Lenguaje matemático, conjuntos y números

Pregunta 1 (2,5 puntos)

1. Defina aplicación inyectiva, aplicación sobreyectiva, y aplicación biyectiva.
2. Sean $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ y $h\colon C \to D$ tres aplicaciones tales que $g \circ f$ y $h \circ g$ son aplicaciones biyectivas.

   i) Demuestre que f y g son inyectivas.

   ii) Demuestre que f es biyectiva.

Solución:
2.i) Para demostrar que f es inyectiva, vemos que para todo $x, x' \in A$ tales que $f(x) = f(x')$, se cumple que $x = x'$.
En efecto, si $f(x) = f(x')$, entonces $g(f(x)) = g(f(x'))$, es decir, $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Si $g \circ f$ es biyectiva, en particular, $g \circ f$ es inyectiva y en consecuencia $x = x'$. La demostración de que g es inyectiva es idéntica : se usa que $h \circ g$ es inyectiva.
ii) Tenemos que ver que f es sobreyectiva. Sea para todo $y \in B$, $z = g(y) \in C$. Como $g \circ f$ es sobreyectiva, existe $a \in A$ tal que $g \circ f(a) = z$. En consecuencia, $g\big(f(a)\big) = g(y)$. Ahora bien hemos visto en i) que g es inyectiva. Luego $f(a) = y$. En consecuencia, f es sobreyectiva y por i) f es biyectiva.

Nota: Los argumentos que utilizan la igualdad de los cardinales de A y B para demostrar que una aplicación inyectiva es biyectiva, no son válidos en este caso pues desconocemos si los conjuntos son o no son finitos.

Pregunta 2 (2,5 puntos)

1. Dados un conjunto parcialmente ordenado $(U, \preceq)$ y un subconjunto D de U, razone si todo elemento maximal de D es un elemento máximo de D e inversamente si un máximo de D es un elemento maximal de D.
2. Se considera en $\mathbb{R}^2$ el orden producto $\leqslant_P$ dado por:

$$(a, b) \leqslant_P (c, d) \quad \text{si y sólo si} \quad a \leqslant c \ \text{ y } \ b \leqslant d$$

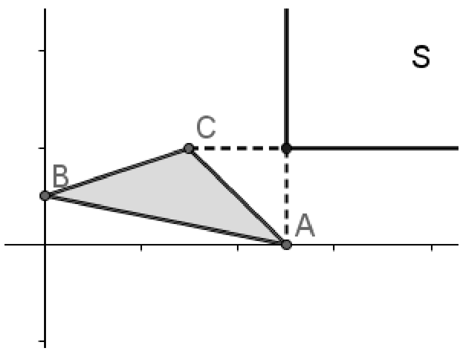
   Sea D el conjunto de puntos del triángulo de vértices $A(5, 0)$, $B(0, 1)$ y $C(3, 2)$, incluidos los puntos interiores del triángulo y las aristas. Determine el conjunto de cotas superiores, supremo, máximo y maximales de D.

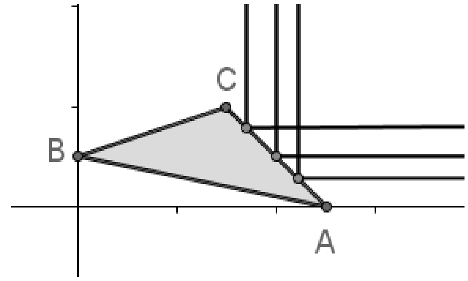
Solución:
1. Recordamos que el máximo de un conjunto D es un elemento M del conjunto D tal que $\forall x \in D \quad x \preceq M$, mientras que un elemento maximal m de D satisface que $\nexists x \in D,\ x \neq m$, que cumpla $m \preceq x$. Si la relación de orden es parcial y m es elemento maximal de D, m no tiene por qué ser un máximo pues de suponer que no existe ningún elemento x en D, salvo el propio m, tal que $m \preceq x$, no se deduce que todos los elementos x de D cumplan que $x \preceq m$ pues, al ser el orden parcial, puede haber elementos $x \in D$ que no satisfacen ninguna de las dos desigualdades. En el apartado siguiente se ve un ejemplo de elementos maximales que no son máximos. Veamos que si M es un máximo de D, entonces M es un elemento maximal de D. En efecto si M no fuera elemento maximal de D entonces existe al menos un $x_0 \in D$ tal que $x_0 \neq M$ y $M \preceq x_0$. Pero al ser $M = \max(D)$, resulta que $x_0 \preceq M$ y como la relación es antisimétrica resulta que $x_0 = M$. (contradicción)

2. Nótese que cualquier cota superior (x, y) de D cumple en particular $(5, 0) \leqslant_P (x, y)$ y $(3, 2) \leqslant_P (x, y)$ y por tanto $x \geqslant 5$ e $y \geqslant 2$ obteniéndose que el conjunto de cotas superiores de D es

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 5 \text{ e } y \geqslant 2\}$$

En consecuencia, $\sup(D) = (5, 2)$. Como $(5, 2) \notin D$, resulta que D no tiene máximo. Los elementos maximales de D son todos los puntos de la arista AC (del segmento que une los puntos A y C). Obsérvese que estos puntos no son máximos de D.





Pregunta 3 (2,5 puntos)

Demuestre por inducción que

$$1(n-1)+2(n-2)+3(n-3)+\cdots+(n-1)1=\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)$$

para todo $n \geqslant 1$.

Solución: Veamos por inducción que

$$1(n-1)+2(n-2)+3(n-3)+\cdots+(n-1)1=\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)$$

para todo $n \geqslant 2$.
La igualdad es cierta para $n=2$ pues se obtiene $1.1=\frac{1}{6}(2-1)2(2+1)$.
Supongamos que la igualdad es cierta para n, y veamos que es cierta para $n+1$, esto es tenemos que comprobar que

$$1(n)+2(n-1)+3(n-2)+\cdots+(n)1=\frac{1}{6}(n)(n+1)(n+2)$$

En efecto, descomponiendo cada sumando de la forma $(k+1)(n-k)$ en $(n-k)+k(n-k)$, reagrupando términos y aplicando la hipótesis de inducción, se obtiene:

$$\begin{aligned}1(n)+2(n-1)+\quad 3(n-2) \quad &+\cdots+(n)1=n+\big((n-1)+(n-1)\big)+\big((n-2)+2(n-2)\big)+\cdots+\big(1+(n-1)1\big)\\&=\Big(n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1\Big)+\Big(1(n-1)+2(n-2)+3(n-3)+\cdots+(n-1)1\Big)\\&=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}\Big(1+\frac{n-1}{3}\Big)\\&=\frac{1}{6}(n)(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

Pregunta 4 (2,5 puntos)

Sean z_1 y z_1 dos números complejos no nulos tales $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$.

1. Demuestre que $z_1\overline{z_2}$ es un número real tal que $z_1\overline{z_2}\geqslant 0$.
2. Deduzca que existe $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\geqslant 0$, tal que $z_1=\alpha z_2$.

Solución: 1. Tenemos que $(|z_1|+|z_2|)^2 = |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|$ mientras que $|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$. Por tanto,

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff |z_1||z_2| = Re(z_1\overline{z_2})$$

Como $|z_1||z_2| = |z_1||\overline{z_2}| = |z_1\overline{z_2}|$, se obtiene que el número complejo $z = z_1\overline{z_2} = a + ib$ cumple que $|z| = \mathrm{Re}(z)$, es decir $\sqrt{a^2 + b^2} = a$. En consecuencia $b = 0$ y $z = a \geqslant 0$. Así pues, $z_1\overline{z_2}$ es un número real tal que $z_1\overline{z_2} \geqslant 0$.

2. Como

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} \in \mathbb{R}^+$$

resulta que existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geqslant 0$, tal que $z_1 = \alpha z_2$. Basta tomar $\alpha = \dfrac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$.