① Sea T el triángulo rectángulo <u>isósceles</u> con vértices en $O=(0,0)$, $P=(a,0)$, $Q=(0,b)$, tal que la longitud de la hipotenusa es 3. Si designamos por $\vec{u}=\overrightarrow{OP}$, $\vec{v}=\overrightarrow{OQ}$, $\vec{h}=\overrightarrow{PQ}$ entonces podemos afirmar que:

A] $\vec{h}\cdot\vec{u}=-\vec{h}\cdot\vec{v}=-\frac{9}{2}$

B] $\vec{h}\cdot\vec{u}=-\vec{h}\cdot\vec{v}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

C] $\vec{h}\cdot\vec{u}=\vec{h}\cdot\vec{v}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$

D] N/A

② Hallar la distancia entre las rectas de $\mathbb{R}^3$ de ecuaciones

$$\begin{cases} x-y+z=2 \\ y=0 \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} x=0 \\ y-z=1 \end{cases}$$

A] $\sqrt{3}/3$

B] $\sqrt{3}$

C] $\sqrt{2}/3$

D] N/A

③ Dada la superficie de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $-2x^2+y^2+4z^2+4xz=20$, hallar <u>Todos</u> los puntos en los que la superficie es normal al vector $(1,2,2)$.

A] $(0,4,1)$ y $(0,-4,-1)$

B] $(\sqrt{8},6,0)$ y $(-\sqrt{8},-6,0)$

C] $(1,-1,0)$ y $(-1,1,0)$

D] N/A

④ Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Elegir el apartado con la opción correcta:

A] $\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua en $(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ no lo es

B] f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en $(0,0)$

C] N/A

⑤ Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=\begin{cases} \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(1,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(1,0) \end{cases}$

A] $\nabla f(1,0)$ está definido, pero f NO es diferenciable

B] f sí es diferenciable en $(1,0)$

C] N/A

⑥ Sea $G(x,y) = g(x^2+2y^2, x+y)$, donde $g(u,v)$ es una función diferenciable $g: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Sabiendo que $\nabla G(-1,0) = (3,1)$ Podemos afirmar que:

A] $\frac{\partial f}{\partial u}(-1,1) = 1$

C] $\frac{\partial f}{\partial u}(-1,0) = -1$

B] $\frac{\partial f}{\partial u}(1,-1) = -1$

D] N/A

---

⑦ Determinar la fórmula de Taylor de 2º orden de $f(x,y) = x^3 y$ alrededor del punto $(1,1)$. ¿Qué valor obtiene en el punto $(1/2, 1/2)$?

A] 1/12 B] 1/2 C] 1/8 D] N/A

---

⑧ Sean (r,θ,z) las coordenadas cilíndricas en $\mathbb{R}^3$.

Entonces: $\{(r,\theta,z) : z = r\cos\theta\}$

A] Es una circunferencia

C] Son dos rectas

B] Es una recta

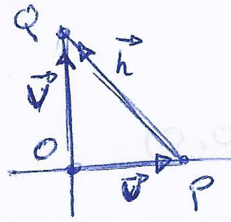
D] N/A

---

⑨ Determinar los máximos y mínimos locales y globales, si existen, de la función $f(x,y) = xy - 2x$ en el dominio

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 1 \leq y \leq 3\}$

(1)



$\|\vec{h}\| = \sqrt{a^2+b^2} = 3 \Rightarrow a^2+b^2 = 9 \Rightarrow 2a^2 = 9 \Rightarrow \boxed{a^2 = b^2 = \frac{9}{2}}$

$\vec{h} = (-a, b)$, $\vec{v} = (0, b)$, $\vec{u} = (a, 0)$

$\left.\begin{array}{l} \vec{h}\cdot\vec{u} = -a^2 \\ \vec{h}\cdot\vec{v} = b^2 \Rightarrow -\vec{h}\cdot\vec{v} = -b^2 \end{array}\right\}$ como $a^2 = b^2$, $\boxed{\vec{h}\cdot\vec{u} = -\vec{h}\cdot\vec{v} = -a^2 = -b^2 = -\frac{9}{2}}$

---

(2) $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow r: (x,y,z) = (2,0,0) + \lambda(-1,0,1) \Rightarrow \begin{cases} \vec{V_r} = (-1,0,1) \\ \vec{P_r} = (2,0,0) \end{cases}$

$s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow s: (0,1,0) + \mu(0,1,1) = (x,y,z) \Rightarrow \begin{cases} \vec{V_s} = (0,1,1) \\ \vec{P_s} = (0,1,0) \end{cases}$

$\vec{P_rP_s} = (-2,1,0)$

$\left|[\vec{V_r}, \vec{V_s}, \vec{P_rP_s}]\right| = \left|\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}\right| = \boxed{3}$; $\|\vec{V_r} \times \vec{V_s}\| = \left\|\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right\| = \boxed{\sqrt{3}}$

$d(r,s) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \boxed{\sqrt{3}}$

---

(3) $f(x,y,z) = -2x^2 + y^2 + 4z^2 + 4xz - 20$

$\nabla f(x,y,z) = (4z - 4x, 2y, 4x + 8z) \Rightarrow$ Debe ser $\parallel$ al $(1,2,2)$

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$;

$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4z-4x & 2y & 4x+8z \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-8x + 4y - 16z, 12x, -8x - 2y + 8z) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} -8x + 4y - 16z = 0 \\ 12x = 0 \\ -8x - 2y + 8z = 0 \end{cases}$

Resolviendo el sistema: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 4k \\ z = k \end{cases} \Rightarrow$ Los puntos buscados son los de la forma $(0, 4k, k)$ que pertenezcan a la superficie. Esto es, que su imagen por f sea 0.

$f(0, 4k, k) = 20k^2 - 20 = 0 \Rightarrow k = \pm 1$

Las únicas posibilidades son entonces $\boxed{(0,4,1) \text{ y } (0,-4,-1)}$

④ $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$

$\lim_{h\to 0} \dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

$\left.\right\} \nabla f(0,0)=(0,0)$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases} \dfrac{-x^2y+y^5}{(x^2+y^4)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3-3xy^4}{(x^2+y^4)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}=\infty$ y $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial y}=\infty \Rightarrow$ Las parciales NO son continuas en el origen

---

⑤ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+h,0)-f(1,0)}{h}=\infty$ ¡! $\Rightarrow$ El gradiente NO está definido en $(1,0)$

$\Downarrow$

Esto implica que f NO es diferenciable en (1,0)

---

⑥ La B

---

⑦ $f(x,y)=x^3y$ $\qquad f(1,1)=1$

$\nabla f(x,y)=(3x^2y,\ x^3)$ $\qquad \nabla f(1,1)=(3,1)$

$H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 6xy & 3x^2 \\ 3x^2 & 0\end{pmatrix}$ $\qquad H_f(1,1)=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 0\end{pmatrix}$

$P_2(x,y)=1+3(x-1)+(y-1)+$
$+\frac{1}{2}\left(6(x-1)^2+6(x-1)(y-1)\right)$

$\boxed{P_2(1/2,1/2)=1/2}$

---

⑧ $\left.\begin{array}{l} x=r\cos\theta \\ y=r\,\text{sen}\,\theta \\ z=z\end{array}\right\}$ $z=r\cos\theta \Rightarrow z=x$ en coordenadas cartesianas.

Corresponde con un plano, pero es probable que la respuesta sea una circunf.

No lo tengo claro

---

⑨ $f(x,y)=xy-2x$ $\qquad \nabla f$ se anula en $(0,2)$, que es un P. silla.

$\nabla f(x,y)=(y-2,x)$ $\qquad$ Frontera 1: $y=3 \Rightarrow f(x,3)=x \Rightarrow$ Creciente en la front.

$H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$ $\qquad$ Frontera 2: $x^2-1=y \Rightarrow c(t)=(t,t^2-1) \Rightarrow \boxed{-2\leq t\leq 2}$

$\Rightarrow f(c(t))=t^3-t-2t=t^3-3t \Rightarrow f'(c(t))=3t^2-3 \Rightarrow$ Se anula en $t=\pm 1$

$f(2,3)=f(c(2))$

$f(-2,3)=f(c(-2))$

$-2 \quad -1 \quad 1 \quad 2$

Máximo en $t=-1$ / $(-1,0)$

Mínimo en $t=1$ / $(1,0)$

$f(c(-1))=2$ $\qquad f(c(2))=2$

$f(c(1))=-2$ $\qquad f(c(-2))=-2$

Hay que mirar los extremos.