Álgebra lineal I, Grado en Matemáticas

Prueba de Evaluación Continua, curso 2018/19

Matrices, Sistemas lineales y Espacios Vectoriales

Ejercicio 1: (2 puntos)
Dos matrices A y B de orden n son semejantes si existe una matriz regular P tal que $A = PBP^{-1}$. Demuestre que si A y B son matrices semejantes de orden n y $A^2 - 3A = I_n$, entonces también se cumple $B^2 - 3B = I_n$.

Solución: Dadas A, B y P en las condiciones de enunciado, si sustituimos $A = PBP^{-1}$ en la ecuación matricial $A^2 - 3A = I_n$, entonces

$$(PBP^{-1})^2 - 3(PBP^{-1}) = I_n$$

de donde

$$(PBP^{-1}PBP^{-1}) - 3(PBP^{-1}) = PB^2P^{-1} - 3PBP^{-1} = I_n$$

Aplicando la propiedad distributiva tenemos

$$P(B^2P^{-1} - 3BP^{-1}) = P(B^2 - 3B)P^{-1} = I_n$$

Ahora, multiplicando a ambos miembros de la igualdad por P^{-1} por la izquierda y por P por la derecha, obtenemos

$$P^{-1}P(B^2 - 3B)P^{-1}P = P^{-1}I_nP$$

y simplificando llegamos al resultado deseado

$$B^2 - 3B = I_n \ .$$

Ejercicio 2: (4 puntos)
Dado el siguiente sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = 1 \\ x & + & by & + & z & = b \\ x & + & y & + & az & = a \end{array}\right. \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{K}$$

(a) Discuta el sistema para todos los valores de $a, b \in \mathbb{K}$.
(b) Resuelva los casos en que sea compatible e indeterminado.

Solución: Matricialmente, denotamos por $AX = B$ al sistema dado, siendo $(A|B)$ la matriz ampliada, y procedemos a realizar operaciones elementales de filas para transformarlo en un sistema escalonado equivalente $A'X = B'$, con matriz $(A'|B')$ escalonada. Comenzamos haciendo un intercambio de filas para conseguir un pivote en la posición $[A|B]_{11}$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & b \\ 1 & 1 & a & a \end{array}\right) \xrightarrow[f_1 \leftrightarrow f_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 1 & b & 1 & b \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{f_2 \to f_2 - f_1 \\ f_3 \to f_3 - af_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & b-1 & 1-a & b-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a^2 \end{array}\right)$$

(a) Si $a = 1$ y $b = 1$ el sistema queda reducido a una única ecuación $x + y + z = 1$ que sería compatible e indeterminado y sus soluciones son las ternas de la forma

$$(1 - \lambda - \mu,\ \lambda,\ \mu) \text{ con } \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

(b) Si $a=1$ y $b\neq 1$ la matriz del sistema escalonado equivalente es

$$(A'|B') = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-1 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Como $\mathrm{rg}(A') = \mathrm{rg}(A'|B') = 2$ y menor que el número de incógnitas, entonces el sistema es compatible e indeterminado. Las soluciones son:

$$(-\lambda,\, 1,\, \lambda),\ \ \lambda \in \mathbb{K}.$$

(c) Si $a\neq 1$ tenemos que seguir haciendo operaciones elementales de filas para escalonar la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & b-1 & 1-a & b-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a^2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{f_3\to \frac{1}{1-a}f_3 \\ f_2\leftrightarrow f_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & 1 & 1+a & 1+a \\ 0 & b-1 & 1-a & b-a \end{array}\right) = (A''|B'')$$

(c.1) Si $b=1$ entonces la matiz es escalonada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & 1 & 1+a & 1+a \\ 0 & 0 & 1-a & 1-a \end{array}\right) = (A''|B'')$$

y $\mathrm{rg}(A'') = \mathrm{rg}(A''|B'') = 3$ e igual al número de incógnitas. El sistema es compatible determinado.

(c.2) Si $b\neq 1$ seguimos escalonando

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & 1 & 1+a & 1+a \\ 0 & b-1 & 1-a & b-a \end{array}\right) \xrightarrow[f_3\to f_3-(b-1)f_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & 1 & 1+a & 1+a \\ 0 & 0 & 2-b-ab & 1-ab \end{array}\right) = (A'''|B''')$$

(c.2.1) Si $2-b-ab\neq 0$, entonces $\mathrm{rg}(A''') = \mathrm{rg}(A'''|B''') = 3$ e igual al número de incógnitas, luego el sistema es compatible determinado.

(c.2.2) Si $2-b-ab=0$ y $1-ab=0$, el sistema sería compatible indeterminado ya que

$$\mathrm{rg}(A''') = 2 \neq \mathrm{rg}(A'''|B''') = 2.$$

Pero este caso no se puede dar pues sustituyendo $ab=1$ en la primera condición, obtendríamos $b=1$, y hemos supuesto $b\neq 1$.

(c.2.3) Si $2-b-ab=0$, entonces $1-ab\neq 0$ y el sistema sería incompatible ya que

$$\mathrm{rg}(A''') = 2 \neq \mathrm{rg}(A'''|B''') = 3.$$

Ejercicio 3: (4 puntos)
Sea V un $\mathbb{K}-$espacio vectorial y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de V. Dados los subespacios vectoriales U y W definidos por:

$$U = L(v_1+v_2,\, v_1-2v_3+v_4), \quad W \equiv \left\{\begin{array}{rcrcrr} x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & =0 \\ -2\,x_1 & + & x_2 & & +x_4 & =0 \end{array}\right.$$

(a) Determine una base y unas ecuaciones implícitas del subespacio $U+W$.
(b) Determine una base y unas ecuaciones implícitas del subespacio $U\cap W$.

Solución:

(a) Llamamos $u_1 = v_1+v_2$ y $u_2 = v_1-2v_3+v_4$ a los dos vectores que, por ser linealmente independientes, forman una base de U y determinamos una base de W. Para ello, resolvemos el sistema lineal homogéneo $AX=0$ que son las ecuaciones implícitas de W obteniendo unas ecuaciones paramétricas y de ahí una base. Tenemos $\mathrm{rg}\, A = 2$, luego $\dim W = 4-2 = 2$. Una base de W es

$$W = L(w_1 = (1,2,3,0), w_2 = (2,1,0,3))$$

Un sistema generador de $U+W$ es $S=\{u_1,u_2,\, w_1,w_2\}$ y $\dim(U+W)=\mathrm{rg}\{S\}$. Estudiamos el rango utilizando la matriz de coordenadas por filas

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & u_1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & u_2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & w_1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & w_2 \end{array}\right) \sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & u_2-u_1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & w_1-u_1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & w_2-2u_1 \end{array}\right) \sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & u_2-u_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & w_1-u_2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & w_2-u_1-u_2 \end{array}\right)$$

Las matrices contienen conjuntos de vectores equivalentes (hemos hecho operaciones elementales de filas). En la tercera matriz, vemos que las tres primeras filas son linealmente independientes, y las filas 3 y 4 son proporcionales, luego el rango va a ser $3=\dim(U+W)$. Una base de $U+W$ está formada por tres primeros vectores de la última matriz

$$\mathcal{B}_{U+W}=\{u_1,\, u_2-u_1,\, w_1-u_2\}$$

y unas ecuaciones de W respecto de la base $\mathcal{B}$ se obtienen al determinar los vectores x con coordenadas (x_1,x_2,x_3,x_4) en $\mathcal{B}$ que son combinación lineal de los vectores de la base $\mathcal{B}_{U+W}$. En términos matriciales:

$$\mathrm{rg}\{u_1,u_2-u_1,w_1-u_2,\, x\}=\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 1 & -1 & 0 & x_2 \\ 0 & -2 & 1 & x_3 \\ 0 & 1 & 1 & x_4 \end{pmatrix}=3$$

De donde se obtiene

$$U+W\equiv\{3x_1-3x_2+x_3-x_4=0\}$$

(b) En primer lugar, la fórmula de dimensiones confirma que

$$\dim(U\cap W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U+W)=2+2-3=1$$

De la última matriz, también podemos obtener una base de este subespacio del siguiente modo: la relación de proporcionalidad entre las filas 3 y 4 es $f_4=2f_3$, que en términos de vectores es

$$2(w_1-u_2)=w_2-u_1-u_2$$

Separamos u's y w's en distintos lados de la ecuación y obtenemos

$$u_1-u_2=w_2-2w_1$$

que es un vector que pertenece a $U\cap W$. Entonces, el vector $u_1-u_2=(0,1,2,-1)_{\mathcal{B}}$ determina una base de $U\cap W$ y unas ecuaciones implícitas se obtienen de la condición:

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)_{\mathcal{B}}\in U\cap W \quad \text{si y sólo si} \quad \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 2 & x_3 \\ -1 & x_4 \end{pmatrix}=1$$

de donde se obtienen unas ecuaciones implícitas

$$U\cap W\equiv\{x_1=0,\, x_3-2x_2=0,\, x_2+x_4=0\}$$

Observación: Otro método para determinar el subespacio $U\cap W$ consiste en determinar unas ecuaciones implícitas de U, y resolver el sistema formado por las cuatro ecuaciones lineales homogéneas: las dos de U y las dos de W. De este modo se obtienen unas ecuaciones parmétricas de $U\cap W$, y por tanto una base. Posteriormente se calculan, igual que antes, las ecuaciones implícitas correspondientes.