Algorytmy numeryczne - zadanie 1

Oskar Gawryszewski

5 marca 2024

1 Wstęp

W tym projekcie skupię się na badaniu przybliżonej wartości liczby π, za pomocą obliczania obwodu n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1, oraz przybliżaniu liczby π za pomocą metody Monte Carlo.

2 Obliczanie obwodu n-kąta foremnego

Zaczynamy od obliczenia przybliżonej wartości π, obliczając obwód n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1. Za wektor początkowy przyjmujemy $w_0 = [\cos(\theta)-1, \sin(\theta)], \quad \text{gdzie} \quad \theta = \frac{2\pi}{n}$. Kolejne wektory w_i, dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$, otrzymujemy na podstawie poprzedniego obracając go o kąt θ:

$$w_{n+1}^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot w_n^T$$

Następnie liczymy obwód wielokąta sumując długość wszystkich wektorów w_i. Przybliżoną wartość π stanowi połowa długości obwodu.

Do przeprowadzenia obliczeń użyłem biblioteki numpy w pythonie.

Liczba wierzchołków	**Przybliżona wartość π**	**Różnica**
10	3.0901699437494745	0.0514227098403186
100	3.1410759078128323	0.0005167457769608141
1000	3.141587485879482	5.16771031122687e-06
10000	3.141592601911996	5.167779715264942e-08
100000	3.1415926530604152	5.293778748693967e-10
1000000	3.141592653578242	1.1551204437409979e-11

Table 1: Porównanie różnicy rzeczywistej wartości π, a przybliżonej wartości liczby π, przy rosnącej liczbie wierzchołków.

2.1 Hipoteza o zwiększaniu n w celu uzyskania wartości zbliżonej do 2π

Jak możemy zaobserwować, wraz z rosnącą liczbą wierzchołków, przybliżona wartość coraz bardziej zbliża się do rzeczywistej wartości liczby π. Przybliżona wartość π, to nic innego, jak obwód wielokąta, podzielony na dwa. W związku z tym, możemy stwierdzić, że wraz ze wzrostem liczby wierzchołków (wartości n), nasz obwód, coraz bardziej zbliża się do wartości 2π.

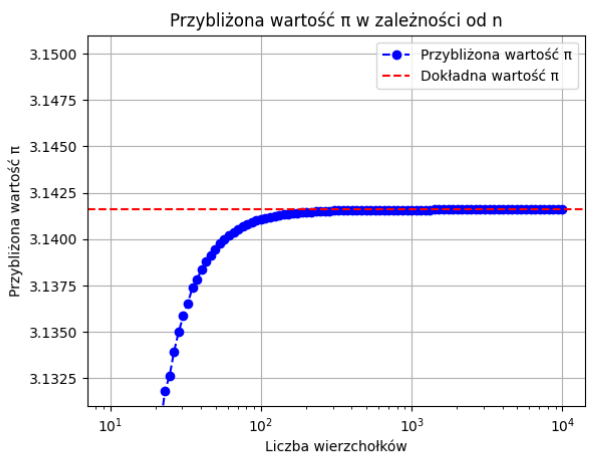

Figure 1: Wykres podglądowy

Dla lepszego zobrazazowania wyników, następny wykres przedstawia logarytmiczna różnicę rzecywistej wartości π, od przybliżonej wartości.

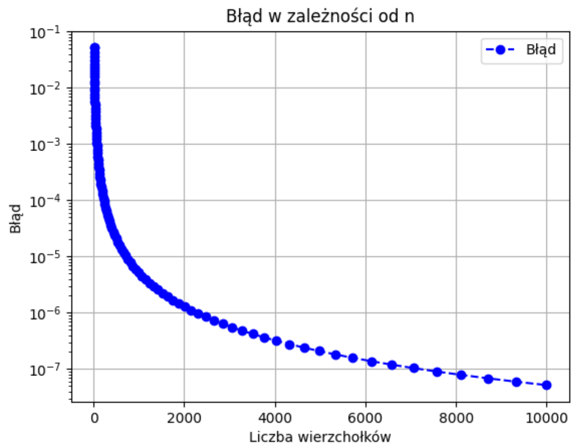

Figure 2: Wykres logarytmu różnicy rzeczywistej wartości pi od wartości przybliżonej

2.2 Hipoteza o sumie wszysktich wektorów

Przeprowadziłem test dla wielokąta foremnego o $n = 100$ wierzchołkach, uzyskując następujący wynik: suma wszystkich wektorów $\mathbf{w}_i$ wynosi $[0.00000000e + 00, 5.55111512e - 17]$. Wynik ten potwierdza hipotezę, że suma wektorów w wielokącie foremnym wynosi zero, co jest zgodne z oczekiwaniami. Jednakże warto zauważyć, że druga składowa wektora jest bliska zeru, ale nie jest to dokładnie zero. Jest to spowodowane błędami numerycznymi podczas obliczania wartości.

2.3 Hipoteza o sumie wszystkich wektorów z grupowaniem

Dla każdego wierzchołka wielokąta o $n = 100$ obliczyłem wektor skierowany od danego wierzchołka do następnego. Następnie dokonałem podziału współrzędnych tych wektorów na dodatnie i ujemne, zarówno dla współrzędnej x, jak i y. Elementy zbioru dodatnich współrzędnych x-owych (X^+) zostały posortowane w kolejności od najmniejszej do największej, a elementy zbioru ujemnych współrzędnych x-owych (X^-) od największej do najmniejszej. Analogicznie postąpiłem dla współrzędnych y.

Następnie obliczyłem sumy Sx^+ i Sx^- dla współrzędnych x, oraz Sy^+ i Sy^- dla współrzędnych y.

Wyniki eksperymentu przedstawiają się następująco:
Suma współrzędnych x: $4.440892098500626 \times 10^{-16}$
Suma współrzędnych y: 0.0

Suma współrzędnych x jest bliska zeru, a suma współrzędnych y dokładnie równa zeru, co sugeruje, że przy odpowiednim sortowaniu elementów wektorów, suma wszystkich wektorów może być zbliżona do wektora zerowego.

Porównując uzyskane wyniki, zauważamy, że obie metody prowadzą do bardzo bliskich wartości sumy współrzędnych x oraz y. Jednak w przypadku metody z sortowaniem, suma współrzędnych x jest minimalnie bliższa zeru.

Na podstawie tego eksperymentu można stwierdzić, że metoda sumowania z sortowaniem wydaje się być bardziej skuteczna w redukcji błędu numerycznego, co może być istotne szczególnie w precyzyjnych obliczeniach numerycznych.

3 Metoda Monte Carlo

Kolejnym sposobem na zbadanie przybliżonej wartości liczby π jest test Monte Carlo. W tym teście wygenerowałem losowo n punktów, znajdujących się wewnątrz kwadratu o boku 2 jednostek, a następnie sprawdzam, czy dany punkt znajduje się wewnątrz koła o promieniu 1 (wpisanego w środku tego kwadratu). Przybliżenie wartości liczby pi jest obliczane na podstawie stosunku liczby punktów w kole do liczby punktów w kwadracie.

Liczba iteracji	**Przybliżona wartość π**	**Różnica od rzeczywistej wartości π**
10	3.12	0.02159265358979301
100	3.1272	0.005592653589792995
1000	3.140464	0.0010566535897931217
10000	3.14131768	0.00019661358979305987

Table 2: Przybliżona wartość liczby π w zależności od liczby iteracji w metodzie Monte Carlo.

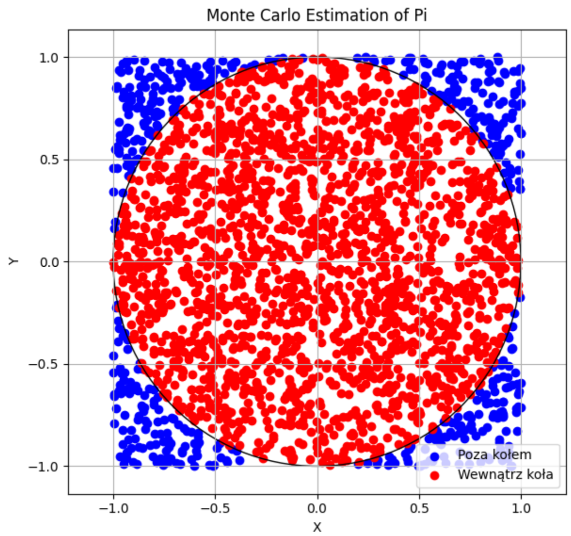

Figure 3: Wynik eksperymentu dla liczby próbek $n = 50$.

Wykres poniżej przedstawia jak zmieniają się wyniki przybliżenia, wraz ze zwiększaniem liczby próbek.

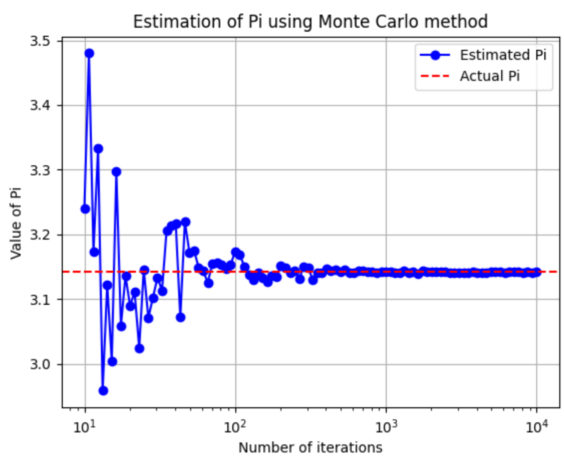

Figure 4: Przybliżenia π w teście Monte Carlo.

Ponownie, w celu lepszego zobrazowania wyników zbadamy logarytm różnicy rzeczywistej wartości π, od jej przybliżonej wartości.

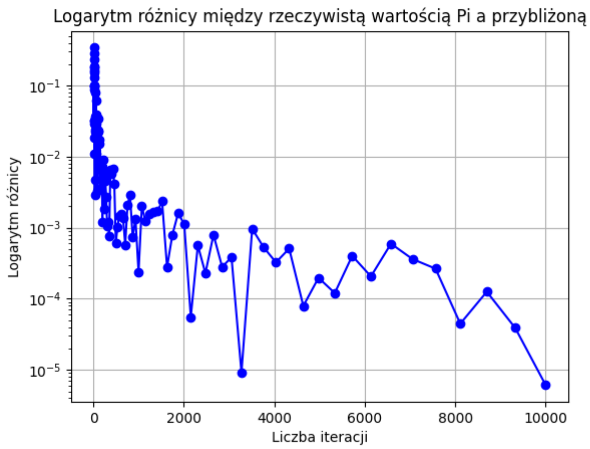

Figure 5: Wykres logarytmu różnicy rzeczywistej wartości pi od wartości przybliżonej

4 Hipoteza o efektywności metod

Skuteczność obydwóch metod porównałem poprzez określenie liczby iteracji/wierzchołków wymaganych do osiągnięcia dokładności do czterech i pięciu miejsc po przecinku. Dodatkowo zmierzyłem czas wykonania obu metod, aby ocenić ich efektywność czasową.

4.1 Efektywność metody obliczania obwodu wielokąta n-foremnego

Liczba wierzchołków potrzebna dla osiągnięcia dokładności do czterech miejsc po przecinku wynosiła 350. Dla dokładności do pięciu miejsc po przecinku, czas wykonywania wyniósł około 1.9229 sekundy, a liczba wierzchołków 823. Czas wykonania tej metody wyniósł około 0.3524 sekundy.

4.2 Efektywność metody Monte Carlo

Liczba próbek potrzebna dla osiągnięcia dokładności do czterech miejsc po przecinku wynosiła 400. Czas wykonania tej metody wyniósł około 8.8153 sekundy. Dla dokładności do pięciu miejsc po przecinku, czas wykonywnia wyniósł około 7 minut i 26.7997 sekundy, a liczba próbek 1449.

4.3 Wnioski

Metoda obliczania sumy wektorów okazała się być bardziej efektywna pod względem czasu wykonania, osiągając wynik znacznie lepszy niż metoda Monte Carlo.

Monte Carlo wymagała większej liczby czasu, jak i większej liczby iteracji, aby osiągnąć taką samą dokładność co metoda obliczania sumy wektorów.