Contents

1 Wstep

Odestkami - nazywa sie kwote, która należy zapłacić za prawo użytkowania określonego kapitału. Odsetki sa zatem cena płacona za wypożyczenie kapitału. Ustala sie je w odniesieniu do pewnego ustalonego okresu. Stosunek odsetek do kapitału, który je wygenerował w ustalonym okresie, nazywa sie **okresowa stopa procentowa.**

W praktyce najcześciej mamy do czynienia ze stopami procentowymi ustalonymi dla okresy rocznego. Mówimy wtedy o **rocznej stopie procentowej**.

Jeżeli np. odsetki za 1 rok od pożyczonego kapitału 60 000 PLN wynosza 1 500 PLN, to roczna stopa procentowa jest równa $r = \frac{1500}{60000} = 2,5\%$.

Powiekszenie kapitału o odsetki, które zostały przez niego wygenerowane, nazywa sie **kapitalizacja odsetek**. Czas, w którym odsetki sa generowane, nazywa sie okresem kapitalizacji. W dalszym ciagu rozważań ograniczymy sie do przypadku, gdy odsetki sa dopisywane na końcu okresów kapitalizacji. Mówimy wtedy o kapitalizacji z dołu.

Wyróżniamy dwa podstawowe rodzaje kapitalizacji: **prosta i złożona**.

2 Kapitalizacja prosta

W przypadku kapitalizacji prostej odsetki od kapitału oblicza sie od kapitału poczatkowego proporcjonalnie od długości kresu oprocentowania. Oznaczamy przez W poczatkowa wartość kapitału, przez r roczna stope procentowa, przez I_n należne za czas n, zaś przez W_n oznaczamy końcowa wartość kapitału w czasie n (w latach).

Reguła bankowa – każdy rok ma 360 dni, zaś każdy miesiac ma 30 dni.

$$I_n = Wnr \tag{1}$$

Natomiast wartość końcowa kapitału:

$$W_n = W(1 + nr) \tag{2}$$

2.1 Przykład 1

Przy kapitalizacji prostej i rocznej stopie procentowej $r = 4\%$ wyznaczyć odsetki i końcowa wartość kapitału 25 000 PLN po upływie a) 3lat, b) 142dni.

2.1.1 a)

$I_n = 25000 * 3 * 0,04 = 3000PLN$

2.1.2 b)

$W_n = 25000(1 + \frac{142}{360} + 0.04) = 25394,44PLN$

Załóżmy że czas trwania inwestycji wynosi n lat i składa sie z m nastepujacych po sobie okresów o długości $n_1, ..., n_m$. Przyjmijmy że w każdym z nich obowiazuje roczna stopa procentowa, odpowiednio, $r_1, ..., r_m$. Wtedy wartość kapitału poczatkowego W po pierwszym okresie wyniesie:

$$W_n = W(1 + \Sigma_{i=0}^{m} r_i n_i) \tag{3}$$

$$I_n = W \Sigma_{i=0}^{m} r_i n_i \tag{4}$$

Przecietna roczna stopa procentowa oprocentowania kapitału W w czasie n nazywa sie roczna stope, przy której kapitał W generuje w czasie n odsetki o takiej samej wartości jak przy stopach zmiennych. Definicja ta dotyczy zarówno kapitalizacji prostej i złożonej.

Oznaczajac przez r(z kreska na górze) przecietna roczna stopa oprocen, na podstawie wzorów (1) i (4) mamy

$$r = \frac{1}{n} \Sigma_{i=1}^{m} r_i n_i \tag{5}$$

Gdyby wszystkie okresy miały jednakowa długość to wzór:

$$r = \frac{1}{m} \Sigma_{i=1}^{m} r_i \tag{6}$$

2.2 Przykład 2

Przez poczatkowe 4 miesiaca trwania obowiazywała roczna stopa procentowa 6
Dane:

$N_1 = \frac{4}{12}$

$N_2 = \frac{5}{12}$

$N_3 = \frac{3}{12}$

$R_1 = 0,06$

$R_2 = 0,07$

$R_3 = 0,075$

$W = 20000PLN$

2.2.1 a)

Korzystajac ze wzoru (3) mamy
$W_3 = 20000(1 + 0.06 * \frac{4}{12} + 0.07 * \frac{5}{12} + 0.075 * \frac{3}{12}) = 21358,40PLN$

2.2.2 b)

Obliczyć wysokość przecietnej rocznej stopy oprocentowania
Korzystajac ze wzory (5) mamy
$r = 0.06 * \frac{4}{12} + 0.07 * \frac{5}{12} + 0.075 * \frac{3}{12} = 6,79\%$

Czesto zdarza sie, że stopa procentowa, przy której należy obliczyć odsetki nie jest stopa roczna lecz np. miesieczna lub kwartalna. Okres, po którym odsetki podlegaja kapitalizacji nazywa sie **podokresem kapitalizacji**. Stopa procentowa ustalona dla podokresu kapitalizacji nazywa sie **stopa pod okresowa. Czestotliwość kapitalizacji** oznacza ile razy odsetki sa kapitalizowane w ciagu roku.

W dalszym ciagu zakładamy że czestotliwość kapitalizacji wynosi m. Wobec tego każdy rok jest podzielony na m równych podokresów kapitalizacji.

$m = 1$ – kapitalizacja roczna

$m = 2$ – kapitalizacja półroczna

$m = 4$ – kapitalizacja kwartalna

$m = 12$ – kapitalizacja miesieczna

$m = 360$ – kapitalizacja dobowa(dzienna)

Jeżeli r_{okr} jest stopa podokresowa, to zgodnie z zasada oprocentowania prostego odsetki od kapitału W po upływie k podokresów wyznacza sie ze wzoru

$$I_k = Wkr_{okr} \tag{7}$$

Natomiast końcowa wartość kapitału W po upływie k:

$$W_k = W(1 + kr_{okr}) \tag{8}$$

Załóżmy że r_1 i r_2 sa podokresowymi stopami procentowymi, zaś m_1 i m_2 sa odpowiadajacymi im czestotliwościami kapitalizacji. Stopy r_1 i r_2 nazywamy równoważnymi w czasie n, jeżeli przy każdej z nich odsetki od ustalonego kapitału po czasie n sa równe.

Korzystajac z (7) mamy:

$$m_1 * r_1 = m_2 * r_2 \tag{9}$$

Z (9) stopy pod okresowe sa wtedy i tylko wtedy ich stosunek jest równy stosunkowi długości odpowiadajacych im po okresów. Takie stopy pod okresowe nazywaja sie **proporcjonalnymi**.

2.3 Przykład 3

Kwartalna stopa oprocentowania prostego wynosi 6

2.3.1 a) roczna

$6 * 4 = 24\%$

2.3.2 b) miesieczna

$6/3 = 2\%$

2.3.3 c) tygodniowa

$6/12 = 0,5\%$

3 Kapitalizacja złożona

W przypadku **kapitalizacji złożonej** odsetki oblicza sie za każdy okres równy okresowi kapitalizacji i kapitalizuje sie je na koniec tego okresu. Załóżmy, że kwota W została ulokowana na rachunku z roczna stopa procentowa równa r. W przypadku kapitalizacji złożonej dochód przynosi poczatkowy kapitał wraz z odsetkami uzyskanymi na koniec poprzedniego okresu kapitalizacji. Przez I_n oznaczmy odsetki należne po czasie n, zaś przez W_n oznaczmy wartość kapitału po n latach. Wtedy: $W_1 = w(1 + r)$

$$W_n = W(1 + r)^n \tag{10}$$

Liczba $(1+r)^n$ nazywa sie **czynnikiem wartości przyszłej** w kapitalizacji złożonej.

Odsetki po okresie n lat wynosza:

$$I_n = W((1 + r)^n - 1) \tag{11}$$

3.1 Przykład 4

Przy założeniu kapitalizacji złożonej i rocznej stopie procentowej r = 5%, wyznaczymy wartość kapitału 40 000 PLN i odsetki po upływie 4 lat.

$W_n = 40000(1 + 0,05)^4 = 48620PLN$

$I_n = 48620 - 40000 - 8620PLN$

$I_n = 40000((1 + 0,05)^4 - 1) = 8620PLN$

Podobnie jak w przypadku kapitalizacji prostej w kapitalizacji złożonej, możemy dopuścić zmienne stopy procentowe w kolejnych latach trwania inwestycji. Przyjmijmy, że w kolejnych latach stopy procentowe sa równe $r_1, r_2, ..., 4_n$ gdzie n jest licza lat trwania inwestycji. Wtedy wartość poczatkowego kapitału W po pierwszym roku wyniesie. $W_1 = W(1 + r_1)$, po drugim $W_2 = W(1 + r_1)(1 + r_2)$

Wartość kapitału po n latach:

$$W_n = W\Pi_{i=1}^{n}(1 + r_i) \tag{12}$$

$$I_n = W(\Pi_{i=1}^{n}(1+r_i) - 1) \quad (13)$$

Przecietna roczna stopa oprocentowania w przypadku kapitalizacji złożonej:

$$r = (\Pi_{i=1}^{n}(1+r_1))^{\frac{1}{n}} - 1 \quad (14)$$

3.2 Przykład 5

Kapitał 20 000 PLN został ulokowany na okres 5 lat. Przy założeniu kapitalizacji złożonej i rocznej stopie procentowej równej w kolejnych latach, 5%, 6%, 5%, 4%, 7%, wyznaczymy wartości kapitału na koniec kolejnych lat oraz przecietna roczna stope oprocentowania tego kapitału w czasie 5 lat.

$W_1 = 21000 PLN$

$W_5 = 20000(1+0.05)(1+0.06)(1+0.05)(1+0.04)(1+0.07) = 26009.47 PLN$

$r = ((1+0.05)(1+0.06)(1+0.05)(1+0.04)(1+0.07))^{\frac{1}{5}} - 1 = 5.40\%$

Niech r_{okr} bedzie stopa pod okresowa. Przy założeniu kapitalizacji złożonej, przyszła wartość kwoty W po l latach i n spośród m pod okresów $l+1$ roku, gdzie $0 \leq n < m$ wynosi:

$$W_{(l,n)}^{(m)} = W(1+r_{okr})^{l*m+n} \quad (15)$$

3.3 Przykład 6

Zakładajac kapitalizacje a) półroczna, b) kwartalna c) miesieczna i przyjmujac stope pod okresowa $r_{okr} = 2\%$ wyznaczyć przyszła wartość kapitału 20 000 PLN po 2 latach i 6 miesiacach.

3.3.1 a)

$W_{(2,1)}^{(2)} = W(1+0,02)^{2*2+1} = 22081,62 PLN$

3.3.2 b)

$W_{(2,2)}^{(4)} = W(1+0,02)^{10} = 24379,89 PLN$

3.3.3 c)

$W^{(12)}_{(2,6)} = W(1 + 0,02)^{30} = 36227,23PLN$

Roczna stopa procentowa r proporcjonalna do danej stopy pod okresowej r_{okr} nazywa sie **stopa nominalna**. (wyliczyć roczna stope, np. jak miesieczna jest 1% to roczna jest 12% itp.)

$$W^{(m)}_{(l,n)} = W(1 + \frac{r}{m})^{l*m+n} \tag{16}$$

Przyjmujac n = 0 wtedy:

$$W^{(m)}_{l} = W(1 + \frac{r}{m})^{l*m} \tag{17}$$

Liczbe:

$$R_m = (1 + \frac{r}{m})^{m} \tag{18}$$

Nazywa sie rocznym **czynnikiem oprocentowania**.

3.4 Przykład 7

Kapitał w wysokości 40 000 PN został ulokowany na rachunku z nominalna stopa procentowa równa 12%. Zakładajac kapitalizacje, roczna, półroczna, kwartalna, miesieczna oraz dzienna, wyznaczyć przyszła wartość kapitału po 4 latach.

Ze wzory (17)

$W(1)4 = 62940,77PLN$

$W(2)4 = 63753.92PLN$

$W(4)4 = 64188.26PLN$

$W(12)4 = 64489.04PLN$

$W(360)4 = 64606.80PLN$

3.5 Przykład 8

Wyznaczymy wartość kapitału 40 000 PLN po 5 latach i 9 miesiacach przy założeniu że roczna stopa procentowa wynosi 6%, a kapitalizacji odsetek jest a) kwartalna, b) miesieczna.

Korzystajac(16)

3.5.1 a)

$W^4_{(5,3)} =$

3.5.2 b)

$W^{12}_{(5,9)} =$

3.6 Przykład 9

Przy założeniu miesiecznej kapitalizacji odsetek i rocznych stopach procentowych równych 6% w pierwszym i drugim roku. 9% w trzecim i 12% w czwartym roku wyznaczyć wartość kapitału 100 000 PLN po a)3 latach i 7 miesiacach b) 4 latach.

X = kapitał po 3 latach i 7 m

Y = po 4 latach

Wzór (16)

$X = 100000 * (1 + \frac{0,06}{12})^{24} * (1 + \frac{0,09}{12})^{12} * (1 + \frac{0,12}{12})^{7} = 132183PLN$

$Y = 100000 * (1 + \frac{0,06}{12})^{24} * (1 + \frac{0,09}{12})^{12} * (1 + \frac{0,12}{12})^{12} = 138925,70PLN$

3.7 Przykład 10

Przy miesiecznej kapitalizacji odsetek i nominalnej stopie procentowej równej 3% po 1 roku i 7 miesiacach uzyskano z lokaty 100 PLN odsetek. Jaka była kwota lokaty?

Odsetki uzyskane z inwestycji stanowia różnice miedzy wartościa kapitału po 1 roku i 7 miesiacach a jego wartościa poczatkowa. W = ?

$W^{12}_{(1,7)} - W = 100 \Rightarrow W = 2058,29PLN$

4 Równoważność stóp pod okresowych przy kapitalizacji złożonej

Załóżmy że r_1 i r_2 sa pod okresowymi stopami procentowymi, zaś m_1 i m_2 sa odpowiadajacymi im czestotliwościami kapitalizacji. Stopy r_1 i r_2 **nazywamy równoważnymi w czasie** l **lat**, gdzie $l \in N$, jeżeli przy każdej z nich odsetki od ustalonego kapitału po l latach sa równe.

Zauważmy, że równość odsetek po l latach oznacza równość wartości kapitału po tym czasie. Zatem, uwzgledniajac wzór (15) otrzymujemy, że podokresowe stopy procentowe r_1 i r_2 sa równoważne w czasie l lat, wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$(1+r_1)^{m_1} = (1+r_2)^{m_2} \tag{19}$$

Korzystajac ze wzory (17) warunek (19) można przedstawić w nastepujacej równoważnej postaci:

$$(1+\frac{r_1}{m_1})^{m_1} = (1+\frac{r_2}{m_2})^{m_2} \tag{20}$$

gdzie r_1 i r_2 sa nominalnymi stopami procentowymi, odpowiednio r_1 i r_2.

4.1 Przykład 11

Wyznaczymy miesieczna stope procentowa równoważna kwartalnej stopie procentowej $r_{okr}^{(1)} = 4\%$.

Ponieważ $r_1 = \%, m_1 = 4im_2 = 12$ na podstawie (1) mamy:

$(1+0,04)^4 = (1+r_2)^{12}$.

Stad $r_2 = (1+0,04)^{\frac{4}{12}} - 1 = 1,3159\%$

4.2 Przykład 12

Wyznaczymy nominalna stope procentowa, która przy kapitalizacji kwartalnej jest równoważna nominalnej stopie $r_1 = 5\%$ przy kapitalizacji półrocznej.

Korzystajac ze wzoru (20) z $r_1 = 5\%, m_1 = 2im_2 = 4$ dostajemy:

$(1+\frac{0,05}{2})^2 = (1+\frac{r_2}{4})^4 \Rightarrow r_2 = 4,9691\%$

5 Efektywna stopa procentowa

Efektywna stopa procentowa nazywa sie roczna stope procentowa równoważna danej podokresowej stopie procentowej. Wobec tego, jeśli r_{okr} jest podokresowa stopa procentowa, zaś m jest czestotliwościa kapitalizacji, to korzystajac z (19) mamy:

$$r_{ef}^{(m)} = (1 + r_{okr})^m - 1 \tag{21}$$

Z kolei na podstawie (2), efektywna stope procentowa odpowiadajaca nominalnej stopie procentowej r przy m-krotnej kapitalizacji w ciagu roku, wyznacza sie z równania:

$$r_{ef}^{(m)} = (1 + \frac{r}{m})^m - 1 \tag{22}$$

Efektywna stopa procentowa pozwala na zmiane okresu stopy procentowej bez zmiany efektywności kapitalizacji.

5.1 Przykład 13

Wyznaczymy efektywna stope procentowa odpowiadajaca nominalnej stopie procentowej równiej 6% przy kapitalizacji: półrocznej, kwartalnej, miesiecznej, dziennej.

Korzystajac ze wzoru (22), otrzymujemy

$r_{ef}^{(m)} = (1 + \frac{0,06}{2})^2 - 1 = (1,03)^2 - 1 = 6,09\%$

$r_{ef}^{(m)} = (1 + \frac{0,06}{4})^4 - 1 = (1,015)^4 - 1 = 6,14\%$

$r_{ef}^{(m)} = (1 + \frac{0,06}{12})^1 2 - 1 = (1,005)^1 2 - 1 = 6,17\%$

$r_{ef}^{(m)} = (1 + \frac{0,06}{360})^3 60 - 1 = (1,00016)^3 60 - 1 = 6,18\%$

Do wyznaczania efektywnej stopy procentowej stopy procentowej można zastosować formułe **EFEKTYWNA** wbudowana w pakiecie MS Excel. Jej argumentami sa stopa nominalna i liczba okresów.

5.1.1 a)

$EFEKTYWNA(6\%, 2) = 6.0900\%$

5.2 Przykład 14

Wyznaczymy nominalna stope procentowa, której przy: a) kwartalnej, b) miesiecznej kapitalizacji odsetek odpowiada efektywna stopa procentowa równa 5%.

Wyznaczajac r ze wzoru (22), dostajemy:

$$r = m(\sqrt{1 + r_{ef}^{(m)}} - 1)$$

5.2.1 a)

$r = 4,9089\%$

5.2.2 b)

$r = 4,8889\%$

Do wyznaczania nominalnej stopy procentowej można zastosować formułe **NOMINALNA** z Excela. Jej argumentami sa stopa efektywna i liczba okresów.

6 Kapitalizacja ciagła

Jeżeli przy m-krotnej kapitalizacji w ciagu roku powieksza sie liczba okresów, to w granicy przy $m \to \infty$ mamy do czynienia z ciagła kapitalizacja odsetek. W takim przypadku na podstawie wzoru (17) wartość kapitału W po l latach można wyznaczyć w nastepujacy sposób.

$$W_l^{(\infty)} = We^{l*r} \tag{23}$$

Można pokazać, że wzór (23) jest prawdziwy dla $l > 0$

6.1 Przykład 15

Przy założeniu ciagłej kapitalizacji odsetek i rocznej stopie procentowej $r = 5\%$ wyznaczymy wartość kwoty 10 000 PLN po: a) 8 latach, b) 4 latach i 7 miesiacach.

6.1.1 a)

ze wzoru (23), $W = 10000, l = 8, r = 5\%$

$$W = 10000 * e^{8*0,05} = 10000 * e^{0,04} = 14918,25$$

6.1.2 b)

ze wzoru (23), $W = 10000, l = 4\frac{7}{12}, r = 5\%$

$$W = 10000 * e^{4\frac{7}{12}*0,05} = 10000 * e^{0,2292} = 12575,94$$

7 Nateżenie procentowe

W przypadku ciagłej kapitalizacji odsetek efektywna stope procentowa wyznacza sie z równania:

$$l + r_{ef} = e^r \tag{24}$$

gdzie r jest stopa nominalna. Zatem:

$$r_{ef} = e^r - 1 \tag{25}$$

Jeżeli natomiast dana jest efektywna stopa procentowa r_{ef} to z (24) otrzymujemy stope nominalna:

$$r = ln(1 + r_{ef}) \tag{26}$$

Nazywa sie nateżeniem oprocentowania zwiazanym z efektywna stopa procentowa r_{ef}.

7.1 Przykład 16

Wyznaczymy nateżenie oprocentowania zwiazane z efektywna stopa procentowa równa 6%.

Stosujac (26):

$r = ln(1 + 0,06) = Ln(1,06) = 5,83\%$

8 Dyskonto proste i składane

Teraz zajmiemy sie zagadnieniem ustalania poczatkowej wartości kapitału na podstawie jego wartości na końcu pewnego okresu. Proces ten nazywa sie **dyskontowaniem**.

Dyskonto proste, które jest bezpośrednio zwiazane z prosta kapitalizacja odsetek. W przypadku kapitalizacji prostej na podstawie (2), wartość kapitału poczatkowego W po n latach.

W przypadku dyskonta prostego, obecna wartość kapitału W, która mamy otrzymać (badź zapłacić) za n lat wyznacz sie na podstawie równości:

$$PV(W) = \frac{W}{1+nr} \tag{27}$$

Dyskontem nazywa sie różnice miedzy wartościa kapitału na końcu pewnego ustalonego okresu, a jego wartościa na poczatku tego okresu. Oznaczajac dyskonta przed D i uwzgledniajac (27) otrzymujemy:

$$D = \frac{nrW}{1+nr} \tag{28}$$

8.1 Przykład 17

Zakładajac dyskonto proste i przyjmujac stope procentowa $r = 4\%$ wyznaczyć wartość oraz dyskonto kwoty 50 000 PLN która mamy otrzymać za 8 lat.

Korzystajac z (27, 28) $W = 50000, r = 0,04, n = 8$

$PV = \frac{50000}{1+8*0,04} = 37878,79$

$D = 50000 - 37878,79 = 12121,21$

W przypadku **dyskonta składanego**, przy rocznej kapitalizacji odsetek wartość kapitału poczatkowego W po n latach, wyznaczona na podstawie wzoru (10).

Zatem obecna wartość kapitału W która mamy otrzymać (badź zapłacić) za n lat wyznacza sie z równości:

$$PV(W) = \frac{W}{(1+r)^n} \tag{29}$$

Wielkość $\frac{1}{(1+r)}$ nazywa sie **rocznym czynnikiem dyskontujacym**. Dyskonto wyraża sie w tym przypadku wzorem:

$$PD = W(1 - \frac{1}{(1+r)^n}) \tag{30}$$

8.2 Przykład 18

Zakładajac dyskonto składane i przyjmujac stope procentowa $r = 4\%$ wyznaczyć wartość oraz dyskonto kwoty 50 000 PLN która mamy otrzymać za 8 lat.

Korzystajac z (29, 30) $W = 50000, r = 0,04, n = 8$

$PV = \frac{50000}{(1+0,04)^8} = 36534,51$

$D = 50000 - 36534,51 = 13465,49$

9 Dyskonto przy wielokrotnej kapitalizacji w ciagu roku

Załóżmy że kapitalizacja odsetek odbywa sie m-krotnie w ciagu roku (w równoległych odstepach czasu). Wówczas korzystajac ze wzoru (16) obecna wartość $PV(W)$ kwoty W, która mamy otrzymać w przyszłości po l latach i n spośród m podokresów $l+1$ roku ($0 <= n < m$ wyznaczamy wzór:

$$PV(W) - \frac{W}{(1+\frac{r}{m})^{lm+n}} \tag{31}$$

Wzór na dyskonto a postać:

$$D = W(1 - \frac{1}{(1+\frac{r}{m})^{lm+n}}) \tag{32}$$

W szczególnym przypadku gdy $n = 0$ możemy wyznaczyć obecna wartość kwoty W, która mamy otrzymać po l latach:

$$PV(W) - \frac{W}{(1+\frac{r}{m})^{lm}} \tag{33}$$

Wzór na dyskonto ma w tym przypadku postać:

$$D = W(1 - \frac{1}{(1+\frac{r}{m})^{lm}}) \tag{34}$$

9.1 Przykład 19

Przyjmujac nominalna stope procentowa $r = 6\%$ i zakładajac kapitalizacje a) kwartalna, b) miesieczna, wyznaczyć obecna wartość i dyskonto kwoty 50 000 PLN, która mamy otrzymać za 2 lata i 3 miesiace.

9.1.1 a)

ze wzoru (31)

$PV = \frac{50000}{(1+\frac{0,06}{4})^9} = 43729,61PLN$

$D = 50000 - 43729,61 = 6270,39PLN$

9.1.2 b)

ze wzoru (31)

$PV = \frac{50000}{(1+\frac{0,06}{12})^{27}} = 43700,49PLN$

$D = 50000 - 43700,49 = 6299,51PLN$

9.2 Przykład 20

Przyjmujac nominalna stope procentowa równa $r = 6\%$ i zakładajac kapitalizacje a) półroczna, b) miesieczna, c) dzienna, wzyanczyć obecna wartość kwoty 100 000 PLN, która mamy otrzymać za 3 lata. W każdym przypadku wyznaczyć wartość dyskonta

9.2.1 a)

używamy wzoru (33)

$PV = \frac{100000}{(1+\frac{0,06}{2})^{6}} = 83748,43PLN$

$D = 100000 - 83748,43 = 16251,57PLN$

9.2.2 b)

$PV = \frac{100000}{(1+\frac{0,06}{12})^{36}} = 83564,49PLN$

$D = 100000 - 83564,49 = 16435,51PLN$

9.2.3 c)

$PV = \frac{100000}{(1+\frac{0,06}{360})^{1080}} = 83528,27PLN$

$D = 100000 - 83528,27 = 16471,73PLN$

9.3 Przykład 21

Przy założeniu miesiecznej kapitalizacji odsetek obecna wartość kwota 40 000 PLN, która mamy otrzymać za 2 lata wynosi 36 500 PLN. Wyznaczyć wysokość nominalnej stopy procentowej.

Przez r oznaczmy szukana nominalna stope procentowa.

Korzystajac z (33) otrzymujemy równanie na r

$36500 = \frac{40000}{(1+\frac{r}{12})^{24}}$

$(1+\frac{r}{12})^{24} = \frac{40000}{36500}$

$r = 12(1,0959^{\frac{1}{24}} - 1) = 4,59\%$

10 Dyskonto przy kapitalizacji ciagłej

W przypadku ciagłej kapitalizacji odsetek, obecna wartość kwoty W, która mamy otrzymać za n lat, wyznacza sie z równania $W = PV(W) * e^{rn}$, gdzie r jest roczna stopa procentowa. Stad:

$$PV(W) = W * e^{-r*n} \tag{35}$$

Wzór na dyskonto ma postać

$$D = W(1 = e^{-r*n}) \tag{36}$$

Wzory (35) i (36) pozostaja prawdziwe dla dowolnego $n > 0$.

10.1 Przykład 22

Zakładajac ciagła kapitalizacje odsetek i otrzymujac roczna stope procentowa równa $r = 5\%$, wyznaczyć obecna wartość i dyskonto kwoty 50 000 PLN, która mamy otrzymać za 3 lata i 5 miesiecy.

Wzór (35)

$PV(W) = 50000 \cdot e^{-3\frac{5}{12} \cdot 0,05} = 42148,10 PLN$

$D = 50000 - 42148,10 = 7851,90 PLN$

10.2 Przykład 23

Przy założeniu ciagłej kapitalizacji odsetek, obecna wartość kwoty 100 000 PLN, która mamy otrzymać za 8 lat wynosi 80 000 PLN. Wyznaczyć efektywna stope procentowa.

Przez r oznaczamy szukana roczna stope procentowa

Ze wzoru (35)

$80000 = 100000 \cdot e^{-8r}$

$\frac{80000}{100000} = e^{-8r}$

$lne^{-8r} = ln 0,8$

$-8r = ln 0,8$

$r = -\frac{1}{8} ln 0,8$

$r = 0,0279$

$r = 2,79\%$

Efektywna stopa wynosi ze wzoru (25):

$r_{ef} = e^r - 1 = e^{0,0279} - 1 = 2,93\%$

11 Dyskonto handlowe

Nasze dotychczasowe rozważania dotyczyły dyskonta rzeczywistego, tzn. dyskonta opartego na stopie procentowej. Teraz omówimy dyskonto handlowe. Ograniczymy sie przy tym jedynie do dyskonta handlowego prostego, gdyż dyskonto handlowe składane na ogół nie jest wykorzystywane w praktyce.

Dyskontem handlowym nazywa sie opłate za pożyczke obliczona na podstawie kwoty, która dłużnik zwóci po ustalonym czasie, zapłacona w chwili otrzymania pożyczki.

Dyskonto handlowe jest również nazywane odsetkami płatnymi z góry, co trafnie oddaje istote dyskonta, które należy zapłacić w momencie otrzymania pożyczki, a nie przy jej zwrocie.

Zasada dyskonta prostego mówi, że dyskonto jest obliczane od kwoty, która dłużnik zwróci po ustalonym czasie, jest proporcjonalne do tego czasu i jest odejmowane od tej kwoty w momencie udzielania pożyczki.

Jeżeli przez D oznaczymy dyskonto, przez P poczatkowa wartość pożyczki (tzn. wartość, która fizycznie dostajemy), a przez F nominalna wartość pożyczki (to co mamy oddać, na kartce), to otrzymujemy równość:

$$D = F - P \tag{37}$$

W dalszym ciagu bedziemy zakładać $F > P > 0$

12 Stopa dyskontowa

W przypadku dyskonta handlowego prostego **stopa dykonstowa** nazywa sie liczbe okreslona:

$$d = \frac{D - P}{nF} \tag{38}$$

gdzie n oznacza liczbe lat, po której ma nastapić zwrot pożyczki.

12.1 Przykład 24

Wyznaczyć stope dyskontowa pożyczki w kwocie 50 000 PLN udzielonej na 5 lat, jeżeli jej wartość nominalna wynosi 70 000 PLN.

Ze wzoru (38)

$d = \frac{70000-50000}{5 \cdot 70000} = 5,71\%$

12.2 Przykład 25

Obliczyć nominalna wartość 4-letniej pożyczki udzielonej w kwocie 100 000 PLN przy stopie dyskontowej równej 5%

Ze wzoru (38)

$d = \frac{D-P}{nF}$

$dnF = F - P$

$P = F - dnF$

$P = F(1 - dn)$

$F = \frac{P}{1-dn}$

$F = \frac{100000}{1-4 \cdot 0,05} = 125000PLN$

12.3 Przykład 26

Przy stopie dyskontowej równej $r\%$ wyznaczyć poczatkowa wartość dziesiecioletniej pożyczki o nominalnej wartości 200 000 PLN.

Ze wzoru (38)

$d = \frac{D-P}{nF}$

$dnF = F - P$

$P = F - dnF$

$P = F(1 - dnF)$

$P = 200000 - 0,05 \cdot 10 \cdot 200000 = 120000PLN$

12.4 Przykład 27

Pożyczka w wysokości 180 000 PLN udzielona na okres 5 lat ma nominalna wartość 240 000 PLN, Obliczyć stope dyskontowa i zbadać jaki wpływ na nominalna wartość pożyczki miałoby podniesienie stopy dyskontowej o 1 pkt procentowy.

Ze wzory (38)

$d = \frac{240000-180000}{5 \cdot 240000} = 5\%$

$F = \frac{P}{1-dn}$

$F = \frac{180000}{1-0,06 \cdot 5} = 257142,90PLN$

Wzrost wartości stopy dyskontowej o 1 pkt procentowy spowodowałby wzrost nominalnej wartości pożyczki z 240 000 do 257 142,90.

13 Zasada równoważności stopy procentowej i stopy dyskontowej

Zarówno odsetki jak i dyskonto stanowia opłate za udzielona pożyczke. Czyli za możliwość dysponowania określonym kapitałem przez ustalony czas. Ponieważ wielkość te wyznacza sie z różnych modeli naturalne wydaje sie pytanie, jaki zwiazek miedzy nimi gwarantuje równość opłat za pożyczke.

Roczna stopa procentowa r i stopa dyskontowa d nazywaja sie **równoważnymi w czasie** n jeżeli dla dowolnej pożyczki odsetki i dyskonto handlowe wyznaczone przy tych stopach sa równe. Tak sformułowana zasada nosi nazwe **zasady równoważności stopy procentowej i stopy dyskontowej**.

Załóżmy, że wartość pozyczki wynosi P. Przy założeniu kapitalizacji prostej i rocznej stopie procentowej równej r, na podstawie wzoru (2) wartość kwoty P po n latach wynosi: $P_n = P(1 + nr)$. Zatem odsetki sa równe $P_n - P = nrP$.

Z drugiej storny ze wzoru (37) i (38) mamy $D = F - P = ndF$. Na podstawie zasady równoważności stopy procentowej i stopy dyskonotej otrzymujemy wiec równość $ndF = nrP$. Stad wynika, że $dF = rP$. ze wzoru (38) dostajemy $F = \frac{P}{1-dn}$. Na końcu orzymujemy:

$$r = \frac{d}{1 - dn} \tag{39}$$

13.1 Przykład 28

Wyznaczymy stope procentowa równoważna w czasie 6 lat stopie dyskontowej 8%.

Ze wzoru (39) otrzymujemy $r = \frac{0{,}08}{1-0.08\cdot 6} = 15{,}38\%$

13.2 Przykład 29

Wyznaczymy stope dyskontowa równoważna w czasie 8 lat stopie procentowej 4%.

Ze wzoru (39) otrzymujemy $d = \frac{r}{1+rn}$, zatem $d = \frac{0{,}04}{1+8\cdot 0{,}04} = 3{,}03\%$

13.3 Przykład 30

Wyznaczymy czas, w którym stopa dyskontowa równa 5% jest równoważna stopie procentowej równiej 8%.

Ze wzoru (39) otrzymujemy $n = \frac{1}{d} - \frac{1}{r}$, zatem $n = \frac{1}{0{,}05} - \frac{1}{0{,}08} = 7,5$. Podane stopy sa wiec równoważne w czasie 7 lat i 6 miesiecy.

14 Weksle

Dyskonto handlowe znajduje zastosowanie w m.in. w rachunku weklski. **Weksel** to zobowiazanie do zapłaty określonej kwoty w ustalonym terminie. Ma on forme dokumentu sprecyzowana odpowiednimi przepisami prawa. Kwota do zapłaty, której zobowiazuje weksel, nazywa sie jego **wartościa nominalna**. Termin, w którym weksel ma być spłacony nazywa sie **terminem wykupu** weksla. Kwota nominalna pomniejszona o dyskonto nazywa sie **wartościa aktualna** weksla.

14.1 Przykład 31

Zobowiazanie do zapłaty za dostarczony towar o wartości 390 000 PLN ma forme weksla podpisanego w dniu 5 maja na sume 400 000 PLN z terminem wykupu 5 sierpnia tego samego roku. Mamy zatem $P = 390000, F = 400000, n = \frac{90}{360}$. Stad $D = F - P = 10000$(dyskonto), czyli na podstawie (39) stopa dyskontowa wynosi, $d = \frac{10000}{\frac{30}{360} - 400000} = 0,1 = 10\%$

14.2 Przykład 32

Załóżmy że wyztawca eksla z przykładu 31 ma możliwość otrzymania w dniu 5 maja trzymiesiecznej pożyczki w kwocie 390 000 PLN dzieki której mógłby zapłacić za towar i nie musiałby podpisywać weksla. Możemy wyznaczyć wysokość oprocentowania pożyczki przy której jej zaciagniecie byłoby korzystniejsze od podpisywanie weksla. Zatem $d = 10\%, n = \frac{90}{360}$, wiec (39) $r = \frac{0,1}{1-0,1 \cdot \frac{90}{360}} = 10,26$

15 Zasada równoważności kapitałów

Wartość kapitału zmienia sie w casie, We wszystkich rodzajach inwestycji podstawowe maja dwa pojecia

- przyszła wartość kapitału - FV;

- obecna wartość kapitału - PV;

W poprzednich rozdziałach rozważaliśmy, w jaki sposób wyznaczyć obecna wartość kapitału,który mamy otrzymać lub zapłacić w przyszłości oraz przyszła wartość kapitału, który posiadamy obecnie. Teraz rozszerzymy te analize na bardziej ogólne przypadki. Bedziemy zakładać **złożona kapitalizacje odsetek**.

Aktualizacja wartości kapitału dotyczy kapitału, którego wartość jest znana dla ustalonego momentu i polega na obliczeniu jego wartości na inny moment (późńiejszy lub wcześniejszy). Aby zilustrować to pojecie załóżmy, że wartość kapitału w chwili n_0 wynosi $K(n_0)$, gdzie n_0 jest liczba całkowita. Wtedy korzystajac ze wzorów (10) i (29), możemy wyznaczyć wartość tego kapitału w dowolnym momencie n. Mianowicie mamy

$$K(n) = K(n_0) \cdot (1 + r)^{n-n_0} \tag{40}$$

Wielkość $K(n)$ nazywa sie **zaktualizowana wartościa kapitału $K(n_0)$ na moment n**

Zasada rówmoważności kapitałów na dany moment: **kapitały K_1 i K_2 sa rówoważne na moment $n \epsilon Z$, jeżeli ich wartości zaktualizowane na moment n sa równe**.

Rozważmy model opisany wzorem (40). Załóżmy że znane sa wartości kapitałów K_1 i K_2 w dwóch ustalonych momentach n_1 i $n_2 \epsilon Z$, tzn, sa znane wielkości $K_1(n_1)$ i $K_2(n_2)$. Wtedy zgodnie ze wzorem (40) dla dowolnie ustalonego momentu $n \epsilon Z$ zaktualizowanie wartości kapitałów K_1 i K_2 na ten moment wynosza odpowiednio:

$K_1(n) = K_1(n_1)(1 + r)^{n-n_1}$

oraz

$K_2(n) = K_2(n_2)(1 + r)^{n-n_2}$

Zatem kapitały K_1 i K_2 sa równoważne na moment n wtedy i tylko wtedy gdy zachodzi równość:

$K_1(n_1)(1+r)^{n-n_1} = K_2(n) = K_2(n_2)(1+r)^{n-n_2}$

$$K_1(n_1)(1+r)^{-n_1} = K_2(n_2)(1+r)^{-n_2} \quad (41)$$

Obserwacja prowadzi nas do nastepujacego wniosku: **jeżeli dwa kapitały sa równoważne na pewien moment, to sa one równoważne na każdy moment.**

Uwzgledniajac ten fakt, możemy sformułować zasade równoważności kapitałów w nastepujacy sposób: **dwa kapitały sa równoważne, jeżeli ich zaktualizowane wartości na jakikolwiek moment sa równe**

15.1 Przykład 33

Zbadamy czy przy rocznej stopie procentowej równej 5% kwota 10 000 PLN zainwestowana 2 lata temu jest równoważna kwocie 11 800 PLN, która bedzie zainwestowana za rok.

Wystarczy sprawdzić czy spełniony jest warunek (41)

Ponieważ $n_1 = -2, n_2 = 1, r = 5\%$ zatem:

$L = K_1(n_1)(1+r)^{-n_1} = 10000(1+0,05)^2 = 11025$

$P = K_2(n_2)(1+r)^{-n_2} = 11800(1+0,05)^{-1} = 11238,10$

Zatem kapitały nie sa równoważne.

15.2 Przykład 34

Przyjmujac dane z poprzedniego przykładu. Wyznaczyć wartośc apitału, który zainwestowany za rok jest równoważny temu, który został zainwestowany przed dwoma laty. Korzystajac z (41) otrzymujemy równość: $11025 - K_2(n_2)(1+r)^{-n_2}$ stad $K_2(1) = 11576,25$

15.3 Przykład 35

W jakim monecie należy otrzymać kapisał 243 101,25 PLN, aby przy rocznej stopie procentowej r = 5% był on równoważny kapitałowi 200 000 PLN uzyskanemu 3 lata temu.

$n_1 = -3, K_1(-3) = 200000, K_2(n2) = 243101,25, r = 5\%$

Zatem warunek (41) prowadzi do równania:

$200000(1 + 0,05)^3 = 243101,25(1 + 0,05)^{-n_2}$

$(1,05)^{n_2+3} = \frac{243101,25}{200000}$

$(n_2 + 3)ln(1,05) = ln(\frac{243101,25}{200000})$

$n_2 + 3 = \frac{ln(1,05)}{ln(\frac{243101,25}{200000})}$

$n_2 + 3 = 4 => n_2 = 1$

Wykazaliśmy wiec, że kapitały beda równoważne jeżeli pierwszy otrzymamy za rok.

16 Zasada równoważności przy kapitalizacji ciagłej

Równoważność kapitałów można również badać przy założeniu kapitalizacji ciagłej. Wówczas odpowiednikiem warunku (41) jest nastepujacy warunek:

$$K_1(n_1) \cdot e^{-r \cdot n_1} = K_2(n_2) \cdot e^{-r \cdot n_2} \tag{42}$$

16.1 Przykład 36

Przy założeniu kapitalizacji ciagłej i rocznej stopie procentowej r = 5% wyznaczymy taka wartośc kapitału, który mamy otrzymać za 4 lata aby był on równoważny kapitałowi o wartości 20 000 PLN, który mamy otrzymać za 2 lata.

$n_q = 4, n_2 = 2, K_2(n_2) = 20000, r = 5\%$

ze wzoru (42)

$K_1(n_1) \cdot e^{-0,05 \cdot 4} = 20000 \cdot e6^{-0,05 \cdot 2}$

$K_1(n_1) = 20000 \cdot e^{0,1} = 22103, 42$

17 Stopa procenotwa a równoważność kapitału

Odpowiedź na pytanie o równoważność dwóch kapitałów zależy od wartości rocznej stopy procentowej. Jeżeli przy ustalonej stopie procentowej dwa kapitały sa równoważne, to po jej zmianie przestaja być równoważne. Obserwacaja taka wynika bezpośrednio z warunku (41)

17.1 Przykład 37

W przykładzie 34 stwierdziliśmy, że przy rocznej stopie procentowej równiej 5%, kapitał o wartości 10 000 PLN zainwestowany przed dwoma laty jest równoważny kapitałowi o wartośći 11 576,25 PLN, który ma być zainwestowany za rok. Przypuśćmy, że wysokość rocznej stopy procentowej zmieniła sie i wynosi $r' = 4\%$. Wówczas

$K_1(-2)(1+r')^{-(-2)} = 10000 \cdot (1,04)^2 = 10816PLN$

$K_1(1)(1+r')^{-1} = 11576,25 \cdot (1,04)^{-1} = 11131,01PLN$

Zatem, po zmianie wysokości rocznej stopy procentowej, warunek (41) nie jest spełniony, wobec czego kapitały nie sa równoważne.

Zauważmy, że majac dane wartości kapitałów w dwóch róznych mmentach i zakładajac kapitalizacje złożona, na podstawie warunku równoważności kapitałów (41) moemzy wyznaczyć wysokość rocznej stopy procentowej, przy której sa równoważne. Istotnie, z (41) wynika, że

$(1+r)^{n_2-n_1} = \frac{K_2(n_2)}{K_1(n_1)}$

Stad

$$r = (\frac{K_2(n_2)}{K_1(n_1)})^{\frac{1}{n_2-n_1}} - 1 \qquad (43)$$

Podobnie, zakładajac kapitalizacje ciagła, na podstawie warunku rówoważności kapitałów (42), dostajemy

$$r = \frac{1}{n_2-n_1} ln(\frac{K_2(n_2)}{K_1(n_1)}) \qquad (44)$$

17.2 Przykład 38 (kolos)

Wyznaczymy wysokość rocznej stopy procentowej przy której kapitał 10 000 PLN zainwestowany przed 3 laty jest równowazny kapitałowi 16 000 PLN, który bedzie zainwestowany za dwa lata.

Z warunku (41) zachodzi równość

$10000(1+r)^3 = 16000(1+r)^{-2}$

$(1+r)^5 = 1,6$

$r = (1,6)^{\frac{1}{5}} - 1 = 8,15\%$

Wysokość rocznej stopy procentowej, przy tórej rozważane kapitały sa równoważne, wynosi 8,15 %.

17.3 Przykład 39

Zakładajac kapitalizacje ciagła wyznaczymy wysokość rocznej stopy procentowej, przy której kapitał 15 000 PLN zainwestowany przed rokiem jest równoważny kapitałowi 19 800 PLN, który bedzie zainwestowany za 5 lat.

$n_1 = -1, n_2 = 5, K_1(n_1) = 15000, K_2(n_2) = 19800$

Ze wzoru (44)

$r = \frac{1}{5-(-1)} ln(\frac{19800}{15000}) = \frac{1}{6} ln(\frac{198}{150}) = 4,63\%$

Uwaga W przypadku kapitalizacji prostej dwa kapitały równoważne w jednym momencie moga nie być równoważne w innym. Wobec trgo w tym przypadku nie istnieje pojecie kapitałów równoważnych.

18 Równoważność ciagów kapitałów

Dotychczas rozważaliśmy szereg zagadnień zwiazanych z równoważnościa kapitałów. Analize te przeniesiemy teraz na ciagi kapitałów. Jak poprzednio, stale zakładamy złożona kapitalizacje odsetek. roczna stope procentowa oznaczamy przez r, zaś za jednostke czasu przyjmiemy 1 rok.

Najpierw zajmiemy sie problemem równoważności kapitału i ciagu kapitałów. Rozważmy skończony ciag kapitałów $x_0, x_1, ..., x_n$. Każda z liczb x_i, gdzie $i \epsilon 0, 1, 2, ..., n$, może np. wyrażać nakład poniesiony przez inwestora w i-tym roku lub uzyskany przez niego w i-tym roku dochód. Nówimy, że dany kapitał jest **równoważny na mooment** $k \epsilon Z$ ciagowi kapitałów $x_0, x_1, ..., x_n$, jeżeli jego wartość zaktualizowana na moment k jest równa sumie zaktualizowanych na ten moment wartości wyrazów ciagu.

Ustalmy $k \epsilon Z$ i załóżmy, że wartość kapitału w chwili $n_0 \epsilon Z$ wynosi K_{n0}. PRzez K$_{n0}(k) oznaczmy wartość tego kapitalu zaktualizowana na moment k. Niech ponadto$ x$_i(k)$ dla $i \epsilon 0, 1, 2, ..., n$ oznacza wartość kampitału x_i zaktualizowana na moment k. Wówczas rozważamy kapitał jest równoważny ciagowi kapitałów $x_0, x_1, ..., x_n$ na moment $k \epsilon Z$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$K_{n0}(k) = \Sigma_{i=0}^{n} x_i(k) \tag{45}$$

Na podstawie wzoru (40) warunek (45) można zapisać w nastepujacej równoważnej postaci

$$K_{n0} \cdot (1+r)^{-n_0} = \Sigma_{i=0}^{n} x_i \cdot (1+r)^{-i} \tag{46}$$

Zatem japitał K_{n0} jest równoważny na moment $k \epsilon Z$ ciagowi kapitałów $x_0, x_1, ..., x_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek (46).

Uwaga Zauważmy, że jeżeli kapitał jest równoważny ciagowi kapitałów na pewien moment, to jest on równoważny temu ciagowi na każdy mooment.

W oparciu o powyższa uwage, kapitał bedziemy nazywać **równoważnym** ciagowi kapitałów $x_0, x_1, ..., x_n$, jeżeli jest mu równoważny na jakikolwiek moment $k \epsilon Z$.

Uwaga Mnożac obie strony równoważności (46) przez $(1+r)^{n_0}$, otrzymujemy

$$K_{n0} = \Sigma_{i=0}^{n} x_i \cdot (1+r)^{n_0 - i} \tag{47}$$

Wzór (47) pozwala wyznaczyć wartość, w chwili n_0 kapitału, który jest równoważny ciagowi kapitałów $x_0, x_1, ..., x_n$. Przyjmujac w (47) $n_0 = 0$ dostajemy w szczególności wzór na obecna wartość kapitału równoważnego ciagowi kapitałów $x_0, x_1, ..., x_n$

$$K_{n0} = \Sigma_{i=0}^{n} \frac{x_i}{(1+r)^i} \tag{48}$$

18.1 Przykład 40

Sprawdzimy czy orzy rocznej stopie procentowej równej 8%, kapitał 120 000 PLN, który mamy otrzymać za 2 lata, jest równoważny na moment k = 3 nastepujacemu ciagowi kapitałów:

$x_0 = 10000PLN, x_1 = 5000PLN, x_2 = 25000PLN, x_3 = 30000PLN, x_4 = 20000PLN, x_5 = 35000PLN$

Ponieważ r = 8%, mamy

$\Sigma_{i=0}^{5} \frac{x_i}{(1+r)^i} = 10000 + \frac{5000}{1{,}8} + \frac{25000}{(1{,}08)^2} + \frac{30000}{(1{,}08)^3} + \frac{20000}{(10{,}8)^4} + \frac{35000}{(10{,}8)^5} = 98399{,}07$

Z drugiej strony, obecna wartość kapitału 120 000 PLN, który mamy otrzymać za 2 lata wynosi

$K_{n0} = \frac{120000}{(1{,}08)^2} = 102880{,}66$ PLN

Zatem warunek (48) nie jest spełniony, czyli kapitał 120 000 PLN, który mamy otrzymać za 2 lata, nie jest równoważny rozważanemu ciagowi kapitałów.

18.2 Przykład 41

Przy założeniu, że roczna stopa procentowa jest równa 8%, wyznaczymy kapitał, który otrzymamy za 2 alta jest równoważny ciagowi kapitałów z przykładu 40.

Stosujac wzór (47) oraz korzystajac z obliczeń z poprzedniego przykładu

$K_2 = \Sigma_{i=0}^{5} x_i \cdot (1+r)^{2-i} = (1,08)^2 \cdot \Sigma_{i=0}^{5} \frac{x_i}{(1,08)^i} = 114772,68$ PLN

18.3 Przykład 42

Sprawdzimy, czy przy rocznej stopie procentowej równej 5%, kapitał 79 790, który mamy otrzymac za 3 lata, jest równnoważny nastepujacemu ciagowi kapitałów:

$x_0 = 20000PLN, x_1 = 15000PLN, x_2 = 12000PLN, x_3 = 27500PLN$

Wystarcyz sprawdzić czy zachodzi równość (47), $n_0 = 3, r = 5\%$

$\Sigma_{i=0}^{3} x_i (1,05)^{3-i} = 79790,00 = K_3$

Wobec tego, zachodzi równość (47), czyli kapitał 79 90, który mamy otrzymać za 3 lata, jest równoważny podanemu ciagowi kapitałów.

Załóżmy, że mamy dwa ciagi kapitałów $x_0, x_1, ..., x_n$ oraz $y_0, y_1, ..., y_m$. Niech X bedzie kapitałem równoważnym $x_0, x_1, ..., x_n$, zaś Y niech bedzie kapitałem równoważnym ciagowi $y_0, y_1, ..., y_m$. Ciagi kapitałów nazywamy **równoważnymi** jeśli kapitały X i Y sa równoważne. W przeciwnym padku mówimy, że $x_0, x_1, ..., x_n$ i $y_0, y_1, ..., y_m$ sa **nierównoważnymi** ciagami kapitałów.

Uwaga Przypomnijmy, że dwa kapitały sa równoważne wtedy i tylko wtedy gdy ich obecne wartości sa równe. Wobec tego na podstwie (48) otrzymujemy, że ciagi kapitałów $x_0, x_1, ..., x_n$ i $y_0, y_1, ..., y_m$ sa równoważne wtedy i tylko wtedy gdy

$$\Sigma_{i=0}^{n} \frac{x_i}{(1+r)^i} = \Sigma_{j=0}^{m} \frac{x_j}{(1+r)^j} \tag{49}$$

18.4 Przykład 43

Przy założeniu, że roczna stopa procentowa r = 5% sprawdzimy, czy podane ciagi kapitałów sa równowazne

$x_0 = -4000PLN, x_1 = 10000PLN, x_2 = 8000PLN, x_3 = 12000PLN$

$y_0 = 5000PLM, y_1 = 2000PLN, y_2 = 3000PLM, y_4 = 7000PLN, y_5 = 9000PLN$

Mamy

$\Sigma_{i=0}^{3} \frac{x_i}{(1,05)^i} = 23146,10PLN$

$\Sigma_{j=0}^{4} \frac{y_j}{(1,05)^j} = 23077,04PLN$

Zatem równość (49) nie zachodzi, czyli ciagi nie sa równoważne.

Uwaga Równoważność ciagów kapitałów zależy od wartości rocznej stopy procentowej.

Uwaga Rówoważność ciagów kapitałów ma ścisły zwiazek z badaniem efektywności inwestycji finansowych. Zagadnienem tym zajmiemy sie szczegółowo w kolejnej cześci wykładu.

19 Mierniki oceny inwestycji finansowych

Pojecie inwestycji finanswoej jest na ogół ojarzone z zakupem akcji lub innych papierów wartościowych. W istocie ma ono jednak bardziej ogólne znaczenie i obejmuje szeroki zakres przedsiewzeieć podejmowanych z wykorzystaniem posiadanego kapitału. Każda inwestycjia finansowa wymaga nakładu, czyli zaangażowania pewnych środków finansowych, który daje prawo do ewentualnych dochodów w przyszłości. W działalności gospodarczej inwestycja finansowa najcześciej wiaże sie z powieśzkeniem lub modernizacja środków trwałych.

Przez inwestycje finansowa bedziemy rozumieć ciag płatności znany zarówno co do wielkości jak i momentów ich wystepowania. Płatności ujemna reprezentuje nakład inwestora, a dodatnia reprezentuje jego dochód. Jeżeli nakład i dochód wystepuje w tym samym momencie, to płatność w tym momencie jest suma tych dwóch wielkości. Stale bedziemy zakładać że pierwsza płatność jest nakładem (czyli jest ujemna), a moment jej wystapienia jest poczatkiem okresu iwestycyjnego. Wśród pozostałych płatności co najmniej jedna powinna stanowaić dochód (czyli być dodatnia).

Horyzontem czasowym inwestycji nazywamy długość okresu objetego inwestycji. W całym wykładzie jednostke czasu przyjmiemy 1 rok. Przez n oznaczamy horyzont inwestycyjny wyrażpny w latach.ś Z kolei prze x_j dla $j \epsilon 0, 1, 2, .., n$ oznaczać bedziemy wysokość płatność w momencie j.

19.1 Przykład 44

śIwestycja wymagajaca nakładów w wysokości 100 000 PLN obecnie i 50 000 PLN za rok, po drugim roku prz7niesie dochód w wysokości 40 000 PLN. Zaś po trzecim i czwartym roku 120 000 PLN.

W tym przypadku horyzont jest równy n = 4 lata. Ponadto płatności w kolejnych latach wynosza:

$x_0 = -100000PLN, x_1 = -50000PLN, x_2 = 40000PLN, x_3 = 120000PLN, x_4 = 120000PLN$

Istotnym problemem jest określenie celowości danej inwestycji finansowej. Służa do tego różne narzedzia, zwane miernikami oceny inwestycji finansowych. W tym wykładzie omówimy 3 najważniejsze z pośród nich:

Wartość bieżaca netto inwestycji

Wewnetrzna stopa zwrotu

Średni czas trwania

20 Wartość bieżaca netto

Jedna z podstawowych miar służacych do oceny decyzji inwestycji, jest **wartość bieżaca netto** (w skrócie **NPV**). Jest to suma zdyskontoanych na moment 0 nakładów i dochodów z inwestycji przy ustalonej stopie procentowej. Przy założeniu kapitalizacji złożonej mamy:

$$= \Sigma_{j=0}^{n} \frac{x_j}{(1+r)^j} \tag{50}$$

gdzie n jest czasem trwania inwestycji (w latach), x_j dla $j\epsilon 0, 1, ..., n$ jest wartościa płatności na koniec j-tego roku, zaś r oznacza roczna stope procentowa.

20.1 Przykład 45

Wyznaczymy wartość bieżaca netto inwestycji z przykładu 44. Przyjmiemy roczna stope procentowa r = 5%.

Ponieważ n = 4, stosujac (50), dostajemy

$NPV = -100000 + \frac{-50000}{1{,}05} + \frac{40000}{1{,}05^2} + \frac{120000}{1{,}05^3} + \frac{120000}{10{,}5^4} = 91046{,}94PLN$

Do wyznaczania wartości bieżacej netto można zastosować wbudowana formułe NPV dostepna w pakiecie Excel.

20.2 Przykład 46

Dla danych z przyładu 44 mamy NPV = -100 000 + NPV();

Uwaga Ze wzoru (50) wynika, że wysokość bieżac netto inwestycji zależy od wysokości rocznej stopy procentowej. Fakt ten ilustruje kolejny przykład.

20.3 Przykład 47

Wyznaczymy wartość bieżaca netto inwestycji z przykładu 44, przy założeniu, że roczna stopa procentowa jest równa r = 6%.

Na podstawie wzoru (50) otrzymujemy:

$NPV = 84235{,}60PLN$

Uwaga Wartość bieżaca netto inwestycji ma nastepujaca interpretacje. W porównaniu z rachunkiem bankowym oprocentowanym według stopy procentowej r, dana inwestycja jest bardziej opłacalna, jeżeli jej wartośc bieżaca netto jest dodatnia. Jeżeli wartość bueżaca netto inwestycji jest ujemna, to inwestycja jest mniej opłacalna w porównaniu z rachunkiem bankowym oprocentowanym według rocznej stopy procenotwej r. Jeżeli natomiast wartość bieżaca netto inwestycji jest równa zerom to inwestycja jest tak samo opłacalna jak lokata bankowa oprocentowana według rocznej stopy procentowej r.

Uwaga Wartość bieżaca netto inwestycji może y do porównania jej opłacalności nie tylko z lokata bankowa, lecz również z opłacalniścia innych inwestycji. Porównanie takie musi sie jednak opierać na założeniu, że wartość bieżaca netto każdej z porównywanych inwestycji jest wyznaczona przy tej samej stopie procentowej. Zagadnienie to jest ściśle zwiazane z pojeciem równoważności ciagów kapitałów, które omówiliśmy wcześniej.

Przypomnijmy ze ciagi kapitałów

$$\Sigma_{i=0}^{n}\frac{x_i}{(1+r)^i}=\Sigma_{j=0}^{m}\frac{x_j}{(1+r)^j}(niepisać) \tag{51}$$

Wynika stad że ciagi kapitałów sa równoważne wtedy i tylko wtedy gdy ich wartości bieżace netto sa równe.

20.4 Przykład 48

Inwestor ma do wyboru dwie możliwości inwestycji kapitału, przynoszace w kolejnych latach nastepujace płatności

inwestycja A: -5000, -10000, 0, 200000, 30000

inwestycja B: -5000, 10000, 10000, 10000, 5000

Sprawdzić czy inwestycje A i B sa równoważne przy rocznej stopie procentowej r = 5%

Dla obydwu wyznaczymy NPV

A: $NPV = 27434,02PLN$

B: $NPV = 26345,99PLN$

Zatem NPV(B) ¡ NPV(A), czyli inwestycje nie sa równoważne przy rocznej stopie procentowej r = 5%. Inwestycja A jest bardziej korzystna niż B.

20.5 Przykład 49

Rozważmy inwestycje z przykładu 48 założeniu że roczna stopa procentowa wynosi 7 %. Wtedy wartości bieżace netto inwestycji wynosza odpowiednio:

$NPV(A) = 24867,02$

$NPV(B) = 25057,64$

Wobec tego inwestycje również nie sa równoważne, ale tym razem NPV(A) ¡ NPV(B), czyli przy rocznej stopie procentwej r = 7% inwesrycja B jest korzystniejsza od inwestycji A.

Uwaga Przykłady 48 i 49 pokazuja zasadnicza trudność zwiazana z ocena opłacalności poszczególnych inwestycji na podstawie ich wartości bieżacej netto. Ocena taka zależy bowiem od prawidłowego ustalenia wartości rocznej stopy procentowej.

20.6 Przykład 50 (Kolos)

Inwestor ma do wyboru dwie możliwości inwestycji kapitału, przynoszace w kolejnych latach nastepujace płatności

inwestycja A: $-4000, -10000, 0, 20000, 40000$

inwestycja B: $-4000, 10000, 1000, 10000, W$

Dla jakiej wartości parametru W inwestycje A i B sa równoważne przy rocznej stopie procentowej równej 4%.

Dla obydwu inwestycji wyznaczamy bieżace wartości netto ciagów kapitałów

$NPV(A) = 38356,71$

$NPV(B) = ... + \frac{W}{(1+0,04)^4} = 23750,91 + \frac{W}{(1+0,04)^4}$

$38356,71 = 23750,91 + \frac{W}{(1+0,04)^4}$

$W = 17086,72$

21 Wewnetrzna stopa zwrotu

Drugim ważnym narzedziem służacym do oceny inwestycji finansowych jest **wewnetrzna stopu zwrotu (IRR)**. Jest to roczna stopa procentowa, dla której wartość bieżaca netto inwestycji jest równa 0. Oznaczajac wewnetrzna stope zwrotu przez r, na podstawie (50) dostajemy nastepujace równanie na r

$$\Sigma_{j=0}^{n} \frac{x_j}{(1+r)^j} = 0 \tag{52}$$

Uwaga Dla inwestycji o pojedynczym nakładzie wewnetrzna stopa zwrotu jest maksymalna stopa procentowa przy której inwestycja jest opłacalna. Ściślej mówiac jest to maksymalna stopa procentowa przy której inwestycja sie zwraca.

Uwaga Zauważmy, że wyznaczanie wewnetrznej stope zwrotu sprowadza sie do wyznaczenia rozwiazań pewnego równania. Wobec tego, dla niektórych inwestycji może ona nie istnieć, zaś dla innych może nie być wyznaczona jednoznacznie. Można jednak wykazać, że dla każdej inwestycji w której ciag dochodów poprzedzony jest ciagiem nakładów, wewnetrzna stopa zwrotu istnieje i jest, wyznaczona jednoznacznie.

21.1 Przykład 51 (kolos)

Inwestycja wymagajaca nakładów w wysokości 300 000 obecnie i 100 000 za rok, po drugim roku przyniesie dochód w wysokości 50 000, zaś po trzecim i czwartym roku 250 000.

a) wyznaczyć wartość bieżaca netto tej inwestycji przy założeniu że roczna stopa procentowa jes równa 5%.

b) Wyznaczyć wewnetrzna stope zwrotu z tej inwestycji

a) $NPV = 71748,40$

B) ze wzoru (52)

$-300000 - \frac{100000}{1+r} + \frac{50000}{1+r^2} + \frac{250000}{(1+r)^3} + \frac{250000}{(1+r)4} = 0$

Skorzystamy z formuły IRR -¿ IRR(-300000;-100000;5000;250000;250000) = 10,81%

21.2 Przykład 52

Rozważmy inwestycje o stepujacych płatnościach: -4000, 5000, -2000.

Wewnetrzna stopa zwrotu dla tej inwestycji nie istnieje.

22 Średni czas trwania

Rozważmy inwestycje finansowa o oryzoncie czasowym n i płatnościach $x_1, x_2, ..., x_n$ Niech r* bedzie wewnetrzna stopa zwrotu z tej inwestycji. Wtedy zgodnie ze wzorem (52), mamy

$\Sigma_{j=0}^{n} \frac{x_j}{(1+r_*)^j} = 0$

Przyjmiemy oznaczenie

$$P_0 = \Sigma_{j=1}^{n} \frac{x_j}{(1+r_*)^j} \tag{53}$$

Uwaga Z (53) i (54) wynia, że

$$P_0 = -x_0 \tag{54}$$

Średnim czasem trwania inwestycji (ang. duration) nazywamy liczbe D określana w nastepujacy sposób

$$D = \frac{1}{P_0} \Sigma_{j=1}^{n} \frac{x_j}{(a+r^*)^j} \cdot j \tag{55}$$

Średni czas trwania inwestycji jest zatem średnia ważona momentów wystepowania płatności, przy czym wagami sa zdyskontowane, przy założeniu wewnetrznej stopy zwrotu, udziały poszczególnych płatności w wartości bieżacej netto inwestycji. Przy wyborze inwestycji na podstwie średniego czasu trwania inwestor powinien kierować sie jak najmniejsza wartościa tego wskaźnika.

22.1 Przykład 53

Rozważmy inwestycje z przykładu 51. Wtedy r* = 10,81 %. Pnadto $P_0 =$ 300000, wobec tego stosujac (55) otrzymujemy:

$D = \frac{1}{300000}(-\frac{100000}{1+0{,}1081} \cdot 1 + \frac{50000}{(1+0{,}1081)^2} \cdot 2 + \frac{250000}{(1+0{,}1081)^3} \cdot 3 + \frac{250000}{(1+0{,}1081)^4} \cdot 4) = 4,02$

Zatem średni czas trwania inwestycji wynosi 4,02 lat

23 Renty

Renta nazywamy ciag płatności w równych odstepach czasu. Kolejne kwoty wypłacane z tytułu renty nazywamy **ratami renty**. Okres miedzy dwiema kolejnymi ratami nazywa sie **okresem bazowym**. Rente o skończonej liczbie lat nazywa sie **renta okresowa**, zaśrente o nieskończonej liczbie lat - **renta wieczysta**. rente której raty wypłacane sa na koniec okresów bzowych nazyw asie **renta płatna z dołu**. Jeżeli raty renty wypłacane sa na poczatku okrexów bazowych to nzaywamy ja **renta płatna z góry** Raty renty moga być stałe albo zmieniać sie w czasie. W dalszym ciagu ograniczymy sie do rent o stałych ratach. Głównym celem naszych rozważań bedzie zagadnienie **wyceny renty** tzn. wyznaczenie kapitału równoważnego rencie. Wycene renty można oczywiście przeprowadzić na dowolny moment. W praktyce najważniejsze sa wycena renty na jej poczatek, czyli wyznaczenie **poczatkowej wartości renty** oraz wycena renty ja jej koniec czyli wyznaczenie **końcowej wartości renty**.

- **Poczatkowa wartość renty** jest suma wartości rat renty zaktualizowanycj na moment poczatkowy renty,

- **Końcowa wartośc renty** jest suma wartości ran renty zaktualizowany na moment końcowy renty

Bedziemy rozważać zarówno przypadek kapitalizacji rocznej, jak również model oparty na wielokrotnej kapitalizacji w ciagu roku.

24 Renty z roczna kapitalizacja odsetek

Załóżmy, że z tytułu renty przez n lat wypłacana bedzie corocznie **z dołu** ustalana kwota W. Przez r oznaczmy roczna stope procentowa. Wówczas poczatkowa wartość takiej renty, bedaca suma wartości jej rat zaktualizowanych na moment poczatkowy, jest równa:

$$P_D = W\Sigma_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+r)^i}(niepracujemynatym) \tag{56}$$

Stosujac wzór na sume n pozatkowych wyrazów ciagu geometrzycznego o pierwszych wyrazach.... dostajemy stad:

$$P_D = \frac{W}{r}(1 - \frac{1}{(1+r)^n}) \tag{57}$$

Z kolei wartość końcowa rozważanej renty jest równa,

$$F_D = P_D(1+r)^n \tag{58}$$

$$F_D = \frac{W}{r}((1+r)^n - 1) \tag{59}$$

Oznaczajac przez P_G poczatkowa wartośc renty płatnej **z góry** mamy

$$P_G = W\Sigma^{n-1}(aaaniewartouzuwactego) \tag{60}$$

$$P_G = W\frac{1+r}{r}(1 - \frac{1}{(1+r)^n}) \tag{61}$$

Wartość końcowa takiej renty wynosi

$$tylkodoliczenia \tag{62}$$

Ze wzoru (60) i (62) otrzymujemy:

$$F_G = P_G(1+r)^n \tag{63}$$

Zatem uwzgledniajac (61) otrzymujemy

$$F_G = W\frac{1+r}{r} \cdot ((1+r)^n - 1) \tag{64}$$

Uwaga Ze wzorów (57) i (58) otrzymujemy naatepujacy zwiazek miedzy poczatkowymi wartościami renty płatnej z dołu i renty płatnej z góry

$$P_G = P_D(1+r) \tag{65}$$

24.1 Przykład 54

Przyjmujac roczna stope procentowa równa 5% i zakładajac roczna kapitalizacje odsetek, wyznaczyć poczatkowa wartość 8-letniej renty płatnej corocznie a) z dołu, b) z góry w kwocie 10 000 PLN. Ile wynosi końcowa wartość takiej renty?

24.1.1 a)

Korzystajac ze wzoru (57)

$P_D = 64632,13PLN$

Ponadto, na podstawie wzoru (58), mamy

$F_D = 95491,09PLN$

24.1.2 b)

Stosujac wzór (65) i korzystajac z obliczeń z wykonanych w punkcie a
$P_G = 67863,74PLN$

Uwzgledniajac (63) mamy

$F_G = 100265,65PLN$

25 Renty z wielokrotna kapitalizacja odsetek w ciagu roku

Załóżmy, że kapitalizacja odsetek odbywa sie m-krotnine w ciagu roku (w równych odstepach czasu). Przyjmijmy, że raty renty w wysokości W wypłacane sa m razy w ciagu roku przez okres l lat i n spośród m podokresów l + 1 roku ($0 <= n < m$). Niech r oznacza nominalna stope procentowa. Wtedy poczatkowa wartość renty płatnej z dołu, tzn. na końcu każdego podokresu, wynosi

$$P_D^{(m)} = \frac{W}{\frac{r}{m}} \cdot (1 - \frac{1}{(1+\frac{r}{m})^{lm+n}}) \tag{66}$$

W przypadku renty płatnej z góry

$$P_G^{(m)} = W \cdot \frac{1+\frac{r}{m}}{\frac{r}{m}} \cdot (1 - \frac{1}{(1+\frac{r}{m})^{lm+n}}) \tag{67}$$

25.1 Przykład 55

Przyjmujac nominalna stope procentowa równa 4% i zakładajac kwartalna kapitalizacje odsetek wyznaczymy poczatkowa wartość renty płatnej co kwartał: a) z dołu, b) z góry w wysokości 2 500 PLN przez 3 lata i 3 miesiace.

Stosujac wzory (66) i (67) otrzymujemy

25.1.1 a)

$P_D^{(4)} = 30334,35PLN$

25.1.2 b)

$P_G^{(4)} = 30637,69PLN$

Uwaga W praktyce czesto mamy doczynienia z rentami o zmiennych ratach. W takim przypadju jeżeli raty renty płatnej z dołu wynosza w koeljnych latach $W_1, ..., W_n$, to jej wartość poczatkowa jest równa

$$P_D = \Sigma_{i=1}^{n} \frac{W_i}{(1+r)^i} \tag{68}$$

zaś wartość końcowa jest równa

$$F_D = \Sigma_{i=1}^{n} \frac{W_i}{(1+r)^{n-i}} \tag{69}$$

W przypadku renty płatnej z góry mamy

$$P_D = \Sigma_{i=0}^{n-1} \frac{W_i}{(1+r)^{i}} \tag{70}$$

oraz

$$F_D = \Sigma_{i=0}^{n-1} \frac{W_i}{(1+r)^{n-i}} \tag{71}$$

26 Wyznaczanie wartości końcowej i wartości poczatkowej w arkuszu MS Excel

Do wyznaczani wartości końcowej można zastosować wbudowana formułe **FV**. Jej argumentami sa: stopa procentowa, liczba rat, wysokość raty, saldo poczatkowe i typ. Argument typ dotyczy momentu płatności i wynosi: 0 dla rat płatnych z dołu, zaś 1 dla rat płatnych z góry.

FV(stopa procentowa; liczba rat; rata; saldo poczatkowe; 0 lub 1

Dwa ostatnie argumenty można pominać. Wtedy dla salda poczatkowego zostanie przyjeta domyślna wartość 0. Dla argumentu typ wartościa domyślna również jest 0 tzn. uzyskany w ten sposób wynik dotyczy rat płatnych z dołu.

26.1 Przykład 56

Na rachunku bankowym zdeponowano 20 000 PLN. Roczna stopa procentowa jest równa 5%. Wyznaczymy saldo rachunku po 3 latach, jeżeli na poczatku każdego kwartału wypłacana bedzie z niego kwota 800 PLN.

Mamy

FV(5%/4;12;800;-20000;1) = 12 798,20 PLN

26.2 Przykład 57

Obecne zadłużenie wynosi 100 000 PLN. Obliczymy poziom zadłużenia po 5 latach, jeżeli przy rocznej stopie procentowej równej 4% na koniec kazdego miesiaca spłacana bedzie rata w wysokości 1 000 PLN.

FV(4%/12;60;1000;-100000;0) = 55 800,68 PLN -¿ Zatem zadłużenie po 3 latach bedzie wynisiło 55 800,68

Do wyznaczania wartości poczatkowej można zastosować wdubowana formułe **PV**. Formuła posiada te same argumenty co formuła FV oraz ta sama konwencje.

PV(stopa procentowa; liczba rat; rata; saldo poczatkowe; 0 lub 1

26.3 Przykład 58

Przy założeniu, że roczna stopa procentowa jest równa 5% wyznaczymy poczatkowa wartość 24 rat płaconych w wysokości 500 PLN na koniec kolejnych miesiecy.

Mamy

PV(5%/12;24;-500;0;0) = 11 396,95 PLN

26.4 Przykład 59

Przy założeniu, że roczna stopa procentowa jest równa 5% wyznaczymy poczatkowa wartość 15 rat płaconych w wysokości 800 PLN na poczatku kolejnych kwartałów.

PV(5%/4;15;-800;0;1) = 11 016,44 PLN

26.5 Przykład 60

Przy założeniu że roczna stopa procentowa jest równa 6%, wyznaczymy kwote kredytu spłacanego w 12 kwartalnych ratach płatnych z dołu w wysokości 2 000 PLN.

PV(6%/4;12;-2000;0;0) = 21 815,01 PLN

27 Spłata rat kredytu

Wprowadzenie

Przeprowadzimy teraz analize spłaty rat kredytu. Udzielenie kredytu jest szczególnym przypadkiem inwestycji finansowej. Inwestorem jest strona udzielajaca kredytu, zaś raty spłaty długu stanowia ciag zwrotów z inwestycji. Takie spojrzenie na kredyt jest zgodne z praktyka. Instytucja finansowa lub osoba fizyczna podejmujaca decyzje o przeznaczeniu środków na udzielenie kredytu pozbawia sie innych możliwości ich zainwestowania. Prezentowane poniżej metody analizy dotyczace ratalnej spłaty kredtu pieraja sie na oprocentowaniu złożonym, na pojeciu wartości kapitału w czasie oraz na zasadzie równoważności ciagów kapitałów.

28 Zasada równoważności długu i rat

Załóżmy, że w momencie n = 0 zaciagniety zostal kredyt w wysokości K_0. Przyjmijmy, ze kredyt bedzie spłacany w równych odstepach czasu, w n ratach o wartościach $R_1, R_2, ..., R_n$. Kwota każdej raty zawiera zwrot cześci kapitału wraz z odsetkami, ale nie obejmuje kosztów takich jak np. prowizja czy ubezpieczenie. Analiza ratalnej spłaty kredytu opiera sie na nastepujacej zasadzie równoważności długu i rat.

Kredyt o wartości K_0 jest **równoważny** na moment n = 0 ciagowi rat $R_1, ..., R_n$ płatnych w momentach i = 1, ... n, jeżeli kapitały przekazane sobie nawzajem przez wierzyciela i dłużnika sa równoważne na moment 0.

Przy założeniu kapitalizacji złożonej zasada równoważności długu i rat prowadzi do warunku

$$K_0 = \Sigma_{i=1}^{n} \frac{R_i}{(1 + r_{okr})^i} \tag{72}$$

gdzie r_{okr} jest podokresowa stopa procentowa. Mnożoac obie strony równania (72) przez $\frac{R_i}{(1+r_{okr})^n}$. dostajemy warunek równowaśności długu i rat na moment n.

$$K_0(1 + r_{okr})^n = \Sigma_{i=1}^{n} R_i(1 + r_{okr})^{n-i} \tag{73}$$

Jeżeli wszystkie raty kredytu sa równe:
to warunek (72) przymuje postać

$$K_0 = r \cdot \Sigma_{i=1}^{n} \frac{1}{(1 + r_{okr})^i} \tag{74}$$

Stosujac wzór na sume wyarzów szeregu geometrzycznego, dostajemy zatem

$$K_0 = \frac{R}{r_{okr}}(1 - \frac{1}{(1 + r_{okr})^n}) \tag{75}$$

Wyznaczajac stad R otrzymujemy:

$$R = \frac{K_0 \cdot r_{okr}}{1 - \frac{1}{(1+r_{okr})^n}} \tag{76}$$

28.1 Przykład 61

Kredyt w kwocie 40 000 PLN zaciagniety na okres 5 lat ma być spłacany w równych ratach: a) rocznych, b) miesiecznych. Przy założeniu, że nominalna stopa procentowa jest równa 4%, wyznaczymy wysokość raty.

28.1.1 a)

ze wzoru (75) $K_0 = 40000, n = 5ir_{okr} = r = 4\%$

$R = (\frac{40000 \cdot 0,04}{(1 - \frac{1}{1,04^5})}) = 8985,08PLN$

28.1.2 b)

Najpierw wyznaczymy miesieczna stope procentowa równoważna rocznej stopie procentowej $r = 4\%$.

$r_{okr} = 1,04^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,3274$
Zatem, stosujac (75) mamy $K_0 = 40000, n = 60, r_{okr} = 0,3274$

$R = 735,38PLN$

28.2 Przykład 62

Piecioletni kredyt ma być spłacany w rocznych ratach płatnych na koniec kolejnych lat w wysokości: 6 000PLN po pierwszym i drugim roku, 7 200 PLN po trzecim roku, 8 000 PLN po czwartym roku i 9 000 PLN po piatym roku. Przyjmujac, że roczna stopa procentowa wynosi 8% wyznaczymy kwote kredytu.

Stosujac wzór (72), n = 5, $r_{okr} = r = 8\%, R_1 = R_2 = 6000, R_3 = 7200, R_4 = 8000, R_5 = 9000$

$K_0 = \frac{6000}{1,08} + \frac{6000}{(1,08)^2} + \frac{72000}{(1,08)^3} + \frac{8000}{(1,08)^4} + \frac{9000}{(1,08)^5} = 28420,67PLN$

28.3 Przykład 63

Czteroletni kredyt ma być spłacany w kwartalnych ratach płatnych w nastepujacej wysokości: 1 PLN na koniec pierwszych 5 kwartałów, 2 000 PLN na koniec kolejnych pieciu kwartałów i 2 500 PLN na koniec każdego z pozostałych kwartałów. Wiedzac, że roczna stopa procentowa wynosi 8%, wyznaczyć kwote kredytu.

Rozpoczniemy od wyznaczenia kwartalnej stopy: $r_{okr} = 1,08^{\frac{1}{4}} = 1,9427$
Zatem ze wzoru (72), n = 16, $r_{okr} = 1,9427$
$K_0 = 24872,76$

29 Schematy spłaty długu

Omówimy teraz zagadnienia zwiazane zzaldem zadłużenia w dowolnym momencie spłaty kredytu. Zauważmy najpierw, że mnożac obie strony równości (72) przez $(1+r_{okr})^j$ gdzie $j\epsilon(1,...,n)$, dostajemy aktualizacje długu i wartości poszczególnych rat na moment j. Przedstawiajac prawa strone tej równości w postaci sumy rat już zapłaconych do momenty j (włacznie) i rat, które pozostały jeszcze do splacenia trzymujemy:

$$K_0(1+r_{okr})^j = \Sigma_{i=1}^{j} R_j (1+r_{okr})^{j-i} + \Sigma_{i=j-i}^{n} R_j (1+r_{okr})^{j-i} \tag{77}$$

Uwaga Z punktu widzenia wierzyciela rówośc (76) pozwala na stwierdzenie, jaka wartość pożyczonego kapitału została odzyskana do momentu j, a jaka pozostała jeszcze do odzyskania, Z kolei, z punktu widzenia dłużnika, równość (76) informuje o tym, jaka wartość otrzymanego kapitału wraz z naliczonymi odsetkami została już oddana, a jaka pozostaje do oddania

Długiem bieżacym K_j w momencie $j\epsilon 0,,...n$ nazywa sie wartość kapitału pozostałego do spłacenia po zapłacenia raty R_j. Z równości (76):

(78)

$$K_j = \Sigma_{i=j+1}^{n} R_i (1+r_{okr})^{j-1} \tag{79}$$

Uwaga We wzorach (77) i (78) przyjmujemy konwenscje, opdowiednio

$\Sigma_{i=1}^{0} R_i()... = 0 oraz \Sigma_{i=n+1}^{n}... = 0$

Uwaga Wzór (77) wyraża zależność długu bieżacego od długu poczatkowe i rat już zapłaconych, zaś wzór (78) wyraża zależność długu bieżacego od rat, które jeszcze nie zostały spłacone. Pierwsza z tych zaleznności nazywa sie **zależnościa retrospetywna**, druga **zależnościa prospektywna**. Zarówno z zależności retro czu prospektywnej wynika, że dług bieżacy w momencie j = 0 wynosi K_0 , zaś dług bieżacy w momencie j = n, czyli po zapłaceniu ostatniej raty wynosi 0

Uwaga Wartość długu bieżacego w danym momencie spłaty kredytu jest ważna informacja zarówno dla wierzyciela jak i dłużnika. Można ona w szcególności stanowić podstawe do zmiany wartości przyszłych rat, np. z powodu zmiany wysokości stopy procentowej lub z powodu restrukturyzacji kredytu.

Dla każdego $j1, ..., n$ przez T_j oznaczmy cześć kwoty pożyczki spłacona w j-tej racje, przez Z_j odsetki spłaconej w j-tej racie, zaś K_j reszte długu pozsotała do spłacenia po spłaceniu j-tej raty. Dla każdego $j\epsilon 1, ...n$:

- wielkość T_j nazywa sie **cześcia kapitałowa** j-tej raty;
- wielkość Z_j nazywa sie **cześcia odsetkowa** j-tej raty;

Zauważmy że

$R_j = T_j + Z_j$

Dla każdego $j1, ..., n$, odsetki spłacone w j-tej racie sa wyznaczone według okresowej stopy procentowej r_{okr} na podstawie stanu zadłużenia na poczatku j-tego okresu. Wynika stad, że:

$$Z_j = K_{j-1} \cdot r_{okr}, dla j \epsilon 1, 2, ..., n \tag{80}$$

Z kolei kwota długu spłacenia w j-tej racie wynosi

$$T_j = R_j - Z_j, dla j \epsilon 1, 2, ..., n \tag{81}$$

Uwaga Na podstawie zależności prospektywnej (78), dla każdego $j\epsilon 1, 2, ..., n$ mamy $K_j = K_{j-1} + K_{j-1} r_{okr} - R_j$, uwzgledniajac (79) dostajemy stad

$$K_j = K_{j-1} - T_j, dla j \epsilon 1, 2, ..., n \tag{82}$$

Uwaga Warto podkreślić, że cześć odsetkowa raty Z_j jest zdefiniowana jako wartość odsetek należnych za j-ty okres, a nie jako wartość odsetek spłacanych w tym okresie. W niektórych okresach rata może być niższa niż naliczone odsetki, w zwiazku z czym nie moga być one spłacone. Ponadto, gdyby w danej racie spłacony był jedynie kapitał, a odsetki nie, to dłużnik spłaciłby cześć kredytu, a jednocześnie zaciagnałby nowy kredyt, o wartości równej odsetkom, które nie zostały zapłacone. Aby uniknać takiej sytuacji wygodniej jest założyć, że

- jezeli $R_j >= Z_j$ dla pewnego $j\epsilon 1, ...n$ to w j-tej racie spłacane sa odsetki Z_j a dług zmniejsza sie o $T_j = R_j - Z_j$
- jeżeli $R_j < Z_j$ dla pewnego $j\epsilon 1, ...n$ to w j-tej racie spłacane sa odsetki Z_j a dług zwieksza sie o $Z_j - R_j$

Przestawione założenia nazywane sa **priorytetem spłaty odsetek**

Uwaga Rozkład raty na cześć kapitałowa i odsetkowa pozwala prześledzić proces umarzania bieżacych odsetek i długu przez kolejne raty. Do opisu tego procesu stosuje sie tabele zwana **schematem spłaty długu**. Jej wiersze dotycza koe=lejnych okresów spłaty długu, zaś w jej kolumnach znajduja sie kolejno:

- j - numer okresu bazowego
- K_{j-1} - dług bieżacy na poczatku j-tego okresu bazowego
- R_j - rata spłacana w j-tym okresie bazowym
- Z_j - cześć odsetkowa raty R_j
- T_j - cześć kapitałowa raty R_j
- K_j - dług bieżacy na koniec j-tego okresu bazowego

Uwaga Przedstawimy teraz 2 przykłady dotyczace schematów spłaty kredytu w równych ratach oraz kredytu o równych cześciach kapitałowych. Warto wspomnieć, że innymi wystepujacymi w praktyce schematami spłaty kredytów sa spłata odsetek w jednej racie i równe raty kapitałowe oraz bieżaca spłata odsetek i zwrot kapitału w ostatniej racie.

29.1 Przykład 64

Zbudować schemat spłaty kredytu z przykładu 61a). Przypomnijmy, że rata wynosi 8 985,08

29.2 Przykład 65

Jak wspomnieliśmy wczesniej, poza kredytami o stałych ratach, czesto stosowanym rodzajem kredytów sa kredyty o stałych cześciach kapitałowych. Pokażemy schemat konstrukcji spłaty takiego kredytu. rozważać bedziemy kredyt z przykładu 64. Zauważmy najpierw, że: $T_j = \frac{40000}{5} = 8000PLNdlaj\epsilon 1, 2, 3, 4, 5$

30 Rzeszywista stopa opocentowania (RRSO)

Wcześniej zauważylismy, że udzielenie kredytu można w naturalny sposób traktować jako inwestycje finansowa. Wobec tego do jej oceny należy używać mierników stosowanych w analizie efektywności inwestycji. Kilka z nich omówiliśmy na poprzednich przykladach.Do najważniejszych mierników należy wewnetrzna stopa zwrotu (IRR), która w kontekście udzielania kredytu nazywa sie rzeczywista stioa oprocentowania. Opiera sie ona na zasadzie równoważności długu i rat,

Załóżmy, że kredyt w kwocie K_0 jest spłacany przez wieczyciela w n ratach równych $R_1, ...R_n$ płatnych w wyrażonych w latach chwilach $T_1, ..., t_n$ od momentu t = 0 w którym kredyt został udzielony

Rzeczysita roczna stopa oprocentowania RRSO nazywamy roczna stope procentowa, która jest rozwiazaniem równania.

$$K_0 = \Sigma_{i=1}^{n} R_i(1+r)^{-t_i}$$

Przyjmijmy, że istnieje jednostka czasu zwana okresem bazowym za pomoca której termin dowolnej raty kredytu można wyrażyć liczba całkowita. W praktyce założenie te jest spełnione, gdyż na ogół terminy spłat ustalane sa na koniec lat, kwartałów, czy miesiecy. W szczególności bazowy okres można przyjać 1 dzień. Załóżmy, że rok składa sie z m okresów bazowych, wtedy dla każdego $i \epsilon 1, 2, ..., n$

$$K_0 = \Sigma_{i=1}^{n} R_i(1+r)^{\frac{k_i}{m}} \tag{83}$$

Niech r_{okr} bedzie stopa podokresowa równoważna rocznej stopie r. Wtedy

$$(1 + r_{okr})^m = 1 + r \tag{84}$$

stad wynika, że $(1+r)^{\frac{1}{m}} = 1 + r_{okr}$

$$K_0 = \Sigma_{j=1}^{K_n} R_j(1+r_{okr})^{-j} \tag{85}$$

Stopa proentowa r_{okr} która jest rozwiazaniem równania (85) nazywa sie **okresowa strzeczysta stopa oprocenowania**

Uwaga Z równości (84) wynika, że okresowa rzeczysita stopa oprocentowania jest równoważna rocznej rzeczysitej stopie oporcenotwania. **RRSO jest równoważnie ORSO**

Uwaga W celu wyznaczenia rzeczywistej rocznej stopy oprocentowania należy rozwiazać równanie (82) ze wzgledu na r. Podobnie, zeby wuznaczyć okresowa rzeczysita stop oprocentowania, należy roziwazać równanie (85) ze wzgledu na r_{okr}. Można sie posłużyć Excelem. Rzeczywista stope oprocentowania można wyznaczyć przy użyciu formuły **IRR**. Jeżeli raty sa równe to do wyznaczenia rzeczysitej rocznej stopy oprocentowania można zastosować formułe **RATE**. Jej argumentami sa liczba rat; wysokośc rat; wysokośc kredytu ; saldo poczatkowe ; typ.

30.1 Przykład 66

Wyznaczyć rzeczywista roczna stope oprocentowania kredytu w wysokości 100 000 PLN słacanego a) na poczatku b) na końcu kolejnych piecii lat ratami w wysokości: 20 000PLN w pierwszym i drugim roku oraz 30 000 PLN w 3,4,5 roku.

Mamy

30.1.1 a)

RRSO = IRR(-80000;20000;30000;30000;30000) = 13,22 %

30.1.2 b)

RRSO = IRR(-100000;20000;20000;30000;30000;30000) = 8,68 %

30.2 Przykład 67

Sześcioletni kredyt w kwocie 12 000 PLN jest spłacony w równych rocznych ratach płatnych z dołu w wysokości 2 400 PLN.

IRR = 5,47 %

RATE = (6 ; -2400 ; 12 000)

30.3 Przykład 68

Rozważmy kredyt z przykładu 67, ale przy założeniu że raty płacone sa z góry.

IRR = 7,93 %

RATE = (5 ; -2400 ; 9600)

30.4 Przykład 69

Kredyt w wysokości 10 000 PLN bedzie spłacony przez 2 lata w równych miesiecznych ratach. płatnych w wysokości 500 PLN na koniec kolejnych miesiecy. Wyznaczyć rzeczywista roczna stope oprocentowania tego kredytu.

Stosując RATE dostajemy wartość okresowej rzeczywistej stopy oprocentowania.

RATE(24;-500;10000) = r_{okr} = 1,5131 %

RRSO jest roczna stopa oprocentowania równoważna stopie r_{okr} Mamy zatem: $RRSO = (1 + r_{okr})^{12} - 1 = (1,015131)^{12} - 1 = 19,79\%$

30.5 Przykład 70

Kredyt w wysokości 6 000 PLN bedzie spłacany przez rok w miesiecznych ratach płatnych w wysokości 550 PLN na koniec pierwszych 4 miesiecy, 525 PLN na koniec kolejnych 4 miesiecy i 500 PLN na konie ostatnich 4 miesiecy, Wyznaczyć RRSO.

$r_{okr} = IRR(-6000; 550; 550; 550; 550; 525; 525; 525; 525; 500; 500; 500; 500) = 0,7741\%$

$RRSO = (1 + 1,7741)^{12} - 1 = 9,70\%$

31 Wyznaczanie wysokości raty kredytu o równych ratach w arkuszu kalkulacyjnym Excel

Do wyznacznia wysokości raty kredytu o równych ratach można zastosować wbudowana formułe **PMT**

PMT(stopa procentowa ; liczba rat ; wysokość kredytu ; saldo poczatkowe ; 0 lub 1)

31.1 Przykład 71

Przy zaŻiżeniu, że nominalna stopa procentowa równa jest 6% wyznaczyć wysokość raty kredytu w wysokości 100 000 PLN zaciagnietego na okres 5 lat, spacanego w miesiecznych ratach płatnych a¿ z dołu, b) z góry

32 Wyznaczanie cześci odsetkowej i cześci kapitałowej rat kredytu o równych ratach w arkuczu Excel

Do wyznaczenia cześci odsetkowej rat kredytu o równych ratach można zastosować wbudowana formułe **IPMT**. Jej argumentami sa: stopa procentowa, numer raty, liczba rat, wysokość kredytu, saldo poczatkowe i typ.

IPMT(stopa procentowa ; numer raty ; liczba rat ; wysokość kredytu ; saldo poczatkowe ; 0 lub 1)

Do wyznaczenia cześci kapitałowej rat kredytu o równych ratach można zastosować formułe **PPMT**. Jej argumenty sa identyczne jak w IPMT.

32.1 Przykład 72

Przy założeniu, że nominalna stopa procentowa jest rowna 8%, wyznaczyć wartość raty kredytu w wysokości 15 000 PLN zaciagnietego na okres 2 lat i spłacanego w równych miesiecznych ratach płatnych z dołu.Nastepnie wyznaczyć wartość cześci odsetkowej, cześci kapitałowej dziewiatej raty tego kredytu.

PMT(8%/12 ; 24 ; -15000) = 678,41

IPMT(8%/12 ; 9 ; 24 ; -15000) = 68,42

PPMT(8%/12 ; 9 ; 24 ; -15000) = 609,99

33 Wyznaczanie rat kredytu przy zmianie oprocentowania

Załóżmy, że w trakcie spłaty kredytu stopa procentowa uległa zmianie. Wówczas zachodzi konieczność wyznaczenia nowej wysokości pozostałych do spłaty rat kredytu.

33.1 Przykład 73

Kredyt w wysokości 50 000 PLN zaciagniety na okres 4 lat był spłacany równymi ratami, płatnymi na koniec kolejnych kwartałów. Nominalna stopa procentowa, która poczatkowa była równa 5%, od poczatku czwartego roku wzrosła do 6%. Wyznaczyć wysokość pozostałych do spłaty rat kredytu.

1. Najpierw obliczymy wysokośc raty przed podniesieniem stopy procentowej. Mamy: PMT(5%/4 ; 16 ; -50000) = 3 467,34 PLN

2. Nastepnie obliczamy, do jakiego poziomu zmaleje dług po trzech latach splaty rat.Stosujać FV lub wzór: FV(5%/4 ; 12 ; 3467,34 ; -50000) = 13 446,53
3. Na kkoniec wyznaczymy wysokość rat po zianie stopy proentowej. W tym celu zastosujemy formułe PMT: PMT(6%/4 ; 4 ; -13466,53) = 3488,63

34 Tablice trwania życia

35 Przyszły czas życia

Przyszły czas życia x-latka, tzn. czas który pozostał mu do smierci, bedziemy oznaczać przez T_x. Oczywiście T_x na ogół nie jest dokładnie znana. Wobec tego bedziemy traktować T_x jako zmienna losowa. Przyjmuje ona wyłacznie wartości nieujemne, choć nie koniecznie calkowite. Przez F_x oznaczmy dystrybuante zmiennej T_x tzn.

$$F_x(t) = P(T_x <= t) dla t >= 0, \tag{86}$$

gdzie P oznacza prawdopodobieństwo. Dalsze rozważania bedziemy prwadzić przy staśłym założeniu, że dla kazego $x >= 0$, dystrybuanta F_x jest funkcja ciagła.

Wprowadzimy teraz oznaczenia które, podobnie jak notacja aktuarialna w dalszej cześci wykładu, sa zgodne z Miedzynarodowym Systemem Oznaczeń AKtuarialnych, obowiazujacych od 1898 roku. Zgodnie z tym systemem: