Tema 7. Equilibrio estático y elasticidad

En este tema se estudian las condiciones que deben satisfacer las fuerzas y los momentos para que el estado de un cuerpo no cambie con el tiempo.

Par de fuerzas

Se denomina par de fuerzas respecto de un punto O al producto vectorial de la fuerza aplicada por el vector que une el punto O con el punto de aplicación de la fuerza.

Condiciones de equilibrio

- La suma de las fuerzas externas que actuan sobre un cuerpo debe ser cero: $\sum_i \mathbf{F}_i = 0$.
- El momento externo resultante con respecto a *cualquier punto* del cuerpo, debe ser cero: $\sum_i \tau_i = 0$.

Tensiones y deformaciones

Cuando a un cuerpo se le aplica una presión, de manera que el cuerpo se alarga o acorta, se dice que se está traccionando el cuerpo.

Se denomina **Tensión de tracción** a la fuerza aplicada sobre el cuerpo por unidad de superficie A:

$$\text{Tensión de tracción} = \frac{F}{A}.$$

Nota importante: Por razones históricas, este nombre de tensión coincide con el nombre que se da a la fuerza que sufre una cuerda o cable en, por ejemplo, un sistema de poleas. En ese caso, la tensión de la cuerda o cable es una fuerza, mientras que la tensión de tracción es una presión (fuerza por unidad de superficie).

Se denomina **deformación** a la variación relativa de la longitud de un cuerpo cuando este está sometido a una tensión.

$$\text{Deformación} = \frac{\Delta L}{L}$$

En el caso de que se aplique la fuerza de forma tangencial a la superficie del cuerpo se dice que se está aplicando una **fuerza de cizalladura**. El cociente de esta fuerza con el área del cuerpo recibe el nombre de **tensión de cizalladura**.

$$\text{Tensión de cizalladura} = \frac{F_c}{A}.$$

La tangente del ángulo con el que se deforma el cuerpo (que se llama ángulo de cizalladura) recibe el nombre de **deformación de cizalladura**.

Finalmente, el cociente entre la tensión de cizalladura y la deformación de cizalladura recibe el nombre de **módulo de cizalladura**.

Problemas resueltos.

1. <u>Esfera Maciza</u>. Una esfera maciza de $R = 20$ cm y masa $M = 30$ kg está en reposo sobre un plano inclinado de ángulo $\theta = 30$ grados, sostenida por una cuerda horizontal (de masa despreciable) como muestra la figura 1. Calcule:
a) La tensión T de la cuerda.
b) La fuerza normal N sobre la esfera.
c) La fuerza de rozamiento F_r que actúa sobre la esfera.

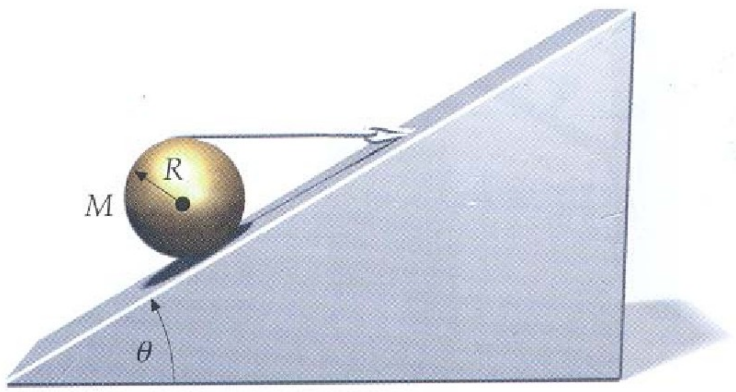

Figura 1: Esfera sujeta con una cuerda.

Planteamiento del problema.

En este problema, a diferencia de un problema normal de plano inclinado, vamos a trabajar en un sistema de coordenadas X,Y que es horizontal y vertical y no en uno con el eje X paralelo a la superficie y uno Y perpendicular a él y dirigido, por tanto, en la dirección de la fuerza normal.

Solución del problema.

Las condiciones de equilibrio con respecto a los mencionados ejes X e Y, horizontal y vertical respectivamente, son:
– En el eje X:

$$N \sin 30 = T + F_r \cos 30,$$

donde N es la fuerza normal y F_r es la fuerza de rozamiento entre esfera y plano.
– En el eje Y:

$$N \cos 30 + F_r \sin 30 - P = 0.$$

Además, puesto que la esfera puede rotar, deben anularse los momentos respecto a un eje que pase por el centro de la esfera:

$$TR - F_r R = 0,$$

donde se ha tomado en cuenta la simetría del problema. Aquí, TR es el momento de la tensión de la cuerda respecto al centro de la esfera y $F_r R$ es el momento debido a la fuerza de rozamiento.

Resolviendo las anteriores ecuaciones se obtiene: $T = F_r$ (de la tercera ecuación), $T = (Mg \sin\theta) / (1 + \cos\theta) = Mg / \left[2 + \sqrt{3}\right]$ y $N = Mg$. Dando valores nos queda $T = F_r = 78,8$ N; $N = 294$ N.

2. Pesa colgando de la mesa. Calcule el peso P mínimo que debe colocarse en el extremo de la mesa de la figura (donde se indican las dimensiones) para que vuelque. La masa del tablero es de $M = 50$ kg y la de cada una de las patas de la mesa es de $m = 5$ kg. El centro de gravedad del tablero coincide con el centro del mismo. Tome $g = 10$ m/s^2.

Planteamiento del problema.

Para que la mesa vuelque es necesario que el momento de las fuerzas respecto a alguno de los puntos de apoyo de las patas pase a ser positivo (tomando como positivo el sentido del movimiento de las agujas del reloj). Por tanto, la condición límite es que el momento con respeto a alguna de las patas sea mayor o igual que cero.

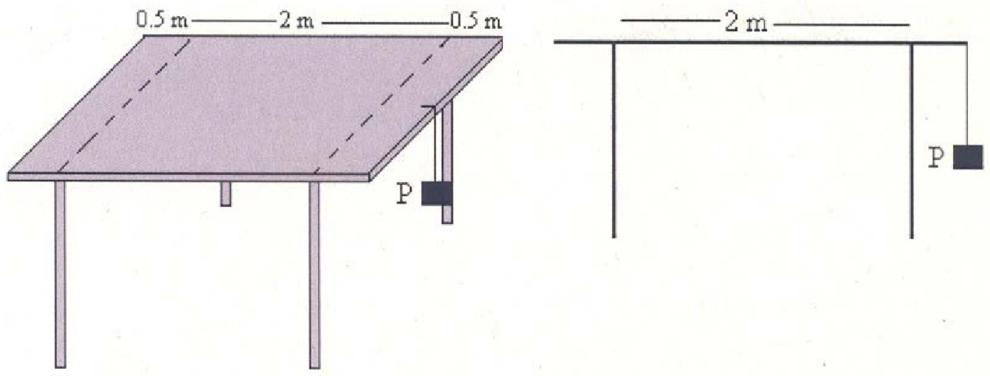

Figura 2: Mesa con pesa.

Solución del problema.

Dada la simetría del problema, es suficiente con considerar el esquema unidimensional de la derecha de la figura. Por tanto, en ese esquema cada una de las dos *patas* suma la masa de dos de las patas reales de la mesa; tienen cada una de ellas, por tanto, una masa $m_A = m_B = 2m$.

Si llamamos F_A y F_B a las fuerzas de reacción del suelo en cada una de las *patas*, la condición de equilibro de fuerzas de la mesa es:

$$F_A + F_B = Mg + m_A g + m_B g + P.$$

Por otra parte, el par de todo el sistema respecto a un eje que pasa por el punto de apoyo en el tablero de la *pata* derecha B es (tomamos como positivo el sentido del movimiento de las agujas del reloj; haga el estudiante con cuidado el producto vectorial de fuerzas y distancias):

$$N_B = -(m_A g - F_A) \cdot 2 - Mg \cdot 1 + P \cdot 0,5.$$

La mesa vuelca cuando $N_B \neq 0$. Justo antes de empezar a girar se cumple que $N_B = 0$ y que la fuerza de reacción en la pata izquierda es $F_A = 0$, de manera que

$$P_{\min} = 2Mg + 4m_A g = 1400\,\mathrm{N},$$

que es el peso mínimo pedido.

4.- <u>Brazo de una grúa</u>. Un brazo de grúa de $P_G = 1200$ N de peso y longitud L se sujeta a una pared mediante un cable grueso, que está unido al brazo a una distancia del suelo igual a $3L/4$. La figura muestra un esquema del sistema, donde T es la tensión de dicho cable. En el origen de coordenadas se supone que el brazo de la grúa está sujeto al suelo mediante una articulación que le permite rotar. Se cuelga un cuerpo de $P = 2000$ N de peso de la parte superior del brazo.

a) Calcule la tensión del cable.

b) Calcule las componentes F_x y F_y de la reacción en la articulación.

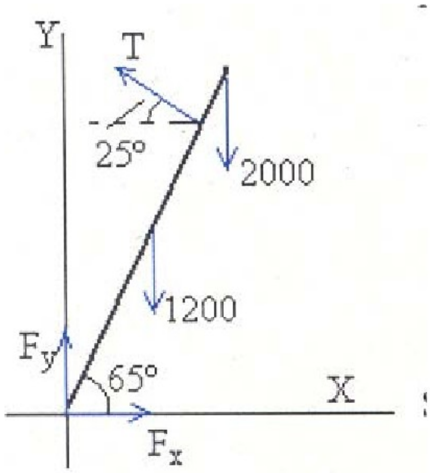

Figura 3: Esquema de la grúa

Planteamiento del problema.

En la figura 3 se han incluido todas las fuerzas que actúan sobre el sistema. Para que el sistema esté en equilibrio las componentes X e Y de las fuerzas deben sumar 0 y el momento total con respecto del origen debe ser cero.

Solución del problema.

La condición de equilibrio en las fuerzas a lo largo de los ejes son:
- En el eje OX:

$$F_x - T\cos(25) = 0$$

- En el eje OY:

$$T\sin(25) + F_y - P - P_G = 0$$

La condición de equilibrio en los momentos respecto al punto (o eje) donde está la articulación es:

$$-P \cdot L\cos(65) - P_G \cdot \frac{L}{2}\cos(65) + T \cdot \frac{3L}{4} + F_x \cdot 0 + F_y \cdot 0 = 0$$

(recuérdese que la distancia del cable a la articulación es $3L/4$).

Estas tres ecuaciones forman un sistema con tres incógnitas: T, F_x, F_y. Resolviéndolo, se obtienen los valores: $T = 1465$ N, $F_x = 1328$ N, $F_y = 2581$ N.

5.- <u>Hombre en la escalera</u>. Un hombre de masa $M = 70$ kg sube por una escalera de 2 m de longitud y masa $m = 10$ kg, que está apoyada en un punto a una altura $h = 1$ m de la pared y formando un ángulo de 60°, tal y como se indica en la figura 4. El coeficiente de rozamiento entre el extremo inferior de la escalera y el suelo es de 0.4. Calcular:
a) Las reacciones en los apoyos, cuando el hombre ha ascendido una distancia $\ell = 0{,}5$ m a lo largo de la escalera.
b) La máxima altura a la que puede subir el hombre antes de que la escalera comience a deslizar. Tome $g = 10$ m/s^2.

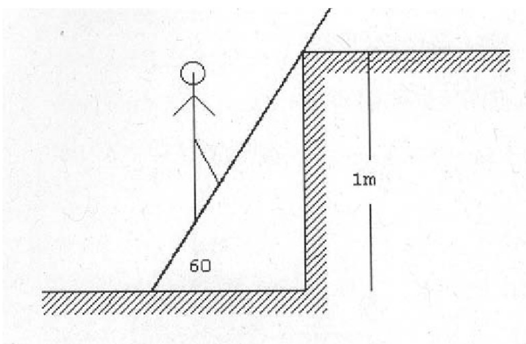

Figura 4: Dibujo de la escalera.

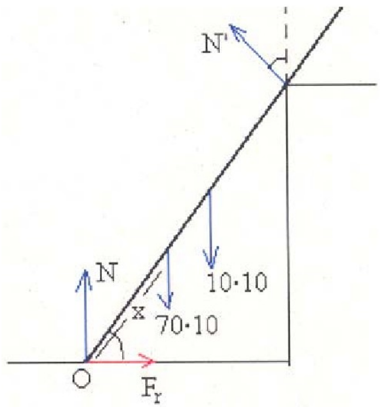

Figura 5: Esquema de las fuerzas en la escalera.

Planteamiento del problema. Para que el sistema permanezca en equilibrio es necesario que la suma de las fuerzas aplicadas sea cero y que el momento respecto del punto O (ver la figura 5), también sea nulo. En caso contrario la escalera comenzará a deslizar y girará.

Solución del problema.
a) Las condiciones de equilibrio en los ejes son las siguientes.
- Eje OX:

$$N'\sin(60) - F_r = 0,$$

siendo la fuerza de rozamiento $F_r \leq \mu N$ (véase, por ejemplo, el apartado 5.1 del libro de Tipler y Mosca, 6ª edición).
- Eje OY:

$$N'\cos(60) + N - Mg - mg = 0,$$

Por otra parte, la condición de equilibrio de los momentos con respecto al punto de apoyo con el suelo O es:

$$N' \cdot l' - Mg \cdot \ell \cos(60) - mg \cdot \frac{L}{2} \cos(60) + F_r \cdot 0 + N \cdot 0 = 0$$

donde $l' = h/\sin(60)$.

Basta ahora con imponer la condición $\ell = 0{,}5$ m, y despejar las tres incógnitas que nos quedan: N, N' y F_r (los valores que se obtienen son: $N' = 194{,}9$ N, $F_r = 168{,}8$ N, y $N = 702{,}6$ N).

b) En este segundo apartado se nos pide calcular la distancia que el hombre ha subido por la escalera antes de comenzar a *deslizar*. Según hemos comentado antes, en ese instante se debe cumplir que $F_r = \mu N$ o, lo que es igual, $N' \sin(60) = \mu N$.

Imponiendo esta condición, tendremos que resolver los valores de N', N y x, que resultan ser $N' = 300{,}2$ N, $N = 649{,}9$ N y $x = 0{,}847$ m.