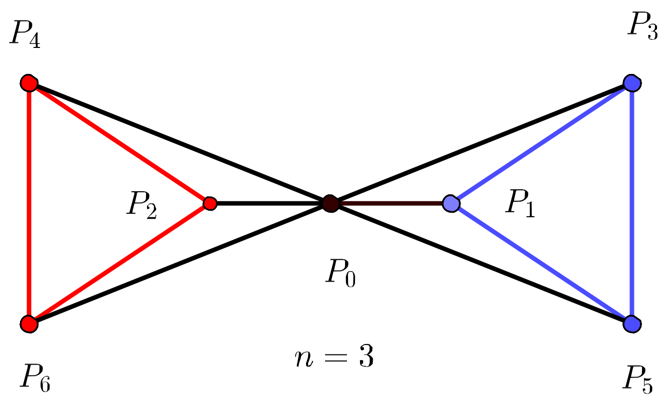
Podemos ver que esta desigualdad se satisface para $n = 1$, 2 y 3. Por tanto, no obtenemos información nueva. El grafo podría ser plano para estos valores. En la figura siguiente se puede comprobar que efectivamente, el grafo es plano en los tres casos.



$n = 1$



$n = 2$



$n = 3$

* *

9.-¿Para qué números naturales n, ni $n^2 - 1$ ni $n^2 + 1$ son múltiplos de 3? **(2 puntos)**

Solución

Dados tres números naturales consecutivos uno de ellos ha de ser múltiplo de 3. Así pues, si tomamos $n^2 - 1$, n^2 y $n^2 + 1$, y exigimos que $n^2 - 1$ y $n^2 + 1$ no sean múltiplos de 3, entonces lo será necesariamente n^2, lo que implica que n ha de ser múltiplo de 3.

Podemos demostrarlo de otra forma. Todo número natural n puede escribirse como $n = 3k + r$, donde $r = 0, 1$ ó 2. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &= 9k^2 + 6kr + r^2 - 1 \\ n^2 + 1 &= 9k^2 + 6kr + r^2 + 1 \end{aligned}$$

Luego vemos que basta estudiar $r^2 \mp 1 \mod (3)$ para los tres posibles valores de r.

r	$r^2 - 1 \mod (3)$	$r^2 + 1 \mod (3)$
0	2	1
1	0	2
2	0	2

Así pues, $n^2 + 1$ nunca es múltiplo de 3, y $n^2 - 1$ es múltiplo de 3 excepto si n es múltiplo de 3.

Por tanto la respuesta correcta es: para todos los números naturales múltiplos de 3.
**

10.-

a) Calcule el resto de dividir 117^{2n+1} (n par) entre 5. **(1punto)**

b) Calcule 5^{115} mod(116). **(1punto)**

Solución

a) Puesto que 5 es primo y primo con 117 podemos aplicar el Pequeño Teorema de Fermat. Entonces

$$117^4 \equiv 1 \mod(5)$$

Como n es par, podemos escribir $n = 2k$ y así

$$117^{2n+1} = (117^4)^k \cdot 117 \equiv 1 \cdot 117 \mod (5) \equiv 2 \mod(5).$$

Luego el resto de dividir 117^{2n+1} (n par) por 5 es 2.

b) El número 116 no es primo, pero sí es primo con 5. Sabemos entonces que $5^{\varphi(116)} \equiv 1$ mod(116). Como $116 = 2^2 \cdot 29$, tenemos que $\varphi(116) = 116(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{29}) = 56$. Por tanto, $5^{56} \equiv 1$ mod(116). Como $115 = 2 \cdot 56 + 3$, finalmente obtenemos

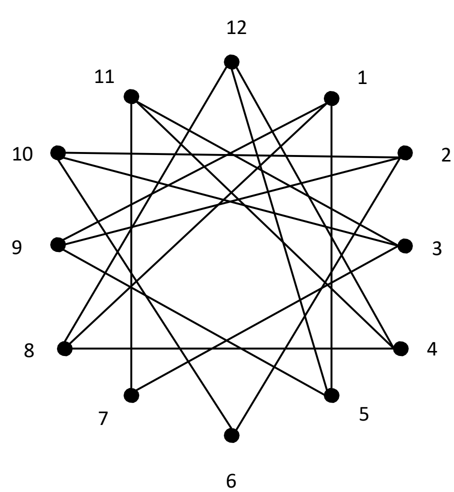
$$5^{115} \equiv 5^3 \equiv 125 \equiv 9 \mod(116).$$

11.-

Sea G un grafo con doce vértices etiquetados con números del 1 al 12. Dos vértices m y n tienen una arista común si y sólo si $|m - n|$ es múltiplo de 4 o de 7. Estudie si G es hamiltoniano, bipartito o plano. Estudie también si G es euleriano y, en caso contrario, si existe o no un camino euleriano, **(2 puntos)**

Solución

Vemos en la figura un posible dibujo del grafo.



NO es euleriano ya que existen vértices de grado impar. Tampoco puede existir un camino euleriano ya que el número de vértices de grado impar es mayor que 2.

Veamos si podemos encontrar un ciclo hamiltoniano. Sea el camino (donde sólo escribimos los vértices):

$$(1, 5, 9, 2, 6, 10, 3, 7, 11, 4, 8, 12)$$

Hemos pasado por todos los vértices pero no hemos vuelto al primero. No se puede deducir que el grafo no es hamiltoniano porque un camino concreto no sea un ciclo.

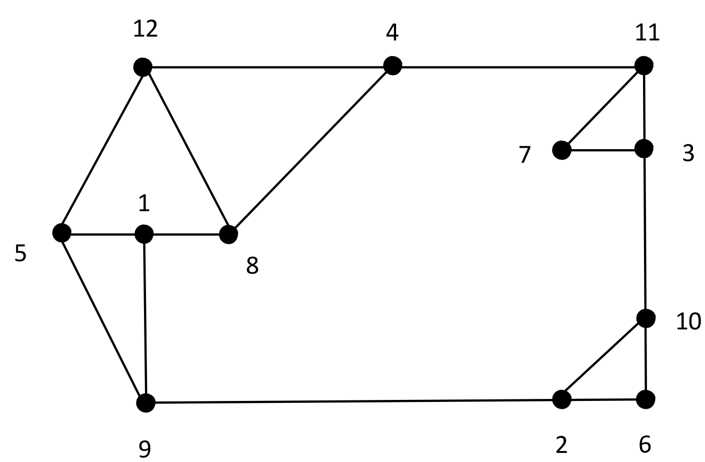
Observemos que si en el anterior camino cambiamos el orden en el que recorremos los últimos vértices, SÍ obtenemos un ciclo hamiltoniano:

$$(1, 5, 9, 2, 6, 10, 3, 7, 11, 4, 12, 8, 1)$$

Luego el grafo es hamiltoniano.

NO puede ser bipartito porque hay caminos cerrados de longitud impar. Por ejemplo, el camino de vértices (2, 6, 10, 2) tiene longitud 3.

Estudiemos ahora si es plano. Podemos dibujar el grafo de la siguiente manera (entre muchas otras) y vemos que SÍ es plano.



Ahora se ve más claramente que es hamiltoniano. Sea, por ejemplo, el camino

$$(1, 5, 12, 8, 4, 11, 7, 3, 10, 6, 2, 9, 1)$$

que es un ciclo hamiltoniano.

12.-

¿Cuál es el número de colocaciones diferentes de 8 libros distintos en una estantería, de modo que tres libros determinados desde el principio estén siempre separados entre sí, es decir, ningún par de libros de estos tres, estén contiguos en una colocación. **(2 puntos)**

Solución

Sean $1, 2, \ldots, 8$, los lugares de la estantería. Los tres libros que deben ir separados podrán ocupar los siguientes lugares:

135 146 157 168
136 147 158
137 148
138

246 257 268

247 258
248

357 368

358

468

Así pues los tres libros determinados se pueden colocar en cualquiera de esas 20 posiciones admisibles. Como todos los libros son distintos, el orden en que se coloquen entre ellos sí influye. Por tanto podemos permutar esos tres libros entre sí y los cinco restantes entre sí. Obtenemos el total de formas de colocar los libros en la estantería con las condiciones dadas:

$$20 \cdot 3! \cdot 5! = 14400.$$

13.-

Sea $k \geq 4$ un número natural. Exprese k^4 como combinación lineal de los números combinatorios $\binom{k}{1}$, $\binom{k}{2}$, $\binom{k}{3}$ y $\binom{k}{4}$. **(2 puntos)**

Solución

Escribamos

$$k^4 = a\binom{k}{1} + b\binom{k}{2} + c\binom{k}{3} + d\binom{k}{4}$$

Desarrollando los números combinatorios y agrupando los términos en k, k^2, k^3 y k^4, tenemos

$$k^4 = \frac{(24a - 12b + 8c - 6d)\,k + (12b - 12c + 11d)\,k^2 + (4c - 6d)\,k^3 + d\,k^4}{4!}$$

o equivalentemente

$$24\,k^4 = (24a - 12b + 8c - 6d)\,k + (12b - 12c + 11d)\,k^2 + (4c - 6d)\,k^3 + d\,k^4$$

de donde igualando los coeficientes de los k^i obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 24 &= d \\ 0 &= 4c - 6d \\ 0 &= 12b - 12c + 11d \\ 0 &= 24a - 12b + 8c - 6d \end{aligned}$$

que resuelto nos proporciona las soluciones $a = 1$, $b = 14$, $c = 36$ y $d = 24$. Así pues podemos escribir

$$k^4 = \binom{k}{1} + 14\binom{k}{2} + 36\binom{k}{3} + 24\binom{k}{4}.$$

14.- Calcule el número de cadenas distintas formadas por 4 ceros, 2 unos y 3 doses, de modo que no haya dos ceros consecutivos.

Solución

Una cadena que satisface las condiciones es, por ejemplo, 0, 1, 2, 0, 1, 0, 2, 0, 2, pero la cadena 1, 0, 0, 2, 2, 0, 1, 0, 2, no lo es, ya que hay dos ceros consecutivos en las posiciones 2 y 3.

Por tanto, el primer paso será situar los ceros en posiciones permitidas. Empezaremos colocando el primer cero en el primer lugar, el segundo cero en el lugar 3 y así sucesivamente. Tenemos que son configuraciones permitidas las siguientes, donde los números indican las posiciones de los cuatro ceros.

1357	1468	1579	2468	2579	3579
1358	1469		2469		
1359	1479		2479		
1368					
1369					
1379					

Hay 15 configuraciones en las que los ceros cumplen la condición de estar separados.

Ahora colocamos los dos unos. Quedan cinco lugares libres y es indiferente dónde coloquemos los unos, ya que no hay ninguna condición sobre ellos, así pues hay

$$\binom{5}{2} = 10$$

formas de colocar los unos. Los tres doses irán en las tres posiciones restantes. El total de cadenas que cumplen la condición del enunciado es

$$\boxed{15 \times 10 = 150.}$$

15.- Estudie para qué números enteros $n > 0$, los números $3^{4n} - 2^{4n}$ son divisibles:

i) Por 5. ii) Por 7.

Solución

i) Podemos aplicar el Pequeño Teorema de Fermat. Tenemos

$$3^4 \equiv 1 \bmod(5), \quad 2^4 \equiv 1 \bmod(5).$$

Podemos escribir entonces:

$$3^{4n} - 2^{4n} = (3^4)^n - (2^4)^n \equiv 1 - 1 \equiv 0 \bmod(5).$$

Así pues, los números $3^{4n} - 2^{4n}$, son divisibles por 5 cualquiera que sea el $n > 0$.

ii) También por el Pequeño Teorema de Fermat, tenemos

$$3^6 \equiv 1 \bmod(7), \quad 2^6 \equiv 1 \bmod(7).$$

Ahora no es tan sencillo como en el caso anterior, pero podemos escribir $n = 3k + r$, donde $r = 0, 1, 2$. Por tanto, $4n = 12k + 4r$, y entonces:

$$3^{4n} = 3^{12k+4r} = 3^{12k}\, 3^{4r} = (3^6)^{2k}\, 3^{4r} \equiv 3^{4r} \bmod(7),$$

y análogamente, para el 2. Tenemos que ver cuánto es $3^{4r} - 2^{4r}$ módulo 7, para los tres posibles valores de r.

Si $r = 0$: entonces $3^{4r} - 2^{4r} = 0$.

Si $r = 1$: $3^4 - 2^4 = 81 - 16 = 65 \equiv 2 \bmod(7)$.

Si $r = 2$: $3^8 - 2^8 = 3^6\, 3^2 - 2^6\, 2^2 \equiv 5 \bmod(7)$.

Por tanto, $3^{4n} - 2^{4n}$ es divisible por 7 si y sólo si n es un múltiplo de 3.

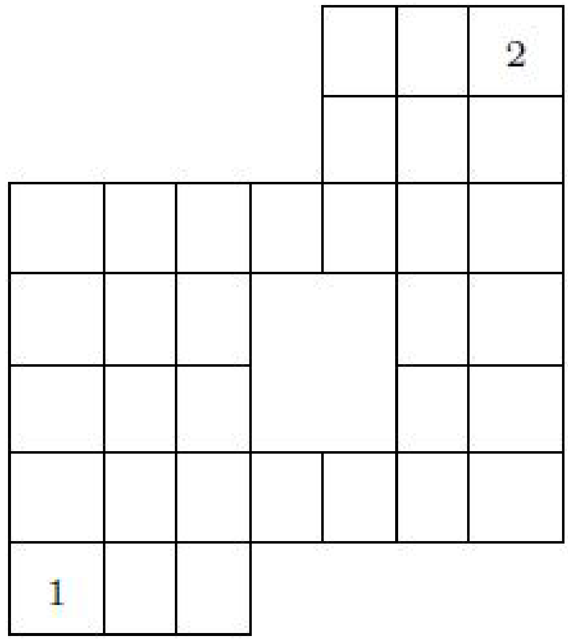
15.- En el tablero de la figura se tiene una pieza en la casilla 1. Solo están permitidos los movimientos de una casilla hacia arriba o hacia la derecha. ¿Cuántos caminos distintos son posibles para alcanzar la casilla 2?

Solución

En primer lugar, tenemos que en un tablero rectangular de $m \times n$ casillas, $m, n > 1$, para ir de la esquina inferior izquierda a la superior derecha con los movimientos permitidos en el enunciado, tenemos que hacer $m - 1$ desplazamientos a la derecha y $n - 1$ hacia arriba. El problema es equivalente a calcular el número de cadenas formadas por $m - 1$ símbolos ‘d’ y $n - 1$ símbolos ‘a’, que será:

$$\binom{m-1+n-1}{m-1} = \binom{m+n-2}{m-1} = \binom{m+n-2}{n-1}$$

Pero en nuestro problema no tenemos un tablero de estas características. Para calcular el número de caminos en este tablero, tenemos que descomponer el problema en diferentes casos, según por dónde rodeemos el agujero central.



Asignemos a cada casilla el par (i, j) si está en la columna $i = 1, 2, \dots, 7$ (contando de izquierda a derecha), y si está en la fila $j = 1, 2, \dots, 7$, contando de abajo a arriba. Obviamente, hay pares (i, j) para los que no existe una casilla.

Para llegar a la casilla (7, 7), la casilla final, descomponemos el problema del cálculo en varios pasos.

i) Calculamos el número de caminos para llegar a la casilla (3, 2), avanzamos a la derecha hasta la casilla (6, 2) y luego calculamos el número de caminos desde esta casilla hasta la (7, 7).

ii) Por otro lado, calculamos el número de caminos desde (1, 1) hasta (3, 5), nos desplazamos hacia la derecha hasta la casilla (5, 5) y calculamos el número de caminos desde esta casilla hasta la casilla (7, 7).

Efectuamos ahora los cálculos.

i) El número de caminos de (1, 1) hasta (3, 2) es $\binom{3+2-2}{2} = 3$. Una vez situados en la casilla (6, 2) hay $\binom{2+6-2}{1} = 6$, caminos hasta la casilla (7, 7). Como por cada uno de los tres caminos diferentes para llegar a (6, 2) podemos continuar por cualquiera de los 6 siguientes, tendremos un total de $3 \cdot 6 = 18$ caminos desde (1, 1) hasta (7, 7).

ii) Ahora tenemos, $\binom{3+5-2}{2} = 15$ caminos distintos para llegar a la casilla (3, 5) y $\binom{3+3-2}{2} = 6$ caminos desde la casilla (5, 5) hasta la (7, 7). El total de caminos distintos será entonces $15 \cdot 6 = 90$.

El número total de caminos para ir desde la casilla inicial hasta la final, será la suma de las dos cantidades obtenidas.

$$\boxed{18 + 90 = 108, \text{ caminos distintos}}$$

16.- Sea un grafo G con diez vértices $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$, y aristas $v_i v_j$, con $|i - j|$ impar. Estudie si el grafo G es euleriano, hamiltoniano, bipartito o plano.

Solución

El vértice v_1 está unido por una arista con los vértices de subíndice par v_j, ya que $|1 - j|$ debe ser impar. Hay cinco vértices de subíndice par, así que el grado de v_1 es 5. Luego el grafo G **no es euleriano**. Además, lo mismo es cierto para todos los demás vértices, pares e impares, por lo que todos los vértices tienen grado igual a 5.

Puesto que existen las aristas v_1v_2, v_2v_3, $\ldots v_{10}v_1$, es claro que G **es hamiltoniano**.

Los vértices están divididos en dos subconjuntos, los vértices de subíndice impar, por un lado, y los de subíndice par, por otro. Y no existen aristas que unan dos vértices de subíndice impar entre sí, y lo mismo es cierto para los de subíndice par. Por tanto G **es bipartito**.

Por último, el grafo no es plano, de hecho es $K_{5,5}$. Podemos ver que no es plano de otra manera. Como el grado de cada vértice es 5, el número de aristas es

$$a = \frac{5 \cdot 10}{2} = 25.$$

Como $a = 25 > 3v - 6 = 24$, el grafo **no es plano**.

16.- Recordemos que una coloración de un grafo es una coloración de sus vértices, cumpliendo ciertas condiciones. Demuestre la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Existe un número $k \geq 3$ de modo que todos los grafos conexos con k vértices necesitan más de dos colores para poderse colorear.

b) No existen grafos que necesiten más de 5 colores para ser coloreados.

Solución

a) Veamos que la afirmación es falsa. Dado cualquier $k \geq 3$, sea $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. El grafo $G = (V, E)$, donde $E = \{v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{k-1}v_k\}$, es conexo y se puede colorear con dos colores.

b) También es falsa. Los grafos completos K_r, $r > 5$, necesitan r colores para ser coloreados, ya que todo par de vértices está unido por una arista.

$\boxed{\text{Ambas respuestas son falsas}}$