FACULTAD DE CIENCIAS
SECCIÓN FÍSICAS
PLAN DE ACOGIDA

TÍTULO: ***Vectores.***

OBJETIVOS:

- Introducir /recordar los conceptos de magnitudes escalares y vectoriales.
- Introducir/recordar los conceptos de vectores en el espacio de tres dimensiones, su definición por componentes y su utilidad en Física.
- Introducir/recordar las operaciones principales con vectores: suma, multiplicación por un escalar, producto escalar y producto vectorial.

DESARROLLO CONCEPTUAL

CONCEPTOS GENERALES

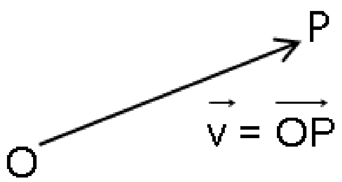
Necesidad de los vectores en Física

En Física existen dos tipos de magnitudes: escalares y vectoriales. Las primeras quedan determinadas dando un resultado numérico (un número) que indica su valor y unas unidades. Existen muchas magnitudes físicas que son de este tipo: masa, longitud, altura, carga eléctrica, intensidad de corriente … Así por ejemplo, podríamos expresar un resultado diciendo: "El cuerpo X tiene una masa de 5 Kg."

A veces es necesario dar más información acerca de la propiedad que se está estudiando, por lo que, es necesario utilizar vectores. Para expresar correctamente el resultado de una magnitud vectorial es necesario dar más datos: su módulo, que nos da una idea de la magnitud de esta propiedad, una dirección (que se suele asociar a una recta), el sentido (puesto que cualquier recta puede recorrerse en dos sentidos) y las unidades en las que se expresa el resultado. La forma más sencilla de expresar este tipo de resultados es con un vector. Por ejemplo, si tenemos un móvil que se desplaza a la derecha sobre el eje OX , con una velocidad de 30 m/s la forma correcta de expresar el resultado es decir. "El móvil se desplaza a lo largo del eje OX con una velocidad **v**= (30,0) m/s"

¿Qué es un vector?

La representación más elemental de un vector es un *segmento orientado* (que tiene un origen O y un extremo, P, bien especificados) cuya longitud es proporcional a la intensidad de la magnitud que representa. Cuando se quiere especificar que una magnitud es vectorial se indica colocando una pequeña flecha sobre el símbolo de la magnitud, tal como se indica en la Figura 1.



¿Cuáles son las características de un vector?
Un vector tiene cuatro características fundamentales:

Punto de aplicación: Es el punto del espacio en el que está el origen del vector.
Dirección: La de la recta que une el origen y el extremo.
Sentido: El indicado por el origen y el extremo.
Módulo: El valor numérico asociado a su longitud.

Nota: en los libros de texto usualmente se representan los vectores de dos formas, con letras **en negrita**, o con letras que con una flecha encima. Por ejemplo, el vector asociado a la velocidad de un cuerpo se puede representar mediante **letra negrita** (**v**) o mediante una **pequeña flecha sobre** el símbolo de la magnitud ($\vec{v}$), siendo ambas expresiones equivalentes.

¿Cómo se representa matemáticamente un vector?
Dado que un vector es, básicamente, un segmento con un origen y un extremo, la representación matemática del vector tiene que venir dada por las coordenadas del extremo y las del origen. Por otro lado, los puntos origen y extremo están matemáticamente determinados por sus coordenadas cartesianas, de manera que si el punto O tiene coordenadas (x_0, y_0, z_0) y el punto P las coordenadas (x_1, y_1, z_1), el vector que une dichos puntos tiene como proyecciones sobre los ejes de coordenadas segmentos de longitudes respectivas $v_x = x_1 - x_0$, $v_y = y_1 - y_0$, $v_z = z_1 - z_0$, como se puede observar en la Figura 2.

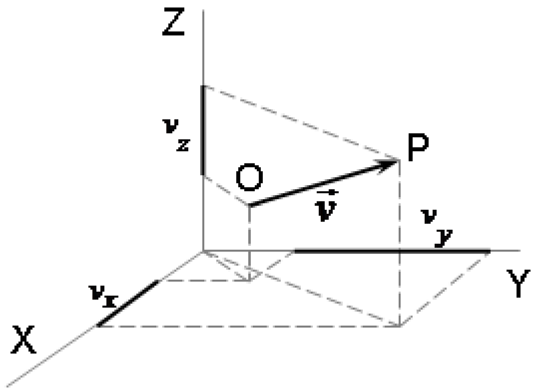


Figura 2.

Estas proyecciones del vector sobre los ejes de coordenadas son lo que se denominan *componentes cartesianas* del vector. De manera que un vector queda completamente determinado si se especifican su punto de aplicación y sus componentes cartesianas. Habitualmente se utiliza la notación

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z).$$

Un tipo particularmente interesante de vectores son los denominados vectores unitarios, que son aquéllos cuyo módulo vale la unidad. Por ejemplo, dado un vector $\vec{v}$ cuyo módulo es

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \ ,$$

Siempre se puede definir un vector unitario (a veces éste se indica cambiando la flecha de vector por un acento circunflejo):

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Por lo tanto, este vector unitario $\hat{v}$ tiene la misma dirección que $\vec{v}$ pero con módulo unidad. Los vectores unitarios que señalan las direcciones de los ejes de coordenadas son particularmente útiles. Estos vectores

unitarios se representan habitualmente por los símbolos $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, para los vectores unitarios en las direcciones de los ejes X, Y, Z, respectivamente.

OPERACIONES CON VECTORES

Suma de vectores.
Volviendo a la representación gráfica de los vectores como segmentos orientados, parece intuitivo que la manera de sumar vectores es poner unos a continuación de otros, de manera que *el vector suma de otros dos vectores es la diagonal del paralelogramo que definen ambos* (ver figura 3).

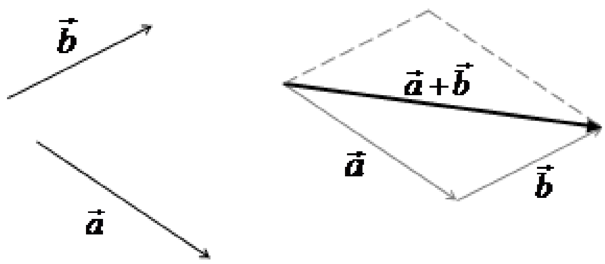


Figura 3.

En esta figura se puede apreciar directamente que la suma de vectores cumple la *propiedad conmutativa*, es decir que,

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

En la notación por componentes, el vector suma de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es

$$\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}=\left(a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z\right).$$

Es decir, los vectores se suman componente a componente.

Producto de un vector por un escalar
Utilizando otra vez la representación geométrica, es fácil darse cuenta de que el producto de un escalar por un vector es otro vector de la misma dirección y sentido que el primero; con un módulo igual al del primer vector multiplicado por el escalar, es decir:

$$\lambda\vec{v}=\left(\lambda v_x, \lambda v_y, \lambda v_z\right).$$

$$|\lambda\vec{v}|=\sqrt{\lambda^2 v_x^2+\lambda^2 v_y^2+\lambda^2 v_z^2}=\lambda\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\begin{cases}\lambda|\vec{v}|;\lambda>0\\-\lambda|\vec{v}|;\lambda<0\end{cases}$$

Representación de un vector por medio de sus componentes y los vectores unitarios.
La suma de vectores y el producto de un vector por un escalar nos permiten definir una nueva manera de representar matemáticamente un vector en términos de sus componentes y los vectores unitarios, de la siguiente forma

$$\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}\ .$$

En esta notación la suma de dos vectores es

$$\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k} \ .$$

Producto escalar de dos vectores

El producto escalar de dos vectores es una operación que da como resultado un escalar que es igual al producto del módulo de uno de los vectores por la proyección del segundo vector sobre el primero.

Se suele indicar con un punto. Es decir, si se tienen los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, que forman entre sí un ángulo α, el producto escalar de los dos vectores será:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha \ .$$

El producto escalar tiene varias propiedades interesantes:

i) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$, o lo que es lo mismo $|\vec{a}|^2 = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = (\vec{a} \cdot \vec{a})^{1/2}$

ii) $\vec{a} \cdot \vec{i} = a_x$; $\vec{a} \cdot \vec{j} = a_y$; $\vec{a} \cdot \vec{k} = a_z$

iii) Si dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son mutuamente perpendiculares entonces $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

iv) $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

v) Permite hallar fácilmente el ángulo que forman dos vectores: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

Producto vectorial de dos vectores

El producto vectorial de dos vectores es una operación que da como resultado otro vector, cuyo módulo es igual al producto de los módulos de los dos vectores por el seno del ángulo que forma, la dirección es la de la recta perpendicular al plano que contiene a los dos vectores y el sentido el de avance de un sacacorchos que gira llevando al primer vector hacia el segundo.

Se suele indicar con un aspa. Es decir, si se tienen los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, que forman entre sí un ángulo α, el producto vectorial de los dos vectores será tal que:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\operatorname{sen}\alpha$$

Y se construye según la figura 4:

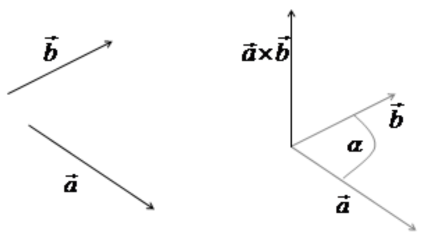


Figura 4.

Las propiedades del producto vectorial son:

i) $\vec{a} \times \vec{a} = 0$.

ii) Si dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos entre sí, entonces $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.

iii) El producto vectorial no es conmutativo: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

iii) $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$; $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$; $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$; $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$; $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$; $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$

iv) $\vec{a}\times\vec{b} = \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\vec{i} + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\vec{j} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\vec{k}$.

v) El módulo del producto vectorial de dos vectores es igual al área del paralelogramo que definen dichos vectores.

EJEMPLOS DE VECTORES EN LA MECÁNICA

Vector de Posición

Se utiliza para determinar la posición de un objeto cualquiera en un determinado sistema de referencia. Es decir, si un objeto se encuentra en un punto del espacio P, cuyas coordenadas en un cierto sistema de referencia son (x, y, z), el vector de posición de dicho punto en dicho sistema de referencia será (Figura 5),

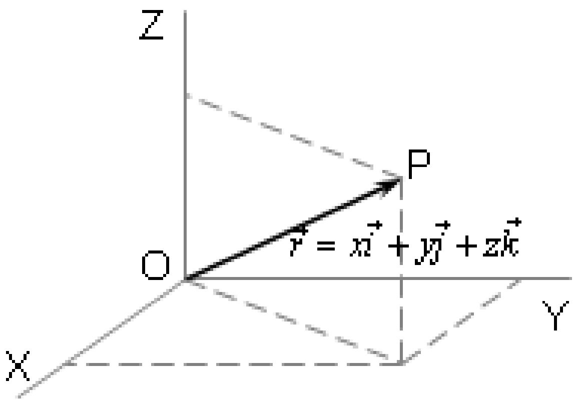


Figura 5.

Vector velocidad

Para un móvil que se desplaza siguiendo una cierta trayectoria, la forma más sencilla de describir matemáticamente esa trayectoria es a través de los diferentes valores que toman las componentes de su vector de posición a lo largo del tiempo. Por lo tanto, las coordenadas que dan la posición del móvil son tres funciones de una variable que representa el tiempo y que denotaremos por *t*, es decir, $(x(t), y(t), z(t))$.

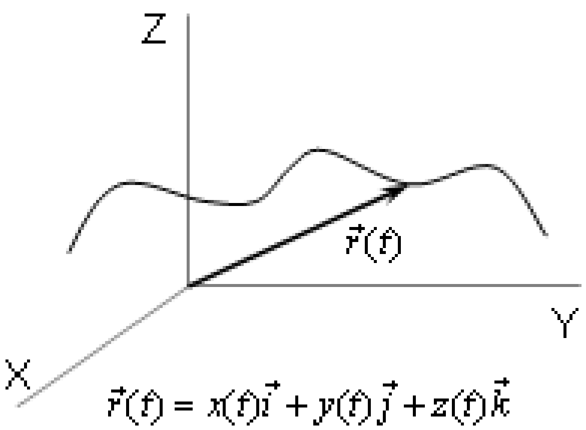


Figura 6.

El vector velocidad se define como la derivada del vector de posición respecto al tiempo, es decir

$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\frac{dx(t)}{dt}\vec{i}+\frac{dy(t)}{dt}\vec{j}+\frac{dz(t)}{dt}\vec{k}$$

Vector aceleración
Análogamente al caso anterior, se define el vector aceleración como la derivada respecto al tiempo del vector velocidad, es decir

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=\frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y(t)}{dt^2}\vec{j}+\frac{d^2z(t)}{dt^2}\vec{k}$$

Vector cantidad de movimiento o momento lineal.
Una magnitud muy importante en Mecánica es la cantidad de movimiento de un móvil, que es el producto de la masa del móvil, *m*, por el vector velocidad del móvil, es decir

$$\vec{p}(t)=m\vec{v}(t)=m\frac{dx(t)}{dt}\vec{i}+m\frac{dy(t)}{dt}\vec{j}+m\frac{dz(t)}{dt}\vec{k}$$

EJEMPLO

ENUNCIADO

Dados los vectores $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$, y $\vec{b}=\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$, calcular el ángulo que forman y el área del paralelogramo que determinan.

RESOLUCIÓN

Para hallar el ángulo que forman basta con calcular su coseno a partir de la fórmula del producto escalar, es decir

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}=\frac{2-4+6}{\sqrt{14}\sqrt{21}}=\frac{4}{7\sqrt{6}},$$

de manera que $\alpha=\arccos\left(\frac{4}{7\sqrt{6}}\right)$.

Por otro lado, el área que nos piden es el módulo del producto vectorial de los dos vectores, es decir

$$S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=|\vec{a}||\vec{b}|\operatorname{sen}\alpha=|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2\alpha}=$$

$$=|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)^2}=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}=\sqrt{14\times21-16}=\sqrt{278}$$

En el caso de que se dijese que las componentes de los vectores tienen unas unidades determinadas, la unidad en las que se mediría esa área sería el producto de las unidades de las componentes de los vectores $\vec{a}$, y $\vec{b}$.

EJERCICIO DE AUTOCOMPROBACIÓN

ENUNCIADO

Una carga eléctrica se mueve con una velocidad $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ en el seno de un campo magnético $\vec{B}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, estando la velocidad y el campo magnético expresados en unas determinadas unidades. Hallar la fuerza por unidad de carga F/q, que el campo magnético ejerce sobre la carga móvil, sabiendo que según la fórmula de Lorenz, dicha fuerza por unidad de carga es igual al producto vectorial $\vec{v}\times\vec{B}$.

RESULTADO

$$F/q=\vec{v}\times\vec{B}=-5\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$$

REFERENCIAS:

- P. A. Tipler y G. Mosca, Física para la Ciencia y la Tecnología, 5ª Edición, Editorial Reverté, 2005.
- P. A. Tipler y G. Mosca, Física para la Ciencia y la Tecnología, 6ª Edición, Editorial Reverté, 2010.

AUTOR:

- Miguel Angel Rubio Alvarez