

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA

**ESTIMACIÓN DE ESTADO EN SISTEMAS
OBSERVADOS A TRAVÉS DE CANALES CON
PÉRDIDA DE DATOS.**

Tesis de Grado presentada por

Miguel Andrés Solís Cid.

como requisito parcial para optar al título de

Ingeniero Civil Electrónico

y al grado de

Magíster en Ciencias de la Ingeniería Electrónica

Profesor Guía

Dr. Eduardo Silva Vera

Valparaíso, 2012.

TÍTULO DE LA TESIS:

**ESTIMACIÓN DE ESTADO EN SISTEMAS OBSERVADOS A TRAVÉS
DE CANALES CON PÉRDIDA DE DATOS**

AUTOR:

Miguel Andrés Solís Cid.

TRABAJO DE TESIS, presentado en cumplimiento parcial de los requisitos para el título de Ingeniero Civil Electrónico y el grado de Magíster en Ingeniería Electrónica de la Universidad Técnica Federico Santa María.

Dr. Eduardo Silva V.

Dr. Mario Salgado

Dr. Alejandro Rojas

Valparaíso, Agosto de 2012.

AGRADECIMIENTOS

Gracias a todos los involucrados en este trabajo, ya sea de forma directa o indirecta.

Gracias a Francisca, familia y amigos.

RESUMEN

El presente trabajo de tesis se enmarca dentro del diseño y análisis de sistemas de estimación sobre redes de comunicación. En tal escenario, uno se encuentra con problemas de diseño donde los objetivos de estimación deben balancearse con restricciones impuestas por el canal de comunicación que se esté utilizando. Estas restricciones pueden manifestarse como pérdida de datos, como limitaciones en la tasa de transferencia de datos, o también como retardos en el envío de la señal medida.

Este trabajo se encuentra motivado por el reciente interés en redes que incorporan sensores inalámbricos, los que miden variables locales para ser enviadas a nodos centrales que realizan su procesamiento. Dado que los sensores involucrados usualmente tienen una potencia disponible limitada, transmitir con alta potencia no es una opción viable. Por lo tanto, las restricciones de comunicación juegan un papel importante en este tipo de sistemas.

Existen distintos tipos de estimadores, dependiendo de si se tiene acceso o no al estado del canal. Otra diferencia importante al momento de distinguir los distintos tipos de estimadores, se refiere a si el filtro pertenece a la clase de Sistemas con Saltos Markovianos (MJLS - Markov Jump Linear Systems) o no. Luego de hechas estas diferencias, cabe notar si el filtro es óptimo o subóptimo dependiendo de si la varianza del error de estimación que se obtiene, es la mínima posible. Ya realizadas estas distinciones, otro aspecto relevante se refiere a si el filtro converge a uno estacionario o no.

En la presente Tesis se estudia el problema de estimación en base a pérdida de las observaciones, generando observaciones intermitentes. Se diseña un filtro estacionario que minimiza la varianza del error de estimación, proveyendo, además, de una estimación óptima de los datos perdidos. Lo anterior distingue la propuesta de los esquemas de compensación utilizados comúnmente, que consisten en reemplazar el dato perdido por la última muestra recibida de forma exitosa o, simplemente, reemplazar dichas muestras por ceros.

Para derivar nuestros resultados, se explota un resultado reciente en donde se provee de una equivalencia entre un sistema que envía datos a través de un canal que pierde datos, y un sistema lineal e invariante en el tiempo con ruido aditivo, sujeto a una restricción de señal a ruido (SNR). En cuanto a la estructura de la planta a considerar, el trabajo se ha realizado sobre el supuesto que la planta es estable y puede tener múltiples entradas y múltiples salidas, proveyendo expresiones cerradas para el caso particular en que la planta cuenta con una salida escalar.

A lo largo de este documento se presentan diferentes ejemplos que permiten ilustrar los

desarrollos realizados, y comparar éstos frente a otros propuestos en la literatura.

Palabras Clave:

Filtraje óptimo, Estimación de estado, Filtro estacionario, MJLS, Pérdida de datos, SNR, Ruido aditivo, Varianza mínima, Sistemas de tiempo discreto.

ABSTRACT

The framework of this thesis is located at the analysis and design of estimation problems over networked systems. In such scenario, one deals with problems where standard control and estimation objectives have to be traded off against communication constraints. Those constraints could appear as data dropouts, as data-rate limits or propagation delay on the measured signal.

This work is motivated by the recent interest on networks including wireless sensors, which measures local variables and then send them to a central processing node. Since sensors in sensor networks have usually limited power available, high power transmission is not an option. Hence, communication constraints play significant roles in such architectures.

There's different type of estimators, depending on the assumptions made on the scenario, like if there is or not access to the channel's state. Another important difference at the moment of discriminating between different types of estimators, is related to the class of filters, it could or not belong to the class of Markov Jump Linear Systems. Once made these differences, one should note if the filters is optimal or sub-optimal, depending on the resulting estimation error variance, the latter means that the resulting variance is not the minimum possible. Then, another relevant aspect is related to the convergence or not to a stationary filter.

In this Thesis, estimation problem based on intermittent observations. It's designed an stationary filter that achieves the minimum estimation error variance, obtaining, in addition, optimal missing data estimation. This allows one to distinguish the proposed compensation schemes commonly found in literature, replacing the missing data by the last successfully received sample or replacing it by zeros.

In order to derive our results mentioned above, it's exploited a recent result, where's given an equivalence between a system that sends data through a certain erasure channel, and a lineal and time-invariant system with additive noise, subject to a signal-to-noise ratio (SNR) constraint. About the structure of the plant, this work has been done assuming stability of the plant and considering it can have multiple outputs and multiple inputs, giving closed form expressions for the particular case when having a single output.

Along this document, there are several examples in order to illustrate the work that has been made, and one can compare these results with other proposed at the literature.

Keywords:

Optimal filtering, State estimation, Stationary filter, MJLS, Data dropout, SNR, Additive noise, Minimum variance, Discrete-time systems.

CONTENIDO

| | |
|--|------------|
| AGRADECIMIENTOS | I |
| RESUMEN | III |
| ABSTRACT | V |
| 1. INTRODUCCIÓN | 1 |
| 1.1. Motivación y Definición del problema | 1 |
| 1.1.1. Identificación de Problemas | 2 |
| 1.2. Trabajo previo | 3 |
| 1.3. Contribuciones del trabajo | 4 |
| 1.4. Estructura de la Tesis | 5 |
| 2. RESULTADOS PRELIMINARES | 6 |
| 2.1. Introducción | 6 |
| 2.2. Representación de sistemas LTI en variables de estado | 6 |
| 2.2.1. Estabilidad | 7 |
| 2.2.2. Parametrización de Youla-Kucera | 8 |
| 2.3. Sistemas lineales excitados por procesos aleatorios | 9 |
| 2.4. Estimación Óptima de Estado | 11 |
| 2.5. Conclusiones | 13 |
| 3. ESTIMACIÓN ESTACIONARIA SUJETA A LA PÉRDIDA DE DATOS | 14 |
| 3.1. Introducción | 14 |
| 3.2. Definición del problema | 14 |
| 3.3. Diseños óptimos | 17 |
| 3.3.1. Expresiones en forma cerrada en el caso de mediciones escalares | 24 |
| 3.3.2. Métodos subóptimos de compensación de muestras perdidas | 26 |
| 3.4. Ejemplos | 29 |
| 3.5. Conclusiones | 34 |
| 4. CONCLUSIONES | 35 |
| 4.1. Discusión y comparación de los resultados obtenidos | 35 |

| | |
|---|-----------|
| 4.2. Trabajo futuro | 36 |
| A. APÉNDICE | 37 |
| A.1. Equivalencia entre sistemas LTI y conmutados | 37 |
| A.2. Programación Fraccional | 40 |
| A.3. Expresiones explícitas en estimación óptima | 40 |
| A.4. Ecuación Algebraica de Riccati Modificada | 41 |
| A.5. Teorema de los Residuos | 42 |
| B. NOTACIÓN | 43 |
| B.1. Símbolos | 43 |
| B.2. Abreviaciones | 44 |

INTRODUCCIÓN

1.1. Motivación y Definición del problema

El problema de diseño y análisis de sistemas de control y estimación sobre redes de comunicación ha recibido mucha atención en la literatura reciente [?]. En tales situaciones, uno se encuentra con problemas de diseño en que los objetivos de control y de estimación deben balancearse con restricciones impuestas por el canal de comunicación que se esté utilizando. En general, el canal de comunicación entre la planta y el estimador, o el controlador según sea el problema en cuestión, presenta imperfecciones. Por ejemplo, puede existir un retardo en el envío de la señal enviada, puede haber pérdida de datos, puede existir limitaciones en la tasa de transferencia de datos, o etc [?, ?, ?]. En muchos casos, no se pueden obviar estas restricciones, pues el comportamiento del sistema resultante depende críticamente de éstas [?].

Este trabajo se encuentra motivado por el reciente interés en redes de sensores inalámbricos (ver [?] y [?]). En tales arquitecturas, los sensores miden variables locales y dichas mediciones son enviadas a nodos centrales para su posterior procesamiento (ver [?]). Esta forma de procesar las variables medidas es atractivo debido a que la carga de procesamiento cae sobre un nodo central, y la comunicación se puede realizar de forma inalámbrica. Esto permite, por ejemplo, utilizar sensores económicos que no incorporan unidades sofisticadas de procesamiento, permitiendo reducir el costo que implica realizar un alambrado para transmitir las mediciones, haciendo así viables aplicaciones en donde el alambrado es, no sólo caro, sino que imposible de realizar (como se ha estudiado en [?]). Además, dado que los sensores involucrados usualmente tienen energía disponible limitada, transmitir con alta potencia no es una opción viable. Por lo tanto, las restricciones relativas al canal de comunicación juegan un papel importante en este tipo de sistemas.

En este trabajo de tesis se realizará el análisis y diseño de estimadores estacionarios en que las señales a estimar se modelan a través de plantas de múltiples entradas y salidas estables, lineales e invariantes en el tiempo, y las mediciones se realizan a través de un canal que eventualmente pierde estos datos. Los estimadores propuestos construyen una estimación de la señal de interés, y de los datos perdidos a través del canal, suponiendo que se tiene acceso al estado de éste. Esta suposición no se encuentra alejada de la realidad, dado que los protocolos de comunicación actuales (como TCP) permiten discriminar datos válidos de los corruptos [?, ?].

En este trabajo se realiza una compensación óptima de los datos perdidos. Existen estrategias subóptimas de compensación, dentro de las cuales se estudiarán las dos estrategias usadas con mayor frecuencia en la literatura, proveyendo así expresiones que permiten comparar analíticamente estos esquemas de compensación.

Es necesario destacar que el problema de estimación a partir de mediciones enviadas a través de un canal de borrado, puede ser tratado como un problema particular de estimación en plantas variantes en el tiempo, específicamente plantas cuyos parámetros cambian abruptamente y donde los cambios obedecen a una cadena de Markov. Dichos sistemas se conocen como Sistemas Lineales con Saltos Markovianos (MJLS, [?]). Como se podrá comprobar en las secciones posteriores, el problema de estimación sujeto a pérdida de datos corresponde a un caso particular de estimación de estado para un MJLS, en el que la variable aleatoria que gobierna la cadena de Markov es la que determina si se pierde o no el dato a través del canal (ver Figura 1.1).

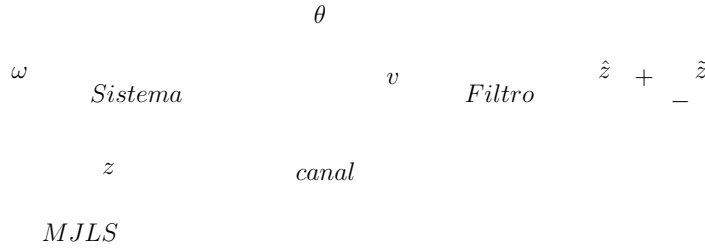


Figura 1.1. Equivalencia entre sistema con pérdida de datos y un MJLS.

1.1.1. Identificación de Problemas

El estudio del problema de estimación sujeto a la pérdida de datos motiva las siguientes preguntas:

1. El desempeño de un filtro convencional (e.g., un filtro de Kalman que se diseña sin considerar pérdidas), ¿será considerablemente peor que el de un filtro diseñado tomando en cuenta las pérdidas de datos?
2. Al incluir un compensador de los datos perdidos, ¿cuánto mejora el desempeño del filtro convencional?
3. ¿Es posible diseñar, simultánea y óptimamente, un filtro y un compensador de pérdida de datos?
4. ¿Es posible dar condiciones que garanticen que un compensador de pérdida de datos sea mejor que otro?

1.2. Trabajo previo

El estudio de problemas de estimación con observaciones intermitentes comienza a fines de los años 60. En la literatura se pueden encontrar filtros que usan mediciones intermitentes de la salida, suponiendo conocidas sólo las propiedades estadísticas del proceso de pérdida de datos, o suponiendo que se cuenta con una medición directa de dicho proceso. Lo anterior permite distinguir varios tipos de filtros, dependiendo de si se tiene acceso o no al estado del canal. Otra diferencia importante al momento de distinguir los distintos tipos de filtros, se refiere a si el filtro pertenece a la clase MJLS o no. Luego de hechas estas diferencias, cabe notar si el filtro es óptimo o subóptimo dependiendo de si la varianza del error de estimación que se obtiene, es la mínima posible dentro de una clase de filtros determinada. Ya realizadas estas distinciones, otro aspecto relevante se refiere a si el filtro converge a uno estacionario o no.

En la bibliografía hay distintos enfoques para lograr filtros óptimos y subóptimos bajo distintas suposiciones y, además, utilizando distintas herramientas. Por ejemplo, se puede nombrar a [?] que presenta filtros óptimos utilizando las mediciones intermitentes que se transmiten por un canal, suponiendo conocidas sólo las propiedades estadísticas del proceso de pérdida de datos, y suponiendo que el proceso se distribuye de forma idéntica e independiente. La convergencia de los filtros propuestos en [?] se estudia en [?], definiendo para ello un sistema lineal apropiado, sin pérdida de datos, cuyos segundos momentos coinciden con los del sistema original (en que sí se consideran las pérdidas).

En [?], se considera el tipo de sistemas y la clase de filtros propuestos en [?], pero sin considerar la misma distribución para el proceso de pérdidas, considerando así modelos más realistas. El trabajo [?] entrega, además, condiciones para la existencia de filtros lineales óptimos recursivos del mismo orden que el sistema original.

Los trabajos mencionados anteriormente se centran en filtros óptimos lineales. Esto está motivado por el hecho de que, cuando no se explotan las mediciones del proceso de pérdidas, los filtros óptimos son de dimensión infinita ([?] y [?]). Asimismo, los filtros propuestos en los trabajos anteriores no usan mediciones del estado de la cadena de Markov que rige las pérdidas, a pesar de que es común en la práctica contar con mediciones instantáneas del proceso de pérdidas. La ventaja de aprovechar este conocimiento radica en que permite utilizar esquemas de compensación de las pérdidas. Un esquema común de compensación consiste en reemplazar el dato perdido, por la última muestra recibida exitosamente ([?]). Usando este esquema de compensación, [?] diseña un filtro óptimo lineal e invariante en el tiempo, utilizando un marco de trabajo basado en una norma-2 estocástica. Trabajo relacionado se puede encontrar en [?] y [?], donde los resultados están generalizados a plantas en que múltiples salidas se transmiten por un mismo canal multivariable.

En [?] y en [?] se han estudiado problemas de estimación óptima sobre canales que pierden datos, suponiendo que las pérdidas se distribuyen de forma idéntica e independiente. En dichos trabajos, el filtro de Kalman [?] se ha extendido para considerar la pérdida de las mediciones, aprovechando el conocimiento instantáneo de las pérdidas del canal. Como consecuencia, el filtro resultante depende explícitamente del proceso de pérdidas, y no converge a un filtro estacionario. En particular, en este caso, la varianza del error de estimación se convierte en una variable aleatoria y no hay una caracterización simple para

su comportamiento estacionario (en [?] se dan cotas superiores e inferiores para la varianza del error de estimación). Extensiones del trabajo realizado en [?] se pueden encontrar en [?] y [?].

Cuando se utiliza un filtro de Kalman variante en el tiempo, en que sus parámetros varían dependiendo del estado de la cadena de Markov asociada al proceso de pérdidas, se obtiene un filtro óptimo (ver Sección 5.2 de [?]) en donde todos los estados pasados de la cadena de Markov participan en la estimación (como en [?] y [?]). Este filtro no pertenece, por lo tanto, a la clase de MJLS. El trabajo [?] presenta un filtro óptimo en la clase de MJLS que puede ser usado como una alternativa al filtro de Kalman variante en el tiempo.

El trabajo no tratado en las referencias anteriores incluye el diseño, simultáneo, de un estimador y un compensador óptimo de pérdida de datos. Asimismo, se echa de menos la propuesta de algoritmos estacionarios.

1.3. Contribuciones del trabajo

Las principales contribuciones de este trabajo de tesis son:

- Se propone una clase de estimadores que incorporan un compensador de pérdidas.
- Se caracterizan los estimadores óptimos dentro de la clase de filtros propuestos, haciendo énfasis en el hecho de que el diseño de dichos estimadores se puede lograr secuencialmente en dos pasos. En el primer paso, se diseña el compensador de datos perdidos a través de la solución de un problema de estimación auxiliar estándar, sujeto a una restricción señal a ruido. En la segunda etapa, se diseña un estimador óptimo para el sistema original (sin pérdidas), al cual se le ha agregado un ruido de medición auxiliar cuyos segundos momentos dependen del compensador previamente diseñado.
- Para el caso en que las mediciones enviadas a través del canal de borrado sean escalares, se proveen expresiones cerradas que permiten entender fácilmente los compromisos involucrados en problemas de estimación sujetos a pérdida de datos.
- Se exploran condiciones bajo las cuales se puede garantizar cuando un esquema sub-óptimo de compensación de pérdida de datos es mejor que otro. En particular, se proveen expresiones que permiten comparar analíticamente dos estrategias de compensación: la primera en que se reemplazan muestras perdidas por ceros, y la segunda en que se reemplazan las muestras perdidas por la última muestra recibida exitosamente.

1.4. Estructura de la Tesis

Esta tesis se organiza como sigue:

- **Capítulo 2: Resultados Preliminares.** Este capítulo revisa algunas ideas básicas sobre sistemas lineales, estabilidad de sistemas y diseño de filtros estacionarios. El objetivo de este capítulo es establecer las bases de los temas que se presentan posteriormente.
- **Capítulo 3: Estimación estacionaria sujeta a la pérdida de datos.** Este capítulo estudia problemas de análisis y diseño de filtros estacionarios para plantas que envían mediciones a través de un canal de borrado. La clase de estimadores propuesta incorpora, en forma natural, un compensador óptimo de los datos perdidos. Además, para el caso en que las mediciones enviadas sean escalares, se proveen expresiones cerradas que permiten obtener una mayor comprensión de los resultados expuestos. Asimismo, se compara el desempeño del estimador propuesto frente a estimadores que utilizan otras formas de compensación para la pérdida de datos. Se obtienen expresiones que permiten comparar diferentes métodos en forma analítica y, finalmente se muestran ejemplos que ilustran los resultados obtenidos.
- **Capítulo 4: Conclusiones.** Este capítulo relaciona los resultados obtenidos en los diferentes capítulos del documento, presenta un resumen del trabajo realizado, y revisa temas pendientes que quedan como trabajo futuro.
- **Apéndices:** Este capítulo contiene una serie de resultados matemáticos utilizados en este documento.

RESULTADOS PRELIMINARES

2.1. Introducción

Este capítulo presenta una revisión general de resultados básicos que se utilizarán constantemente en los capítulos posteriores. Además, se definirá gran parte de la terminología utilizada en las secciones posteriores.

En la Sección 2.2 se presentarán conceptos básicos asociados a Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo (LTI). En la Sección 2.3, se extienden los conceptos presentados en la Sección 2.2 al caso de sistemas con entradas aleatorias. Finalmente, en la Sección 2.4 se revisará la solución de un problema de estimación estándar.

2.2. Representación de sistemas LTI en variables de estado

Uno de los modelos más simples y más usados para describir la dinámica de un sistema, viene dado por la representación de éste en variables de estado, siendo usado al menos desde mitad del Siglo 20 [?], y proveyendo de una descripción compacta que en el caso de sistemas lineales, puede ser analizada a través de métodos del álgebra lineal [?].

A continuación se revisarán algunos resultados básicos relativos a sistemas lineales con representación en variables de estado. Estos resultados son ampliamente conocidos, y se pueden encontrar en muchos textos, e.g., [?] ó [?]. La representación en variables de estado es una alternativa a la función de transferencia, que corresponde a la transformada Zeta de la salida de dicho sistema, cuando en la entrada se inyecta un Delta de Kronecker, con condiciones iniciales iguales a cero. Si u es la entrada de un sistema LTI, e y es la salida correspondiente, definimos

$$G(q) = \mathcal{Z}\{y(k)\}_{\{u(k)=\delta(k), c.i.=0\}}, \quad (2.2.1)$$

donde \mathcal{Z} denota la Transformada Zeta, q es el argumento de dicha transformada. La función de transferencia descrita en (2.2.1) permite analizar características de entrada-salida del sistema, como por ejemplo estabilidad externa y respuesta en frecuencia [?]. Cabe notar que, en el caso de sistemas multivariables (MIMO), es decir, sistemas en que se cuenta con múltiples entradas y/o múltiples salidas, se obtendrán matrices de transferencia.

La representación en variables de estado permite realizar un análisis más profundo sobre las propiedades del sistema en cuestión, a diferencia de las funciones de transferencia que permiten obtener información sólo sobre la parte completamente controlable y completa-

mente observable [?]. Así, para sistemas de tiempo discreto, que son los acá estudiados, una representación en variables de estado puede escribirse como [?]:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \quad (2.2.2a)$$

$$y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k) \quad (2.2.2b)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ representa el vector de entrada (el cual puede ser una señal determinística o aleatoria), $y \in \mathbb{R}^p$ representa el vector de salida, y las matrices de la representación son de dimensiones apropiadas, es decir:

$$A(k) \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad ; \quad B(k) \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad ; \quad C \in \mathbb{R}^{p \times n} \quad ; \quad D \in \mathbb{R}^{p \times m} \quad (2.2.3)$$

Cabe notar que, para sistemas LTI, estas matrices son constantes, es decir,

$$A(k) = A \quad , \quad B(k) = B \quad , \quad C(k) = C \quad , \quad D(k) = D \quad \forall k \quad (2.2.4)$$

En la mayoría de los sistemas físicos reales, no es posible tener un efecto instantáneo de las variables de entrada sobre las salidas. Es decir, los sistemas no poseen paso directo. Esto se refleja en que la matriz D sea la matriz nula, $D = 0$, o para el caso de funciones de transferencia, en que éstas serán estrictamente propias [?].

A continuación se establece de manera formal la relación entre el modelo en variables de estado de un sistema y su correspondiente función de transferencia.

Lema 2.2.1.

Sea un sistema LTI de tiempo discreto representado por (2.2.2), entonces su función de transferencia está dada por

$$G(q) = C(qI - A)^{-1}B + D \quad (2.2.5)$$

Cabe notar que los polos de la función de transferencia $G(q)$ son elementos del conjunto de los autovalores de A [?]. ■

Es inmediato concluir que, dada una representación en variables de estado, existe una única función de transferencia. Sin embargo, dada una función de transferencia existen infinitas representaciones en variables de estado posibles [?].

2.2.1. Estabilidad

Un concepto importante en sistemas dinámicos, es el de estabilidad. Usualmente, cuando se describe un sistema lineal a través de una función de transferencia, se entiende estabilidad como estabilidad BIBO, es decir que para toda entrada acotada y para toda condición inicial acotada al sistema, la salida correspondiente también será acotada. A continuación se revisará la noción de estabilidad para sistemas cuya descripción se encuentra en variables de estado.

Definición 2.2.1 (Estabilidad interna). *Se dice que un sistema es internamente estable si para toda entrada y estado inicial acotados, la salida de dicho sistema también es acotada.*

Lema 2.2.2 (Estabilidad interna, ver [?]).

El sistema representado por (2.2.2) es asintóticamente estable si y sólo si se cumple:

$$|eig(A)| < 1 \quad (2.2.6)$$

donde $eig(A)$ representa a los autovalores de la matriz A . ■

Observación 2.2.1. Si el sistema descrito por (2.2.2) es asintóticamente estable, entonces es estable en sentido BIBO. Mientras que si es estable en sentido BIBO, podría no ser internamente estable. (Una discusión más acabada hace uso del concepto de controlabilidad y observabilidad [?, ?]).

2.2.2. Parametrización de Youla-Kucera

En esta sección se presentará la parametrización de todos los controladores estabilizantes para cierta planta.

Teorema 2.2.1 (ver [?]).

Considere una planta estable G , donde sus entradas y salidas se relacionan por

$$\begin{bmatrix} Y(q) \\ E(q) \end{bmatrix} = G(q) \begin{bmatrix} D(q) \\ U(q) \end{bmatrix} \quad (2.2.7)$$

Con $G(q)$ dada por

$$G(q) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} G_{11}(q) & G_{12}(q) \\ G_{21}(q) & G_{22}(q) \end{bmatrix} \quad (2.2.8)$$

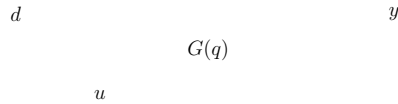


Figura 2.1. Sistema realimentado para planta $G(q)$ con controlador $K(q)$.

Entonces, todos los controladores K que estabilizan internamente a G , bajo un esquema de control realimentado (ver Figura 2.1) pueden escribirse como

$$K(q) = (I + Q(q)G_{22}(q))^{-1} Q(q) \quad (2.2.9)$$

para algún parámetro $Q \in \mathcal{RH}_\infty$ tal que $(I + Q(\infty)D_{22})$ sea no singular. (Q corresponde al parámetro de Youla asociado al controlador K). ■

La importancia de este teorema radica en que permite escribir todas las funciones de transferencia de lazo cerrado en un lazo, como funciones afines del parámetro Q . En efecto,

Corolario 2.2.1. *Sea la planta $G(q)$ descrita por (2.2.8) y Q el parámetro de Youla asociado al controlador $K(q)$ de la Figura 2.1, entonces la función de transferencia de lazo cerrado entre d e y viene dada por*

$$T_{dy}(q) = G_{11}(q) - G_{12}(q)Q(q)G_{21}(q) \quad (2.2.10)$$

■

2.3. Sistemas lineales excitados por procesos aleatorios

En esta tesis entenderemos un proceso aleatorio como una secuencia de variables aleatorias indexadas por un índice $k \in \mathbb{N}_0$. Dado un proceso definimos las siguientes nociones:

Lema 2.3.1 (Primeros y Segundos Momentos, ver [?]).

Considere dos procesos aleatorios, x e y .

- *La media de x en el instante k , denotada por $\mu_x(k)$, se define como $\mu_x(k) \triangleq \xi\{x(k)\}$, donde $\xi\{\cdot\}$ representa al operador esperanza.*
- *La matriz de covarianza cruzada entre x e y , denotada por $R_{xy}(k + \tau, k)$, se define como $R_{xy}(k + \tau, k) \triangleq \xi\{(x(k + \tau) - \mu_x(k + \tau))(y(k) - \mu_y(k))^\top\}$.*
- *La matriz de varianza de x en el instante k , denotada por $P_x(k)$, se define como $P_x(k) \triangleq R_{xx}(k, k)$.*

■

Definición 2.3.1 (Proceso segundo orden).

Un proceso aleatorio x es de segundo orden si y sólo si su media y matriz de varianza existen y son finitas para todo $k \in \mathbb{N}_0$, y además permanecen finitas cuando $k \rightarrow \infty$

Definición 2.3.2 (Procesos no correlacionados).

Se dice que dos procesos no están correlacionados entre sí si y sólo si $R_{xy}(k + \tau, k) = 0 \quad \forall k, \tau$.

Definición 2.3.3 (Proceso i.i.d.).

Un proceso aleatorio x corresponde a una secuencia i.i.d. si y sólo si x corresponde a una secuencia de variables aleatorias independientes entre sí e idénticamente distribuidas.

Definición 2.3.4 (Proceso blanco).

Se dice que el proceso aleatorio x es blanco si y sólo si corresponde a una secuencia de variables aleatorias no correlacionadas entre sí, con la misma media y matriz de varianza.

Con estas definiciones, podemos introducir un concepto que será usado reiteradamente a lo largo de este documento. Éste se refiere a la estacionaridad de un proceso. La noción de estacionaridad juega un papel fundamental en este trabajo de tesis dado que el capítulo que contiene los resultados principales aborda el problema de estimación estacionaria de estado.

Lema 2.3.2 (Proceso WSS, ver Sección 2.8.3 en [?]).

Un proceso x se dice estacionario en sentido amplio, o WSS (Wide-Sense Stationary), si es de segundo orden y cumple las siguientes condiciones:

- La media del proceso $\mu_x(k) = \xi\{x(k)\}$ es invariante en el tiempo, es decir, $\mu_x(k) = \mu_x$, $\forall k$,
- La autocovarianza de x depende sólo del desplazamiento en el tiempo, es decir, $R_x(k + \tau, k) = R_x(\tau)$. (Esto implica que $P_x(k)$ es constante $\forall k$).

■

Definición 2.3.5.

Se dice que un proceso x es asintóticamente estacionario en sentido amplio si y sólo si se cumplen las condiciones del Lema 2.3.2 cuando $k \rightarrow \infty$, es decir, si existen μ_x , $R_x(\tau)$ y P_x finitos, tales que:

$$\begin{aligned}\mu_x &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_x(k), \\ R_x(\tau) &= \lim_{k \rightarrow \infty} R_x(k + \tau, k), \\ P_x &= \lim_{k \rightarrow \infty} P_x(k).\end{aligned}$$

En este trabajo modelaremos señales como la salida de Sistemas LTI excitados por ruido blanco. Recuerde la descripción en variables de estado en (2.2.2), reproducida aquí por conveniencia:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad (2.3.1a)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k). \quad (2.3.1b)$$

Esta vez, la entrada $u \in \mathbb{R}^m$ corresponderá a una señal de ruido blanco

En primer lugar, extendemos la noción de estabilidad interna a este tipo de sistemas:

Definición 2.3.6.

El sistema (2.3.1) es estable en sentido cuadrático medio (MSS - Mean Square Stable) si y sólo si para cada x_0 de segundo orden y entrada u blanco no correlacionado con x_0 , existe $\mu_x \in \mathbb{R}^{n_x}$ y $M_x \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ independientes de x_0 tal que:

$$\begin{aligned}\mu_x &= \lim_{k \rightarrow \infty} \xi\{x(k)\}, \\ M_x &= \lim_{k \rightarrow \infty} \xi\{x(k)x(k)^\top\}.\end{aligned}$$

■

Es fácil probar que un sistema LTI será MSS si y sólo si su estado es un proceso WSS asintótico (A-WSS) [?]. Asimismo, se puede probar, en dicho caso, que un sistema LTI es MSS si y sólo si los autovalores de su matriz A son menor a 1, i.e., MSS es equivalente a estabilidad interna.

Observación 2.3.1. El concepto de MSS para procesos aleatorios puede ser fácilmente extendido en forma natural al caso de sistemas MJLS, por lo que posteriormente también se ocupará este concepto para este tipo de sistemas (vea [?]).

2.4. Estimación Óptima de Estado

En esta sección se presenta el Filtro de Kalman estacionario, herramienta básica para la solución de problemas de estimación que involucran sistemas lineales con entradas estocásticas. El Filtro de Kalman fue propuesto por primera vez en [?], y actualmente es presentado en la mayoría de textos de estimación en sistemas lineales (vea [?, ?, ?]).

Considere el siguiente sistema:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)\omega(k), \quad x(0) = x_0 \quad (2.4.1a)$$

$$z(k) = C_z(k)x(k) + D_z(k)\omega(k) \quad (2.4.1b)$$

$$y(k) = C_y(k)x(k) + D_y(k)\omega(k) \quad (2.4.1c)$$

donde x_0 es el estado inicial del sistema, $\omega(k)$ corresponde a una secuencia de ruido blanco de segundo orden, con media cero y varianza unitaria. Como se puede apreciar, a diferencia de la estructura definida en las secciones anteriores, en (2.4.1) se tienen dos salidas: $z(k)$ e $y(k)$. Lo que realiza el Filtro de Kalman es estimar la señal de salida $z(k)$, a la cual suponemos no se tiene acceso, a partir de las mediciones de $y(k)$.

El Filtro de Kalman es un algoritmo recursivo que entrega estimaciones de z que minimizan la varianza del error de estimación sobre la clase de todos los estimadores lineales. Este filtro se mostrará para el caso en que interesa estimar $z(k)$ en el instante k usando todas las mediciones de y disponibles hasta el instante $k-1$ y, posteriormente, consideraremos el caso en que se usan las mediciones hasta el instante k .

Lema 2.4.1 (Filtro estrictamente propio, [?]).

Considere el sistema descrito por (2.4.1). El conjunto de ecuaciones recursivas que permiten hallar el mejor estimador en sentido cuadrático medio de $z(k)$ usando $y(0), \dots, y(k-1)$ están dadas por:

$$\hat{x}(k+1|k) = A\hat{x}(k|k-1) + K_{sp}(k)(y(k) - C_y\hat{x}(k|k-1)) \quad (2.4.2a)$$

$$\hat{z}(k|k-1) = C_z\hat{x}(k|k-1) \quad (2.4.2b)$$

$$P(k+1|k) = AP(k|k-1)A^\top - K_{sp}(k)(AP(k|k-1)C_y^\top + BD_y^\top)^\top + BB^\top \quad (2.4.2c)$$

$$K_{sp}(k) = (AP(k|k-1)C_y^\top + BD_y^\top)(C_yP(k|k-1)C_y^\top + D_yD_y^\top)^{-1} \quad (2.4.2d)$$

En (2.4.2), $K_{sp}(k)$ denota la ganancia del filtro en el instante k , $\hat{x}(k|j)$ y $P(k|j)$ corresponden a la estimación del estado x en el instante k dadas las mediciones hasta el instante j y a la varianza del error de estimación de estado en el instante k dadas las mediciones de y hasta el instante j , respectivamente.

La varianza del error de estimación $\tilde{z}(k) \triangleq z(k) - \hat{z}(k)$, digamos $P_{\tilde{z}}$, viene dada por:

$$P_{\tilde{z}}(k|k-1) = C_zP(k|k-1)C_z^\top + D_zD_z^\top. \quad (2.4.3)$$

Además, si A es estable, entonces existe $P \geq 0$ y K_{sp} tales que

$$K_{sp} = \lim_{k \rightarrow \infty} K_{sp}(k), \quad (2.4.4)$$

$$P = \lim_{k \rightarrow \infty} P(k|k-1). \quad (2.4.5)$$

En estos casos, el filtro se reduce a un filtro estacionario. La función de transferencia desde y a \hat{z} que describe al estimador óptimo en este caso es:

$$H(q) = C_z (qI - A + K_{sp}C_y)^{-1} K_{sp}, \quad (2.4.6)$$

donde $(A - K_{sp}C_y)$ es estable. ■

Observación 2.4.1. Existen versiones del Filtro de Kalman estacionario que no requieren que A sea estable, sino que imponen condiciones sobre el par (A, C) [?].

De las expresiones en el Lema 2.4.1, se puede ver inmediatamente que la estimación $\hat{x}(k+1|k)$ viene dada por una copia del modelo del sistema (vea (2.4.1)), más un término de corrección asociado al error de predecir $y(k)$ usando $y(0), \dots, y(k-1)$.

El Lema 2.4.1 permite hallar el filtro estrictamente propio que, alimentado por y , entrega estimaciones óptimas de z . El Filtro de Kalman puede modificarse para hallar el filtro propio que entrega estimaciones estacionarias óptimas de $z(k)$:

Lema 2.4.2 (Filtro bipropio [?]).

Sea el sistema descrito por (2.4.1). El conjunto de ecuaciones recursivas que permiten hallar el estimador que minimiza el error cuadrático medio de $z(k)$ cuando se usan las mediciones $y(0), \dots, y(k)$ están dadas por:

$$\hat{x}(k|k-1) = A\hat{x}(k-1|k-1) \quad (2.4.7a)$$

$$P(k|k-1) = AP(k-1|k-1)A^\top + BB^\top \quad (2.4.7b)$$

$$K_{bp}(k) = (C_z P(k|k-1)C_y^\top + D_z D_y^\top) (C_y P(k|k-1)C_y^\top + D_y D_y^\top)^{-1} \quad (2.4.7c)$$

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + P(k|k-1)C_y^\top (C_y P(k|k-1)C_y^\top + D_y D_y^\top)^{-1} (y(k) - C_y \hat{x}(k|k-1)) \quad (2.4.7d)$$

$$\hat{z}(k|k) = C_z \hat{x}(k|k-1) + K_{bp}(k) (y(k) - C_y \hat{x}(k|k-1)) \quad (2.4.7e)$$

En (2.4.7), $K_{bp}(k)$ denota la ganancia del filtro en el instante k . Luego, el costo, o la varianza del error de estimación de la salida desconocida, $P_{\bar{z}}$, viene dada por:

$$P_{\bar{z}}(k|k) = C_z P(k|k-1)C_z^\top + D_z D_z^\top - K_{bp}(k) (C_z P(k|k-1)C_y^\top + D_z D_y^\top)^\top. \quad (2.4.8)$$

Además, si A es estable, entonces existe $P \geq 0$ y K_{bp} tales que

$$K_{bp} = \lim_{k \rightarrow \infty} K_{bp}(k), \quad (2.4.9)$$

$$P = \lim_{k \rightarrow \infty} P(k|k-1). \quad (2.4.10)$$

En estos casos, el filtro se reduce a un filtro estacionario. La función de transferencia desde y a \hat{z} que describe al estimador óptimo en este caso es:

$$H(q) = (C_z - K_{bp}C_y) (qI - A + K_{sp}C_y)^{-1} K_{sp} + K_{bp} \quad (2.4.11)$$

donde $(A - K_{bp}C_y)$ es estable, y K_{sp} está dado en (2.4.2d). ■

Observación 2.4.2. *Note que siempre se puede computar primero la matriz de varianza del error de estimación para el filtro de Kalman estrictamente propio, y luego actualizarla tomando en cuenta la medición adicional $y(k)$. En particular, se puede probar que (vea (2.4.3) y (2.4.8)):*

$$P_{\tilde{z}}(k|k) = P_{\tilde{z}}(k|k-1) - K_{bp}(k) (C_z P(k|k-1) C_y^T + D_z D_y^T)^T \quad (2.4.12)$$

Esto indica que, como era de esperarse, el conocimiento de $y(k)$ disminuye la incertidumbre acerca de $\tilde{z}(k)$.

2.5. Conclusiones

En este capítulo se ha hecho una revisión de ciertos resultados que son la base para el desarrollo que presentaremos en los capítulos posteriores. Los conceptos aquí expuestos serán utilizados constantemente a medida que se avance en la presentación de los resultados de las siguientes secciones.

ESTIMACIÓN ESTACIONARIA SUJETA A LA PÉRDIDA DE DATOS

3.1. Introducción

Este capítulo presenta una técnica para enfrentar problemas de estimación de señales modeladas a través de sistemas LTI MIMO, en casos en que las mediciones correspondientes se hacen a través de un canal de borrado, es decir, a través de un canal que pierde los datos de forma aleatoria.

En la práctica es razonable suponer que el protocolo de comunicación permite diferenciar datos válidos de datos corruptos. Este conocimiento será explotado para gatillar un mecanismo de compensación de pérdidas cada vez que ello ocurra.

El capítulo está organizado como sigue: En la Sección 3.2, se plantea formalmente el problema de estimación de interés. En la Sección 3.3, se presenta la estrategia de solución propuesta. La solución se obtiene en términos de la solución de una ecuación algebraica de Riccati modificada. Luego, en la Sección 3.3.1 se obtienen expresiones cerradas para la varianza del error de estimación en el caso en que la señal medida sea escalar. La Sección 3.3.2 muestra una comparación entre el esquema de compensación usado en este capítulo y otros compensadores que son frecuentemente utilizados en la literatura. Finalizamos el capítulo con ejemplos que ilustran los resultados.

3.2. Definición del problema

Considere un sistema LTI S descrito por

$$x(k+1) = Ax(k) + Bw(k), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad x(0) = x_0, \quad (3.2.1a)$$

$$y(k) = C_y x(k) + D_y w(k), \quad (3.2.1b)$$

$$z(k) = C_z x(k) + D_z w(k), \quad (3.2.1c)$$

donde $x(k)$ representa el estado del sistema en el instante k , x_0 es el estado inicial del sistema, $z(k)$ es la señal que se desea estimar y corresponde a una combinación lineal del estado

contaminada con ruido, $y(k)$ corresponde a una salida medible del sistema en el instante k , señal que se envía a través de un canal de borrado, mientras que $\omega(k)$ corresponde a ruido blanco de media cero y varianza $P_\omega = I$. En (3.2.1), las matrices $(A, B, C_y, D_y, C_z, D_z)$ son matrices reales de dimensiones adecuadas.

Las mediciones de y se envían a través de un canal cuya salida, digamos y_θ , viene dada por

$$y_\theta(k) = \theta(k)y(k), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (3.2.2)$$

donde θ representa una secuencia binaria que toma valores en $\{0, 1\}$ y que describe la pérdida de datos en el canal. Supondremos que el receptor de $y_\theta(k)$ tiene acceso a $\theta(k)$ sin retardo alguno.

Proponemos estimar $z(k)$ usando el estimador

$$\begin{bmatrix} \hat{z} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \text{diag}\{I_{n_z}, q^{-1}I_{n_y}\}Hy_H, \quad (3.2.3)$$

$$y_H(k) = y_\theta(k) + (1 - \theta(k))\hat{y}(k), \quad (3.2.4)$$

donde n_α representa la dimensión de α , y H es una función de transferencia causal, con n_y entradas y $(n_z + n_y)$ salidas. Se puede ver inmediatamente que el estimador propuesto construye de forma simultánea la estimación de la señal de interés (\hat{z}) y, además, una estimación de los datos perdidos (\hat{y}). Estas estimaciones son usadas para reemplazar a y cuando hayan pérdidas en el canal.

La Figura 3.1 muestra una representación gráfica del estimador propuesto al usar mediciones enviadas a través del canal descrito por (3.2.2).

Observación 3.2.1. En (3.2.3), se ha supuesto que la relación entre y_H e \hat{y} viene dada por una función de transferencia estrictamente propia, es decir, estrictamente causal. Esto garantiza que el estimador está bien definido (well-posed, ver Cap. 5 en [?]).

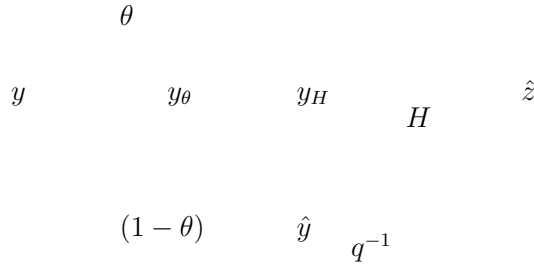


Figura 3.1. Diagrama del filtro propuesto

El objetivo del estimador propuesto es estimar $z(k)$, usando todas las muestras anteriores de y hasta el instante k , y reemplazando las muestras perdidas de y por estimaciones \hat{y} . Si definimos el error de estimación correspondiente como

$$\tilde{z}(k) = \hat{z}(k) - z(k), \quad (3.2.5)$$

entonces podemos representar el sistema resultante de estimar z en base a mediciones de y_θ y θ , como muestra la Figura 3.2 (Figura que resulta de un arreglo algebraico entre las relaciones de las variables involucradas). Nuestro interés es hallar el filtro H que minimiza la varianza de \tilde{z} .

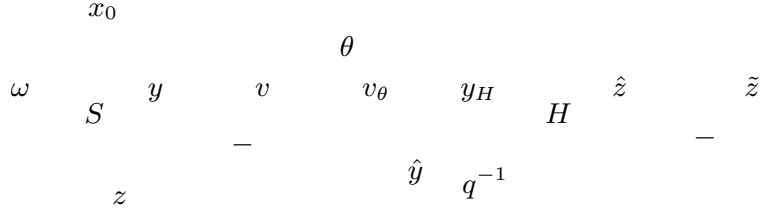


Figura 3.2. Sistema que se obtiene al usar el estimador propuesto para estimar z .

En este trabajo de tesis se trabajará bajo las siguientes suposiciones:

Suposición 3.2.1.

- El sistema S en (3.2.1) es asintóticamente estable.
- El estado inicial $x(0) = x_0$ corresponde a una variable aleatoria de segundo orden.
- La variable que describe el proceso de perdidas, es decir θ , corresponde a una secuencia i.i.d., que toma valores en $\{0, 1\}$ y tal que $\text{Prob}\{\theta(k) = 1\} = p$ para algún $p \in (0, 1)$.
- Las variables (x_0, ω, θ) son mutuamente independientes.

Con los elementos anteriores podemos definir formalmente el problema de interés en este capítulo.

Problema 3.2.1.

Considere el sistema descrito en (3.2.1), y suponga que se envían mediciones de y a través del canal descrito por (3.2.2) y que se usa el estimador propuesto en (3.2.3) para estimar z . Si la Suposición 3.2.1 es válida, entonces, halle el filtro H propio que resuelve el problema de determinar

$$[\sigma_{\tilde{z}}^2]_{\text{opt}} \triangleq \inf_{H \in \mathcal{S}} \text{traza}\{P_{\tilde{z}}\}, \quad (3.2.6)$$

donde $P_{\tilde{z}}$ denota la matriz de varianza de \tilde{z} , \mathcal{S} describe al conjunto de sistemas LTI propios, tal que el estimador es MSS. Denotaremos a tal filtro como H_{opt} . ■

Observación 3.2.2. El que $H \in \mathcal{S}$ implica que el estimador H en la Figura 3.1 será MSS, por lo que como consecuencia, y bajo la suposición de que el sistema S es internamente estable, entonces el sistema total interconectado en la Figura 3.2 también será MSS, garantizando que los efectos de las condiciones iniciales de H sobre \hat{y} y \hat{z} desaparezcan en estado estacionario.

En la literatura se han resuelto casos particulares del Problema 3.2.1. Por ejemplo, en [?, ?, ?, ?] se ha considerado el caso en que $H = \begin{bmatrix} H_1^\top & 0 \end{bmatrix}^\top$, lo que implica que la compensación de la pérdida de datos es tal que se reemplazan las muestras no recibidas por ceros. Asimismo, en [?, ?, ?] se han considerado filtros de la forma $H = \begin{bmatrix} H_1^\top & q^{-1} \end{bmatrix}^\top$, implicando esto que las muestras no recibidas de y se reemplazan por la última muestra correctamente recibida.

A diferencia de los trabajos recién nombrados, en este trabajo de tesis se construye una estimación \hat{z} para z , usando todas las muestras pasadas de y que se transmiten exitosamente a través del canal (incluyendo la muestra actual), y reemplazando las muestras perdidas por las estimaciones óptimas contenidas en \hat{y} .

Cabe notar que el mejor estimador de z que usa las mediciones presentes y pasadas de θ e y_θ está dado por un Filtro de Kalman (variante en el tiempo) que depende de manera explícita del valor de θ [?]. En general, este filtro no converge a un filtro estacionario. Esto motivó a [?] a desarrollar un Filtro de Kalman de ganancia constante. Al usar este estimador, \hat{z} se construye a través de

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + J_1(y_\theta(k) - \theta(k)C_y\hat{x}(k)), \quad (3.2.7a)$$

$$\hat{z}(k) = C_z\hat{x}(k) + J_2(y_\theta(k) - \theta(k)C_y\hat{x}(k)), \quad (3.2.7b)$$

donde J_1 y J_2 son ganancias constantes que dependen de los parámetros de la planta en cuestión, y de la solución a una ecuación algebraica de Riccati modificada (MARE), ecuación que será presentada más adelante.

La estructura del estimador en (3.2.7) es similar a la del Filtro de Kalman. Cuando no hay pérdidas en la transmisión de las mediciones, el estimador entrega una estimación correspondiente a la del Filtro de Kalman estacionario. Cuando sí hay pérdidas, se propagan las estimaciones anteriormente calculadas por el filtro, siendo así un estimador más específico que el acá propuesto, ya que éste otorga estimaciones óptimas de los datos perdidos y son posteriormente utilizados en la estimación de estado cuando estas perdidas ocurren.

3.3. Diseños óptimos

En esta sección se caracterizará la elección óptima para el filtro H que define al estimador propuesto. Para esto, cabe recordar que el sistema resultante de interconectar la planta descrita por (3.2.1) y el estimador en (3.2.3) a través del canal (3.2.2), se puede ver en la Figura 3.2. Más adelante, se comprobará que es conveniente definir el sistema LTI auxiliar que se muestra en la Figura 3.3, sistema en el que se ha conservado la estructura del sistema de la Figura 3.2 y se ha cambiado solamente la relación entre v y v_θ . Concretamente, se ha reemplazado el canal de borrado de la Figura 3.2 por una ganancia p , igual a la probabilidad de transmisión exitosa, y una fuente de ruido aditivo n .

Observación 3.3.1. *En la Figura 3.3 se ha agregado el sub-índice “L” a todas las variables cuyas estadísticas se ven afectadas por el cambio de representación del canal.*

Suposición 3.3.1 (Ruido aditivo).

El ruido auxiliar n es ruido blanco de segundo orden, y media cero, no correlacionado con (x_0, ω) , y su matriz de varianza (constante) está dada por P_n .

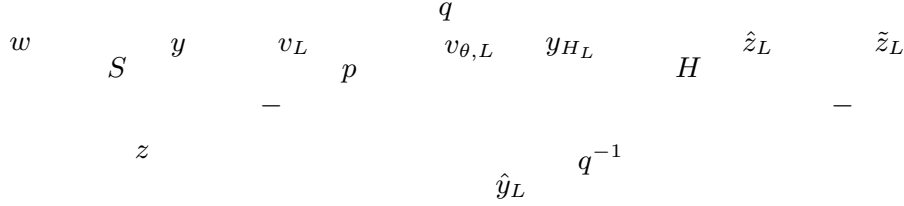


Figura 3.3. Sistema LTI auxiliar que surge cuando se reemplaza el canal de comunicación en la Figura 3.2 por una fuente de ruido y una ganancia.

Lema 3.3.1.

Considere el sistema de la Figura 3.2 y el sistema LTI auxiliar mostrado en la Figura 3.3. Sea P_α y P_{α_L} la matriz de varianza estacionaria de la señal α en la Figura 3.2, y de α_L en la Figura 3.3, respectivamente (donde $\alpha \in \{y_H, \hat{y}, \hat{z}, \tilde{z}\}$). Entonces:

1. H pertenece a \mathcal{S} si y sólo si el sistema LTI auxiliar de la Figura 3.3 es estable y está bien definido, y existe una elección para P_n tal que

$$P_n = p(1-p)P_{v_L}. \quad (3.3.1)$$

2. Si H pertenece a \mathcal{S} y se cumple (3.3.1), entonces $P_\alpha = P_{\alpha_L}$ para $\alpha \in \{y_H, \hat{y}, \hat{z}, \tilde{z}\}$.

Demostración: La demostración se basa en los resultados de [?]. (Ver Sección A.1 en el Apéndice A). ■

El Teorema 3.3.1 establece que el Problema 3.2.1 es equivalente a encontrar el filtro H que, en la Figura 3.3, minimiza la varianza de \tilde{z}_L satisfaciendo la relación señal a ruido (SNR) impuesta por (3.3.1). A continuación usaremos el Lema 3.3.1, para hacer explícita la estructura del estimador óptimo.

Teorema 3.3.1.

Considere el Problema 3.2.1. Entonces:

1. H pertenece a \mathcal{S} si y sólo si

$$H = (I + Q \begin{bmatrix} 0 & (1-p)q^{-1} \end{bmatrix})^{-1} Q \quad (3.3.2)$$

para algún $Q = \begin{bmatrix} Q_1^T & Q_2^T \end{bmatrix}^T$, donde $Q_1 \in \mathcal{RH}_\infty^{n_z \times n_y}$, $Q_2 \in \mathcal{RH}_\infty^{n_y \times n_y}$, y existe una elección (positiva semidefinida) para P_n tal que

$$P_n = p(1-p)I_2(Q_2, P_n), \quad (3.3.3)$$

donde

$$\begin{aligned} I_2(Q_2, P_n) \triangleq & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(I - \frac{pQ_2(e^{j\omega})}{e^{j\omega}} \right) S_y(e^{j\omega}) \left(I - \frac{pQ_2(e^{j\omega})}{e^{j\omega}} \right)^H d\omega \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_2(e^{j\omega}) P_n Q_2(e^{j\omega})^H d\omega \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

2. Si H pertenece a \mathcal{S} , entonces

$$P_{\bar{z}} = I_1(Q_1, P_n), \quad (3.3.5)$$

donde

$$I_1(Q_1, P_n) \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (G_z(e^{j\omega}) + pQ_1(e^{j\omega})G_y(e^{j\omega})) \cdot (G_z(e^{j\omega}) + pQ_1(e^{j\omega})G_y(e^{j\omega}))^H d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_1(e^{j\omega})P_nQ_1(e^{j\omega})^H d\omega \quad (3.3.6)$$

donde $G_\alpha(q) \triangleq C_\alpha(qI - A)B + D_\alpha$ para $\alpha \in \{z, y\}$, y P_n es la solución (positiva semidefinida) de (3.3.3).

3. Sea $m_L \triangleq n + py$, y suponga que la varianza de n satisface (3.3.3). Entonces, la elección óptima para H es tal que los parámetros Q_1 y Q_2 en (3.3.2) satisface lo siguiente:

- $q^{-1}Q_2$ corresponde al filtro lineal que minimiza el error cuadrático medio (MSE) cuando se estima $y(k)$ usando las mediciones de $m_L(0), m_L(1), \dots, m_L(k-1)$.
- Q_1 corresponde al filtro lineal que minimiza el MSE cuando se estima $z(k)$ usando las mediciones de $m_L(0), m_L(1), \dots, m_L(k)$.

Demostración:

Primero, notamos que el sistema de la Figura 3.3 se puede representar como se muestra en la Figura 3.4,

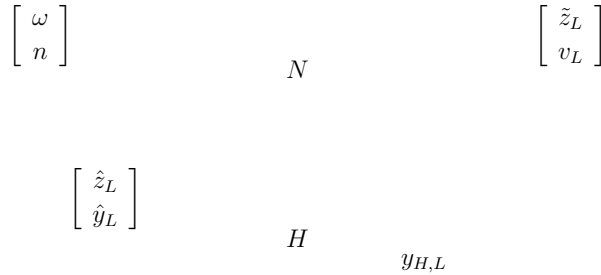


Figura 3.4. Representación realimentada de Figura 3.3

donde N es una planta generalizada descrita por

$$\begin{pmatrix} \hat{z}_L \\ v_L \\ y_{H,L} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} -G_z & 0 & I & 0 \\ G_y & 0 & 0 & -q^{-1} \\ pG_y & 1 & 0 & (1-p)q^{-1} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \omega \\ n \\ \hat{z}_L \\ \hat{y}_L \end{pmatrix} \quad (3.3.7)$$

Dada la parametrización de Youla-Kucera para controladores estabilizantes [?] (ver Sección 2.2.2), concluimos que H es propio y tal que el sistema LTI auxiliar en la Figura 3.3 es estable y está bien definido si y sólo si

$$H = (I + Q \begin{bmatrix} 0 & (1-p)q^{-1} \end{bmatrix})^{-1} Q \quad (3.3.8)$$

para algún parámetro de Youla $Q = [Q_1^\top \ Q_2^\top]^\top \in \mathcal{RH}_\infty$.

Luego, notando de la Figura 3.3 que $y_{H,L}$ está descrita por

$$y_{H,L}(k) = \hat{y}_L(k) + n(k) + (1-p)\hat{y}_L(k), \quad (3.3.9)$$

entonces, al reemplazar (3.3.2) en (3.2.3) se llega a

$$\begin{bmatrix} \hat{z}_L \\ \hat{y}_L \end{bmatrix} = (I + (1-p)q^{-1}Q_2)^{-1} \begin{pmatrix} Q_1 \\ q^{-1}Q_2 \end{pmatrix} y_{H,L}, \quad (3.3.10)$$

donde al reemplazar (3.3.9) se llega a

$$\hat{z}_L = Q_1 m_L, \quad (3.3.11)$$

$$\hat{y}_L = Q_2 q^{-1} m_L, \quad (3.3.12)$$

donde m_L viene dado por

$$m_L = n + py, \quad (3.3.13)$$

expresión que se obtiene del reemplazo de (3.3.9) en (3.3.10), notando que también es fácil de ver en (3.3.9) que

$$\begin{aligned} m_L &= y_{H,L} - (1-p)\hat{y}_L \\ &= n + py. \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

Entonces,

$$\tilde{z}_L = z - Q_1 m_L \quad (3.3.15)$$

$$= (z - pQ_1 y) - Q_1 n \quad (3.3.16)$$

$$v_L = (I - pQ_2 q^{-1}) y - Q_2 q^{-1} n. \quad (3.3.17)$$

Así, es inmediato notar que al tomar la varianza de v_L en (3.3.17) y reemplazarla en (3.3.1), se llega a (3.3.3), mientras que de forma análoga al tomar la varianza de \tilde{z}_L en (3.3.16) se llega a (3.3.5), probando así la Parte 1 y Parte 2 de este Corolario.

Para demostrar la Parte 3, se debe notar que el desarrollo expuesto, la elección óptima para H asegura la obtención de mínima varianza para v_L , y dado (3.3.1) entonces n también tiene mínima varianza, por lo que Q_1 y Q_2 garantizan que \tilde{z}_L tiene varianza mínima dentro de la clase considerada de filtros. ■

Del Lema 3.3.1 y del Teorema 3.3.1 se desprende que los problemas de análisis y diseño del estimador propuesto se pueden abordar considerando el sistema LTI de la Figura 3.5.

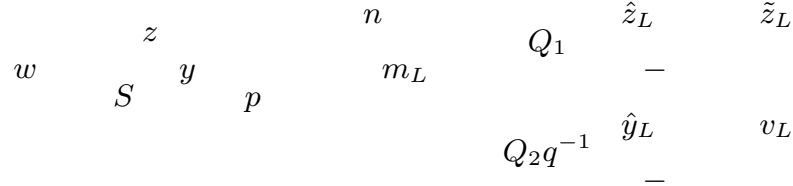


Figura 3.5. Estructura del estimador propuesto

Concretamente, se concluye que el problema de encontrar el filtro H se puede dividir en dos etapas:

- El primer paso corresponde al diseño del compensador de pérdida de datos. Para ello se debe encontrar $Q_2 \in \mathcal{RH}_\infty$ y $0 \leq P_n < \infty$ es tal que satisfagan la restricción de SNR en (3.3.3). En particular, la elección óptima para Q_2 y P_n se encuentra resolviendo (ver Figura 3.5)

$$\inf_{\substack{Q_2 \in \mathcal{RH}_\infty, P_n \geq 0 \\ P_n = p(1-p)P_{v_L}}} P_{v_L} = \inf_{\substack{Q_2 \in \mathcal{RH}_\infty, P_n \geq 0 \\ P_n = p(1-p)I_2(Q_2, P_n)}} I_2(Q_2, P_n) \quad (3.3.18)$$

Este problema corresponde a un problema de predicción lineal, a un paso adelante, sujeto a una restricción SNR estacionaria.

- El segundo paso corresponde al de hallar un estimador para z , bastando para ello elegir $Q_1 \in \mathcal{RH}_\infty$. Note que para cualquier $Q_1 \in \mathcal{RH}_\infty$, la varianza estacionaria del error de estimación \tilde{z} queda en función de los parámetros del sistema original S , la probabilidad de transmisión exitosa p y P_n . Por lo tanto, la dependencia de la varianza de \tilde{z} con respecto al esquema de compensación de pérdida de datos, es sólo indirecta a través de la varianza P_n del ruido auxiliar n .

La elección óptima para Q_1 se encuentra resolviendo

$$\inf_{Q_1 \in \mathcal{RH}_\infty} P_{\tilde{z}} \Big|_{P_n = P_{n, \text{opt}}} = \inf_{Q_1 \in \mathcal{RH}_\infty} I_1(Q_1, P_{n, \text{opt}}), \quad (3.3.19)$$

donde $P_{n, \text{opt}}$ es la varianza óptima para n hallada al resolver (3.3.18). Este problema corresponde a un problema estándar de filtraje lineal, donde se usan las mediciones $m_L = n + py$ para estimar z .

Estamos ahora en condiciones de resolver el Problema 3.2.1:

Corolario 3.3.1.

Considere el Problema 3.2.1. Entonces:

1. La elección óptima para H viene dada por

$$H_{\text{opt}} = \left[\begin{array}{c|c} \frac{A - J_1 C_y}{C_z - J_2 C_y} & \frac{J_1}{J_2} \\ \hline C_y & 0 \end{array} \right], \quad (3.3.20)$$

donde

$$J_1 = (APC_y^\top + BD_y^\top)(C_y PC_y^\top + D_y D_y^\top)^{-1}, \quad (3.3.21a)$$

$$J_2 = (C_z PC_y^\top + D_z D_y^\top)(C_y PC_y^\top + D_y D_y^\top)^{-1}, \quad (3.3.21b)$$

y P satisface la MARE $P = \Phi_p(P)$, con

$$\Phi_p(P) \triangleq APA^\top - p(APC_y^\top + BD_y^\top)(C_y PC_y^\top + D_y D_y^\top)^{-1}(APC_y^\top + BD_y^\top)^\top + BB^\top \quad (3.3.22)$$

2. La mínima varianza del error de estimación viene dada por

$$[\sigma_z^2]_{\text{opt}} = \text{tr} \{ C_z PC_z^\top + D_z D_z^\top - p J_2 (C_z PC_y^\top + D_z D_y^\top) \} \quad (3.3.23)$$

donde P y J_2 corresponden a los definidos en la Parte 1 de este Corolario.

Demostración:

Dada la Parte 3 del Corolario 3.3.1 y dado los Lemas 2.4.1 y 2.4.2 concluimos que Q_1 y $Q_2 q^{-1}$ son tal que sus respectivas salidas satisfacen

$$\hat{y}_L(k) = C_y \hat{x}(k), \quad (3.3.24a)$$

$$\begin{aligned} \hat{z}_L(k) &= C_z \hat{x}(k) + J_2 (m_L(k) - p C_y \hat{x}(k)) \\ &= C_z \hat{x}(k) + J_2 (y_{H,L}(k) - \hat{y}_L(k)), \end{aligned} \quad (3.3.24b)$$

donde hemos usado (3.3.14) y la estimación de estado \hat{x} satisface

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k) + J_1 (m_L(k) - p C_y \hat{x}(k)) \\ &= A\hat{x}(k) + J_1 (y_{H,L}(k) - \hat{y}_L(k)), \end{aligned} \quad (3.3.25a)$$

con

$$J_1 = p(APC_y^\top + BD_y^\top) [p^2 (C_y PC_y^\top + D_y D_y^\top) + P_n]^{-1}, \quad (3.3.26a)$$

$$J_2 = p(C_z PC_y^\top + D_z D_y^\top) [p^2 (C_y PC_y^\top + D_y D_y^\top) + P_n]^{-1}, \quad (3.3.26b)$$

y donde P corresponde a la única solución positiva semidefinida de la MARE:

$$P = APA^\top - p(APC_y^\top + BD_y^\top) [p^2 (C_y PC_y^\top + D_y D_y^\top) + P_n]^{-1} p(APC_y^\top + BD_y^\top)^\top + BB^\top, \quad (3.3.27)$$

notando que dicha ecuación se simplificará al introducir la restricción de SNR como se enuncia más adelante. Notamos ahora que (ver Figura 3.5) la estimación para y , i.e. \hat{y} , es tal que minimiza la varianza de v_L , por lo tanto al tomar en cuenta el Lema 2.4.1, se tiene que P_{v_L} viene dado por

$$P_{v_L} = C_y PC_y^\top + D_y D_y^\top. \quad (3.3.28)$$

Entonces, como se debe cumplir (3.3.1) (ver Lema 3.3.1), se tiene que

$$P_n = p(1-p) (C_y PC_y^\top + D_y D_y^\top) \quad (3.3.29)$$

Luego, reemplazando (3.3.29) en (3.3.27) y (3.3.26) se llega a (3.3.22) y (3.3.21) respectivamente, donde (3.3.22) corresponde a la MARE.

Finalmente, de (3.3.24) la demostración está completa notando que las propiedades de la MARE [?] (ver sección A.4 en el Apéndice) garantizan que $(A - pJ_1 C_y)$ es estable, y por lo tanto, los parámetros Q_1 y Q_2 (que están implícitos en (3.3.24) y (3.3.25), para esto ver (3.3.11)) son estables. ■

El Corolario 3.3.1 entrega una solución al Problema 3.2.1 en términos de la solución de la MARE en (3.3.22). Esta ecuación ha sido estudiada previamente en el contexto de filtros de Kalman de ganancia constante [?], apareciendo también en [?], donde los autores estudian problemas de estimación óptima sujeta a cuantización y hacen uso de un modelo de ruido aditivo sujeto a una restricción SNR para el error de cuantización.

El hecho de que los diseños óptimos en [?] también descansen en la solución de la MARE puede entenderse como una consecuencia de la estrecha relación entre la pérdida de datos y las restricciones SNR, presentada en el Lema 3.3.1.

Corolario 3.3.2.

Si, en (3.2.3), $H = H_{\text{opt}}$, entonces el estimador propuesto se reduce al filtro de Kalman de ganancia constante descrito por (3.2.7), donde J_1 y J_2 se presentan en el Corolario 3.3.1.

Demostración:

Primero notamos que, al reemplazar $H = H_{\text{opt}}$ del Corolario 3.3.1 en (3.2.3), se tiene que el filtro está descrito por:

$$\hat{x}(k+1) = (A - J_1 C_y) \hat{x}(k) + J_1 y_H(k), \quad (3.3.30a)$$

$$\hat{z}(k) = (C_z - J_2 C_y) \hat{x}(k) + J_2 y_H(k), \quad (3.3.30b)$$

$$\hat{y}(k) = C_y \hat{x}(k). \quad (3.3.30c)$$

Luego, de (3.2.2) se despeja y_θ como

$$y_\theta(k) = y_H(k) - (1 - \theta(k)) \hat{y}(k), \quad (3.3.31)$$

por lo que al reemplazar (3.3.31) en (3.2.7) se llega a que el filtro de Kalman de ganancia constante es equivalente a

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k) + J_1(y_H(k) - \hat{y}(k)) \\ &= A\hat{x}(k) + J_1(y_H(k) - C_y\hat{x}(k))\end{aligned}\quad (3.3.32a)$$

$$\begin{aligned}\hat{z}(k) &= C_z\hat{x}(k) + J_2(y_H(k) - \hat{y}(k)) \\ &= C_z\hat{x}(k) + J_2(y_H(k) - C_y\hat{x}(k))\end{aligned}\quad (3.3.32b)$$

Notando que mediante un arreglo algebraico se llega fácilmente desde (3.3.32) a (3.3.30), completando así la demostración. \blacksquare

Es inmediato notar que el desempeño alcanzable por el filtro aquí propuesto no puede ser mejor que aquel del filtro óptimo en [?], o que aquel al filtro lineal con saltos markovianos propuesto en [?]. Esos filtros corresponden a una clase más general de filtros que los estudiados en este trabajo de tesis.

3.3.1. Expresiones en forma cerrada en el caso de mediciones escalares

A continuación se supondrá que y es una señal escalar y se presentarán expresiones cerradas que permiten entender el efecto de la pérdida de datos en la calidad de la estimación.

El lector recordará de (3.3.19) que la varianza P_n del ruido auxiliar n juega un rol relevante en la caracterización de la varianza del error de estimación. El siguiente resultado caracteriza la elección óptima para P_n :

Teorema 3.3.2.

Considere el Problema 3.2.1 y suponga que la medición y es escalar. Entonces, $P_{n,\text{opt}}$, es decir, el valor óptimo para P_n definido en la Parte 1 del Lema 3.3.1, es la única solución real y positiva de la ecuación

$$\frac{1}{1-p} = F_p(P_{n,\text{opt}}), \quad (3.3.33)$$

donde

$$F_p(P_n) \triangleq \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log\left(1 + \frac{p^2 S_y[e^{j\omega}]}{P_n}\right) d\omega\right) \quad (3.3.34)$$

y S_y es la PSD estacionaria de y .

Demostración:

Del Lema 3.3.1 y el Corolario 3.3.1 se concluye que, para cualquier $H \in \mathcal{S}$,

$$P_{v_L} = \|(1-pQ_2q^{-1})\Omega_y\|_2^2 + P_n\|Q_2\|_2^2 = \frac{P_n}{p(1-p)}, \quad (3.3.35)$$

donde $\Omega_y \in \mathcal{RH}_\infty$ es tal que $S_y = |\Omega_y|^2$ y $Q_2 \in \mathcal{RH}_\infty$. Dado que $D_y D_y^T > 0$, entonces $\Omega_y \neq 0$ y por lo tanto $(1-pQ_2q^{-1})\Omega_y \neq 0$ para cualquier $Q_2 \in \mathcal{RH}_\infty$. En consecuencia, podemos restringir la búsqueda sobre los $Q_2 \in \mathbb{Q}_2$, donde $\mathbb{Q}_2 \triangleq \{Q_2 \in \mathcal{RH}_\infty : 1-p(1-p)\|Q_2\|_2^2 > 0\}$. Así, (3.3.35) permite escribir

$$P_{n,\text{opt}} = \inf_{Q_2 \in \mathbb{Q}_2} P_n = \inf_{Q_2 \in \mathbb{Q}_2} \frac{p(1-p)\|(1-pQ_2q^{-1})\Omega_y\|_2^2}{1-p(1-p)\|Q_2\|_2^2} \quad (3.3.36)$$

Usando el Lema A.2.1 en la Sección A.2 del Apéndice, concluimos de (3.3.36) que $P_{n,\text{opt}}$ es tal que

$$\begin{aligned} 0 &= \inf_{Q_2 \in \mathbb{Q}_2} \{p(1-p) \|(1-pQ_2q^{-1})\Omega_y\|_2^2 - P_{n,\text{opt}}(1-p(1-p)\|Q_2\|_2^2)\} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{p(1-p)} &= \inf_{Q_2 \in \mathcal{RH}_\infty} \left\{ \frac{1}{P_{n,\text{opt}}} \|(1-pQ_2q^{-1})\Omega_y\|_2^2 + \|Q_2\|_2^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.3.37)$$

En (3.3.37), se ha usado el que $(1-pQ_2q^{-1})\Omega_y \neq 0$ para cualquier $Q_2 \in \mathcal{RH}_\infty$, y $p \in (0, 1)$, garantiza que $P_{n,\text{opt}} > 0$ y que la desigualdad que define a \mathbb{Q}_2 se satisface de forma implícita al resolver el problema de optimización en (3.3.37).

El problema de optimización en (3.3.37) se puede resolver explícitamente usando el Lema A.3.1 del Apéndice, llegándose inmediatamente a (3.3.33) a partir de (3.3.37).

Finalmente, verificaremos la existencia y unicidad de la varianza $P_{n,\text{opt}}$ que satisface (3.3.33). Claramente,

$$\frac{dF_p}{dP_n}(P_n) = -\frac{p^2 F_p(P_n)}{2\pi P_n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{S_y[e^{j\omega}]}{P_n + p^2 S_y[e^{j\omega}]} d\omega < 0, \quad (3.3.38)$$

para cualquier $P_n > 0$. Además, $\lim_{P_n \rightarrow 0} F_p(P_n) = \infty$, y $\lim_{P_n \rightarrow \infty} F_p(P_n) = 1$. Por lo tanto, concluimos que F_p es decreciente y posee asíntotas tales que, para cualquier $p \in (0, 1)$, hacen que (3.3.33) admita siempre una única solución. ■

El Teorema 3.3.2 permite entender la relación existente entre el espectro de la señal medible (y), la probabilidad de transmisión exitosa (p) y el desempeño alcanzable por el estimador óptimo. De esta forma, podemos observar que el desempeño de este estimador será mejor en una planta cuya PSD sea menor, en comparación a si se cuenta con una planta cuya señal medible posea una PSD mayor. Asimismo, se puede observar que mientras la probabilidad de transmisión exitosa sea mayor, el desempeño del estimador óptimo será mejor.

Observación 3.3.2. *Note que, si $p \rightarrow 1$, entonces $P_{n,\text{opt}} = 0$, lo que implica (como es natural) que el estimador óptimo se reduce al filtro de Kalman estacionario estándar, lo que se puede ver al reemplazar $p = 1$ en (3.3.22). Por otro lado, si $p \rightarrow 0$, entonces $P_{n,\text{opt}} \rightarrow \infty$ (lo que se puede ver de forma más clara en el Teorema 3.3.2, al evaluar el comportamiento de $P_{n,\text{opt}}$ en los extremos de p), lo que implica que $Q_1 = 0$ es la única elección admisible para Q_1 y, por lo tanto, $P_z = P_z$. Para ver esto, cabe notar que cuando los datos se pierden de forma casi segura, i.e. $p \rightarrow 0$, la varianza del error de estimación dependiente de la solución de una MARE se vuelve dependiente de la solución a una ecuación de Lyapunov de tiempo discreto (esto se ve reemplazando $p = 0$ en (3.3.22)).*

Lo interesante del resultado presentado en el Teorema 3.3.2 está en que deja al descubierto el efecto que tiene el espectro de y en la calidad de la estimación. Por ejemplo, si y posee un espectro de magnitud suficientemente grande en un rango de frecuencia importante, entonces p cercano a 1 no necesariamente implicará $P_{n,\text{opt}}$ cercano a 0. Una conclusión similar se puede obtener para el caso contrario, en que S_y sea suficientemente pequeño sobre algún rango de frecuencias grande. En dicho caso, p cercano a 0 no necesariamente implicará que $P_{n,\text{opt}}$ sea significativo.

A continuación se considerará otro caso especial en el que $z = y$, es decir, se supondrá que se desea estimar la señal que se está enviando a través del canal.

Corolario 3.3.3.

Considere el Problema 3.2.1, suponga que la señal y es escalar y, además, que $z = y$. Entonces, $[\sigma_{\hat{z}}^2]_{\text{opt}} = p^{-1} P_{n, \text{opt}}$, donde $P_{n, \text{opt}}$ es el único real positivo que satisface (3.3.33). Además, $\lim_{p \rightarrow 1} [\sigma_{\hat{z}}^2]_{\text{opt}} = 0$ y $\lim_{p \rightarrow 0} [\sigma_{\hat{z}}^2]_{\text{opt}} = \text{tr} \{P_y\}$.

Demostración:

Usando el Lema 3.3.1 y el Corolario 3.3.1, tenemos que, si $P_n = P_{n, \text{opt}}$ y $z = y$ corresponden a señales escalares, entonces

$$\begin{aligned} [\sigma_{\hat{z}}^2]_{\text{opt}} &= \inf_{Q_1 \in \mathcal{RH}_\infty} \{ \|(1 - p Q_1) \Omega_y\|_2^2 + P_{n, \text{opt}} \|Q_1\|_2^2 \} \\ &= \frac{P_{n, \text{opt}}}{p^2} \left(1 - \exp \left(-\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left(1 + \frac{p^2 S_y[e^{j\omega}]}{P_{n, \text{opt}}} \right) d\omega \right) \right) \end{aligned} \quad (3.3.39)$$

$$= \frac{P_{n, \text{opt}}}{p} \quad (3.3.40)$$

donde la segunda igualdad es consecuencia del Lema A.3.1 en el Apéndice, y la última es consecuencia de (3.3.33). Si $p \rightarrow 1$, entonces z se encuentra disponible en el extremo receptor del canal y, por lo tanto, $\hat{z} = z$. Esto implica que $\lim_{p \rightarrow 1} [\sigma_{\hat{z}}^2]_{\text{opt}} = 0$. Finalmente, al aplicar la regla de L'Hopital:

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p^2} \left(1 - \exp \left(-\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left(1 + \frac{p^2 S_y[e^{j\omega}]}{P_{n, \text{opt}}} \right) d\omega \right) \right) = \frac{P_y}{P_{n, \text{opt}}}. \quad (3.3.41)$$

por lo que la última afirmación es inmediata de (3.3.41) y (3.3.39). ■

El Corolario 3.3.3 entrega una caracterización compacta y precisa para la mínima varianza estacionaria del error de estimación que se alcanza con el estimador propuesto, cuando $z = y$ y ambas señales son escalares. Cabe notar que el comportamiento límite mencionado en el Corolario 3.3.3 es consistente con la intuición.

3.3.2. Métodos subóptimos de compensación de muestras perdidas

El objetivo de esta sección es entender la relación existente entre los estimadores óptimos propuestos, y alternativos que utilizan estrategias subóptimas de compensación de datos perdidos (ver por ejemplo, $[?, ?, ?, ?, ?, ?]$). Para esto, recordamos que $P_{\hat{z}}$ depende en forma explícita de los parámetros del sistema S , de las características del canal, de la elección para Q_1 y de la varianza del ruido auxiliar n (ver (3.3.19) y (3.3.20)). Esta última cantidad depende exclusivamente de la elección del esquema de compensación de pérdida de datos.

La observación anterior indica que las diferentes elecciones para el mecanismo de compensación de datos perdidos, es decir, diferentes elecciones para Q_2 , sólo se diferencian en su habilidad para reducir la varianza estacionaria de n . En particular, el compensador óptimo es aquel que minimiza la varianza de n . Existen al menos dos alternativas populares. La primera comprende a elegir $Q_2 = 0$, y reemplaza las muestras perdidas por ceros. Esta elección se ha propuesto de forma implícita en $[?, ?, ?, ?]$. El segundo esquema es el que

reemplaza las mediciones faltantes por la última muestra correctamente recibida. En este caso, $Q_2(q) = \frac{q}{q-(1-p)} I_{n_y}$. Este esquema se propone de forma implícita en [?, ?, ?].

Lema 3.3.2.

Considere el Problema 3.2.1. Entonces:

1. Si $H = H_{\text{opt}}$, entonces $P_n = P_{n, \text{opt}} \triangleq p(1-p) (C_y P_{\text{opt}} C_y^\top + D_y D_y^\top)$, donde $P_{\text{opt}} = \Phi_p(P_{\text{opt}})$ y Φ_p está dado por (3.3.22).
2. Si H es tal que se reemplazan los datos perdidos por ceros, entonces $P_n = P_{n, Z} \triangleq p(1-p) P_y = p(1-p) (C_y P_Z C_y^\top + D_y D_y^\top)$, donde $P_Z = \Phi_0(P_Z)$.
3. Si H es tal que se reemplazan los datos perdidos por la última muestra recibida satisfactoriamente, entonces $P_n = P_{n, P}$, donde

$$P_{n, P} \triangleq \frac{p(1-p)(2-p)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{e^{j\omega} - 1}{e^{j\omega} - (1-p)} \right|^2 S_y[e^{j\omega}] d\omega. \quad (3.3.42)$$

Demostración:

1. Esta demostración se realizó al probar el Corolario 3.3.1.
2. Si $Q_2 = 0$, entonces $P_{v_L} = P_y$ y, por lo tanto, $P_n = p(1-p)P_y$. Luego, mediante resultados estándar de la teoría de procesos estocásticos, se tiene que

$$P_y = C_y A P A^\top C_y^\top + C_y B B^\top C_y^\top + D_y D_y^\top, \quad (3.3.43)$$

por lo que al definir $P_Z = A P A^\top + B B^\top$ se llega a que (3.3.43) se puede escribir como

$$P_y = C_y P_Z C_y^\top + D_y D_y^\top \quad (3.3.44)$$

notando que P_Z corresponde justamente a $\Phi_0(P_Z)$ y al reemplazar (3.3.44) en (3.3.1) se llega a la expresión a demostrar.

3. Sea $F_1(q) \triangleq (q-1)(q-(1-p))^{-1}$ y $F_2(q) \triangleq (q-(1-p))^{-1}$. Si $Q_2(q) = \frac{q}{q-(1-p)} I_{n_y}$, entonces $v_L = F_1 I_{n_y} y - F_2 I_{n_y} n$. Así,

$$\begin{aligned} P_{v_L} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_1[e^{j\omega}]|^2 S_y[e^{j\omega}] d\omega + P_n \|F_2\|_2^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_1[e^{j\omega}]|^2 S_y[e^{j\omega}] d\omega + \frac{P_n}{p(2-p)} \end{aligned} \quad (3.3.45)$$

donde se ha usado el que F_1 y F_2 son escalar, y la última igualdad proviene del cálculo de $\|F_2\|_2$ según la definición de la norma-2, utilizando el Teorema de los Residuos [?] (ver Teorema A.5.1 en el Apéndice). Finalmente, notamos que (3.3.42) es consecuencia de (3.3.45) y (3.3.1).

■

El Lema 3.3.2 caracteriza la varianza del ruido auxiliar n en la Figura 3.5 para los tres esquemas de compensación considerados. Tal como se mencionó al inicio de esta sección, esta información es suficiente para comparar las mínimas varianzas estacionarias del error de estimación que alcanza cada estrategia.

Corolario 3.3.4.

Considere el Problema 3.2.1. Sea $[\sigma_{\tilde{z}}^2]_{\alpha}$ la mínima varianza del error de estimación cuando $P_n = P_{n,\alpha}$, $\alpha \in \{\text{opt}, Z, P\}$.

Entonces:

1. $[\sigma_{\tilde{z}}^2]_{\text{opt}} \leq [\sigma_{\tilde{z}}^2]_Z$ y $[\sigma_{\tilde{z}}^2]_{\text{opt}} \leq [\sigma_{\tilde{z}}^2]_P$.
2. Defina la matriz simétrica Δ como

$$\Delta \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) S_y[e^{j\omega}] d\omega, \quad (3.3.46)$$

donde

$$f(\omega) \triangleq (2-p) \left| \frac{e^{j\omega} - 1}{e^{j\omega} - (1-p)} \right|^2 - 1 = \frac{2(1 - \cos(\omega)) - p^2}{2(1-p)(1 - \cos(\omega)) + p^2}. \quad (3.3.47)$$

Si $\Delta \geq 0$, entonces $[\sigma_{\tilde{z}}^2]_Z \leq [\sigma_{\tilde{z}}^2]_P$. De forma similar, si $\Delta \leq 0$, entonces $[\sigma_{\tilde{z}}^2]_Z \geq [\sigma_{\tilde{z}}^2]_P$.

Demostración:

1. Esta afirmación es consecuencia de la definición de $[\sigma_{\tilde{z}}^2]_{\text{opt}}$ y de que los mecanismos de estimación subóptimos considerados son casos particulares del propuesto.
2. Esta parte resulta de notar que $[\sigma_{\tilde{z}}^2]_Z \leq [\sigma_{\tilde{z}}^2]_P$ (respectivamente $[\sigma_{\tilde{z}}^2]_Z \geq [\sigma_{\tilde{z}}^2]_P$) si $P_{n,Z} \leq P_{n,P}$ (respectivamente $P_{n,Z} \geq P_{n,P}$). Luego, al tomar la representación de cada una de estas varianzas en función de su PSD como en el Lema 3.3.2, se llega a que $P_{n,Z} \leq P_{n,P}$ implica que

$$\frac{p(1-p)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_y[e^{j\omega}] d\omega \leq \frac{p(1-p)(2-p)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{e^{j\omega} - 1}{e^{j\omega} - (1-p)} \right|^2 S_y[e^{j\omega}] d\omega, \quad (3.3.48)$$

por lo tanto, al despejar la desigualdad en (3.3.48) y simplificar los términos comunes se llega a la expresión definida por (3.3.46).

■

Observación 3.3.3. Si Δ no es una matriz definida, entonces no se puede llegar a ninguna conclusión sobre el signo de $[\sigma_{\tilde{z}}^2]_Z - [\sigma_{\tilde{z}}^2]_P$, a menos que y sea escalar. Para ver en qué caso podría ocurrir lo anterior, basta notar que la función f definida en (3.3.47) es creciente y positiva para $\omega \geq \omega_p \triangleq \pi - \arccos(\frac{p^2}{2} - 1)$ y, además que es tal que $f(0) = -1$, $f(\pi) =$

$(p+2)(2-p)^{-1}$ y tal que $(2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) d\omega = 1$. Por lo tanto, si S_y es diagonal, con uno de sus términos en la diagonal pasa-bajos con un ancho de banda suficientemente pequeño, y otro término en su diagonal pasa-altos con una ganancia lo suficientemente pequeña para $\omega \leq \omega_p$, entonces Δ no será una matriz con signo definido.

La primera parte del Corolario 3.3.4 es consecuencia directa de que el estimador propuesto hace uso de un compensador de pérdida de datos más general que las alternativas consideradas. Por otro lado, la Parte 2 entrega condiciones que permiten determinar cuál de las dos estrategias sub-óptimas de compensación consideradas alcanzará un mejor desempeño que la otra.

Observación 3.3.4. En [?] se realizó un estudio similar, considerando una clase de filtros MJLS. En ese caso, ambos esquemas sub-óptimos de compensación alcanzan el mismo desempeño. Otro trabajo relacionado es el presentado en [?]. En dicho trabajo, se estudian compensadores de pérdida de datos para controladores por realimentación del estado. En ese contexto, al igual que en el problema estudiado aquí, se concluye que ninguno de los dos esquemas de compensación subóptimos considerados puede considerarse superior al otro en toda situación.

3.4. Ejemplos

Esta sección ilustra los resultados presentados en este capítulo, a través de varios ejemplos. Primero, se considera un sistema descrito por (3.2.1) con

$$A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0.3 & 0.95 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_y = [1 \quad 1], \quad D_y = [0 \quad 0 \quad 1], \quad C_z = I, \quad D_z = 0.$$

Note que, en este caso, $z = x$ e y escalar, y para los ejemplos que se considerarán en esta sección, la matriz A siempre se tomará triangular, por lo que los autovalores estarán determinados por los valores de la diagonal principal.

Para este sistema, se consideran cuatro esquemas diferentes de estimación, para varios valores de la probabilidad de transmisión exitosa $p \in (0, 1)$. Los resultados se presentan en la Figura 3.6, donde la notación $[\sigma_{\hat{z}}^2]_{\alpha}$, $\alpha \in \{\text{opt}, Z, P\}$ es la introducida en el Corolario 3.3.4, y $[\sigma_{\hat{z}}^2]_{\text{KF}}$ corresponde al desempeño que alcanza un filtro de Kalman que se ha diseñado sin considerar las pérdidas (i.e., que se ha diseñado suponiendo que y está disponible en todo momento).

Los resultados expuestos en la Figura 3.6 muestran (como es de esperar), que el peor desempeño lo alcanza el filtro de Kalman que ha sido diseñado sin considerar la pérdida de datos. El desempeño de este filtro se puede mejorar tomando en cuenta esta información en la etapa de diseño, y puede ser mejorado aún más al reemplazar los datos perdidos por las muestras efectivamente recibidas en instantes anteriores. Este último esquema de compensación se acerca al óptimo para probabilidades $p > 0.2$, y se alcanza un desempeño considerablemente mejor que la otra estrategia subóptima para probabilidades $p > 0.05$.

En la Figura 3.6 se muestra también un gráfico para Δ (ver Corolario 3.3.4), cuyo signo determina cual estrategia subóptima alcanza un mejor desempeño. Los resultados son consistentes con los del Corolario 3.3.4.

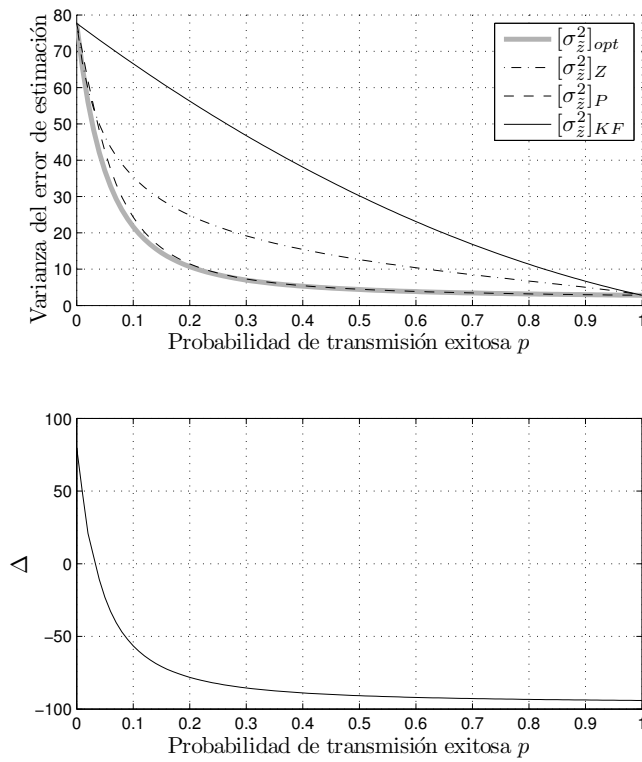


Figura 3.6. Varianza del error de estimación ($\text{tr}\{P_z\}$) en función de la probabilidad de transmisión exitosa p . (Caso de salida escalar.)

En segundo lugar, se consideró el sistema en (3.2.1) con las matrices anteriores, excepto que $A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$. Dado que en este caso los autovalores de A están más cerca del origen, uno esperaría que reemplazar muestras perdidas por ceros sea una estrategia de compensación más adecuada que en el caso anterior. Este hecho intuitivo se encuentra claramente respaldado por los resultados de la Figura 3.7.

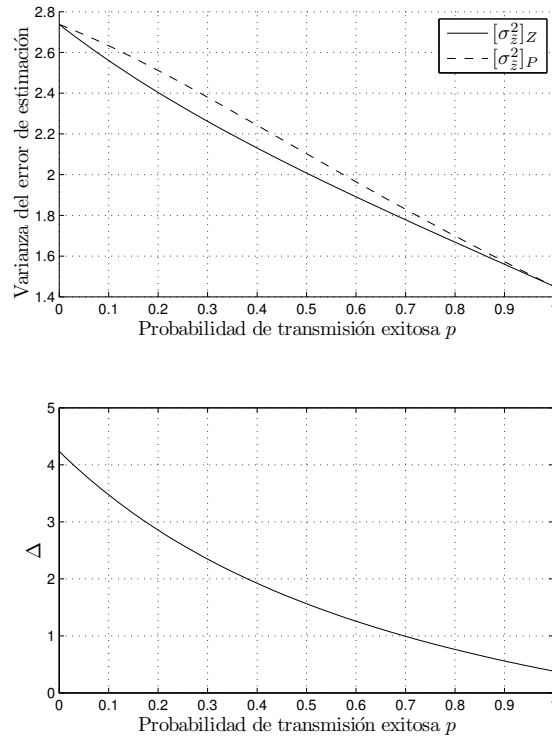


Figura 3.7. Comparación entre las estrategias de compensación subóptimas para un sistema de salida escalar con modos naturales relativamente rápidos.

Finalmente, se considera un caso en que las mediciones no son escalares. Se ha supuesto que todas las matrices del sistema tienen los valores definidos en el primer ejemplo, a excepción de las indicadas a continuación:

$$C_y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Los resultados se muestran en la Figura 3.8, donde además se muestra el gráfico correspondiente a los autovalores de Δ . Como es de esperar, cuando Δ es positiva definida, i.e., para $p < 0.03$, el método de reemplazar las perdidas por ceros alcanza el mejor desempeño dentro de las estrategias subóptimas consideradas. Para otros valores de p , Δ no es una matriz definida y, por lo tanto, no se puede anticipar ninguna conclusión en forma inmediata.

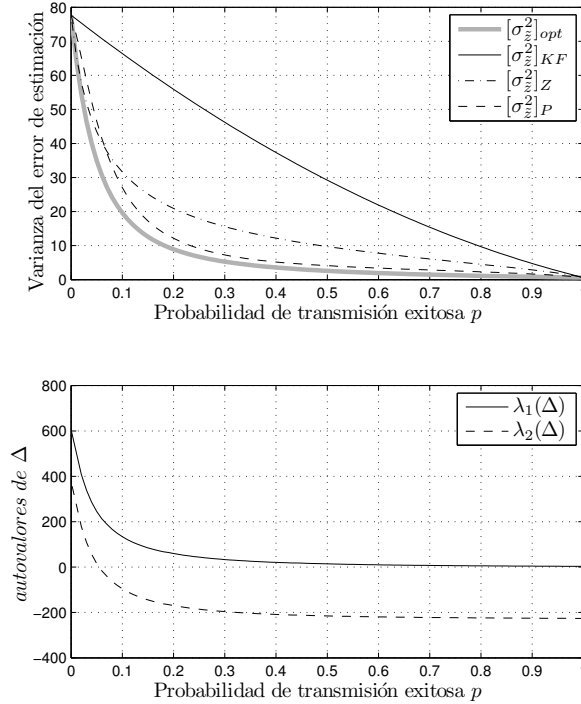


Figura 3.8. Varianza del error de estimación ($\text{tr}\{P_z\}$) como función de la probabilidad de transmisión exitosa p . (Caso de salidas múltiples.)

Los resultados anteriores muestran que los esquemas de compensación de datos perdidos son esenciales para diseñar estimadores que alcancen un buen desempeño al estimar señales sobre canales de borrado. A pesar de que la estrategia de reemplazar las perdidas por muestras correctamente recibidas anteriormente parece ser una opción atractiva, el esquema de compensación óptimo acá propuesto ofrece un mejor desempeño en todo momento.

Cabe notar que el verdadero estimador óptimo para este tipo de sistemas vendría dado por un filtro perteneciente a la clase de MJLS, el que haciendo uso de la información acerca del estado del canal, conmuta sus parámetros de forma de ser sintonizado ya sea se estén recibiendo datos o éstos se pierdan en el canal, donde la evolución de la varianza del error de estimación queda descrita por

$$P(k+1) = A_{\theta(k)}(k)P(k)A_{\theta(k)}^T(k) + B_{\theta(k)}(k)B_{\theta(k)}^T(k) + J(k)C_{\theta(k)}(k)P(k)A_{\theta(k)}^T(k), \quad (3.4.1)$$

donde $J(k)$ corresponde a la ganancia del Filtro de Kalman en el instante k , y se obtiene como

$$J(k) = -A_{\theta(k)}(k)P(k)C_{\theta(k)}^T(k) \left(C_{\theta(k)}(k)P(k)C_{\theta(k)}^T(k) + D_{y,\theta(k)}(k)D_{y,\theta(k)}^T(k) \right)^{-1}. \quad (3.4.2)$$

En la Figura 3.9 se observa el desempeño obtenido por el estimador acá propuesto, así como también se observan las cotas de éste, notando que la cota inferior representa el mejor desempeño alcanzable, el cual viene dado por el filtro de Kalman conmutado que se mencionó anteriormente, notando que dada su naturaleza, éste filtro no converge a un estimador estacionario como el propuesto.

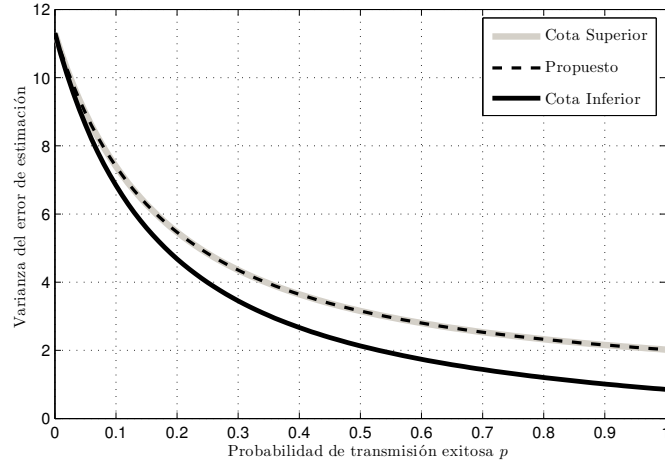


Figura 3.9. Comparación de estimador propuesto y cotas superior e inferior.

Se debe notar que, tal como se señala en [?, ?], si se quisiera pre-calcular las ganancias de este Filtro de Kalman para así ahorrar tiempo de cómputo cuando se realice la estimación en línea (como se menciona en [?]), entonces la complejidad computacional de este estimador aumenta exponencialmente acorde aumenta el horizonte de tiempo de la estimación, notando que para un intervalo $[0, T]$ sería necesario precalcular $N \frac{N^T - 1}{N - 1}$ ganancias.

3.5. Conclusiones

En este capítulo se ha estudiado un problema de estimación estacionaria sujeto a la pérdida de datos. Se ha logrado llevar dicho problema de estimación desde el sistema conmutado original, a otro sistema equivalente en segundos momentos para realizar así el diseño del estimador óptimo.

Se ha entregado una caracterización explícita de las variables de interés, tales como la varianza del ruido auxiliar o la varianza del error de estimación, permitiendo así una mayor comprensión del problema y facilitando la comparación entre los distintos esquemas de compensación de pérdida de datos que se pueden encontrar en la literatura.

Finalmente, se han mostrado ejemplos que permiten ilustrar los resultados obtenidos a lo largo de este capítulo, realizando también una comparación entre el estimador estacionario aquí propuesto y sus cotas, donde la cota mínima corresponde al desempeño que logra el filtro de Kalman variante en el tiempo, siendo un estimador óptimo que no converge a uno estacionario.

CONCLUSIONES

4.1. Discusión y comparación de los resultados obtenidos

En este trabajo de tesis se ha estudiado un problema de estimación estacionaria sujeto a restricciones de comunicación. En particular, se ha estudiado un caso en que las mediciones que utiliza el filtro para realizar la estimación son enviadas a través de un canal de borrado. Esto implica que dichas mediciones podrían perderse, es decir, podrían no llegar al extremo receptor del canal, con cierta probabilidad. En este contexto, se puede encontrar una gran variedad de tipos de filtros, debiendo hacerse las siguientes preguntas para poder diferenciar correctamente el tipo de filtro que se tiene:

- ¿Es el filtro un MJLS o es un sistema LTI?
- ¿Se supone acceso al estado del canal?, de ser así, ¿esta información se supone de obtención inmediata o está atrasada?
- ¿Se utiliza un esquema de compensación para los datos perdidos?
- ¿El filtro converge a uno estacionario?
- ¿El filtro es óptimo dentro de su clase?

Hacer estas diferencias es importante, ya que no es justo comparar el desempeño de un filtro frente a otro estimador que pertenece a una clase distinta. De esta manera es natural que, el desempeño del filtro desarrollado en el Capítulo 3 no puede competir con filtros más generales, como el filtro de Kalman variante en el tiempo, donde este tipo de estimadores pertenecen a una clase más amplia de filtros.

Uno de los resultados principales obtenidos en este trabajo de tesis, es la caracterización explícita de un filtro estacionario con parámetros dependientes del estado del canal. Dicho resultado se ha obtenido considerando un sistema auxiliar, estadísticamente equivalente al sistema original, en el cual resulta más fácil realizar las tareas de análisis y diseño.

Otro aspecto importante a notar es la estructura del filtro obtenido en el Capítulo 3. El problema de diseño se pudo separar en dos problemas consecutivos. En la primera etapa, se diseña un compensador de los datos perdidos. Este problema es un problema de estimación óptima sujeto a una restricción de SNR. El segundo paso, corresponde a un problema de filtraje estándar en el que surge una fuente de ruido auxiliar cuya varianza depende del compensador de pérdidas utilizado.

Otro resultado importante corresponde a la obtención de expresiones cerradas que caracterizan la varianza óptima del ruido auxiliar en el caso de que las mediciones correspondan a una señal escalar. Esto permite analizar de forma inmediata los efectos de los parámetros del sistema sobre los resultados obtenidos. De la misma forma, fue posible obtener una expresión muy simple para la mínima varianza del error de estimación en el caso en que la señal que interesa estimar es escalar y corresponde a la misma señal que se envía a través del canal de borrado. Este caso que parece muy particular, puede resultar de cierto interés para aplicaciones que involucren, por ejemplo, procesamiento de audio, en que se envía cierto sonido y a partir de las mismas mediciones de éste, se quiere reconstruir el sonido original dado que se perdieron algunas muestras.

Finalmente, fue posible realizar una comparación entre las estrategias de compensación de pérdida de datos que se han propuesto con mayor frecuencia en la literatura. Se entregan condiciones que garantizan que una de estas estrategias es superior a la otra. En particular, cuando la medición enviada a través del canal corresponde a una señal escalar, se pueden obtener condiciones necesarias y suficientes, pero cuando esta señal contiene múltiples mediciones, sólo se pueden obtener condiciones necesarias.

Con el desarrollo realizado, y en particular con la observación que involucra la separación del problema original en dos partes, se mostró que el desempeño que logra cierto estimador tiene directa relación con la estrategia de compensación para la pérdida de datos que se esté utilizando. Es relevante notar que un mejor esquema de compensación, es decir, aquel compensador que involucre una menor varianza para el ruido auxiliar, permitirá obtener mejores estimaciones.

4.2. Trabajo futuro

Dados los resultados obtenidos en este trabajo de tesis, consideramos que los siguientes son temas para trabajo futuro.

- Extender el desarrollo realizado en este documento, al caso en que se envían múltiples mediciones a través de múltiples canales.
- Estudiar el caso de estimación estacionaria de estado sujeto a pérdida de datos en el (los) canal(es), dado que la planta a considerar es de naturaleza inestable. En este caso se espera que un desarrollo no tan complejo entregue condiciones bajo las cuales se pueda proveer de una estimación con estadísticas de segundo orden finitas, para ciertas probabilidades de transmisión p .
- Analizar el problema estudiado en este trabajo de tesis, para el caso en que coexisten diversas restricciones de comunicación en el (los) canal(es) presente(s). Por ejemplo, puede ser de interés el caso en que la señal que se envía a través del canal de borrado ha sido previamente cuantizada.

APÉNDICE

A.1. Equivalencia entre sistemas LTI y conmutados

A continuación se demuestra una versión generalizada del Teorema 3.3.1. El desarrollo se basa en [?].

Considere un sistema LTI N descrito por

$$x(k+1) = Ax(k) + B_d d(k) + B_u u(k), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad x(0) = x_0, \quad (\text{A.1.1})$$

$$e(k) = C_e x(k) + D_{de} d(k) + D_{ue} u(k), \quad (\text{A.1.2})$$

$$v(k) = C_v x(k) + D_{dv} d(k), \quad (\text{A.1.3})$$

donde x_0 corresponde a una variable aleatoria de segundo orden con varianza $P_0 \geq 0$, d corresponde a ruido blanco de media cero con varianza $P_d > 0$ y no correlacionado con el estado inicial x_0 , u corresponde a una entrada auxiliar, mientras que e y v son salidas del sistema. Suponga, además, que $D_{dv} D_{dv}^\top > 0$.

Supondremos ahora que existe un canal de comunicación entre v y u . Primero, suponemos que la relación entre v y u está dada por

$$u(k) = \theta(k)v(k), \quad (\text{A.1.4})$$

donde θ se encuentra definido en la Sección 3.2, y es independiente de (x_o, d) (ver Figura A.1(a)). Es claro que la varianza del estado de N en la Figura A.1(a) satisface (ver demostración de Lema 6.3 en [?]):

$$P_x(k+1) = A_p P_x(k) A_p^\top + B_p P_d B_p^\top + p(1-p) B_u P_v(k) B_u^\top \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad P_x(0) = P_o, \quad (\text{A.1.5})$$

donde $A_p \triangleq A + p B_u C_v$, $B_p \triangleq B_d + p B_u D_{dv}$ y la varianza $P_v(k)$ de v satisface

$$P_v(k) = C_v P_x(k) C_v^\top + D_{dv} P_d D_{dv}^\top. \quad (\text{A.1.6})$$

Además, se tiene que

$$P_e(k) = C_p P_x(k) C_p^\top + D_p P_d D_p^\top + p(1-p) D_{ue} P_v(k) D_{ue}^\top, \quad (\text{A.1.7})$$

con $C_p \triangleq C_e + p D_{ue} C_v$ y $D_p \triangleq D_{de} + p D_{ue} D_{dv}$.

Suponga ahora que el canal de comunicación entre v y u está descrito por

$$u(k) = n(k) + p v(k) \quad (\text{A.1.8})$$

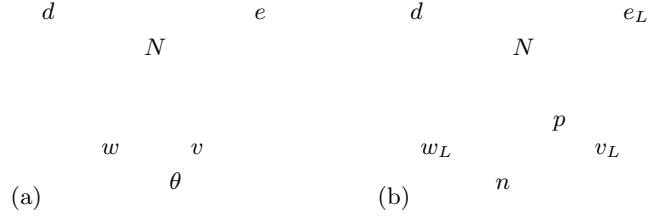


Figura A.1. Sistema auxiliar N con retroalimentación a través de (a) un canal de borrado, y (b) un canal con ruido aditivo y ganancia p .

donde n está definido en la Sección 3.3, y no está correlacionado con (x_o, d) (ver Figura A.1(b)). Para evitar confusión, y ser consistente con la notación usad en el Capitulo 3, se agregara el sub-índice L a todas las señales cuyas estadísticas se vean afectadas por el cambio en el enlace entre v y u .

Es fácil ver que la varianza del estado de N en la Figura A.1(b), así como la varianza de las salidas v y e , satisfacen (se usó (A.1.8)):

$$P_{x_L}(k+1) = A_p P_{x_L}(k) A_p^\top + B_p P_d B_p^\top + B_u P_n B_u^\top \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad P_{x_L}(0) = P_o \quad (\text{A.1.9})$$

$$P_{v_L}(k) = C_v P_{x_L}(k) C_v^\top + D_{dv} P_d D_{dv}^\top \quad (\text{A.1.10})$$

$$P_{e_L}(k) = C_p P_{x_L}(k) C_p^\top + D_p P_d D_p^\top + D_{ue} P_n D_{ue}^\top \quad (\text{A.1.11})$$

donde A_p, B_p, C_p y D_p fueron definidas anteriormente.

Lema A.1.1.

Considere los sistemas de la Figura A.1(a) y (b) bajo las suposiciones realizadas anteriormente. Entonces, el sistema con saltos de la Figura A.1(a) es MSS si y sólo si el sistema LTI de la Figura A.1(b) es estable y existe una elección (positiva semidefinida) para P_n tal que se cumple la restricción $P_n = p(1-p)P_{v_L}$, donde P_{v_L} es la varianza estacionaria de v_L .

Demostración:

1. Utilizando el Corolario 3.26 de [?] y (A.1.5)–(A.1.6), se tiene que el sistema con saltos de la Figura A.1(a) es MSS si y sólo si la expresión

$$P_x = A_p P_x A_p^\top + p(1-p) B_u C_v P_x C_v^\top B_u^\top + B_p P_d B_p^\top + p(1-p) B_u D_{dv} P_d D_{dv}^\top B_u^\top \quad (\text{A.1.12})$$

admite una solución única y positiva semidefinida P_x , que corresponde a la varianza estacionaria del estado. Esta condición es equivalente (usando el Corolario 3.26 de [?]) a la existencia de $M > 0$ tal que

$$M - A_p M A_p^\top - p(1-p) B_u C_v M C_v^\top B_u^\top > 0. \quad (\text{A.1.13})$$

Concluimos que, si el sistema con saltos es MSS, entonces existe un $M > 0$ tal que se cumple que $M - A_p M A_p^\top > 0$ y el sistema LTI de la Figura A.1(b) será estable.

(Note de (A.1.9) que la matriz “A” del sistema LTI de la Figura A.1(b) está dada precisamente por A_p .)

Suponga que el sistema con saltos es MSS y elija

$$P_n = P_n^o \triangleq p(1-p)(C_v P_x C_v^\top + D_{dv} P_d D_{dv}^\top) \quad (\text{A.1.14})$$

donde P_x satisface (A.1.12). Dado que, además, el sistema LTI de la Figura A.1(b) es estable, entonces la varianza estacionaria P_{x_L} de x_L corresponde a la única solución positiva semidefinida de

$$P_{x_L} = A_p P_{x_L} A_p^\top + B_p P_d B_p^\top + B_u P_n^o B_u^\top \quad (\text{A.1.15})$$

$$= A_p P_{x_L} A_p^\top + p(1-p) B_u C_v P_x C_v^\top B_u^\top + B_p P_d B_p^\top + p(1-p) B_u D_{dv} P_d D_{dv}^\top B_u^\top \quad (\text{A.1.16})$$

Dado que las soluciones de (A.1.12) y (A.1.16) son únicas, se tiene que $P_{x_L} = P_x$. Por lo tanto, se ha comprobado que existe una elección de P_n para la cual se cumple $P_n = p(1-p)(C_v P_{x_L} C_v^\top + D_{dv} P_d D_{dv}^\top) = p(1-p)P_{v_L}$ (ver (A.1.14) y (A.1.10)).

2. Si el sistema LTI de la Figura A.1(b) es estable y existe un P_n tal que se cumple $P_n = p(1-p)P_{v_L}$, entonces

$$P_n = p(1-p)(C_v P_{x_L} C_v^\top + D_{dv} P_d D_{dv}^\top) \quad (\text{A.1.17})$$

donde P_{x_L} satisface (A.1.15) con $P_n^o = P_n$, y existe un $P > 0$ tal que

$$P - A_p P A_p^\top > 0. \quad (\text{A.1.18})$$

Note que nuestras suposiciones garantizan que se cumple $D_{dv} P_d D_{dv}^\top > 0$, lo que implica que $P_n > p(1-p)C_v P_{x_L} C_v^\top$ y, por lo tanto, que existe un $\epsilon > 0$ tal que

$$P_n > p(1-p)C_v (P_{x_L} + \epsilon P) C_v^\top \quad (\text{A.1.19})$$

donde P satisface (A.1.18).

Luego, usando (A.1.19), (A.1.18) y (A.1.15) (con P_n^o reemplazado por P_n) se procede como en [?] para mostrar que (A.1.13) se cumple con $M = P_{x_L} + \epsilon P > 0$. De hecho,

$$\begin{aligned} & A_p (P_{x_L} + \epsilon P) A_p^\top + p(1-p) B_u C_v (P_{x_L} + \epsilon P) C_v^\top B_u^\top \\ & < A_p (P_{x_L} + \epsilon P) A_p^\top + B_u P_n B_u^\top \\ & = P_{x_L} - B_p P_d B_p^\top + \epsilon A_p P A_p^\top \\ & \leq P_{x_L} + \epsilon A_p P A_p^\top \\ & < P_{x_L} + \epsilon P \end{aligned} \quad (\text{A.1.20})$$

donde se debe notar que en la primera desigualdad estricta se ha hecho uso de (A.1.19), en la igualdad que sigue se ha usado (A.1.15), la desigualdad no estricta es trivial, y la última desigualdad se obtiene utilizando (A.1.18).

Concluimos de (A.1.20) que el sistema con saltos de la Figura A.1(a) es MSS, completando la demostración ■

Corolario A.1.1.

Considere el sistema y las suposiciones involucradas en el Lema A.1.1. Si el sistema con saltos de la Figura A.1(a) es MSS o, equivalentemente, si el sistema LTI de la Figura A.1(b) es estable y existe una elección para P_n tal que $P_n = p(1-p)P_{v_L}$, entonces, para dicha elección para P_n , $P_\alpha = P_{\alpha_L}$ para $\alpha \in \{x, e, v\}$.

Demostración:

En la demostración del Lema A.1.1 se mostró que bajo las suposiciones y definiciones allí consideradas, se cumple que $P_{x_L} = P_x$. Luego, la demostración del Corolario A.1.1 es inmediata utilizando este hecho, con (A.1.7), (A.1.6), (A.1.11), y (A.1.10). ■

El Teorema 3.3.1 corresponde a un caso particular del Lema A.1.1 y del Corolario A.1.1. Cabe notar que, en el Teorema 3.3.1, el hecho de que $P_\omega = I$ y $D_y D_y^T > 0$ implica que las suposiciones $P_d > 0$ y $D_{dv} D_{dv}^T > 0$ en el Lema A.1.1 y el Corolario A.1.1 se cumplen.

A.2. Programación Fraccional

A continuación se muestra un resultado que permite separar el numerador y el denominador de cierto funcional en base a cierto parámetro. Este resultado puede ser revisado en mayor detalle en [?].

Lema A.2.1.

Sea $g(x) > 0$ una función real. Considere el funcional $J = \max_x \frac{f(x)}{g(x)}$, donde J^* corresponde a su valor óptimo, entonces la expresión

$$\begin{aligned} J^* &= \frac{f(x^*)}{g(x^*)} \\ &= \max_x \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}, \end{aligned}$$

se cumple si y sólo si

$$\max_x \{f(x) - J^* g(x)\} = 0. \quad (\text{A.2.1})$$

Cabe notar que, tal como se enuncia en [?], este resultado se cumple también si se trabaja con mín en lugar de máx.

A.3. Expresiones explícitas en estimación óptima

A continuación se provee de un resultado que permite caracterizar la varianza del error de estimación en filtraje lineal óptimo para procesos estacionarios, cuando se encuentran contaminados con ruido aditivo.

Sean dos secuencias WSS $\{m_t\}$ y $\{n_t\}$ el mensaje y el ruido respectivamente, secuencias que se suponen no correlacionadas entre sí, entonces el MSE, es decir, la diferencia cuadrática entre la secuencia que se desea reproducir y la mejor que se puede obtener, cuando se utiliza un filtro $h(e^{j\omega})$ viene dado por

$$E = \min_h \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (|h(e^{j\omega}) - e^{j\omega}|^2 f(e^{j\omega}) + |h(e^{j\omega})|^2 g(e^{j\omega})) d\omega \quad (\text{A.3.1})$$

Así, el siguiente resultado permite obtener una expresión en forma cerrada para la caracterización de E .

Lema A.3.1.

Sea $g \neq 0$ la PSD (constante) del ruido de cierto sistema, f la PSD de la salida del sistema (la cual corresponde a la entrada del filtro óptimo en cuestión), y E el error cuadrático medio de estimación descrito por (A.3.1), entonces E se puede escribir como:

$$E = g \left(\exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left(1 + \frac{f(e^{j\omega})}{g} \right) d\omega \right) - 1 \right) \quad (\text{A.3.2})$$

Este resultado junto con su correspondiente demostración se encuentra en mayor detalle en [?].

A.4. Ecuación Algebraica de Riccati Modificada

En esta sección se presentarán las propiedades de la MARE que son utilizadas con mayor frecuencia dentro de este trabajo de tesis. Mayor detalle sobre estas y otras propiedades de la MARE se pueden encontrar en [?].

Lema A.4.1. Sea el parámetro $\lambda \in (0, 1)$, y defina los siguientes operadores

$$L_\lambda(K, P) = \lambda A(I - KC)P(I - KC)^\top A^\top + (1 - \lambda)APA^\top + \lambda AKDD^\top K^\top A^\top + BB^\top, \quad (\text{A.4.1})$$

$$\Phi_\lambda(P) = APA^\top - \lambda APC^\top (CPC^\top + R)^{-1} CPA^\top + BB^\top, \quad (\text{A.4.2})$$

donde A, B, C, D como es usual son matrices conocidas y vienen dadas por la representación en variables de estado de cierto sistema, y K corresponde a la ganancia constante de cierto filtro.

Entonces, se cumplen las siguientes propiedades

- Si $P_1 \geq P_2$, entonces $\Phi_\lambda(P_1) \geq \Phi_\lambda(P_2)$.
- Si $\lambda_1 \geq \lambda_2$, entonces $\Phi_{\lambda_1}(P) \leq \Phi_{\lambda_2}(P)$.
- Si existe P^* tal que $P^* = L_\lambda(K, P^*)$, entonces P^* es única y además es semidefinida positiva.
- Si $\lambda_1 \geq \lambda_2$ y existe P_1^*, P_2^* tal que $P_1^* = \Phi_{\lambda_1}(P_1^*)$ y $P_2^* = \Phi_{\lambda_2}(P_2^*)$, entonces $P_1^* \leq P_2^*$.
- Si A es estrictamente estable (i.e., todos sus autovalores son estrictamente menor que 1), entonces $P^* = \Phi_\lambda(P^*)$ siempre tiene una solución.
- Si existe $P^* > 0$ y K tal que $P^* = L_\lambda(K, P^*)$, entonces $A_c = A(I - \lambda KC)$ es estrictamente estable.

A.5. Teorema de los Residuos

Sea la función $f(q)$ con q el argumento de la transformada Z , y q_0 un punto singular aislado de la función f . En este caso, la función puede ser representada mediante una serie de Laurent [?]:

$$f(q) = a_n(q - q_0)^n + \dots + a_2(q - q_0)^2 + a_1(q - q_0) + a_0 + \frac{b_1}{q - q_0} + \dots + \frac{b_n}{(q - q_0)^n} \quad (\text{A.5.1})$$

Se puede probar que

$$b_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathfrak{C}} \frac{f(q)}{(q - q_0)^{-n+1}} dq, \quad (\text{A.5.2})$$

donde \mathfrak{C} es una curva cerrada orientada en sentido antihorario, que encierra a la singularidad en $q = q_0$. Cuando se tiene $n = 1$, puede escribirse

$$b_1 = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathfrak{C}} f(q) dq. \quad (\text{A.5.3})$$

El numero b_1 , que es el coeficiente de $1/(q - q_0)$ se llama el residuo de f en el punto singular q_0 .

Teorema A.5.1.

Considere las definiciones realizadas anteriormente, entonces el cálculo de los residuos de $f(q)$

$$b_1 = \text{Res}_{q=q_0} f(q) \quad (\text{A.5.4})$$

De esta forma, se tiene la relación

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathfrak{C}} f(q) dq = \sum_{n=0}^k \text{Res}_{q=q_n} f(q), \quad (\text{A.5.5})$$

donde q_n corresponde a las singularidades de f dentro de la curva \mathfrak{C} , recorrida en sentido antihorario.

Un desarrollo más detallado respecto al Teorema de los Residuos se puede encontrar en [?].

NOTACIÓN

B.1. Símbolos

A continuación se entrega una lista de los símbolos y la notación utilizada en este trabajo.

| | |
|-----------------------|--|
| \mathbb{R}^n | Conjunto de los números reales de dimensión n |
| \mathbb{C}^n | Conjunto de los números complejos de dimensión n |
| \mathcal{RH}_∞ | Subespacio de \mathcal{L}_2 de funciones reales racionales, estables y propias. |
| \mathcal{R}_p | Funciones reales racionales y propias. |
| \mathcal{R}_{sp} | Funciones reales racionales y estrictamente propias. |
| (A, B, C, D) | Realización de cierta función de transferencia |
| q | Argumento de Transformada Z |
| $G(q)$ | Modelo de una planta |
| $Q(q)$ | Parámetro de Youla en un lazo de control |
| $Q_{opt}(q)$ | Parámetro de Youla óptimo |
| $diag\{A, B\}$ | Matriz diagonal por bloques, compuesta por matrices A y B . |
| $traza\{A\}$ | Traza de la matriz A |
| A^{-1} | Inverso (multiplicativo) de A |
| A^\top | Transpuesto de A |
| A^H | Hermitiano de A (transpuesto conjugado) |
| $Prob\{\cdot\}$ | Probabilidad de \cdot |
| $ x $ | Magnitud de $x \in \mathbb{C}$ |
| $\Re\{x\}$ | Parte real de $x \in \mathbb{C}$ |
| \bar{x} | Conjugado de $x \in \mathbb{C}$ |
| \mathcal{L}_2 | Espacio de funciones definidas y medibles sobre círculo unitario y cuadráticamente integrables |
| $\ \cdot\ _2$ | Norma de \cdot sobre el espacio \mathcal{L}_2 |

B.2. Abreviaciones

| | |
|--------|---|
| ARE | Ecuación Algebraica de Riccati |
| A-WSS | Asintóticamente estacionario en sentido amplio |
| i.i.d. | independientes e idénticamente distribuidos |
| MARE | Ecuación Algebraica de Riccati Modificada |
| KF | Filtro de Kalman |
| LTI | Lineal e invariante en el tiempo |
| MIMO | Múltiples entradas y múltiples salidas |
| MJLS | Sistema lineal con saltos markovianos |
| MSE | Error cuadrático medio |
| MSS | Estable (o Estabilidad) en Sentido cuadrático medio |
| PSD | Densidad espectral de potencia |
| SNR | Relación de señal a ruido |
| WSS | Estacionario en sentido amplio |