Geometría Básica

Capítulo I: Espacios Métricos

Jackie Harjani y Belén López.

UNED, C.A. Las Palmas

Febrero 2011

Ejercicio 1.5.

Sea $d_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la aplicación definida por $d_{\mathbb{R}}(x, y) = |x - y|$. El objetivo del ejercicio es encontrar todas las isometrías de $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$

A. Demostrar que $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ es un espacio métrico.

B. Demostrar que para $\sigma \in \{-1, 1\}$ y $\tau \in \mathbb{R}$, la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sigma x + \tau$ es una isometría de $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$.

C. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una isometría de $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ que fija a y b $(a \neq b)$. Demostrar que $g = id_{\mathbb{R}}$.

D. Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una isometría de $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$. Demostrar que existen $\sigma \in \{-1, 1\}$ y $\tau \in \mathbb{R}$ tales que:

$$h(x) = \sigma x + \tau, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}$$

Solución:

A. Demostrar que $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ es un espacio métrico.

Solución:

A. Demostrar que $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ es un espacio métrico.

a) Es evidente:

$$d_{\mathbb{R}}(x, y) = |x - y| > 0, \ \text{si } x \neq y$$

y

$$d_{\mathbb{R}}(x, x) = |x - x| = 0$$

Solución:

$A.$ Demostrar que $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ es un espacio métrico.

$a)$ Es evidente:

$d_{\mathbb{R}}(x, y) = |x - y| > 0,$ si $x \neq y$

y

$d_{\mathbb{R}}(x, x) = |x - x| = 0$

$b)$ Conmutatividad:

$$d_{\mathbb{R}}(x, y) = |x - y| = |y - x| = d_{\mathbb{R}}(y, x).$$

Solución:

$A.$ Demostrar que $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ es un espacio métrico.

$a)$ Es evidente:

$$d_{\mathbb{R}}(x,y) = |x-y| > 0, \text{ si } x \neq y$$

y

$$d_{\mathbb{R}}(x,x) = |x-x| = 0$$

$b)$ Conmutatividad:

$$d_{\mathbb{R}}(x,y) = |x-y| = |y-x| = d_{\mathbb{R}}(y,x).$$

$c)$ Desigualdad Triangular:

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R}}(x,y) = |x-y| &= |x-z+z-y| \\ &\leq |x-z| + |z-y| = d_{\mathbb{R}}(x,z) + d_{\mathbb{R}}(z,y). \end{aligned}$$

Solución:

$A.$ Demostrar que $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ es un espacio métrico.

$a)$ Es evidente:

$d_{\mathbb{R}}(x,y) = |x-y| > 0,$ si $x \neq y$
y
$d_{\mathbb{R}}(x,x) = |x-x| = 0$

$b)$ Conmutatividad:

$d_{\mathbb{R}}(x,y) = |x-y| = |y-x| = d_{\mathbb{R}}(y,x).$

$c)$ Desigualdad Triangular:

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R}}(x,y) = |x-y| &= |x-z+z-y| \\ &\leq |x-z| + |z-y| = d_{\mathbb{R}}(x,z) + d_{\mathbb{R}}(z,y). \end{aligned}$$

Luego$(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ es un espacio métrico.

$B.$ Demostrar que para $\sigma \in \{-1, 1\}$ y $\tau \in \mathbb{R}$, la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sigma x + \tau$ es una isometría de $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$.

B. Demostrar que para $\sigma \in \{-1, 1\}$ y $\tau \in \mathbb{R}$, la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sigma x + \tau$ es una isometría de $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$.

a) f conserva las distancias

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R}}(f(x), f(y)) &= |f(x) - f(y)| = |\sigma x + \tau - \sigma y - \tau| \\ &= |\sigma x - \sigma y| = |\sigma||x - y| = |x - y| \\ &= d_{\mathbb{R}}(x, y). \end{aligned}$$

B. Demostrar que para $\sigma \in \{-1, 1\}$ y $\tau \in \mathbb{R}$, la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sigma x + \tau$ es una isometría de $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$.

a) f conserva las distancias

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R}}(f(x), f(y)) &= |f(x) - f(y)| = |\sigma x + \tau - \sigma y - \tau| \\ &= |\sigma x - \sigma y| = |\sigma||x - y| = |x - y| \\ &= d_{\mathbb{R}}(x, y). \end{aligned}$$

b) f es biyectiva

$B.$ Demostrar que para $\sigma \in \{-1, 1\}$ y $\tau \in \mathbb{R}$, la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sigma x + \tau$ es una isometría de $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$.

$a)$ f conserva las distancias

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R}}(f(x), f(y)) &= |f(x) - f(y)| = |\sigma x + \tau - \sigma y - \tau| \\ &= |\sigma x - \sigma y| = |\sigma||x - y| = |x - y| \\ &= d_{\mathbb{R}}(x, y). \end{aligned}$$

$b)$ f es biyectiva

$i)$ Inyectividad:
Toda aplicación que conserva las distancias es inyectiva.

B. Demostrar que para $\sigma \in \{-1, 1\}$ y $\tau \in \mathbb{R}$, la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sigma x + \tau$ es una isometría de $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$.

a) f conserva las distancias

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R}}(f(x), f(y)) &= |f(x) - f(y)| = |\sigma x + \tau - \sigma y - \tau| \\ &= |\sigma x - \sigma y| = |\sigma||x - y| = |x - y| \\ &= d_{\mathbb{R}}(x, y). \end{aligned}$$

b) f es biyectiva

i) Inyectividad:
Toda aplicación que conserva las distancias es inyectiva.

ii) Sobreyectividad:
Si $y \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists x = \frac{y-\tau}{\sigma} \in \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = f\left(\frac{y - \tau}{\sigma}\right) = \sigma \cdot \frac{y - \tau}{\sigma} + \tau = y.$$

B. Demostrar que para $\sigma \in \{-1, 1\}$ y $\tau \in \mathbb{R}$, la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sigma x + \tau$ es una isometría de $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$.

a) f conserva las distancias

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R}}(f(x), f(y)) &= |f(x) - f(y)| = |\sigma x + \tau - \sigma y - \tau| \\ &= |\sigma x - \sigma y| = |\sigma||x - y| = |x - y| \\ &= d_{\mathbb{R}}(x, y). \end{aligned}$$

b) f es biyectiva

i) Inyectividad:
Toda aplicación que conserva las distancias es inyectiva.

ii) Sobreyectividad:
Si $y \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists x = \frac{y-\tau}{\sigma} \in \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = f\left(\frac{y - \tau}{\sigma}\right) = \sigma \cdot \frac{y - \tau}{\sigma} + \tau = y.$$

Por tanto f es isometría.

$C.$ Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una isometría de $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ que fija a y b $(a \neq b)$. Demostrar que $g = id_{\mathbb{R}}$.

C. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una isometría de $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ que fija a y b $(a \neq b)$. Demostrar que $g = id_{\mathbb{R}}$.

Como g fija a, tenemos que $g(a) = a$, y por ser g una isometría:

$$\big|g(x) - g(a)\big| = |x - a| \Rightarrow \big(g(x) - g(a)\big)^2 = (x - a)^2.$$

C. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una isometría de $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ que fija a y b $(a \neq b)$. Demostrar que $g = id_{\mathbb{R}}$.

Como g fija a, tenemos que $g(a) = a$, y por ser g una isometría:

$$\big|g(x) - g(a)\big| = |x - a| \Rightarrow \big(g(x) - g(a)\big)^2 = (x - a)^2.$$

$$g^2(x) - 2ag(x) + a^2 = \big(g(x) - a\big)^2 = \big(g(x) - g(a)\big)^2 = (x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2.$$

De donde obtenemos:

$$g^2(x) - 2ag(x) = x^2 - 2ax.$$

C. Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una isometría de $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ que fija a y b $(a\neq b)$. Demostrar que $g=id_{\mathbb{R}}$.

Como g fija a, tenemos que $g(a)=a$, y por ser g una isometría:

$$\big|g(x)-g(a)\big| = |x-a| \Rightarrow \big(g(x)-g(a)\big)^2 = (x-a)^2.$$

$$g^2(x)-2ag(x)+a^2 = \big(g(x)-a\big)^2 = \big(g(x)-g(a)\big)^2 = (x-a)^2 = x^2-2ax+a^2.$$

De donde obtenemos:

$$g^2(x)-2ag(x) = x^2-2ax.$$

Actuando de igual manera con el punto b, obtendremos:

$$g^2(x)-2bg(x) = x^2-2bx.$$

C. Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una isometría de $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ que fija a y b $(a \neq b)$. Demostrar que $g = id_{\mathbb{R}}$.

Como g fija a, tenemos que $g(a) = a$, y por ser g una isometría:

$$\big|g(x) - g(a)\big| = |x-a| \Rightarrow \big(g(x)-g(a)\big)^2 = (x-a)^2.$$

$$g^2(x) - 2ag(x) + a^2 = \big(g(x)-a\big)^2 = \big(g(x)-g(a)\big)^2 = (x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2.$$

De donde obtenemos:

$$g^2(x) - 2ag(x) = x^2 - 2ax.$$

Actuando de igual manera con el punto b, obtendremos:

$$g^2(x) - 2bg(x) = x^2 - 2bx.$$

Y restando ambas ecuaciones:

$$bg(x) - ag(x) = bx - ax \Rightarrow (b-a)g(x) = (b-a)x \Rightarrow g(x) = x$$

$C.$ Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una isometría de $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ que fija a y b $(a \neq b)$. Demostrar que $g = id_{\mathbb{R}}$.

Como g fija a, tenemos que $g(a) = a$, y por ser g una isometría:

$$\big|g(x) - g(a)\big| = |x - a| \Rightarrow \big(g(x) - g(a)\big)^2 = (x - a)^2.$$

$$g^2(x) - 2ag(x) + a^2 = \big(g(x) - a\big)^2 = \big(g(x) - g(a)\big)^2 = (x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2.$$

De donde obtenemos:

$$g^2(x) - 2ag(x) = x^2 - 2ax.$$

Actuando de igual manera con el punto b, obtendremos:

$$g^2(x) - 2bg(x) = x^2 - 2bx.$$

Y restando ambas ecuaciones:

$$bg(x) - ag(x) = bx - ax \Rightarrow (b - a)g(x) = (b - a)x \Rightarrow g(x) = x$$

Por tanto $g = id_{\mathbb{R}}$.

D. Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una isometría de $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$. Demostrar que existen $\sigma \in \{-1, 1\}$ y $\tau \in \mathbb{R}$ tales que:

$$h(x) = \sigma x + \tau, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}$$

D. Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una isometría de $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$. Demostrar que existen $\sigma \in \{-1, 1\}$ y $\tau \in \mathbb{R}$ tales que:

$$h(x) = \sigma x + \tau, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}$$

h es isometría $\Rightarrow |h(1) - h(0)| = |1 - 0| = 1.$

D. Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una isometría de $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$. Demostrar que existen $\sigma \in \{-1, 1\}$ y $\tau \in \mathbb{R}$ tales que:

$$h(x) = \sigma x + \tau, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}$$

h es isometría $\Rightarrow |h(1) - h(0)| = |1 - 0| = 1$.
Definimos

$$m = \frac{1}{h(1) - h(0)}$$

$$n = \frac{h(0)}{h(1) - h(0)}$$

$$g(x) = mh(x) - n$$

$$g(x) = mh(x) - n$$

$$g(x) = mh(x) - n$$

- Como $m \in \{-1, 1\}$ utilizando el apartado B de este ejercicio, obtenemos que g es isometría.

$$g(x) = mh(x) - n$$

- Como $m \in \{-1, 1\}$ utilizando el apartado B de este ejercicio, obtenemos que g es isometría.
- Como $\left.\begin{array}{l} g(0) = 0 \\ g(1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ por C obtenemos que $g = id_{\mathbb{R}}$

$$g(x) = mh(x) - n$$

- Como $m \in \{-1, 1\}$ utilizando el apartado B de este ejercicio, obtenemos que g es isometría.
- Como $\left.\begin{array}{l} g(0) = 0 \\ g(1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ por C obtenemos que $g = id_{\mathbb{R}}$
- Despejando $h(x) = \dfrac{1}{m}x + \dfrac{n}{m}$, llamando $\sigma = \dfrac{1}{m} \in \{-1, 1\}$ y $\tau = \dfrac{n}{m} \in \mathbb{R}$, obtenemos que $h(x) = \sigma x + \tau$.

$$g(x) = mh(x) - n$$

- Como $m \in \{-1, 1\}$ utilizando el apartado B de este ejercicio, obtenemos que g es isometría.
- Como $\left.\begin{array}{l} g(0) = 0 \\ g(1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ por C obtenemos que $g = id_{\mathbb{R}}$
- Despejando $h(x) = \dfrac{1}{m}x + \dfrac{n}{m}$, llamando $\sigma = \dfrac{1}{m} \in \{-1, 1\}$ y $\tau = \dfrac{n}{m} \in \mathbb{R}$, obtenemos que $h(x) = \sigma x + \tau$.

Conclusión

Todas las isometrías de $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ son de la forma $h(x) = \sigma x + \tau$ con $\sigma \in \{-1, 1\}$ y $\tau \in \mathbb{R}$.