Soluciones a los exámenes de septiembre de 2020 de Geometría Básica

Ejercicio 1. Opción A.

Sea T un triángulo acutángulo cuyos vértices son A, B, C. Sea H el ortocentro de T y s una semejanza del plano. Llamamos s(A) = A', s(B) = B' y s(C) = C' y T' al triángulo cuyos vértices son A', B', C'. Sea H' el ortocentro de T'.

a. ¿Es cierta la igualdad H'=s(H)?

b. Sea P_A el pie de la altura de T que pasa por A y P_A' el pie de la altura de T' que pasa por A'. Si AP_A = A'P_A' ¿qué se puede afirmar de la razón de s?

c. Sea G el baricentro de T. Si s(G)=H', ¿qué se puede afirmar del triángulo T?

(6 puntos)

Ejercicio 1. Opción B.

Sea T un triángulo acutángulo cuyos vértices son A, B, C. Sea O el circuncentro de T y s una semejanza del plano. Llamamos s(A) = A', s(B) = B' y s(C) = C' y T' al triángulo cuyos vértices son A', B', C'. Sea O' el ortocentro de T'.

a. ¿Es cierta la igualdad O'=s(O)?

b. Si AO = A'O' ¿qué se puede afirmar de la la razón de s?

c. Sea G el baricentro de T. Si s(G)=O', ¿qué se puede afirmar del triángulo T?

(6 puntos)

Ejercicio 2.

Sea C una circunferencia, con centro O cuyo radio mide R, y P un punto exterior a C. Sean r_1 y r_2 las rectas tangentes a C que pasan por el punto P. El punto de corte de r_1 con C es R_1 y el de r_2 con C es R_2. Llamamos d = OP.

a. ¿Cuánto vale d(R_1,R_2), en función de d y R?

b. Sea i_C la inversión con respecto a C. ¿Cuánto vale el radio de una circunferencia C’ que contiene a i_C (r_1)?

(4 puntos)

Soluciones.

Ejercicio 1. Opción A

a. Las semejanzas llevan rectas a rectas. Como conservan los ángulos llevan alturas de T a alturas de T’ y por ser biyecciones el punto de corte de dos rectas se transforma por s en el punto de corte de las rectas transformadas. Con lo cual el punto de corte de alturas de T se transforma por s en el punto de corte de alturas de T’, luego H'=s(H).

b. Por conservar las semejanzas la ortogonalidad y los puntos de corte s(P_A) = P_A’. Como s(A)=A’ y si k es la razón de s, d(A’,P_A’) = kd(s(A),s(P_A’)) = kd(A,P_A), luego k=1.

c. Por mantener s las relaciones de las distancias, envía puntos medios a puntos medios y por tanto s(G) = G’. Como es biyección y s(G)=G’=H’=s(H), entonces G=H. Como G=H, la mediana que pasa por A tiene dos puntos en común con la altura que pasa por A, con lo que coinciden. Y como la mediana y la altura coinciden, entonces la mediana es perpendicular al lado y es también la mediatriz. Al pertenecer A a la mediatriz, el triángulo es isósceles con los dos lados que parten de A iguales. Repitiendo el mismo argumento con los vértices B (o el C) tenemos que el triángulo T es equilátero.

Opción B

a. Las semejanzas llevan rectas a rectas. Como conservan igualdades entre medidas de segmentos, la mediatriz de un segmento se transforma por s en la mediatriz del segmento transformado. Por ser biyecciones el punto de corte de dos rectas se transforma por s en el punto de corte de las rectas transformadas. Con lo cual el punto de corte de las mediatrices de T se transforma por s en el punto de corte de las mediatrices de T’, con lo cual s(O) es el circuncentro de T’. Al imponer que s(O) sea también el ortocentro esto implica que T’ debería ser equilátero, por tanto la igualdad no se verifica a no ser que T’ (y por tanto también T) sean equiláteros.
   La notación que se ha empleado para el ortocentro de T’, ha originado que algunos estudiantes leyeran que O’ es el circuncentro de T’ y han resuelto el ejercicio con esa interpretación, donde entonces si se verifica s(O)=O’.
b. Sea H el ortocentro de T. Como s^(-1)
   Si k es la razón de s, d(A,O) = kd(s(A),s(O)).
   Aplicando la hipótesis tenemos que:
   d(A’,O’)=d(A,O)=kd(s(A),s(O)) = d(A’,circuncentro(T’))
   Por tanto k = d(A’,ortocentro(T’)) / d(A’,circuncentro(T’))
   O bien usando la semejanza s^(-1):
   k = d(A, ortocentro(T)) / d(A,circuncentro(T))
   En el caso en que se hubiera interpretado O’ como circuncentro de T’ entonces k=1.
c. Por mantener s las relaciones de las distancias, envía puntos medios a puntos medios y por tanto s(G)=G’. Como es biyección y como s(G)=G’=O', entonces G=ortocentro de T, Y se finaliza como en la opción A.

En el caso de tomar O’ como el circuncentro se tiene que G=O. Entonces la mediana que pasa por A tiene dos puntos en común con la mediatriz de [B,C], con lo que coinciden. Y como la mediana y la mediatriz coinciden. Al pertenecer A a la mediatriz, el triángulo T es isósceles con los dos lados que parten de A iguales. Repitiendo el mismo argumento con el vértice B (o el C) tenemos que el triángulo T es equilátero.

Ejercicio 2.

a. Este ejercicio se ha resuelto de muchos modos diferentes y he seleccionado sólo algunos de ellos.
   En primer lugar siempre se recomienda hacer una figura pero luego intentar justificar cada una de las propiedades que uno observa. Hay muchos estudiantes que al hacer la figura les da la impresión de que se verifican propiedades que corresponden al caso particular dibujado pero que no son ciertas en general. Es decir, las figuras ayudan, pero hay que entender que cosas son ciertas siempre (por deducirse de teoremas o propiedades conocidas) y cuales son accidentales de una situación particular.

   Veamos ahora la resolución:

   El triángulo {O,R_1,P} es rectángulo, al ser r_1 tangente a C.
   Por el teorema de Pitágoras tenemos que PR_1 = raíz(d^2 - R^2). El mismo argumento se aplica a PR_2, por tanto PR_1 = PR2.

   Otro método para obtener que PR_1 = raíz(d^2 - R^2) es usar potencias respecto a C. Sea O’ el otro punto distinto de O donde r_PO corta a C, entonces
   PR_1^2 =PR_1 PR_1 = PO PO’ = (d – R) (d + R) = d^2 – R^2.

   Las rectas r_OP y r_R1R2 son perpendiculares y llamaremos M al punto de corte.
   Que r_OP y r_R1R2 son perpendiculares se puede justificar de muchas formas:
   Hemos visto que PR_1 = PR2 y como OR_1=OR_2, los puntos O y P pertenecen a la mediatriz de [R_1,R_2] y por tanto r_OP es tal mediatriz y en particular r_OP y r_R1R2 son perpendiculares.
   Otro método que se ha utilizado para lo mismo: los triángulos {O, R_1, P} y {O, R_2, P}, son ambos rectángulos, comparten el lado OP y como OR_1 = OR2 = R, son congruentes y en particular PR_1=PR_2. Como OR_1=OR_2 y PR_1=PR_2, los puntos O y P pertenecen a la mediatriz de [R_1,R_2] y por tanto r_OP es tal mediatriz y en particular r_OP y r_R1R2 son perpendiculares.
   Otro método más: La reflexión sigma_r_OP, cuyo eje es la recta r_OP, deja invariante la circunferencia C y por ser biyección pasa cada recta tangente a C a la otra recta tangente (que hay solo otra recta tangente se dice en el enunciado al utilizar el artículo deteminado) y el punto de corte de la tangente al punto de corte de la tangente, por lo que R_2=sigma_r_OP(R_1) con lo que r_OP y r_R1R2 son perpendiculares.

   Para acabar podemos utilizar las razones trigonométricas de los triángulos rectángulos {O, R_1, P} y {R_1,M, P}:
   El seno del ángulo a, con vértice en P del triángulo {O, R_1, P} es R / OP = R / d.
   Calculado el seno del mismo ángulo a en el triángulo {R_1,M, P} se obtiene sen a =

R_1M / PR_1, de donde R / d = sen a = R_1M / PR_1 = R_1M / raíz(d^2-R^2). Luego R_1M = R raíz(d^2-R^2)/ d. Con lo cual y como {P,R_1,R_2} es isósceles: R_1R_2 = 2 R raíz(d^2-R^2)/ d.

También se hace de forma equivalente usando que {O, R_1, P} y {R_1,M, P} son semejantes y el teorema de Tales.

O bien que {R_1,M, O} y {O,R_1,P} son semejantes. Entonces el seno del ángulo con vértice en R_1 del primer triángulo es congruente con el ángulo con vértice en P del segundo.

El seno del primer ángulo es R/d y el coseno del segundo OM/R, como son congruentes se verifica: (R/d)^2 + (OM/R)^2 = 1, de donde despejando OM se obtiene el resultado final. Con este método no hace falta la obtención de la fórmula PR_1 = raíz(d^2 - R^2).

Otro método más: Calcular el área de {O, R_1, P} con dos bases y alturas diferentes:
área de {O, R_1, P} = (R_1M . d) / 2 = (PR_1 . R) / 2 y se opera.

Y otro método: Utilizar el teorema del cateto sobre el triángulo {O,R_1,P} y el cateto OR_1:

R^2 = OR_1^2 = OM . d y por Pitágoras R_1M^2 = R^2 – OM^2, sustituyendo y operando se llega a la fórmula.

b. Como r_1 es una recta, por el Teorema 8.18, la circunferencia C’ que contiene a j_C (r_1) pasa por O y corta a C en el punto R_1 (pues R_1 al estar sobre C queda fijo al aplicar i_C).

   Además, por el mismo teorema, el centro O’ de C’ está en la recta s perpendicular a r_1 que pasa por O. Por ser r_1 tangente, la recta OR_1 es perpendicular a r_1 y pasa por O y como s es también perpendicular a r_1 y también pasa por O se tiene que s=r_OR_1 y que O,O’,R_1 están alineados.

   Como O’O = O’R_1 y OR_1 = R, se tiene que O’ es el punto medio de [R_1,O] y entonces el radio de C’ es R/2.