Álgebra lineal I, Grado en Matemáticas

Febrero 2020, Segunda semana

No se permite el uso de material impreso (libros, apuntes) ni ningún tipo de calculadora.

Todas las soluciones tendrán que darse suficientemente razonadas.

Defina los siguientes conceptos: (2 puntos)

Utilice sólo una cara para estas definiciones

(a) Matriz.

(b) Coordenadas.

(c) Espacio vectorial cociente.

(d) Aplicación lineal.

Ejercicio 1: (2 puntos)

Demuestre que si C es una matriz de orden n y rango n, entonces $\mathrm{rg}(AC) = \mathrm{rg}(A)$ para toda matriz A de orden $m \times n$.

Ejercicio 2: (2 puntos) Calcule la inversa, cuando exista, de la matriz de orden n

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$$

Las entradas de A son $a_{ij} = 0$ si $i + j \neq n + 1$ y $a_{i,n-i+1} = \lambda_i$ para $i = 1, \ldots, n$.

Ejercicio 3: (1,5 puntos)

Sean u, v y w vectores linealmente independientes de un $\mathbb{K}-$espacio vectorial V de dimensión mayor que 3, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Estudie para qué valores de $a \in \mathbb{K}$ los siguientes vectores son linealmente independientes.

$$au + 3v + w, \quad u - v - w, \quad 2u - av - w$$

Ejercicio 4: (2,5 puntos)

Sea $f : \mathbb{K}_3[x] \to \mathbb{K}_3[x]$ la aplicación lineal definida por $f(p(x)) = p(x) - xp'(x)$. Determine

(a) la matriz de f en la base $\{1,\, 1 + x,\, 1 + x^2,\, 1 + x^3\}$,

(b) si es inyectiva, sobreyectiva y/o biyectiva;

(c) si el subespacio generado por el polinomio $p(x) = x + x^2 + x^3$ está contenido en el subespacio imagen de f.

Soluciones

Ejercicio 2: Calcule la inversa, cuando exista, de la matriz de orden n

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$$

Las entradas de A son $a_{ij} = 0$ si $i + j \neq n + 1$ y $a_{i,n-i+1} = \lambda_i$ para $i = 1, \ldots, n$.

Solución: Desarrollando el determinante por filas o columnas se comprueba que

$$\det(A) = \pm(\lambda_1 \cdots \lambda_n) \text{ dependiendo de } n$$

luego A invertible si y sólo si $\lambda_i \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Suponiendo A invertible vamos a calcular su inversa utilizando el método basado en operaciones elementales: partiendo de la matriz $(A|I_4)$ de orden $n \times 2n$ realizamos operaciones elementales de filas hasta convertirla en una matriz de la forma $(I_4|B)$, y la matriz B obtenida es la inversa de A (pág. 50 del libro).

$$(A|I_4) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \lambda_{n-1} & 0 & \cdots & & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{f_1 \leftrightarrow f_n \\ f_2 \leftrightarrow f_{n-1} \\ \cdots}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \lambda_{n-1} & \ddots & \vdots & \vdots & & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

Después se transforman en 1 todos los λ_i haciendo $f_i \to \frac{1}{\lambda_{n-i+1}} f_i$

$$\xrightarrow[\substack{f_1 \to \frac{1}{\lambda_n} f_1 \\ f_2 \to \frac{1}{\lambda_{n-1}} f_2 \\ \cdots \; f_n \to \frac{1}{\lambda_1} f_n}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\lambda_n} \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots & & \frac{1}{\lambda_{n-1}} & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) (I_n|A^{-1})$$

También podemos calcular esta inversa utilizando la fórmula $A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)^t}{\det(A)}$, aunque en este caso resulta más complejo.

Ejercicio 3: Sean u, v y w vectores linealmente independientes de un $\mathbb{K}-$espacio vectorial V de dimensión mayor que 3, con $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Estudie para qué valores de $a \in \mathbb{K}$ los siguientes vectores son linealmente independientes.

$$au+3v+w, \quad u-v-w, \quad 2u-av-w$$

Solución: Los vectores son linealmente independientes si la combinación lineal

$$\lambda_1(au+3v+w)+\lambda_2(u-v-w)+\lambda_3(2u-av-w)=0$$

implica $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. Agrupando términos en la igualdad anterior se obtiene:

$$(\lambda_1 a+\lambda_2+2\lambda_3)\,u+(3\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3 a)\,v+(\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)\,w=0$$

Como u, v y w son linealmente independientes, entonces los coeficientes de la combinación lineal son iguales a 0:

$$\lambda_1 a+\lambda_2+2\lambda_3=0,\ 3\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3 a=0,\ \lambda_1-\lambda_2-\lambda_3=0$$

Tenemos un sistema lineal homogéneo de incógnitas λ_1, λ_2 y λ_3 con matriz de coeficientes:

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Este sistema tiene como única solución $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ si y sólo si $\mathrm{rg}(A)=3$ si y sólo si $\det(A)\neq 0$.

$$\det(A)=-1-a^2=\begin{cases} \neq 0 & \text{para todo } a\in\mathbb{R} \\ =0 & \text{para } a=\pm i\in\mathbb{C} \end{cases}$$

Luego los vectores dados son linealmente independientes para todo a si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ y para $a\neq\pm i$ si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Ejercicio 4: Sea $f:\mathbb{K}_3[x]\to\mathbb{K}_3[x]$ la aplicación lineal definida por $f(p(x))=p(x)-xp'(x)$. Determine:
(a) la matriz de f en la base $\{1,\,1+x,\,1+x^2,\,1+x^3\}$,
(b) si es inyectiva, sobreyectiva y/o biyectiva,
(c) si el subespacio generado por el polinomio $p(x)=x+x^2+x^3$ está contenido en el subespacio imagen de f.

Solución:

(a) Las columnas de la matriz de f respecto de la base $\mathcal{B}=\{1,\,1+x,\,1+x^2,\,1+x^3\}$ están formadas por las coordenadas respecto de $\mathcal{B}$ de los vectores $f(1)$, $f(x)$, $f(x^2)$ y $f(x^3)$. Las calculamos:

$$\begin{array}{rlll} f(1)= & 1-x(1)' & =1 & =(1,0,0,0)_{\mathcal{B}} \\ f(1+x)= & (1+x)-x(1+x)' & =1 & =(1,0,0,0)_{\mathcal{B}} \\ f(1+x^2)= & (1+x^2)-x(1+x^2)' & =1-x^2 & =(2,0,-1,0)_{\mathcal{B}} \\ f(1+x^3)= & (1+x^3)-x(1+x^3)' & =1-2x^3 & =(3,0,0,-2)_{\mathcal{B}} \end{array}$$

luego la matriz pedida es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(b) Por ser f un endomorfismo se cumple que es biyectiva si y sólo si es inyectiva, si y sólo si es sobreyectiva. No es inyectiva pues hemos obtenido dos polinomios distintos 1 y $1+x$ con la misma imagen $f(1)=f(1+x)=1$. Por tanto, tampoco es sobreyectiva ni biyectiva.

(c) El subespacio $\mathrm{Im}(f)$ está generado por las imágenes de los vectores de una base de $\mathbb{K}_3[x]$

$$\mathrm{Im}(f)=L\left(f(1),f(1+x),f(1+x^2),f(1+x^3)\right)=L\left(1,\,1,\,1-x^2,\,1-2x^3\right)$$

Una base del subespacio $\mathrm{Im}(f)$ es

$$\mathcal{B}'=\{1,1-x^2,\,1-2x^3\}$$

Llamemos U al subespacio generado por el polinomio $p(x)=x+x^2+x^3$, es decir $U=L(x+x^2+x^3)$. Los polinomios de U son la forma

$$ax+ax^2+ax^3 \text{ con } a\in\mathbb{K},$$

que no pertenecen a $\mathrm{Im}(f)$ pues no se podría obtener ningún polinomio con el coeficiente de grado 1 distinto de 0, como combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}'$. Luego, U no está contenido en $\mathrm{Im}(f)$. En particular, $U\cap\mathrm{Im}(f)=\{0\}$