Geometría Básica

Capítulo II: Axiomas para la Geometría Euclidiana Plana

Jackie Harjani y Belén López.

UNED, C.A. Las Palmas

Febrero 2011

Ejercicio 2.5.

Sea $r \subset P$ una recta y $A, B \in r$, $A \neq B$. Existe una aplicación $\rho : r \longrightarrow \mathbb{R}$ como en el axioma $P3$ tal que además $\rho(A) = 0$ y $\rho(B) > 0$. ¿La aplicación ρ es única?

Ejercicio 2.5.

Sea $r \subset P$ una recta y $A, B \in r$, $A \neq B$. Existe una aplicación $\rho : r \longrightarrow \mathbb{R}$ como en el axioma $P3$ tal que además $\rho(A) = 0$ y $\rho(B) > 0$. ¿La aplicación ρ es única?

Solución:

Axioma $P3$

Existe $\rho_1 : r \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

i) $|\rho_1(A) - \rho_1(B)| = d(A, B)$, $\forall A, B \in r$.

ii) ρ_1 es una biyección.

Consideramos:

$$\sigma = \frac{\rho_1(B) - \rho_1(A)}{|\rho_1(B) - \rho_1(A)|} \in \{-1, 1\}$$

y

Consideramos:

$$\sigma = \frac{\rho_1(B) - \rho_1(A)}{|\rho_1(B) - \rho_1(A)|} \in \{-1, 1\}$$

y

$$\begin{aligned} \rho_2 : \quad & r \longrightarrow \mathbb{R} \\ & X \mapsto \sigma\rho_1(X) - \sigma\rho_1(A) \end{aligned}$$

Consideramos:

$$\left.\begin{array}{ll} \sigma = & \dfrac{\rho_1(B) - \rho_1(A)}{|\rho_1(B) - \rho_1(A)|} \in \{-1, 1\} \\ \text{y} & \\ \rho_2 : & r \longrightarrow \mathbb{R} \\ & X \mapsto \sigma\rho_1(X) - \sigma\rho_1(A) \end{array}\right\} \overset{Cap.I:1,5-B}{\Rightarrow} \rho_2 \text{ es una isometría}$$

Consideramos:

$$\left.\begin{array}{ll} \sigma = & \dfrac{\rho_1(B)-\rho_1(A)}{|\rho_1(B)-\rho_1(A)|} \in \{-1,1\} \\ \text{y} & \\ \rho_2 : & r \longrightarrow \mathbb{R} \\ & X \mapsto \sigma\rho_1(X)-\sigma\rho_1(A) \end{array}\right\} \overset{Cap.I:1,5-B}{\Rightarrow} \rho_2 \text{ es una isometría}$$

Además

Consideramos:

$$\left.\begin{array}{ll} \sigma = & \dfrac{\rho_1(B)-\rho_1(A)}{|\rho_1(B)-\rho_1(A)|} \in \{-1,1\} \\ \text{y} & \\ \rho_2 : & r \longrightarrow \mathbb{R} \\ & X \mapsto \sigma\rho_1(X) - \sigma\rho_1(A) \end{array}\right\} \overset{Cap.I:1,5-B}{\Longrightarrow} \rho_2 \text{ es una isometría}$$

Además

a) $\rho_2(A) = 0$

Consideramos:

$$\left.\begin{array}{ll} \sigma = & \dfrac{\rho_1(B)-\rho_1(A)}{|\rho_1(B)-\rho_1(A)|} \in \{-1,1\} \\ \text{y} & \\ \rho_2 : & r \longrightarrow \mathbb{R} \\ & X \mapsto \sigma\rho_1(X) - \sigma\rho_1(A) \end{array}\right\} \overset{Cap.I:1,5-B}{\Rightarrow} \rho_2 \text{ es una isometría}$$

Además

a) $\rho_2(A) = 0$

b) $\rho_2(B) = \dfrac{\left(\rho_1(B)-\rho_1(A)\right)^2}{|\rho_1(B)-\rho_1(A)|} > 0$

La isometría ρ_2 es única.

La isometría ρ_2 es única.

Si $\rho_3 : r \longrightarrow \mathbb{R}$ biyectiva con $\rho_3(A) = 0$ y $\rho_3(B) > 0$.

La isometría ρ_2 es única.

Si $\rho_3 : r \longrightarrow \mathbb{R}$ biyectiva con $\rho_3(A) = 0$ y $\rho_3(B) > 0$.

$$¿\, \rho_3 = \rho_2?$$

La isometría ρ_2 es única.

Si $\rho_3 : r \longrightarrow \mathbb{R}$ biyectiva con $\rho_3(A) = 0$ y $\rho_3(B) > 0$.

$$¿\,\rho_3 = \rho_2?$$

Ejercicio 2.1-Capítulo II

Si $\rho_2 : r \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\rho_3 : r \longrightarrow \mathbb{R}$ son dos biyecciones satisfaciendo $P3$, entonces si $h = \rho_3 \circ \rho_2^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, se tiene que $\exists a \in \mathbb{R}$:

$$h(x) = x + a$$

o

$$h(x) = -x + a$$

Además:

$$h(0) = \rho_3 \circ \rho_2^{-1}(0) = \rho_3(A) = 0$$

Además:

$$\begin{aligned} h(0) &= \rho_3 \circ \rho_2^{-1}(0) = \rho_3(A) = 0 \\ h(\rho_2(B)) &= \rho_3(\rho_2^{-1}(\rho_2(B))) = \rho_3(B) = \rho_2(B) \end{aligned}$$

Además:

$$\left.\begin{aligned} h(0) &= \rho_3 \circ \rho_2^{-1}(0) = \rho_3(A) = 0 \\ h(\rho_2(B)) &= \rho_3(\rho_2^{-1}(\rho_2(B))) = \rho_3(B) = \rho_2(B) \end{aligned}\right\} \overset{Cap.I:1,5-C}{\Rightarrow} h = id_{\mathbb{R}}$$

Además:

$$\left.\begin{aligned} h(0) &= \rho_3 \circ \rho_2^{-1}(0) = \rho_3(A) = 0 \\ h(\rho_2(B)) &= \rho_3(\rho_2^{-1}(\rho_2(B))) = \rho_3(B) = \rho_2(B) \end{aligned}\right\} \overset{Cap.I:1,5-C}{\Rightarrow} h = id_{\mathbb{R}}$$

Conclusión

$$\rho_3 \circ \rho_2^{-1} = id_{\mathbb{R}} \Rightarrow \rho_3 = \rho_2$$