Universidad Nacional de Colombia

PROBABILIDAD

PARCIAL 1 PARTE B

Oscar Iván García Montañez
Estudiante de Estadística

1 PUNTO 1

Considere el experimento aleatorio de lanzar una moneda justa tantas veces como sea necesario hasta obtener por primera vez una cara. En clase se había introducido el espacio muestral, $\Omega = \{1, 2, 3, ...\} \cup \{\infty\}$, y la siguiente colección de subconjuntos del espacio muestral

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq \Omega \mid A \text{ es finito o } A^{\complement}\}$$

a. De acuerdo con las definiciones de un álgebra y de una sigma álgebra vistas en clase, muestre que es un álgebra, pero no una sigma álgebra.

Respuesta: Veamos que $\mathcal{A}$ es una δ-algebra sobre Ω
I) $\emptyset \in \mathcal{A}$ ya que $\emptyset$ es finito porque $\mid \emptyset \mid= 0$
II) Si A $\in \mathcal{A}$, entonces A es finito o A$^{\complement}$ es finito
- Si A es finito, $A^{\complement}$ sería infinito , luego $(A^{\complement})^{\complement}$ sería finito y $A^{\complement} \in \mathcal{A}$
- Si $A^{\complement}$ es finito, $(A^{\complement})^{\complement} = A$ sería infinito , luego $A^{\complement}$ sería finito y $A^{\complement} \in \mathcal{A}$

III) Si $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{A}$ entonces A_i es finito o $(A_i)^{\complement}$ es finito para todo 1 ≤i≤n. Supongamos que A_i es finito para todo i, 1 ≤i≤n, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ es finito porque la unión finita de conjuntos finitos es un conjunto finito. Si A_i es infinito para algún i, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ es infinito pero $(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i)^{\complement} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i^{\complement}$, sería finito porque alguno de estos conjuntos es finito y en efecto, la intersección de este conjunto con los conjuntos finitos sería un conjutno finito. Sin pérdida de generalidad, se prueba que $(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) \in \mathcal{A}$ si A_i es infinito pra algún i. Por lo tanto, $(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) \in \mathcal{A}$

En conclusión, por (I), (II) y (III), es posible señalar que $\mathcal{A}$ es una algebra. Ahora bien, veamos que $\mathcal{A}$ no es una δ-algebra sobre Ω. Podemos tomar:

$$A_1 = 2,\ A_2 = 4,\ A_3 = 6\ .\ .\ .$$

$$(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \{2, 4, 6...\}\ ,\ (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \text{ es infinito , pero}$$

$$(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)^{\complement} = \{1, 3, 5...\} \text{ es infinito, luego } (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \notin \mathcal{A} \text{ y } \mathcal{A} \text{ no es una } \delta\text{-algebra sobre } \Omega$$

b. Si decide usarse como el dominio de una medida de probabilidad, justifique si los siguientes conjuntos serían medibles (se les podría asignar una probabilidad) o no, y por qué.

i. El conjunto de los naturales, .

Respuesta: $\mathbb{N} \in \mathcal{A}$, porque $\Omega = \mathbb{N}$ y se le puede asignar una medida porque $(\mathbb{N})^{\complement} = \emptyset$ y $\emptyset$ es un conjunto de medida cerro. en efecto, el complemento de conjuntos medibles es medible también.

ii. El conjunto de los números primos.

Respuesta: $\mathbb{P} = \{x \in \mathbb{N}\}$ x es primo y $\subseteq \Omega$, y $\mathbb{P}$ es infinito pero $(\mathbb{P})^{\complement} = \{x \in \mathbb{N}\}$ x es un número compuesto y es un conjunto infinito, por lo cual, $\mathbb{P} \notin \mathcal{A}$ y no es suceptible de ser asociado con una medida.

iii. El conjunto de resultados correspondiente a la afirmación "se requieren 5 o más lanzamientos para que salga una cara".

Respuesta: Sea el conjunto $A = \{s, s, s, s, a_1, a_2...\} \mid a_i \in \{c, s\}$ entonces

$$A^{\complement} = \{(c), (s, c), (s, s, c), (s, s, s, c)...\}$$

como $A^{\complement}$ es finito, entonces $A \in \mathcal{A}$ y es suceptible de ser asignado con una medida.

iv. El conjunto de resultados correspondiente a la afirmación "nunca se obtiene una cara".

Respuesta: Sea el conjunto $A = \{s, s, s, s...\}$, A es finito, entonces $A \in \mathcal{A}$ y se le puede asignar una medida.

c. Suponga que se decide utilizar la sigma álgebra partes, es decir, que el espacio medible sería $(\Omega, \wp(\Omega))$

i. ¿Es adecuado usar esta sigma álgebra en este caso?

Respuesta: $\wp(\Omega)$ sería una δ-algebra y es posible asociar una medida a todo subconjunto de Ω, por lo que sí sería adecuado

Basado en el hecho de que la moneda es justa, calcule las probabilidades de los siguientes eventos:

ii. A:= "Se requiere de un lanzamiento para obtener cara por primera vez"

Respuesta: $P(c) = \frac{1}{2} = 0.5$

iii. B:= "Se requiere de 9 lanzamientos para obtener cara por primera vez"

Respuesta: $P(s,s,s,s,s,s,s,s,s,s) = \frac{1}{2^9} = 1.953 \times 10^-3$

iv. C:= "Se requiere de 10 o más lanzamientos para obtener cara por primera vez"

Respuesta: $C^{\complement}$: Se requieren menos de 10 lanzamientos para obtener cara por pimera vez. $P(c) = 1 - P(c^{\complement}) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^7} - \frac{1}{2^8} - \frac{1}{2^9}$

$$P(c) = 1 - \sum_{i=1}^{9} (\frac{1}{2})^i$$

Nota: Puede asumir que cada lanzamiento de la moneda es independiente del resto de lanzamientos.

2. Una junta directiva debe escoger a su próximo gerente y para ello, los 15 miembros deben marcar con una "X" el nombre de su favorito dentro de la lista de 3 opcionados. Luego, los votos son abiertos uno por uno, se leen y se realiza la asignación del voto a cada persona. Por seguridad, los votos son anónimos, así que solo se ve por quién fue el voto sin revelar la identidad del votante. Si al final, el candidato favorito tuvo 8 votos, el segundo lugar obtuvo 4 votos y el tercero 3 votos:

a. ¿De cuántas maneras diferentes podría haber ocurrido la lectura de votos?

Respuesta:

$$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9, P_{10}, P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{15}$$
$$\frac{15!}{8!4!3!} = 225225$$

b. ¿De cuántas de las maneras totales calculadas en el ítem a., habría sido posible saber que el candidato favorito habría sido el ganador al leer el voto número 8?

Respuesta: $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7, V_8, V_9, V_{10}, V_{11}, V_{12}, V_{13}, V_{14}, V_{15}$

$$\binom{8}{6} 6! \cdot 2! \cdot 2! = 80640$$

3. En la red de comunicaciones de 4 componentes que se muestra la figura No. 1, se sabe que el funcionamiento o no de un componente es independiente de los demás. La red funciona si los componentes A y B funcionan, y si funciona cualquiera de los componentes C o D. La confiabilidad (probabilidad de que funcione) de cada uno de los componentes es la que se presenta en la figura No.1. Calcule la probabilidad de que el componente D no funcione dado que la red de comunicaciones funcion

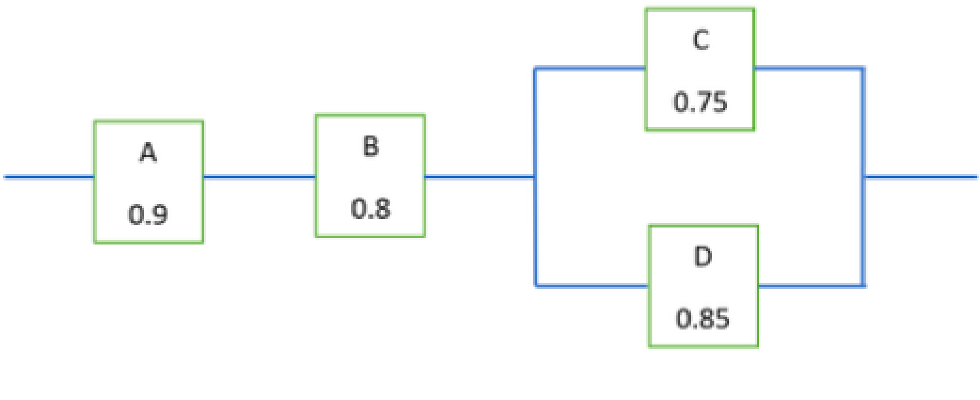

Figura No.1

$$P(ONF \mid F) = (\frac{P(F|ONF) \cdot P(DMF)}{P(F)}$$
$$\frac{0.54 \cdot 0.15}{0.693}$$
$$0.1168$$
$$P(F) = P\left[A \cap B \cap (C \cup D)\right]$$
$$0.9 \cdot 0.8\left[0.75 + 0.85 - 0.75 \cdot 0.85\right] = 0.693$$
$$P(F \mid DNF) = P(A)P(B)P(C) = 0.9 - 0.8.0.75 = 0.54$$
$$P(DNF) = 1 - 0.85 = 0.15$$