GEOMETRÍA BÁSICA Septiembre 2019

Todas las respuestas deben estar justificadas razonadamente.

Duración 2 horas. **No se permite ningún tipo de material escrito.**
Se permite calculadora no programable

Ejercicio 1. (3 puntos)

Recuérdese que un rombo es un paralelogramo con los cuatro lados congruentes.

a) Probar que un paralelogramo es un rombo si y solo si sus diagonales se cortan formando un ángulo recto.

b) ¿Es cierta la siguiente afirmación?: Si un cuadrilátero tiene las diagonales perpendiculares entonces es un rombo.

Ejercicio 2. (3 puntos)

Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia y P un punto del exterior de $\mathcal{C}$. Sean a y b dos rectas que se cortan en P y que son secantes a la circunferencia $\mathcal{C}$. Sean A_1, A_2 los puntos de corte de a con $\mathcal{C}$ y B_1, B_2 los puntos de corte de b con $\mathcal{C}$. Probar que se verifica:

$$PA_1 \cdot PA_2 = PB_1 \cdot PB_2.$$

Ejercicio 3. (4 puntos)

a) Dado un octaedro regular $\mathcal{O}$, sea ρ una simetría de $\mathcal{O}$ que es rotación de ángulo 120^o y σ_π una simetría de $\mathcal{O}$ que es reflexión con base un plano π que contiene al eje de ρ. Determine la mayor información posible sobre el tipo de isometría que es la composición $\rho \circ \sigma_\pi$.

b) Describa una rotación ρ' del espacio y una reflexión σ' con base un plano, de modo que su composición sea una simetría de $\mathcal{O}$, pero que ni ρ', ni σ' sean simetrías de $\mathcal{O}$.

Soluciones

Ejercicio 1.
Ejercicio 5.8. Página 101 del Texto Base.

Ejercicio 2. (3 puntos)
Teorema 8.16. Página 149 del Texto Base.

Ejercicio 3.
a) La rotación ρ se puede expresar como:

$$\rho = \sigma_{\pi'} \circ \sigma_{\pi}$$

donde π' es un plano de simetría de $\mathcal{O}$ que, como π, contiene al eje de ρ. Entonces:

$$\rho \circ \sigma_{\pi} = (\sigma_{\pi'} \circ \sigma_{\pi}) \circ \sigma_{\pi} = \sigma_{\pi'}$$

Luego $\rho \circ \sigma_{\pi}$ es una **reflexión** que es simetría de $\mathcal{O}$ y cuyo plano base π' contiene al eje de ρ. El plano π' es perpendicular a la misma cara C de $\mathcal{O}$ que está contenida en un plano que es perpendicular el eje de ρ y π' es un plano de simetría distinto de π, de los tres perpendiculares a C. Si los vértices de C son V_1, V_2 y V_3, y π pasa por V_1, entonces π pasa por V_2 o V_3.

b) Una posibilidad es considerar una reflexión-rotación simetría de $\mathcal{O}$ que es composición de una rotación de ángulo $\pi/3$, cuyo eje es perpendicular a una cara y pasa por el centro de dicha cara, con una reflexión sobre un plano perpendicular (ni la rotación, ni la reflexión son simetrías de $\mathcal{O}$).

Hay otras muchas soluciones, por ejemplo, tomamos un plano α de simetría de $\mathcal{O}$ que pasa por cuatro vértices. Sea β un plano perpendicular a α que corta a β en una recta r que contiene una arista de $\mathcal{O}$. Sea σ_{β} la reflexión sobre β y ρ_r la media vuelta de eje r. La composición $\rho_r \circ \sigma_{\beta}$ es una simetría de $\mathcal{O}$ (es la reflexión en el plano α), mientras que σ_{β} y ρ_r no lo son.