

No se permite el uso de ningún tipo de material.

Todas las respuestas deben estar justificadas.

Ejercicio 1. (2 puntos) Sea (a_n) una sucesión de números reales positivos con $\lim_n a_n = a$. Calcular

$$\lim_n \sqrt[n^2]{a_1 \cdot a_2^3 \cdot a_3^5 \cdots a_n^{2n-1}}.$$

Ejercicio 2. (2 puntos) Probar que un punto x es adherente a un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ si y sólo si existe una sucesión (x_n) de puntos de A tal que $\lim_n x_n = x$.

Ejercicio 3. (2 puntos) Estudiar, para cada valor de $k \in \mathbb{R}$, la derivabilidad de la función dada por

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + kx & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Ejercicio 4. (2 puntos) Encontrar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que la función

$$f(x) = x(x-8)(x-a)$$

tiene un máximo relativo en $x = 6$.

Ejercicio 5. (2 puntos) Estudiar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\log n)^{2n}}{n^n}.$$

Tiempo: 2 horas