

No se permite el uso de ningún tipo de material

Todas las respuestas deben estar justificadas

Ejercicio 1. (2 puntos) Estudiar el carácter de la sucesión $(a_n) \subset \mathbb{R}$ definida por

$$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad \text{para } n \geq 1.$$

En caso de convergencia, calcular su límite.

Ejercicio 2. (2 puntos) Estudiar la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(1/x)}{e^{1/x} + 1} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Ejercicio 3. (2 puntos) Sea $f : [0, +\infty) \rightarrow (0, 1]$ la función definida por

$$f(x) = \frac{1}{(1 + x^2)^2}.$$

a) ¿Es f biyectiva? Justificar la respuesta.

b) Demostrar que f es invertible en un entorno de $x = 1$ y calcular la derivada de su inversa en $f(1)$.

Ejercicio 4. (2 puntos) Encontrar el número de soluciones reales de la ecuación

$$2x^5 + 4x^3 + 2x = \sin x.$$

Ejercicio 5 (2 puntos) Estudiar las asíntotas y los intervalos de crecimiento de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{(1 + x)^2}.$$

Tiempo: 2 horas