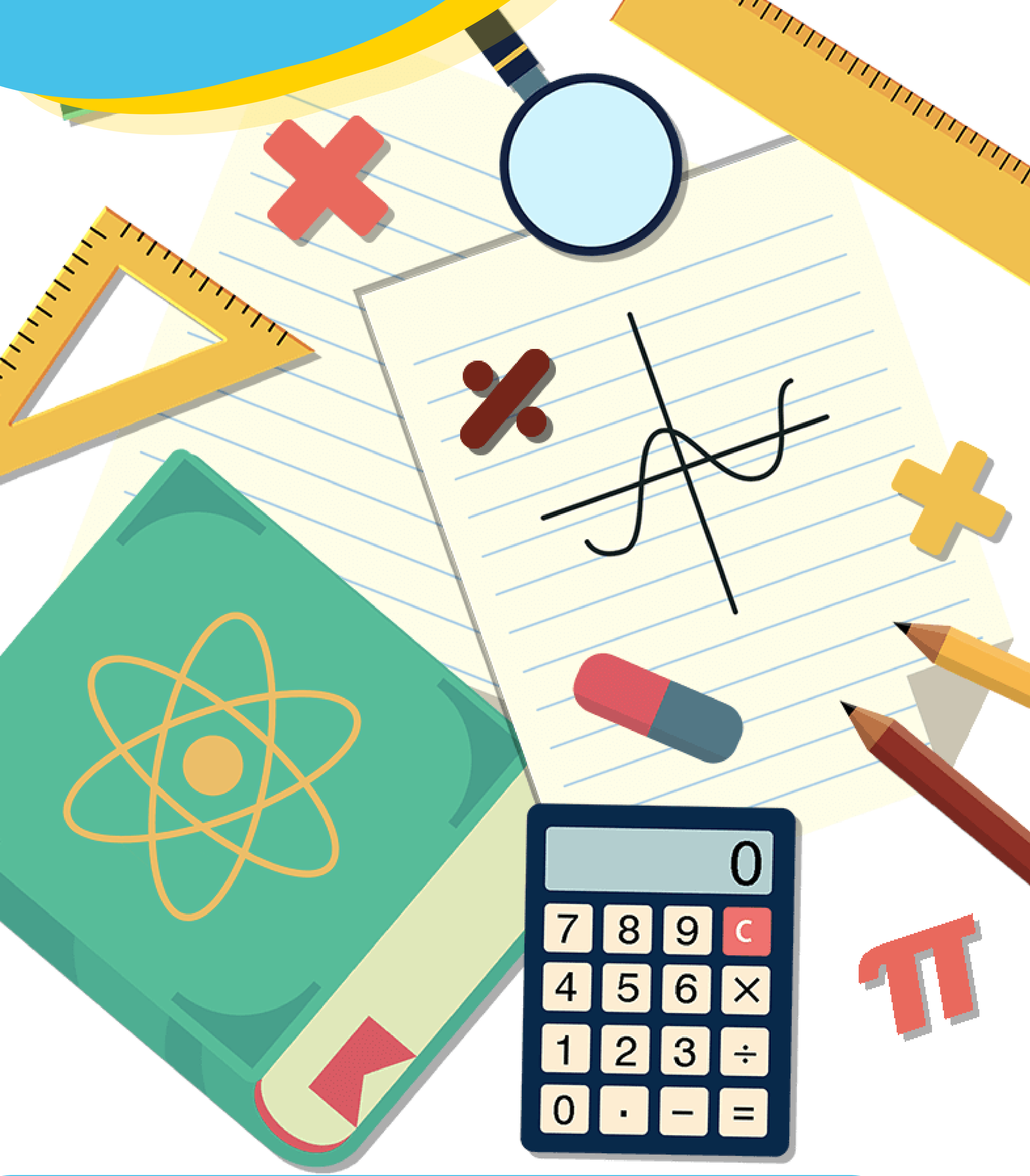
КОРПОРАТИВНЫЙ ФОНД "ФОНД "EL UMITI"



ОЛИМПИАДНАЯ МАТЕМАТИКА 8 КЛАСС. СБОРНИК ЗАДАЧ

ОЛИМПИАДНАЯ МАТЕМАТИКА 8 КЛАСС

СОСТАВИТЕЛЬ: БЕКБАУОВ АМАНБЕК - МАГИСТР (ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ), ПРЕПОДАВАТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ, ТРЕНЕР ПО ОЛИМПИАДНОЙ МАТЕМАТИКИ.

ОПИСАНИЕ

Сборник задач по олимпиадной математике предназначен для учеников 8-х классов. Сюда вошли 138 задач олимпиадного характера по математике, по уровню сложности от более легких к сложным. Для решения олимпиадных задач требуются специальные знания и умения, применяется логика и нестандартный подход. Недостаточно хорошо знать основные темы из школьной физики, необходимо уметь комбинировать навыки, знать законы науки и уметь их применять. Уровень подготовки учащихся предполагает, что вы уже знакомы с базовыми понятиями и формулами поэтому, здесь представлены только задачи.

ИНСТРУКЦИЯ

В этом сборнике вы найдете различные задачи по олимпиадной математике 8 класса разных уровней сложности. Для решения олимпиадных задач требуются знания и умения, не выходящие за рамки программы средней школы, и часто представляют собой головоломки, в которых нелегко разобраться, но не требующих громоздких вычислений. Основное внимание обращается на физическое содержание задач. Теоретические задачи, предлагаемые участникам на олимпиаде по физике, описывают условный мир идеализированных объектов – точечных масс, невесомых нитей, идеальных катушек и т.д. Подобные задачи можно встретить во многих задачниках. Задачи же, приближенные к практике, рассматривают реальные физические объекты. Поэтому мы собрали в данном сборнике задачи, которые помогут Вам подготовиться к олимпиадам. В конце сборника есть ключи к задачам, что поможет проверить ответ. Для вашего удобства нумерация тем и задач сквозная. Для поиска ответа на задачу, достаточно посмотреть номер и в разделе "Ключи" найти по номеру.

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕМА 1. ФАКТОРИАЛ, КОМБИНАТОРИКА, ПРАВИЛО СУММЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Задача 1.

Вычислите значение выражения $\dfrac{9!-8!\cdot 5+7!}{7!\cdot 11}$

Задача 2.

В корзине лежат 9 яблок и 12 груш. Сколькими способами можно выбрать 1 яблоко или 1 грушу для пирога?

Задача 3.

В коллективе есть 15 инженеров, 7 врачей, 9 спасателей. Сколькими способами можно собрать команду из 3 инженеров, 2 врачей и одного спасателя?

Задача 4.

В магазине есть 6 экземпляров романа «Рудин», 3 романа «Дворянское гнездо» и 4 романа «Отцы и дети». Кроме того, есть 5 томов, содержащих романы «Рудин» и «Дворянское гнездо», и 7 томов, содержащих романы «Дворянское гнездо» и «Отцы и дети». Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из этих романов?

Задача 5.

Вычислите значение выражения $\dfrac{25!-24!\cdot 5+24!}{23!\cdot 12}$

Задача 6.

Вычислите значение выражений

$a)\dfrac{250!}{249!}:\dfrac{50!}{49!};$

$b)\dfrac{100!}{99!}:\dfrac{5!}{3!}.$

Задача 7.

Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске белый и чёрный квадраты, не лежащие на одной и той же горизонтали и вертикали?

Задача 8.

Из трёх экземпляров учебника алгебры, семи экземпляров учебника геометрии и семи экземпляров учебника тригонометрии надо выбрать по одному экземпляру каждого учебника. Сколькими способами это можно сделать?

Задача 9.

В корзине - 12 яблок и 10 апельсинов. Ваня выбирает из неё яблоко или апельсин, после чего Надя берет и яблоко, и апельсин. Когда Надя имеет большую свободу выбора: если Ваня взял яблоко или если апельсин?

Задача 10.

Имеются три волчка с 6, 8 и 10 гранями соответственно. Сколькими различными способами могут они упасть? Та же задача, если известно, что по крайней мере два волчка упали на сторону, помеченную цифрой 1.

Задача 11.

Можно раскрасить грани куба либо все в белый цвет, либо все в чёрный, либо часть в белый и часть в чёрный. Сколько существует различных способов окраски? (Два куба считаются раскрашенными различно, если их нельзя перепутать, как бы они ни переворачивались.)

ТЕМА 2. КОМБИНАТОРИКА, ПЕРЕСТАНОВКИ, РАЗМЕЩЕНИЯ, СОЧЕТАНИЯ

Задача 12.

На полке стоят четыре книги. Сколькими способами их можно расставить?

Задача 13.

Сколькими способами можно выбрать три разные краски из пяти?

Задача 14.

Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материал пяти различных цветов? А если одна из полос должна быть красной?

Задача 15.

Сколькими способами 5 девушек и 3 юноши могут разбиться на две команды по 4 человека в каждой команде, если в каждой команде должно быть хотя бы по одному юноше?

Задача 16.

Автомобильные номера состоят из одной, двух или трех букв и четырех цифр. Найти число таких номеров, если используются 32 буквы русского алфавита.

Задача 17.

Сколько существует различных семизначных телефонных номеров?

Задача 18.

Пусть буквы некоторой азбуки образуются как последовательность точек, тире и пробелов. Сколько различных букв можно образовать, если использовать 5 символов?

Задача 19.

Сколькими способами мы можем расставить семь учеников в ряд, при условии, что три определенных ученика будут находиться рядом друг с другом?

Задача 20.

В классе 10 учеников. Сколькими способами можно выбрать трех дежурных?

Задача 21.

В комиссию избраны 9 человек. Сколькими способами из них можно выбрать председателя, заместителя председателя, секретаря и организатора?

Задача 22.

Собрание из 40 человек избирает правление в виде председателя, секретаря и 5 членов некоторой комиссии. Сколько разных комиссий может быть составлено?

ТЕМА 3. КОЛИЧЕСТВО ДЕЛИТЕЛЕЙ ЧИСЛА

Задача 23.
Найдите количество делителей числа 200.

Задача 24.
Найдите количество делителей числа 720.

Задача 25.
Произведение числа 693 и числа n является полным квадратом. Чему равно наименьшее значение n?

Задача 26.
Произведение числа 264 и числа n является полным кубом. Чему равно наименьшее значение n?

Задача 27.
Найдите наименьшее число, которое делится на 10 и имеет ровно 14 делителей.

Задача 28.
Произведение числа 702 и числа n является полным квадратом. Чему равно наименьшее значение n?

Задача 29.
Произведение числа 1575 и числа n является полным квадратом. Чему равно наименьшее значение n?

Задача 30.
Произведение числа 54000 и числа n является полным кубом. Чему равно наименьшее значение n?

Задача 31.
Произведение числа 10125 и числа n является полным кубом. Чему равно наименьшее значение n?

Задача 32.
Найдите количество делителей числа 8064.

Задача 33.
Найдите количество делителей числа 884.

Задача 34.
Найдите количество делителей числа 3861.

Задача 35.
Найдите количество делителей числа 784.

Задача 36.
Произведение числа 2744000 и числа n является числом четвертой степени. Чему равно наименьшее значение n?

Задача 37.
Найдите наименьшее число, которое делится на 21 и имеет ровно 15 делителей.

Задача 38.
Найдите наименьшее число, которое делится на 30 и имеет ровно 45 делителей.

Задача 39.
Найдите наименьшее число, которое делится на 35 и имеет ровно 105 делителей.

ТЕМА 4. АРИФМЕТИКА ОСТАТКОВ

Задача 40.

Найдите остаток числа 13^{100} по модулю 4.

Задача 41.

Докажите, что при любых натуральных n число $n^3 - n$ делится на 6 без остатков.

Задача 42.

Докажите, что $(n^5 - n) \vdots 10$

Задача 43.

Докажите, что ни одно из чисел вида 10^{3n+1} нельзя представить в виде суммы двух кубов натуральных чисел.

Задача 44.

Целые числа a, b, c и d таковы, что $a^4 + b^4 + c^4 + d^4$ делится на 5. Докажите, что abcd делится на 625.

Задача 45.

Докажите, что $6^{2n+1} + 1 \vdots 7$.

Задача 46.

Докажите, что $21^{2015} - 1 \vdots 20$

Задача 47.

Докажите, что $30^{99} + 61^{100} \vdots 20$

Задача 48.

Докажите, что при всех натуральных n число $f(n) = 2^{2n-1} - 9n^2 + 21n - 14$ делится на 27.

Задача 49.

Найдите последнюю цифру числа 7^{7^7}.

Задача 50.

Докажите, что $a^3 + b^3 + 4$ не является кубом целого числа ни при каких натуральных a и b.

ТЕМА 5. АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА

Задача 51.

Запишите наибольший общий делитель чисел 519 и 1730, используя алгоритм Евклида.

Задача 52.

Докажите, что дробь следующая дробь не сократима при натуральных n: $\frac{21n+4}{14n+3}$

Задача 53.

Пусть n – нечетное. Докажите, что n и $n+2$ – взаимно просты.

Задача 54.

Найдите числа m и n, если $(m, n) = 8$ и $[m, n] = 200$.

Задача 55.

Запишите наибольший общий делитель чисел 1128 и 1636, используя алгоритм Евклида.

Задача 56.

Запишите наибольший общий делитель чисел 1769 и 2378, используя алгоритм Евклида.

Задача 57.

Существуют ли два натуральных числа, наибольших общий делитель которых равен 7, а сумма этих чисел делится на 2012?

Задача 58.

Докажите, что два подряд идущих числа всегда взаимно просты.

Задача 59.

$(m, 6) = (n, 6) = 3$. Найдите $(m + n, 6)$.

Задача 60.

$(m, n) = 1$. Докажите, что $(m + n, m - n) = 1$ *или* 2.

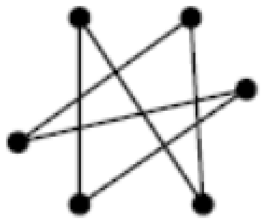
Задача 61.

Докажите, что $(7k + 16, 3k + 7) = 1$.

ТЕМА 6. ГРАФЫ

Задача 62.

Определите количество вершин, количество ребер графа, а также степень и четность каждой вершины графа. *(рис. 1)*



(рис. 1)

Задача 63.

Постройте граф, который содержит 4 вершин, а степени вершин равны 3, 2, 2, 1.

Задача 64.

Можно ли построить граф, который содержит 5 вершин, а степени вершин равны 4, 2, 2, 2, 3?

Задача 65.

Сколько рёбер в графе, в котором 10 вершин и любые две вершины соединены ребром?

Задача 66.

Несколько телефонов соединены 25 проводами так, чтобы каждый был соединён ровно с 5 другими. Сколько телефонов были соединены проводами?

Задача 67.

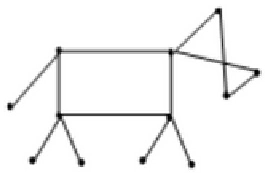
Из доски 4×4 вырезаны все угловые клетки. Может ли шахматный конь обойти всю доску и вернуться на исходную клетку, побывав в каждой клетке ровно один раз? *(рис. 2)*

	1	2	
3	4	5	6
7	8	9	10
	11	12	

(рис. 2)

Задача 68.

Укажите степени всех вершин, изображенных на рисунке снизу. Сколько здесь четных вершин, сколько нечетных? *(рис. 3)*



(рис. 3)

Задача 69.

Постройте граф, который содержит 5 вершин, а степени вершин равны 2, 2, 2, 1, 1.

Задача 70.

Можно ли построить граф, который содержит 4 вершин, а степени вершин равны 3, 3, 3, 2?

Задача 71.

Между планетами введено космическое сообщение по следующим маршрутам: З-К, П-В, З-П, П-К, К-В, У-М, М-С, С-Ю, Ю-М, М-У. Можно ли добраться с З до М?

Задача 72.

В графе 40 вершин, каждая степени 7. Сколько рёбер в графе?

Задача 73.

Как известно, у марсиан 3 руки. Могут ли 2015 марсиан взяться за руки, чтобы не осталось свободных рук? (В каждом рукопожатии участвуют ровно две руки).

Задача 74.

Можно ли несколько телефонов соединить 25 проводами так, чтобы каждый был соединён ровно с 4 другими?

Задача 75.

В некоторой стране любые два города соединены либо авиалинией, либо железной дорогой. Докажите, что можно выбрать вид транспорта так, чтобы от любого города можно было добраться до любого другого, пользуясь только этим видом транспорта.

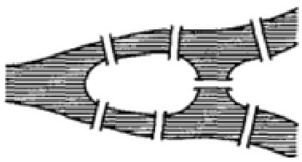
ТЕМА 7. ЭЙЛЕРОВЫ ГРАФЫ

Задача 76.

Можно ли, не отрывая карандаш от бумаги и не проводя по одной линии дважды, нарисовать квадрат с диагоналями и правильный пятиугольник с диагоналями?

Задача 77.

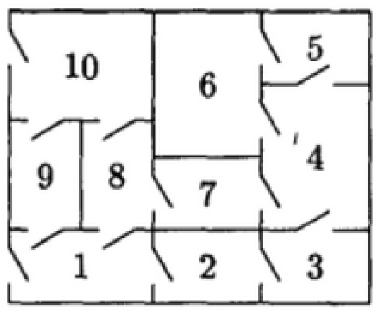
Схема мостов Кенигсберга изображена на рисунке. Можно ли совершить прогулку, пройдя по каждому мосту ровно один раз? *(рис. 4)*



(рис. 4)

Задача 78.

На рисунке план подвала из 10 комнат. Можно ли пройти через все двери всех комнат, запирая каждый раз ту дверь, через которую вы проходите? С какой комнаты надо начинать движение? *(рис. 5)*



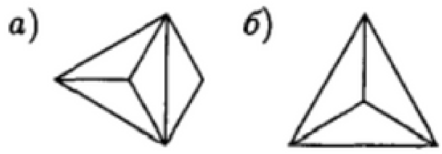
(рис. 5)

Задача 79.

Можно ли нарисовать граф, изображённый

а) на рисунке а;

б) на рисунке б, не отрывая карандаш от бумаги и проводя каждое ребро ровно один раз?



Задача 80.

В Тридевятом царстве лишь один вид транспорта- ковёр-самолёт. Из столицы выходит 21 ковролиния, из города Дальний- одна, а из всех остальных городов- по 20. Докажите, что из столицы можно долететь в Дальний (возможно, с пересадками).

Задача 81.

В стране из каждого города выходит 100 дорог и от любого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь от любого города можно добраться до любого другого.

Задача 82.

Как соединить 50 городов наименьшим числом авиалиний так, чтобы из другого города можно было попасть в любой другой, сделав не более двух пересадок?

Задача 83.

Турист обошёл 6 улиц одного города, пройдя каждую ровно два раза, но не смог обойти их, пройдя каждую по одному разу. Могло ли быть, если а) улицы могут заканчиваться тупиком; б) конец каждой улицы – перекрёсток?

ТЕМА 8. НЕРАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКА

Задача 84.

Биссектриса угла при основании BC равнобедренного треугольника ABC пересекает боковую сторону AC в точке K. Докажите, что

$BK < 2CK$

Задача 85.

В треугольнике ABC известно, что <B> 90°. На отрезке BC взяты точки M и N (M между B и N) так, что лучи AN и AM делят угол BAC на три равные части. Докажите, что BM < MN < NC.

Задача 86.

Основание D высоты AD треугольника ABC лежит на стороне BC, причем <BAD> <CAD. Что больше, AB или AC?

Задача 87.

Внутри треугольника ABC взята точка M. Докажите, что угол BMC больше угла BAC.

Задача 88.

Четыре дома расположены в вершинах выпуклого четырехугольника. Где нужно вырыть колодец, чтобы сумма расстояний от него до четырех домов была наименьшей?

Задача 89.

В треугольнике ABC с тупым углом C точки M и N расположены соответственно на сторонах AC и BC. Докажите, что отрезок MN короче отрезка AB.

Задача 90.

На биссектрисе внешнего угла C треугольника ABC взята точка M, отличная от C. Докажите, что $MA + MB > CA + CB$.

ТЕМА 9. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

Задача 91.

Прямые, содержащие боковые стороны трапеции, пересекаются под прямым углом. Большая боковая сторона трапеции равна 8, а разность оснований равна 10. Найдите меньшую боковую сторону.

Задача 92.

Найдите основание равнобедренного треугольника, если его боковая сторона равна a, а высота, опущенная на основание, равна отрезку, соединяющему середину основания с серединой боковой стороны.

Задача 93.

На боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре построена окружность, делящая вторую боковую сторону на отрезки, равные a и b. Найдите основание треугольника.

Задача 94.

Из точки M проведены касательные MA и MB к окружности с центром O (A и B – точки касания). Найдите радиус окружности, если $\angle AMB = \alpha$ и $AB = a$

Задача 95.

Две стороны треугольника равны a и b. Медианы, проведенные к этим сторонам, взаимно перпендикулярны. Найдите третью сторону треугольника.

Задача 96.

В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота из вершины C прямого угла. На этой высоте как на диаметре построена окружность. Известно, что эта окружность высекает на катетах отрезки, равные 12 и 18. Найдите катеты треугольника.

Задача 97.

В трапеции $ABCD$ основание $\mathrm{AD} = 2$, основание $\mathrm{BC}=1$. Боковые стороны $\mathrm{AB} = \mathrm{CD} = 1$. Найдите диагонали трапеции.

Задача 98.

На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке D, причем $\mathrm{AD} : \mathrm{DB} = 1 : 3$. Высота, опущенная на гипотенузу, равна 3. Найдите катет BC.

Задача 99.

Высоты треугольника равны 12, 15 и 20. Докажите, что этот треугольник прямоугольный.

ТЕМА 10. ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

Задача 100.

Ученики 8А класса изобрели робота, который может называть натуральные числа от 1 до 28 каждое по одному разу в произвольном порядке. Но если робот назовет число, которое делится либо на 2, либо на 3, то он автоматически выключается. Какое количество чисел должен назвать робот, чтобы выключиться?

Задача 101.

Коробка содержит карточки, пронумерованные от 1 до 203 (включительно). Какое наименьшее количество карточек нужно вынуть из коробки не глядя, чтобы среди вынутых оказалась хотя бы девять карточек, с числом, делящимся либо на 2, либо на 9, либо на 11?

Задача 102.

Акназар бросает 2 классических игральных кубика и каждый раз складывает выпавшие числа. Какое наименьшее количество раз нужно бросить кубики, чтобы обязательно получились две одинаковые суммы?

Задача 103.

В квадрате 4х4 нарисовано 15 точек. Доказать, что из него можно вырезать квадратик 1х1, не содержащий внутри себя точек.

Задача 104.

Мешок содержит шарики, пронумерованные от 1 до 100 (включительно). Какое наименьшее количество шариков нужно вынуть из мешка не глядя, чтобы среди вынутых оказались хотя бы один шарик, с числами, делящимися на 12?
точек, которые лежат в круге радиуса 1 см.

Задача 105.

Коробка содержит карточки, пронумерованные от 1 до 127 (включительно). Какое наименьшее количество карточек нужно вынуть из коробки не глядя, чтобы среди вынутых оказалась хотя бы десять карточек, с числами, делящимися на 5?

Задача 106.

Коробка содержит карточки, пронумерованные от 11 до 98 (включительно). Какое наименьшее количество карточек нужно вынуть из мешка коробки не глядя, чтобы среди вынутых оказалась хотя бы восемнадцать карточек, с числами, делящимися на 3?

Задача 107.

Ученики 8А класса изобрели робота, который может называть натуральные числа от 1 до 39 каждое по одному разу в произвольном порядке. Но если робот назовет число, которое делится либо на 5, либо на 4, то он автоматически выключается. Какое количество чисел должен назвать робот, чтобы выключиться?

Задача 108.

Ученики 8А класса изобрели робота, который может называть натуральные числа от 1 до 83 каждое по одному разу в произвольном порядке. Но если робот назовет число, которое делится либо на 2, либо на 5, то он автоматически выключается. Какое количество чисел должен назвать робот, чтобы выключиться?

Задача 109.

Коробка содержит карточки, пронумерованные от 1 до 125 (включительно). Какое наименьшее количество карточек нужно вынуть из коробки не глядя, чтобы среди вынутых оказалась хотя бы одна карточка, с числом, делящимся либо на 3, либо на 4, либо на 5?

Задача 110.

Коробка содержит карточки, пронумерованные от 1 до 176 (включительно). Какое наименьшее количество карточек нужно вынуть из коробки не глядя, чтобы среди вынутых оказалась хотя бы шесть карточек, с числом, делящимся либо на 3, либо на 5, либо на 8?

Задача 111.

Акназар бросает 3 классических игральных кубика и каждый раз складывает выпавшие числа. Какое наименьшее количество раз нужно бросить кубики, чтобы обязательно получились две одинаковые суммы?

Задача 112.

Акназар бросает 4 классических игральных кубика и каждый раз складывает выпавшие числа. Какое наименьшее количество раз нужно бросить кубики, чтобы обязательно получились две одинаковые суммы?

Задача 113.

В квадрате со стороной 5 см размещено 126 точек. Доказать, что среди них существует 6

ТЕМА 11. УРАВНЕНИЯ В ЦЕЛЫХ ЦИСЛАХ

Задача 114.

$$xy + x - 3y = 4$$

Задача 115.

$$5x^4 + 10x^2 + 2y^6 + 4y^3 = 6$$

Задача 116.

$$10x + y = x^2 + y^2 - 13$$

Задача 117.

$$x^2 + y^2 = 4z - 1$$

Задача 118.

$$(2x + y)(5x + 3y) = 7$$

Задача 119.

$$x^2 - y^2 = 31$$

Задача 120.

$$xy = x + y + 3$$

Задача 121.

$$6x^2 + 5y^2 = 74$$

Задача 122.

$$x^2 = 14 + y^2$$

Задача 123.

$$x^2 - 7y = 10$$

Задача 124.

$$x^2 - 3y^2 = 8$$

Задача 125.

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 7$$

Задача 126.

$$xy + 3x - 5y = -3$$

ТЕМА 12. ТЕОРИЯ ИГР

Задача 127.

Двое играют в следующую игру. Имеется три кучки камней: в первой – 10, во второй – 15, в третьей – 20. За ход разрешается разбить любую кучку на две меньшие; проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

Задача 128.

Двое по очереди ломают шоколадку 6x7. За ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из кусков вдоль углубления. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

Задача 129.

Имеются две кучки камней: в одной 30, в другой 20. За ход разрешается брать любое количество камней, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кому нечего брать.

Задача 130.

В куче 25 камней. Игроки берут по очереди 2, 4 и 7 камней. Проигрывает тот, кому некуда ходить.

Задача 131.

Двое по очереди ставят королей в клетки доски 7x7 так, чтобы короли не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 132.

Двое по очереди ставят ладей на шахматную доску так, чтобы ладьи не били друг друга. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

Задача 133.

На доске написаны 10 единиц и 10 двоек. За ход можно стереть две любые цифры и, если они были одинаковыми, написать 2, а если разными – 1. Если последняя оставшаяся на доске цифра – 1, то выиграл первый игрок, если 2 – то второй.

Задача 134.

Двое по очереди ставят королей в клетки доски 9X9 так, чтобы короли не били друг друга. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

Задача 135.

Дана клетчатая доска 10x10. За ход разрешается покрыть любые две соседние клетки доминошкой (прямоугольником 1x2) так, чтобы доминошки не перекрывались. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

Задача 136.

Имеются три кучи камней. Число камней во всех кучах одинаково. Двое играющих берут по очереди любое число камней из любой кучи, но только из одной. Выигрывает тот, кто берет последние камни.

Задача 137.

а)Имеется куча из n камней. Двое играющих берут из нее по очереди камни. Каждый может взять 1, 2 или 3 камня. Выигрывает тот, кто берет последние камни. При каком числе камней в куче начинающий выигрывает (т.е. добьется победы, как бы ни играл его партнёр)?

б) Та же задача, если в куче n камней, а каждый может взять от 1 до m камней (m>n)

Задача 138.

а) В коробке 27 спичек. Двое играющих берут по очереди 1, 2, 3 или 4 спички. Выигрывает тот, у кого после окончания игры окажется четное число спичек.

б) Каков ответ в более общем случае, когда в коробке находится $2n+1$ спичка, а брать разрешается любое число спичек от 1 до m?

Задача 139.

За ход разрешается взять из коробка с 300 спичками не более половины имеющихся в нем спичек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

КЛЮЧИ

1. 3
2. 21
3. 85995
4. 136
5. 42
6. A) 5 B)5
7. 768
8. 126
9. В первом варианте больше выбора
10. 480
11. 10
12. 24
13. 10
14. 60, 36
15. 30
16. 338240000
17. 10000000
18. 243
19. 144
20. 120
21. 3024
22. 40·39·C385
23. 12
24. 30
25. 77
26. 1089
27. 320
28. 78

29. 7

30. 4

31. 9

32. 48

33. 12

34. 16

35. 15

36. 112

37. 3969

38. 3600

39. 1960000

40. 1

41. Рассмотреть все остатки при делении на 6

42. Рассмотреть все остатки при делении на 10

43. Число необходимо сравнить по модули 7 и разобрать каждый остаток

44. Рассмотреть все остатки при делении на 5

45. 6 при делении на 7 дает остаток -1

46. 21 при делении на 20 дает остаток 1

47. 39 при делении на 20 дает -1, а 61 дает 1 остаток

48. Преобразование формулы

49. 3

50. Выясните, какой остаток может давать число $a^3 + b^3 + 4$ от деления на 9.

51. (519; 1730)=173

52. (21 n+4; 14 n+3)=1

53. Алгоритм Евклида

54. 8 и 200

55. (1128; 1636)=4

56. (1769; 2378)=29

57. Да, например 14007 и 77

58. Алгоритм Евклида

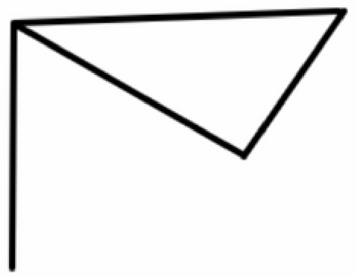
59. 2

60. Четность и алгоритм Евклида

61. Алгоритм Евклида

62. Количество вершин – 6, количество ребер – 6

63. Пример



64. Нет

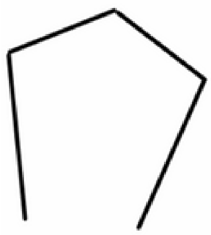
65. 45

66. 10

67. Необходимо построить граф

68. 6 четных вершин, 6 нечетных вершин

69. Пример



70. Нет

71. Нет

72. 140

73. Нет, лемма о рукопожатиях

74. Нет, не делится на 4

75. Пусть из некоторого города A нельзя попасть в некоторый город B по железной дороге. Рассмотрим множество M всех городов, в которые можно попасть из города A по железной дороге. Множество городов, не входящих в M, обозначим N. Множество N непусто, поскольку в нём содержится город B. Ясно, что из городов множества M нельзя попасть в города множества N по железной дороге. Докажем, что из каждого города в любой другой можно попасть авиарейсами. Если один из городов принадлежит M, а другой – множеству N, то между ними есть прямая авиалиния. Пусть два города принадлежат M. Тогда из первого города можно попасть авиарейсом в некоторый город множества N, а оттуда (также самолётом) – во второй город. Аналогично рассматривается случай, когда оба города принадлежат N.

76. Проверить на наличие эйлерово пути

77. Нет

78. Нарисовать граф и проверить, является ли он эйлеровым

79. А) да Б) нет

80. Рассмотрим компоненту связности графа ковролиний, содержащую столицу. Предположим, что она не содержит город Дальний. Тогда в этой компоненте связности из одной вершины (столицы) выходит 21 ребро, а из всех остальных вершин – по 20 рёбер. Таким образом в этом подграфе ровно одна нечётная вершина.

81. Одна дорога связывает две вершины. Если это ребро убрать, то останется две нечетных вершины, и в графе в любом случае будет эйлеров путь.

82. Выделим один город и соединим его авиалинией с каждым из остальных 49 городов. Для этого потребуется 49 авиалиний. Меньшим числом авиалиний обойтись нельзя.

83. Рассмотрим шесть улиц, выходящих из центра города в разных направлениях (то есть шесть отрезков с общим началом и без других общих точек). Пешеход может, выйдя из центра, пройти каждую улицу туда-обратно. Но, очевидно, пройти по каждой улице ровно один раз невозможно. Могло.

84. Доказательство в видеоуроке на платформе Birge Oqy

85. Доказательство в видеоуроке на платформе Birge Oqy

86. AB больше

87. Продолжим AM до пересечения со стороной BC в точке K. Тогда $\angle BM > \angle BAM$, $\angle CMK > \angle CAM$. Следовательно, $\angle BMC = \angle BMK + \angle CMK > \angle BAM + \angle CAM = \angle BAC$.

88. В точке пересечения диагоналей четырёхугольника. Чтобы доказать предположите, что искомая точка не лежит на одной из диагоналей и воспользуйтесь неравенством треугольника.

89. Неравенство треугольника с углами

90. Подсказка: Отобразите точку B симметрично относительно прямой CM.

91. 6

92. $a\sqrt{3}$

93. $\sqrt{2b(a+b)}$

94. $\frac{a}{2}\cos\left(\frac{a}{2}\right)$

95. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$

96. 39 и 26

97. $\sqrt{3}$

98. $\frac{a^3b}{2a^2+2b^2}$

99. Подсказка: в прямоугольном треугольнике катеты являются высотами

100. 10

101. 92

102. 12

103. $4 \cdot 4 = 16 > 15$

104. 93

105. 112

106. 77

107. 25

108. 35

109. 51

110. 88

111. 17

112. 22

113. 55=25, 126:25>5. Каждый квадрат можно вписать в круг радиусом 1 см.

114. Решение показано в видеоуроке на Birge Oqy

115. Решение показано в видеоуроке на Birge Oqy

116. Решение показано в видеоуроке на Birge Oqy

117. Решение показано в видеоуроке на Birge Oqy

118. По очереди приравнить каждую скобку к 1 и 7 и решить систему уравнений

119. Разложить левую часть по ФСУ и приравнить к 1 и 31

120. Разложить на множители и приравнить к 1 и 3

121. Подсказка: вместо x в квадрате можно поставить только 0, 1, 4, 9, так как $74-6x^2 \geq 0$.

122. Неизвестные собрать с левой стороны уравнения и разложить на множители по ФСУ

123. Сравнить по модулю 7

124. Сравнить по модулю 3

125. Решить через параметр

126. Разложить левую часть на множители

127. 10+15+20=45, 45–3=42. Выиграет 2 игрок

128. 6·8=48, 48-1=47. Выиграет 1 игрок

129. Стратегия повтора

130. Выигрывает 1 игрок, для этого нужно сперва взять 7 камней.

131. Стратегия повтора. 1 король в центр доски и дальше симметричный повтор

132. 8 ладей, выиграет 2 игрок

133. Заметим, что чётность суммы всех написанных на доске чисел не меняется: вместо 1,1 или 2, 2 (суммы равны 2 или 4 - чётные) пишут 2 (тоже чётное), вместо 1, 2 (сумма 3 - нечётная) пишут 1 - нечётное число. Изначально сумма равна 10 * 1 + 10 * 2 = 30 - и она чётная. В конце должно остаться одно число, и так как чётность суммы не поменялась, то оно чётное, т.е. 2. Значит, выигрывает второй игрок, притом всегда.

134. Стратегия повтора. 1 король в центр доски и дальше симметричный повтор

135. Стратегия повтора, симметрия относительно центра доски, выиграет второй игрок

136. Первый игрок может взять все камни из третьей кучи, потом начнет повторять за вторым игроком

137. А) Для выигрыша достаточно оставлять партнеру число камней, делящееся на 4. Первый игрок может это сделать, если начальное число камней не делится на 4. Б) Первый выигрывает, если n не делится на m+1

138. Выиграет первый игрок

139. Выигрывает первый игрок. Выигрышными являются позиции, при которых в коробке остается 2^n-1 спичка. Первый ход – оставить 255 спичек.