Examen de Matemática Discreta

NOTA IMPORTANTE: El espacio máximo para escribir las respuestas es de dos folios por las dos caras. Si se envían más de dos folios, solamente se leerán los dos primeros.

Problema 1

Considerando el siguiente sumatorio $S = \sum_{i,j,k=1}^{8} x_i y_j z_k$. Se pregunta:

a) De cuántos sumandos se compone esta expresión. (0,5 puntos)

b) Si se supone que $i \neq j \neq k$, cuántos sumandos quedan. (0,5 puntos)

c) Si $i \leqslant j \leqslant k$, cuántos sumandos quedan. (1,5 puntos)

(2,5 puntos)

Solución

a) $VR(8,3) = 8^3 = 512$

b) $V(8,3)=\frac{8!}{5!} = 336$

c) Para cada valor de i, j se puede escoger entre $8-(i-1) = 9-i$, que van desde el i hasta el 8, y k entre $8-(j-1) = 9-j$, que van desde el j hasta el 8.

Así para $i = 1$, j se puede escoger desde 1 al 8 y así ijk se puede escoger $9-1+9-2+9-3+9-+9-5+9-6+9-7+9-8 = 36$. Siguiendo el mismo método obtenemos para $i = 2$, se pueden escoger 28 ijk , para $i = 3$ se pueden escoger 21 ijk , para $i = 4$ se pueden escoger 15 ijk , para $i = 5$ se pueden escoger 10 ijk, para $i = 6$ se pueden escoger 6 ijk , para $i = 7$ se pueden escoger 3 ijk, para $i = 1$ se pueden escojer 1 ijk. En total serán 120.

Problema 2

a) Demostrar que el número de primos es infinito. (2 puntos)

b) Demostrar que $1+q+q^2+\ldots+q^n = (1-q^{n+1})/(1-q)$ (1,5 puntos)

Solución

a) Teorema 1-2.15 del libro de teoría.

b) Lo demostraremos por inducción. Si denominamos $S_n = 1+q+q^2+\ldots+q^n$

Para $n = 0$, se tiene que $S_o = 1$, ya que $1 = \frac{1-q}{1-q}$.

Supongamos que es cierto lo que se pide para $k-1$

$S_{k-1} = 1+q+q^2+\ldots+q^{k-1} = \frac{1-qk}{1-q}$.

Ahora S$_k = (1+q+q^2+\ldots+q^{k-1})+q^k = \frac{1-qk}{1-q} + \frac{1-q}{1-q}q^k = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$

Problema 3

a) Sea M la matriz de adyacencia de un grafo G con p vértices, $p > 1$. Demostrar que la entrada (i,j) de la matriz M^n es el número de caminos de longitud n con extremos v_i y v_j. (1,5 puntos).

b) Sean n y k dos números naturales tales que $2k \leq n$. Denotemos por X_n el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Consideremos el grafo $H(n,k)$ que tiene como vértices los subconjuntos de X_n con k elementos. Dos vértices distintos, A y B, están unidos por una arista si y sólo si $A \cap B \neq \emptyset$. No se consideran aristas del tipo AA, es decir, $H(n,k)$ no es un pseudografo ni un multigrafo. Calcule en función de n y k cuántos vértices y aristas tiene $H(n,k)$. (2,5 puntos)

Solución

a) Teorema 2-3.7 del libro de teoría

b) El número de vértices será el número de subconjuntos de k elementos del conjunto X_n, es decir

$$v = \binom{n}{k}.$$

1. Para calcular el número de aristas fijemos primero un vértice A y veamos con cuántos otros vértices $B \neq A$ está unido. Es decir calcularemos el grado de A. De hecho, es más fácil calcular con cuántos vértices de X_n no está unido aparte de consigo mismo, ya que esta posibilidad está excluida del enunciado. Que el vértice A no está unido a B implica que $B \subset X_n - A$. El número de subconjuntos de k elementos de este último conjunto es $\binom{n-k}{k}$. Todos los vértices tienen el mismo grado, es decir, es un grafo regular. El grado de un vértice cualquiera es $gr_V = \binom{n}{k} - \binom{n-k}{k} - 1$ y el número de aristas será, por tanto:

$$a = \frac{\binom{n}{k}\left(\binom{n}{k} - \binom{n-k}{k} - 1\right)}{2}.$$