a

UNAH
Universidad Nacional
Autónoma de Honduras

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICA

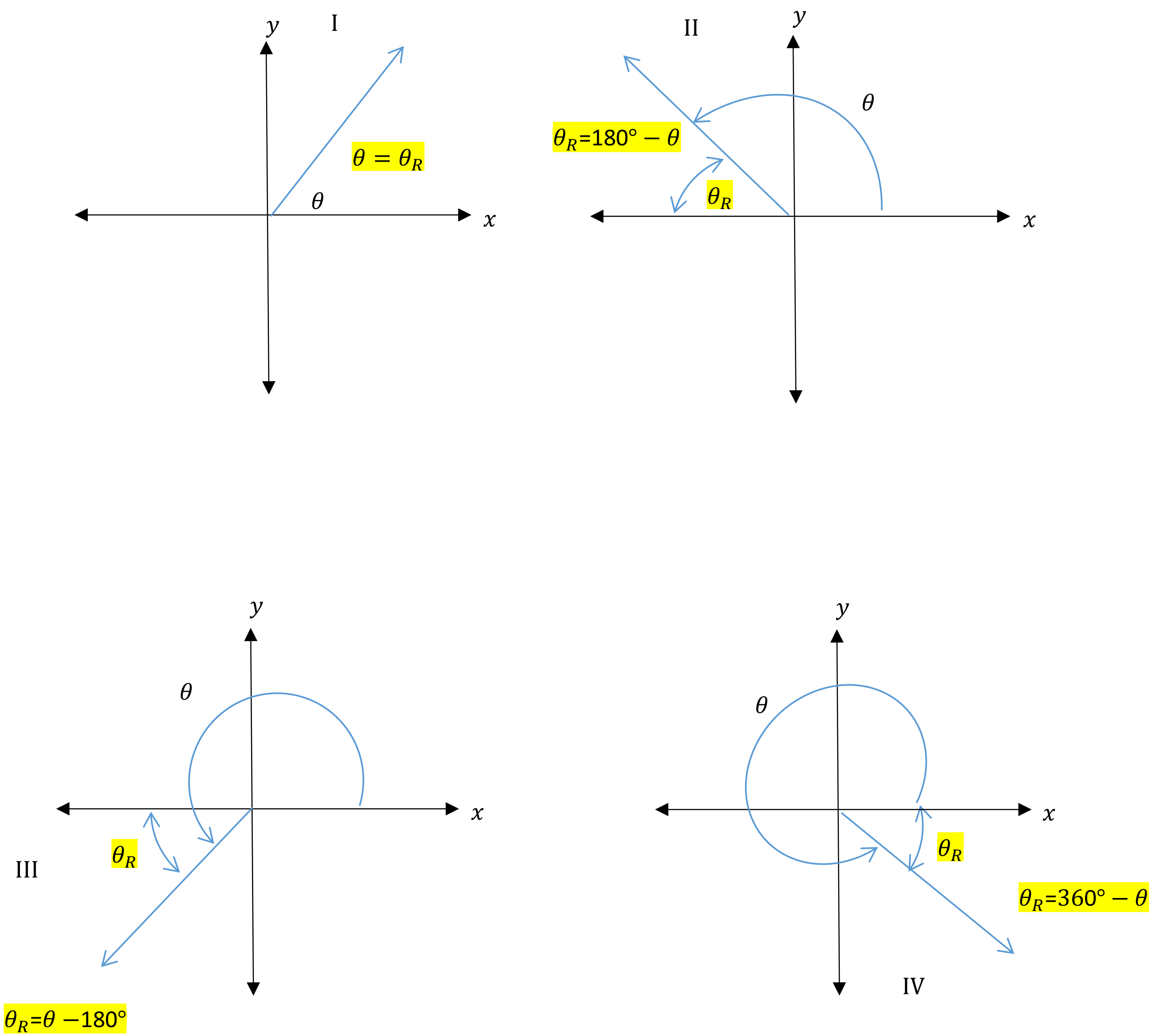
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA

Licda. Osiris Yamileth Rodríguez Maldonado

Ángulo de Referencia

Sea θ un ángulo no cuadrantal en posición normal o estándar. El ángulo de referencia para θ es el ángulo agudo y positivo θ_R formado por el lado terminal de θ y el $eje\ x$ ya sea el positivo o el negativo.

Como determinar el ángulo de referencia



Ejemplos Ilustrativos

1. Determinar para $\theta = \frac{7\pi}{4}$ tres ángulos coterminales negativos y tres ángulos coterminales positivos.
2. Determine el ángulo de referencia de: $a. -120°$ $\quad b. \frac{-27\pi}{4}$ $\quad c. -6$.
3. Si θ es un ángulo en posición normal y el punto $P(2\sqrt{3}, -2)$ está en lado terminal de θ. Determinar el valor exacto de las 6 funciones trigonométricas de θ, si existen.
4. Si θ es un ángulo en posición normal y el punto $P(a, 2a)$ está en lado terminal de θ con $a > 0$, encuentre el valor exacto de la $csc\theta$.
5. Determine el valor exacto de las 6 funciones trigonométricas para θ, si θ está en posición normal y el lado terminal de θ es paralelo a la recta que contiene los puntos $(1,2), (3,-4)$ y $\theta \in IV$ cuadrante.

Solución 1

$\theta = \frac{7\pi}{4} = 315°$ *usando la conversión de grados a radianes:* $\frac{7\pi}{4} \cdot \frac{180°}{\pi} = 315°$

Encontrando 3 ángulos coterminales positivos

$$315° + (360°) = 675°\ o\ \frac{7\pi}{4} + 2\pi = \frac{15\pi}{4}$$

$$315° + (2)(360°) = 1035°\ o\ \frac{7\pi}{4} + 4\pi = \frac{23\pi}{4}$$

$$315° + (3)(360°) = 1395°\ o\ \frac{7\pi}{4} + 6\pi = \frac{31\pi}{4}$$

Encontrando 3 ángulos coterminales negativos

$$315° - (360°) = -45°\ o\ \frac{7\pi}{4} - 2\pi = -\frac{\pi}{4}$$

$$315° - 2(360°) = -405°\ o\ \frac{7\pi}{4} - 4\pi = -\frac{9\pi}{4}$$

$$315° - 3(360°) = -765°\ o\ \frac{7\pi}{4} - 6\pi = -\frac{17\pi}{4}$$

Para encontrar los ángulos coterminales positivos para un ángulo θ usamos la siguiente fórmula:

$$\theta + n(360°), \quad n \in Z^+$$

$$\theta + n(2\pi), \quad n \in Z^+$$

Para encontrar los ángulos coterminales positivos para un ángulo θ usamos la siguiente fórmula:

$$\theta - n(360°), \quad n \in Z^+$$

$$\theta - n(2\pi), \quad n \in Z^+$$

Solución 2

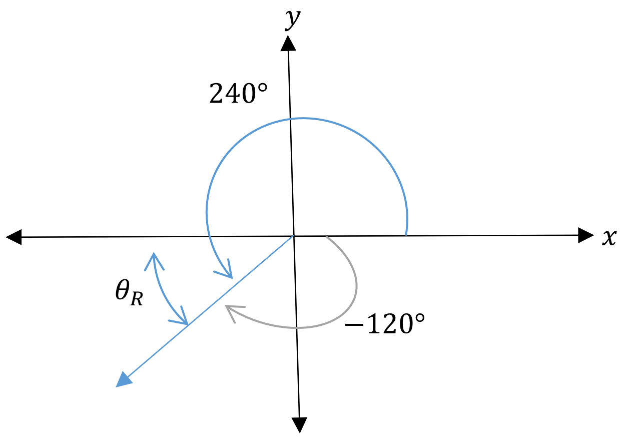
a. $\theta = -120°$ esta en el tercer cuadrante, y usaremos la fórmula

$$\theta_R = \theta - 180°$$

por definición, θ_R es el ángulo agudo y positivo formado por el lado terminal de θ y el $eje\ x$ ya sea el positivo o el negativo. Entonces buscamos un ángulo coterminal para θ:

$$-120° + (360°) = 240°$$

Aplicamos la fórmula $\theta_R = 240° - 180° = 60°$



b. $\theta = \frac{-27\pi}{4} = -1215°$

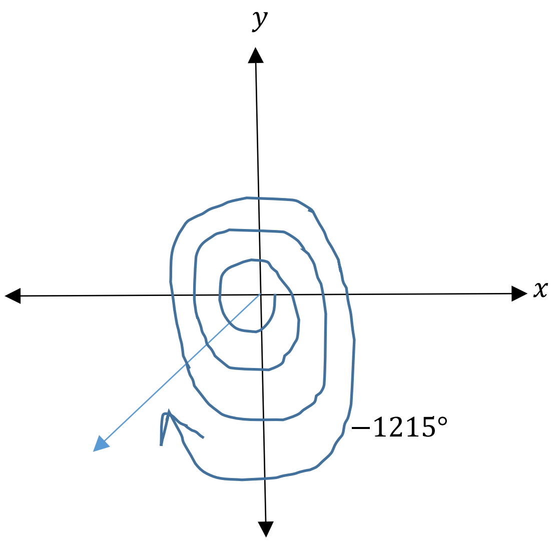
Encontrando un ángulo coterminal positivo

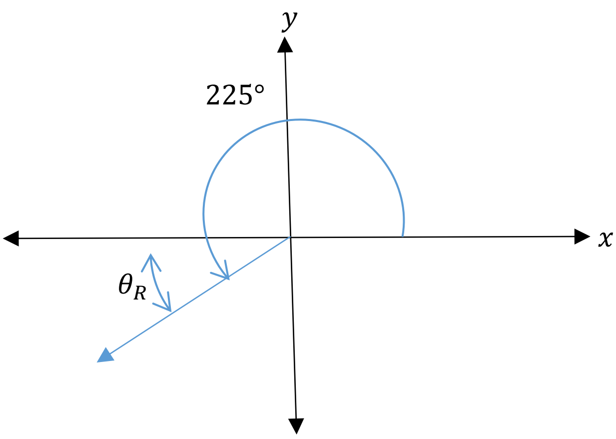
$$\frac{-27\pi}{4} + 4(2\pi) = \frac{5\pi}{4}$$

$$-1215° \;\; + 1440° = 225$$

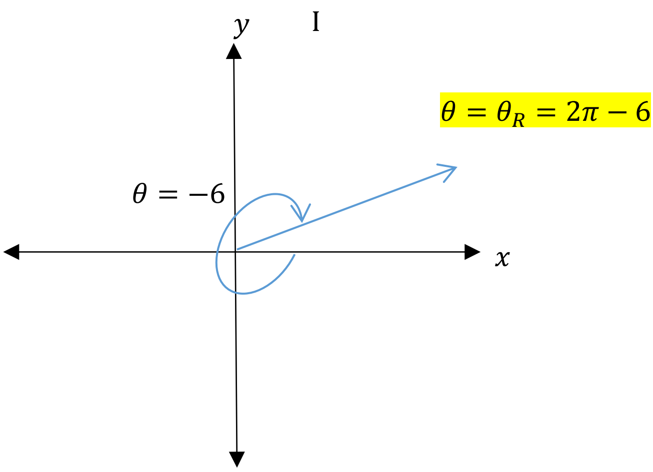
Aplicamos la fórmula $\theta_R = \frac{5\pi}{4} - \pi = \frac{\pi}{4}$

$$\theta_R = 225° - 180° = 45°$$





c. $\theta = -6$, un ángulo coterminal positivo para -6 : $\theta_c = -6 + 2\pi$

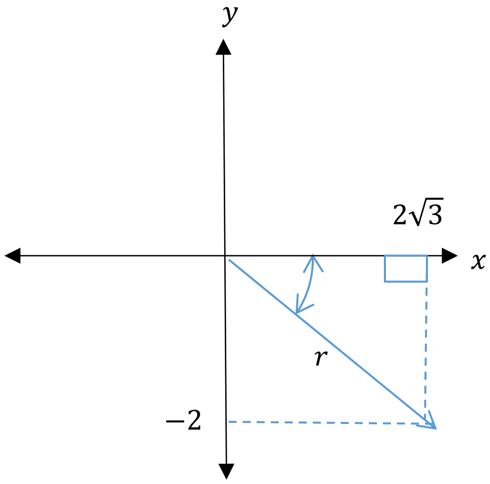


Solución 3

Si θ es un ángulo en posición normal y el punto $P(2\sqrt{3}, -2)$ está en lado terminal de θ. Determinar el valor exacto de las 6 funciones trigonométricas de θ, si existen.

$P(2\sqrt{3}, -2)$;

$$x = 2\sqrt{3}\ ,\ \ y = -2\ \ ,\ r^2 = x^2 + y^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2 = 16\ \rightarrow\ r = 4$$



$$sen\theta = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \qquad cos\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad tan\theta = \frac{-2}{2\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$$csc\theta = \frac{4}{-2} = -2 \qquad sec\theta = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad cot\theta = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$$

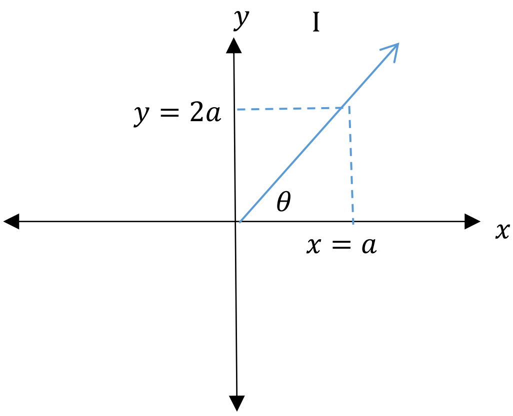
Solución 4

Si θ es un ángulo en posición normal y el punto $P(a, 2a)$ está en lado terminal de θ con $a > 0$, encuentre el valor exacto de la $csc\theta$.

$$r^2 = x^2 + y^2 = (a)^2 + (2a)^2 = a^2 + 4a^2$$

$$r = \sqrt{5a^2} = \sqrt{5}a$$

Por tanto $csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{5}\,a}{2a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$



Solución 5

Determine el valor exacto de las 6 funciones trigonométricas para θ, si θ está en posición normal y el lado terminal de θ es paralelo a la recta que contiene los puntos $(1,2), (3,-4)$ y $\theta \in IV$ cuadrante.

Necesitamos saber la pendiente de la recta que contiene los puntos $(1,2), y\ (3,-4)$:

$$m = \frac{-4-2}{3-1} = \frac{-6}{2} = -3$$

Luego sabemos que un punto en la recta que contiene el lado terminal de θ es $(0,0)$.

La ecuación de la recta que contiene el lado terminal de θ:

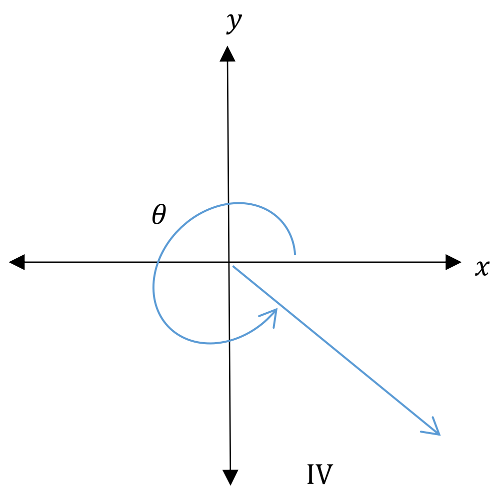
$$y - 0 = -3(x - 0)$$

$$y = -3x$$

El punto P de manera general: $P(x, -3x)$

$$r = \sqrt{x^2 + (-3x)^2} = \sqrt{x^2 + 9x^2} = \sqrt{10x^2} = \sqrt{10}x$$

Por tanto $sen\theta = \frac{y}{r} = \frac{-3x}{\sqrt{10}x} = \frac{-3}{\sqrt{10}}$



Bibliografía

Earl W. Swokowski, J. A. (2011). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* (13a. ed.). (S. R. CervantesGonzález, Ed.) México, D.F., México: Cengage Learning Editores, S.A. de C.V. Recuperado el 26 de Julio de 2020