Capítulo 5: Formas canónicas de endomorfismos

- **Equivalencia lineal:** Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean f y g dos endomorfismos de V. Se dice que f y g son **linealmente equivalentes** si existe un endomorfismo $h \in GL(V)$, donde $GL(V)$es el grupo general lineal de V, tal que :

$$f = h^{-1} \circ g \circ h$$

Equivalentemente dos endomorfismos son **linealmente equivalentes** si sus matrices en una base dada $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, digamos A y B, son semejantes. Es decir, existe una matriz regular $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que:

$$A = P^{-1}BP$$

- **Invariante lineal:** son las propiedades que comparten dos endomorfismos linealmente equivalentes, es decir, que permanecen **invariantes** por cambios de base.

- **Autovalor y autovector:** Sea V un $\mathbb{K}-$espacio vectorial, $\lambda \in \mathbb{K}$ y $f : V \to V$ un endomorfismo de V. Diremos que λ es un autovalor de f si existe un $v \in V$, con $v \neq 0$, tal que :

$$f(v) = \lambda v$$

Un vector $v' \in V$ se dice que es **autovector**, asociado al autovalor λ, **si y sólo si** $f(v') = \lambda v'$.

- **Subespacio propio:** Sea V un $\mathbb{K}-$espacio vectorial, $f : V \to V$ un endomorfismo de V y $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalor de f. Se denomina **subespacio propio** al **subespacio vectorial**:

$$V_\lambda := \{v \in v : f(v) = \lambda v\}$$

- **Polinomio característico:** Sea V un $\mathbb{K}-$espacio vectorial de dimensión n. Sean f un endomorfismo de V y A la matriz de f respecto de la base $\mathcal{B}$. El **polinomio característico** de f es el polinomio de grado n en la incógnita λ definido por:

$$p(f) := \det(A - \lambda I)$$

- **Endomorfismo diagonalizable, matriz diagonalizable:** Sea f un endomorfismo del $\mathbb{K}-$espacio vectorial V de dimensión n. Se dice que f es un **endomorfismo diagonalizable** si existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que la matriz de f en esa base, $A = \mathfrak{M}_\mathcal{B}(f)$, es una matriz diagonal. Por otro lado, una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se dice **diagonalizable** si es semejante a alguna matriz diagonal D, es decir:

$$A = P^{-1}DP$$

- **Multiplicidad algebraica y geométrica de un autovalor:** Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $f : V \to V$ un endomorfismo de V. Sea $\lambda_i \in \mathbb{K}$ un autovalor, se denomina:
  1. Multiplicidad algebraica a la multiplicidad de $\lambda_i \in \mathbb{K}$ como raíz del polinomio característico $p(f)$. Se denota a_i.
  2. Multiplicidad geométrica a la dimensión del subespacio propio V_{λ_i} se denota g_i. Es decir, $g_i = \dim(V_{\lambda_i}) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda_i I)$.

La multiplicidad geoétrica de un autovalor es siempre menor que la multiplicidad algebraica.

- **Bloque de Jordan. Matriz de Jordan:** Sea $\lambda \in \mathbb{K}$. Un **bloque de Jordan** de orden n,denotado por $B_n(\lambda)$, es una matriz cuadrada de orden n que verifica:
  1. $b_{ii} = \lambda \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.
  2. $b_{i,i-1} = 1 \quad \forall i \in \{2, \ldots, n\}$.
  3. $b_{i,j} = 0$ en otro caso .

Una **matriz de Jordan** es una matriz diagonal por bloques de modo que cada bloque de la diagonal es un **bloque de Jordan**.

- **Forma canónica de Jordan:** Sea $f : V \to V$ un endomorfismo del $\mathbb{K}-$espacio vectorial V. Se dice que f admite una **forma canónica de Jordan** si existe una base $\mathcal{B}$ tal que la matriz de f, $\mathfrak{M}_\mathcal{B}(f)$, es una matriz de Jordan. A esta matriz, que es única salvo permutaciones de bloques, se le denomina **forma canónica de jordan**.

- **Forma de Jordan real:** Sea $f : V \to V$ un endomorfismo de un $\mathbb{R}-$espacio vectorial V. Supongamos que el polinomio característico $p_f(\lambda)$ no tiene todas sus raíces en $\mathbb{R}$ por lo que f no admite una forma canónica de Jordan. En tal caso se considera la **complejificación de** f:

$$\begin{aligned} \hat{f} : \hat{V} &\to \hat{V} \\ v = u + iw &\mapsto \hat{f}(v) = f(u) + if(w) \end{aligned}$$

El endomorfismo $\hat{f}$ sí admite una representación con la **forma canónica de Jordan** en $\hat{V}$. Se tendrá que para cada valor propio λ su conjugado $\overline{\lambda}$ también es autovalor, y tendrán asociados los bloques $B_r(\lambda)$ y $B_r(\overline{\lambda})$ respectivamente. Para cada pareja de bloques consideraremos el bloque real $C_{2r}(\lambda)$ en cuya diagonal se encuentra repetida r veces la matriz $C(\lambda) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ y en la diagonal inferior los 1s de los bloques de jordan se reemplazan por $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La matriz que se forma al reemplazar cada pareja de bloques de autovalores conjugados por $C_{2r}(\lambda)$ se denomina **forma de Jordan real** y se denota $J_{\mathbb{R}}(f)$.

Capítulo 6: Subespacios invariantes

- **Subespacio invariante:** Sea V un $\mathbb{K}-$espacio vectorial, $f : V \to V$ un endomorfismo y $U \subseteq V$ un subespacio vectorial. Se dice que U es un **subespacio invariante** por f o $f-$**invariante** si: $f(U) \subseteq U$. De modo equivalente, $U = L(v_1, \dots, v_k)$ es $f-$invariante si y sólo si $f(v_i) \in U \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$.

- **Base asociada a un Bloque de Jordan:** Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ valor proprio del endomorfismo $f : V \to V$. Sea $v \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})^r - \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})^{r-1}$, entonces la base:

$$\mathcal{B} = \{v, (f - \lambda \mathrm{Id})(v), \dots, (f - \lambda \mathrm{Id})^{r-1}(v)\}$$

  Es la base asociada al bloque de jordan $B_r(\lambda)$.

- **Subespacio r-cíclico:** Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ un valor propio del endomorfismo $f : V \to V$. Sea $v \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})^r - \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})^{r-1}$ con $r \geq 1$. Se denomina **subespacio r-cíclico** generado por v y asociado a $(f - \lambda \mathrm{Id})$ al subespacio:

$$U = L(v, (f - \lambda \mathrm{Id})(v), \dots, (f - \lambda \mathrm{Id})^{r-1}(v))$$

- **Subespacio generalizado. subespacio máximo:** Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ un valor propio del endomorfismo f de V. Se denomina **subespacio propio generalizado** $i-$ésimo, asociado a λ, al subespacio $K^i := \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})^i$. Los subespacios propios satisfacen la siguiente propiedad: $K^i(\lambda) \subsetneq K^{i+1}(\lambda)$. Se denomina **subespacio máximo** al subespacio $M(\lambda) := K^k(\lambda)$, donde k es el menor entero para el que se cumple que : $K^j(\lambda) = K^{j+1}(\lambda)$.

- **Subespacio invariante reducible e irreducible:** Sea f un endomorfismo de V, y sea $U \subseteq V$ un subespacio $f-$invariante. Diremos que U es un **subespacio invariante reducible** si existen dos subespacios no triviales y $f-$invariantes, U_1 y U_2, tales que:

$$U = U_1 \oplus U_2$$

  Si no es posible descomponer U como suma de subespacios invariantes de menor dimensión entonces diremos que U es un **subespacio invariante irreducible**.

- **Polinomio anulador de un endomorfismo:** Sea $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ un polinomio en la incógnita t con coeficientes en $\mathbb{K}$ y sea $f : V \to V$ un endomorfismo sobre el $\mathbb{K}-$espacio vectorial V. Se define el endomorfismo $p(f) : V \to V$como:

$$p(f) = a_n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \ldots + a_1 f + a_o$$

  Diremos que $p(t)$ es un **polinomio anulador** del endomorfismo f si:

$$p(f)(v) = 0 \quad \forall v \in V$$

- **Teorema de Cayley-Hamilton:** Sea $f : V \to V$ un endomorfismo del $\mathbb{K}-$espacio vectorial V cuya matriz dada una base $\mathcal{B}$ es A. El polinomio característico de f, $p(t) := \det(A - tI)$, es un **polinomio anulador** de f.

Capítulo 7: Formas bilineales y cuadráticas

- **Forma bilineal. Matriz de una forma bilineal:** Sea $f : V \times V \to \mathbb{K}$ una aplicación. Diremos que f es una **forma bilineal** si $\forall u, v, w \in V$ y $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ se cumple:
  1. $f(\lambda u + \mu v, w) = \lambda f(u, w) + \mu f(v, w)$
  2. $f(u, \lambda v + \mu w) = \lambda f(u, v) + \mu f(u, w)$

  Es decir, f es lineal en ambas componentes. Supongamos ahora que V es de dimensión finita, y $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V. Sean $x, y \in V$ tales que $x = (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}}$ y $y = (y_1, \dots, y_n)_{\mathcal{B}}$ entonces:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \sum_{j=1}^{n} y_j v_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j f(v_i, v_j) \end{aligned}$$

  Entonces diremos que $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = (f(v_i, v_j))$ es la **matriz de la forma bilineal** en la base $\mathcal{B}$.

- **Matrices congruentes:** Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, diremos que son matrices congruentes si existe una matriz regular P tal que:

$$B = P^t A P$$

- **Rango de una forma bilineal:** Sea $f : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineal; el **rango de** f es el rango de cualquiera de sus representaciones matriciales.

  Forma bilineal simétrica y antisimétrica: Sea f una forma bilineal, diremos que f es:

  1. **Simétrica:** si $f(u,v) = f(v,u)\ \ \forall u,v \in V$.
  2. **Antisimétrica:** si $f(u,v) = -f(v,u)\ \forall u,v \in V$.

- **Forma cuadrática. Forma polar:** Se denomina forma cuadrática, asociada a la forma bilineal f, a la aplicación $\Phi : V \to \mathbb{K}$ definida por:
$$\Phi(v) := f(v,v)$$
  Puede demostrarse que una aplicación es una forma cuadrática si y sólo si verifica:

  1. $\Phi(\lambda v) = \lambda^2 \Phi(v)\ \forall v \in V, \lambda \in \mathbb{K}$.
  2. La aplicación $f_\Phi : V \times V \to \mathbb{K}$ denominada como **forma polar** de Φ y definida por $f_\Phi := \frac{1}{2}(\Phi(u+v) - \Phi(u) - \Phi(v))$, es una **forma bilineal simétrica** .

  La **forma polar** es la única forma bilineal **simétrica** asociada a la forma cuadrática Φ.

- **Matriz de una forma cuadrática:** Sea $\Phi : V \to \mathbb{K}$ una forma cuadrática. La **matriz de la forma cuadrática** Φ en la base $\mathcal{B}$ es la matriz de su forma polar, es decir:
$$\mathfrak{M}_\mathcal{B}(\Phi) := \mathfrak{M}_\mathcal{B}(f_\Phi)$$

- **Expresión analítica de una forma cuadrática:** Sea $x \in V$ y $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ la matriz columna cuyas componentes son las coordenadas del vector x en la base $\mathcal{B}$. Entonces, si $\mathfrak{M}_\mathcal{B}(\Phi)$ es la matriz de la forma cuadrática $\Phi : V \to \mathbb{K}$ diremos que su expresión analítica es la ecuación:
$$\Phi(x) = X^t \mathfrak{M}_\mathcal{B}(\Phi) X$$

- **Vectores conjugados. vector autoconjugado:** Sea f una forma bilineal simétrica, los vectores $u, v \in V$ se dicen **conjugados** respecto a f si $f(u,v) = 0$. Por otro lado, un vector $v \in V$ se dice **autoconjugado** si $f(v,v) = 0$ y $v \neq 0$.

- **Núcleo o radical:** Sea f una forma bilineal simétrica. Se denomina **núcleo o radical** de f al conjunto:
$$\mathrm{Ker}(f) := \{v^* \in V : f(v,v^*) = 0,\ \forall v \in V\}$$

- **Forma bilineal simétrica no degenerada:** Una forma bilineal simétrica es **no degenerada** si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

- **Conjugado de un subconjunto. Propiedades de la conjugación:** Sea $f : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineal simétrica y sea $S \subseteq V$ un subconjunto de V. Se define el **conjugado** de S respecto a f como:
$$S^c := \{v^* \in V : f(v,v^*) = 0,\ \forall v \in S\}$$
  Por otro lado, sean $U, W \subseteq V$ dos subespacios vectoriales de V. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

  1. $U \subseteq W \implies W^c \subseteq U^c$
  2. $U^c + W^c \subseteq (U \cap W)^c$
  3. $(U + W)^c = U^c \cap W^c$
  4. $U \subseteq (U^c)^c$

- **Base de vectores conjugados:** Sea f una forma bilineal simétrica del $\mathbb{K}-$e.v. V de dimensión finita. Diremos que la base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V es una **base de vectores conjugados** si:
$$f(v_i, v_j) = \delta_{ij}\ \forall i,j \in \{1, \dots, n\}$$

- **Forma cuadrática diagonalizada:** Sea $\Phi : V \to \mathbb{K}$ una forma cuadrática y $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Diremos que Φ está **diagonalizada** si su matriz en la base $\mathcal{B}$ es diagonal, es decir:
$$\mathfrak{M}_\mathcal{B}(\Phi) = D = \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$
  Si este es el caso diremos que la expresión analítica de Φ está escrita como una **suma de cuadrados** dado que se obtiene:
$$\Phi(x) = X^t D X = d_1 x_1^2 + \ldots + d_n x_n^2$$

- **Clasificación de formas bilineales simétricas:** sea $f : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica sobre un espacio vectorial real V. Diremos que f es:

  1. **Definida positiva:** si $f(v,v) > 0\ \forall v \in V, v \neq 0$.
  2. **Semidefinida positiva:** si $f(v,v) \geq 0\ \forall v \in V$ y existe algún vector autoconjugado.
  3. **Definida negativa:** si $f(v,v) < 0\ \forall v \in V, v \neq 0$.

4. **Semidefinida negativa:** si $f(v,v) \leq 0\ \forall v \in V$ y existe algún vector autoconjugado.
5. **Indefinida:** si f no cumple ninguna de las condiciones anteriores.

- **Ley de Inercia. Signatura:** Sea $f : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica y real. Si D es una matriz diagonal de f el número de elementos positivos p y negativos q es el mismo en cualquier representación diagonal de f. Se define la **signatura** de f, o de Φ su forma cuadrática asociada, como el par ordenado $\text{sg}(f) := (p, q)$ que es invariante por cambios de base de vectores conjugados.

- **Criterio de Sylvester:** Sea $f : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica real sobre un espacio vectorial de dimensión n y sea $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$ la matriz de f en cierta base $\mathcal{B}$. Entonces:
  1. f **es definida positiva** si y sólo si $\Delta_k = \det(A_k) > 0,\ \forall k \in \{1, \ldots, n\}$.
  2. f **es definida negativa** si y sólo si $(-1)^k \Delta_k = (-1)^k \det(A_k) > 0,\ \forall k \in \{1, \ldots, n\}$. En otras palabras, el primer menor es negativo y los signos de los menores subsiguientes se van alternando.

Capítulo 8: Espacio vectorial euclídeo

- **Producto escalar:** Un **producto escalar** sobre un espacio vectorial real V es una forma bilineal $<,>: V \times V \to \mathbb{R}$ que es simétrica y definida positiva.

- **Norma:** Una **norma** es una aplicación $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ definida en términos de un producto escalar del siguiente modo: $\|v\| := \sqrt{<v, v>}$. Es decir, es la raíz cuadrada de la forma cuadrática asociada a un producto escalar. Un vector $v \in V$ se dice **unitario** si $\|v\| = 1$.

- **Ángulo:** Sea $(V, <,>)$ un espacio vectorial euclídeo. Se define como **ángulo** entre los vectores $u, v \in V$ al número real:

$$\angle(u, v) := \arccos\left(\frac{<u, v>}{\|u\|\|v\|}\right)$$

  Con arccos la aplicación inversa del coseno $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$.

- **Matriz de Gram:** Sea $(V, <,>)$ un espacio euclídeo y $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. La **matriz de Gram o matriz métrica**, denotada $G_{\mathcal{B}}$, es la matriz del producto escalar $<,>: V \times V \to \mathbb{R}$ en la base $\mathcal{B}$, es decir:

$$(G_{\mathcal{B}})_{ij} = <v_i, v_j>$$

- **Expresión analítica de un producto escalar:** Dados dos vectores $x, y \in V$ y una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V, de modo que $x = (x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}}$ y $y = (y_1, \ldots, y_n)_{\mathcal{B}}$; la **expresión analítica o ecuación de un producto escalar** en la base $\mathcal{B}$ está dada por:

$$<x, y> = (x_1, \ldots, x_n) G_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^t G_{\mathcal{B}} Y$$

- **Propiedades de la norma:** Sea $(V, <,>)$ un espacio euclídeo y $u, v \in V$. Entonces se verifican:
  1. $|<u, v>| \leq \|u\|\|v\|$ (**Desigualdad de Cauchy-Schwartz**).
  2. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (**Desigualdad Triangular**).
  3. $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \iff <u, v> = 0$ (**Teo. de Pitágoras**).
  4. $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$ (**Ley del paralelogramo**).

- **Vectores ortogonales. Conjuntos ortogonales:** Dos vectores u, v del espacio euclídeo $(V, <,>)$, ambos no nulos, se dicen **ortogonales** si $<u, v> = 0$. Un conjunto de vectores $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ se dice **ortogonal** si los vectores son ortogonales dos a dos respecto al producto escalar.

- **Bases ortogonales y ortonormales:** Se dice que un conjunto $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una **base ortogonal** si es a la vez una base de V y un conjunto ortogonal. Si además $\|v_i\| = 1\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ entonces se dice que la base es **ortonormal**.

- **Coeficientes de Fourier:** Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortogonal de V. Entonces las coordenadas del vector $v \in V$ respecto a la base $\mathcal{B}$ están dadas por:

$$v = \left(\frac{<v, v_1>}{\|v_1\|}, \ldots, \frac{<v, v_n>}{\|v_n\|}\right)_{\mathcal{B}}$$

  Dichas coordenadas se denominan **coeficientes de Fourier** de v respecto de $\mathcal{B}$.

- **Método de ortogonalización de Gram-Schmidt:** Sea $(V,<,>)$ un espacio vectorial euclídeo y sea $\mathcal{B} = \{v_1,\dots,v_n\}$ una base de V. El conjunto $\{e_1,\dots,e_n\}$ de los vectores definidos como:

$$\begin{aligned} e_1 &= v_1 \\ e_2 &= v_2 - \frac{< v_2, e_1 >}{\|e_1\|^2} e_1 \\ e_i &= v_i - \sum_{k=1}^{i} \frac{< v_i, e_k >}{\|e_k\|^2} e_k \end{aligned}$$

Es una base ortogonal de V.

- **Subespacio ortogonal y proyección ortogonal:** Sea un subconjunto $S \subset V$, llamamos **ortogonal de** S al subconjunto definido como:

$$S^{\perp} := \{v \in V :< v, s >= 0 \ \forall s \in S\}$$

Es decir, es el conjugado de S respecto al producto escalar. Se cumple que si U es un subespacio entonces:

$$V = U \oplus U^{\perp}$$

Esta propiedad permite definir la **proyección ortogonal** sobre U. En concreto, si $v \in V$ la proyección ortogonal sobre U es el endomorfismo, denotado $\text{proy}_U(v)$, tal que si v puede descomponerse como $v = u + w$ con $u \in U$ y $w \in U^{\perp}$ entonces: $\text{proy}_U(v) = u$.

- **Producto vectorial. Producto mixto:** Sea $(V,<,>)$ un espacio vectorial euclídeo isomorfo a $\mathbb{R}^3$. Sean $u, v \in V$, linealmente independientes, entonces se define el **producto vectorial**, denotado $u \wedge v$, como el vector que cumple:
  1) $u \wedge v$ es ortogonal a u y a v.
  2) $\|u \wedge v\| = \|u\|\|v\| \sin(u, v)$.
  3) $\{u, v, u \wedge v\}$ está positivamente orientado.

  Si u y v son linealmente dependientes entonces el producto vectorial es el vector cero. El producto **mixto** entre $u, v, w \in V$ se define como:

$$\begin{aligned} [u, v, w] &:= < u \wedge v, w > \\ &= \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- **Endomorfismo simétrico:** Sea $(V,<,>)$ un espacio euclídeo. Diremos que $f : V \to V$ es un **endomorfismo simétrico** si:

$$< u, f(v) >=< f(u), v > \quad \forall u, v \in V$$

- **Teorema espectral:** Sea $(V,<,>)$ un espacio euclídeo de dimensión finita y $f : V \to V$ un **endomorfismo simétrico**. Entonces existe una base ortonormal de V formada por valores propios de f. En términos matriciales, toda matriz simétrica real A de orden n es diagonalizable.

Capítulo 9: Isometrías vectoriales

- **Isometría vectorial o transformación ortogonal:** Sean $(V,<,>)$ y $(V',<,>')$ dos espacios vectoriales euclídeos y sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal. Diremos que f es una **isometría vectorial o transformación ortogonal** si:

$$< u, v >=< f(u), f(v) >' \ \forall u, v \in V$$

- **Grupo ortogonal:** Sea $(V,<,>)$ un espacio vectorial euclídeo. Se denomina **Grupo ortogonal** de V, denotado $\mathcal{O}(V)$, a las isometrías vectoriales de V en sí mismo. El **grupo ortogonal** es un subgrupo del **grupo general lineal** con respecto a la operación composición de funciones.

- **Rotación y reflexión:** Sea $(V,<,>)$ un espacio vectorial euclídeo y $f \in \mathcal{O}(V)$ una isometría. Si $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$ es la matriz de f en la base $\mathcal{B}$, diremos que f es una **reflexión** si $\det(A) = -1$ y que es una **rotación** si $\det(A) = +1$.

- **Giro:** Es una isometría de un espacio euclídeo tridimensional que verifica que $\dim V_1 = 1$, es decir, tiene una recta de vectores fijos.

- **Simetría ortogonal:** Sea $(V,<,>)$ un espacio vectorial euclídeo y $\sigma : V \to V$ una simetría de base B y dirección D. Si los subespacios B y D son tales que $V = B \oplus^{\perp} D$ entonces decimos que σ es una **simetría ortogonal**. Una simetría σ es una isometría si y sólo si σ es una simetría ortogonal.

- **Simetría ortogonal hiperplano:** Sea H un hiperplano del e.v. V de dimensión n y sea $\mathcal{B}_H = v_1,\dots,v_{n-1}$ una base ortonormal de H. Una **simetría ortogonal hiperplano** es una simetría ortogonal de base un hiperplano H. Si se completa la base $\mathcal{B}_H$ con v_n para formar una base ortonormal de V, entonces la matriz de la simetría ortogonal hiperplano es:

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots^{n-1} & & \vdots \\ \vdots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- **Eje y ángulo de giro, base de simetría:**

- **Teorema de Cartan-Dieudonné:** Sea $(V, <, >)$ un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita n. Toda isometría $f \in \mathcal{O}(V)$ se puede descomponer como:

$$f = \sigma_1 \circ \dots \sigma_k,\ k \leq n$$

Donde σ_i son simetría ortogonales hiperplano.