Contents

1 Wstep

Odestkami - nazywa sie kwote, która należy zapłacić za prawo użytkowania określonego kapitału. Odsetki sa zatem cena płacona za wypożyczenie kapitału. Ustala sie je w odniesieniu do pewnego ustalonego okresu. Stosunek odsetek do kapitału, który je wygenerował w ustalonym okresie, nazywa sie **okresowa stopa procentowa.**

W praktyce najcześciej mamy do czynienia ze stopami procentowymi ustalonymi dla okresy rocznego. Mówimy wtedy o **rocznej stopie procentowej**.

Jeżeli np. odsetki za 1 rok od pożyczonego kapitału 60 000 PLN wynosza 1 500 PLN, to roczna stopa procentowa jest równa $r = \frac{1500}{60000} = 2,5\%$.

Powiekszenie kapitału o odsetki, które zostały przez niego wygenerowane, nazywa sie **kapitalizacja odsetek**. Czas, w którym odsetki sa generowane, nazywa sie okresem kapitalizacji. W dalszym ciagu rozważań ograniczymy sie do przypadku, gdy odsetki sa dopisywane na końcu okresów kapitalizacji. Mówimy wtedy o kapitalizacji z dołu.

Wyróżniamy dwa podstawowe rodzaje kapitalizacji: **prosta i złożona**.

2 Kapitalizacja prosta

W przypadku kapitalizacji prostej odsetki od kapitału oblicza sie od kapitału poczatkowego proporcjonalnie od długości kresu oprocentowania. Oznaczamy przez W poczatkowa wartość kapitału, przez r roczna stope procentowa, przez I_n należne za czas n, zaś przez W_n oznaczamy końcowa wartość kapitału w czasie n (w latach).

Reguła bankowa – każdy rok ma 360 dni, zaś każdy miesiac ma 30 dni.

$$I_n = Wnr \tag{1}$$

Natomiast wartość końcowa kapitału:

$$W_n = W(1 + nr) \tag{2}$$

2.1 Przykład 1

Przy kapitalizacji prostej i rocznej stopie procentowej $r = 4\%$ wyznaczyć odsetki i końcowa wartość kapitału 25 000 PLN po upływie a) 3lat, b) 142dni.

2.1.1 a)

$I_n = 25000 * 3 * 0,04 = 3000 PLN$

2.1.2 b)

$W_n = 25000(1 + \frac{142}{360} + 0.04) = 25394,44 PLN$

Załóżmy że czas trwania inwestycji wynosi n lat i składa sie z m nastepujacych po sobie okresów o długości $n_1, ..., n_m$. Przyjmijmy że w każdym z nich obowiazuje roczna stopa procentowa, odpowiednio, $r_1, ..., r_m$. Wtedy wartość kapitału poczatkowego W po pierwszym okresie wyniesie:

$$W_n = W(1 + \Sigma_{i=0}^{m} r_i n_i) \tag{3}$$

$$I_n = W \Sigma_{i=0}^{m} r_i n_i \tag{4}$$

Przecietna roczna stopa procentowa oprocentowania kapitału W w czasie n nazywa sie roczna stope, przy której kapitał W generuje w czasie n odsetki o takiej samej wartości jak przy stopach zmiennych. Definicja ta dotyczy zarówno kapitalizacji prostej i złożonej.

Oznaczajac przez r(z kreska na górze) przecietna roczna stopa oprocen, na podstawie wzorów (1) i (4) mamy

$$r = \frac{1}{n} \Sigma_{i=1}^{m} r_i n_i \tag{5}$$

Gdyby wszystkie okresy miały jednakowa długość to wzór:

$$r = \frac{1}{m} \Sigma_{i=1}^{m} r_i \tag{6}$$

2.2 Przykład 2

Przez poczatkowe 4 miesiaca trwania obowiazywała roczna stopa procentowa 6

Dane:
$N_1 = \frac{4}{12}$
$N_2 = \frac{5}{12}$
$N_3 = \frac{3}{12}$

$R_1 = 0,06$
$R_2 = 0,07$
$R_3 = 0,075$
$W = 20000PLN$

2.2.1 a)

Korzystajac ze wzoru (3) mamy
$W_3 = 20000(1 + 0.06 * \frac{4}{12} + 0.07 * \frac{5}{12} + 0.075 * \frac{3}{12}) = 21358,40PLN$

2.2.2 b)

Obliczyć wysokość przecietnej rocznej stopy oprocentowania
Korzystajac ze wzory (5) mamy
$r = 0.06 * \frac{4}{12} + 0.07 * \frac{5}{12} + 0.075 * \frac{3}{12} = 6,79\%$

Czesto zdarza sie, że stopa procentowa, przy której należy obliczyć odsetki nie jest stopa roczna lecz np. miesieczna lub kwartalna. Okres, po którym odsetki podlegaja kapitalizacji nazywa sie **podokresem kapitalizacji**. Stopa procentowa ustalona dla podokresu kapitalizacji nazywa sie **stopa pod okresowa. Czestotliwość kapitalizacji** oznacza ile razy odsetki sa kapitalizowane w ciagu roku.

W dalszym ciagu zakładamy że czestotliwość kapitalizacji wynosi m. Wobec tego każdy rok jest podzielony na m równych podokresów kapitalizacji.

$m = 1$ – kapitalizacja roczna
$m = 2$ – kapitalizacja półroczna
$m = 4$ – kapitalizacja kwartalna
$m = 12$ – kapitalizacja miesieczna
$m = 360$ – kapitalizacja dobowa(dzienna)

Jeżeli r_{okr} jest stopa podokresowa, to zgodnie z zasada oprocentowania prostego odsetki od kapitału W po upływie k podokresów wyznacza sie ze wzoru

$$I_k = Wkr_{okr} \tag{7}$$

Natomast końcowa wartość kapitału W po upływie k:

$$W_k = W(1 + kr_{okr}) \tag{8}$$

Załóżmy że r_1 i r_2 sa podokresowymi stopami procentowymi, zaś m_1 i m_2 sa odpowiadajacymi im czestotliwościami kapitalizacji. Stopy r_1 i r_2 nazywamy równoważnymi w czasie n, jeżeli przy każdej z nich odsetki od ustalonego kapitału po czasie n sa równe.

Korzystając z (7) mamy:

$$m_1 * r_1 = m_2 * r_2 \tag{9}$$

Z (9) stopy pod okresowe sa wtedy i tylko wtedy ich stosunek jest równy stosunkowi długości odpowiadajacych im po okresów. Takie stopy pod okresowe nazywaja sie **proporcjonalnymi**.

2.3 Przykład 3

Kwartalna stopa oprocentowania prostego wynosi 6

2.3.1 a) roczna

$6 * 4 = 24\%$

2.3.2 b) miesieczna

$6/3 = 2\%$

2.3.3 c) tygodniowa

$6/12 = 0,5\%$

3 Kapitalizacja złożona

W przypadku **kapitalizacji złożonej** odsetki oblicza sie za każdy okres równy okresowi kapitalizacji i kapitalizuje sie je na koniec tego okresu. Załóżmy, że kwota W została ulokowana na rachunku z roczna stopa procentowa równa r. W przypadku kapitalizacji złożonej dochód przynosi poczatkowy kapitał wraz z odsetkami uzyskanymi na koniec poprzedniego okresu kapitalizacji. Przez I_n oznaczmy odsetki należne po czasie n, zaś przez W_n oznaczmy wartość kapitału po n latach. Wtedy:

$W_1 = w(1 + r)$

$$W_n = W(1 + r)^n \tag{10}$$

Liczba $(1+r)^n$ nazywa sie **czynnikiem wartości przyszłej** w kapitalizacji złożonej.

Odsetki po okresie n lat wynosza:

$$I_n = W((1 + r)^n - 1) \tag{11}$$

3.1 Przykład 4

Przy założeniu kapitalizacji złożonej i rocznej stopie procentowej r = 5%, wyznaczymy wartość kapitału 40 000 PLN i odsetki po upływie 4 lat.

$W_n = 40000(1 + 0,05)^4 = 48620PLN$

$I_n = 48620 - 40000 - 8620PLN$

$I_n = 40000((1 + 0,05)^4 - 1) = 8620PLN$

Podobnie jak w przypadku kapitalizacji prostej w kapitalizacji złożonej, możemy dopuścić zmienne stopy procentowe w kolejnych latach trwania inwestycji. Przyjmijmy, że w kolejnych latach stopy procentowe sa równe $r_1, r_2, ..., 4_n$ gdzie n jest licza lat trwania inwestycji. Wtedy wartość poczatkowego kapitału W po pierwszym roku wyniesie. $W_1 = W(1 + r_1)$, po drugim $W_2 = W(1 + r_1)(1 + r_2)$

Wartość kapitału po n latach:

$$W_n = W\Pi_{i=1}^{n}(1 + r_i) \tag{12}$$

$$I_n = W(\Pi_{i=1}^{n}(1 + r_i) - 1) \tag{13}$$

Przecietna roczna stopa oprocentowania w przypadku kapitalizacji złożonej:

$$r = (\Pi_{i=1}^{n}(1 + r_1)^{\frac{1}{n}} - 1 \tag{14}$$

3.2 Przykład 5

Kapitał 20 000 PLN został ulokowany na okres 5 lat. Przy założeniu kapitalizacji złożonej i rocznej stopie procentowej równej w kolejnych latach, 5%, 6%, 5%, 4%, 7%, wyznaczymy wartości kapitału na koniec kolejnych lat oraz przecietna roczna stope oprocentowania tego kapitału w czasie 5 lat.

$W_1 = 21000PLN$

$W_5 = 20000(1+0.05)(1+0.06)(1+0.05)(1+0.04)(1+0.07) = 26009.47PLN$

$r = ((1 + 0.05)(1 + 0.06)(1 + 0.05)(1 + 0.04)(1 + 0.07))^{\frac{1}{5}} - 1 = 5.40\%$

Niech r_{okr} bedzie stopa pod okresowa. Przy założeniu kapitalizacji złożonej, przyszła wartość kwoty W po l latach i n spośród m pod okresów $l + 1$ roku, gdzie $0 \leq n < m$ wynosi:

$$W_{(l,n)}^{(m)} = W(1 + r_{okr})^{l*m+n} \tag{15}$$

3.3 Przykład 6

Zakładajac kapitalizacje a) półroczna, b) kwartalna c) miesieczna i przyjmujac stope pod okresowa $r_{okr} = 2\%$ wyznaczyć przyszła wartość kapitału 20 000 PLN po 2 latach i 6 miesiacach.

3.3.1 a)

$W_{(2,1)}^{(2)} = W(1 + 0,02)^{2*2+1} = 22081,62PLN$

3.3.2 b)

$W_{(2,2)}^{(4)} = W(1 + 0,02)^{10} = 24379,89PLN$

3.3.3 c)

$W_{(2,6)}^{(12)} = W(1 + 0,02)^{30} = 36227,23PLN$

Roczna stopa procentowa r proporcjonalna do danej stopy pod okresowej r_{okr} nazywa sie **stopa nominalna**. (wyliczyć rocza stope, np. jak miesieczna jest 1% to roczna jest 12% itp.)

$$W_{(l,n)}^{(m)} = W(1 + \frac{r}{m})^{l*m+n} \tag{16}$$

Przyjmujac n = 0 wtedy:

$$W_{l}^{(m)} = W(1 + \frac{r}{m})^{l*m} \tag{17}$$

Liczbe:

$$R_m = (1 + \frac{r}{m})^{m} \tag{18}$$

Nazywa sie rocznym **czynnikiem oprocentowania**.

3.4 Przykład 7

Kapitał w wysokości 40 000 PN został ulokowany na rachunku z nominalna stopa procentowa równa 12%. Zakładajac kapitalizacje, roczna, półroczna, kwartalna, miesieczna oraz dzienna, wyznaczyć przyszła wartość kapitału po 4 latach.

Ze wzory (17)

$W(1)4 = 62940,77PLN$

$W(2)4 = 63753.92PLN$

$W(4)4 = 64188.26PLN$

$W(12)4 = 64489.04PLN$

$W(360)4 = 64606.80PLN$

3.5 Przykład 8

Wyznaczymy wartość kapitału 40 000 PLN po 5 ltach i 9 miesiacach przy założeniu że roczna stopa procentowa wynosi 6%, a kapitalizacji odsetek jest a) kwartalna, b) miesieczna.

Korzystajac(16)

3.5.1 a)

$W^{4}_{(5,3)} =$

3.5.2 b)

$W^{12}_{(5,9)} =$

3.6 Przykład 9

Przy założeniu miesiecznej kapitalizacji odsetek i rocznych stopach procentowych równych 6% w pierwszym i drugim roku. 9% w trzecim i 12% w czwartym roku wyznaczyć wartość kapitału 100 000 PLN po a)3 latach i 7 miesiacach b) 4 latach.

X = kapitał po 3latach i 7 m

Y = po 4 latach

Wzór (16)

$X = 100000 * (1 + \frac{0,06}{12})^2 4 * (1 + \frac{0,09}{12})^1 2 * (1 + \frac{0,12}{12}/12)^7 = 132183 PLN$

$Y = 100000 * (1 + \frac{0,06}{12})^2 4 * (1 + \frac{0,09}{12})^1 2 * (1 + \frac{0,12}{12}/12)^1 2 = 138925,70 PLN$

3.7 Przykład 10

Przy miesiecznej kapitalizacji odsetek i nominalnej stopie procentowej równej 3% po 1 roku i 7 miesiacach uzyskano z lokaty 100 PLN odsetek. Jaka była kwota lokaty?

Odsetki uzyskane z inwestycji stanowia różnice miedzy wartościa kapitału po 1r i 7m a jego wartościa poczatkowa. W = ?

$W^{12}_{(1,7)} - W = 100 \Rightarrow W = 2058,29 PLN$

4 Równoważność stóp pod okresowych przy kapitalizacji złożonej

Załóżmy że r_1 i r_2 sa pod okresowymi stopami procentowymi, zaś m_1 i m_2 sa odpowiadajacymi im czestotliwościami kapitalizacji. Stopy r_1 i r_2 **nazywamy równoważnymi w czasie** l **lat**, gdzie $l \in N$, jeżeli przy każdej z nich odsetki od ustalonego kapitału po l latach sa równe.

Zauważmy, że równość odsetek po l latach oznacza równość wartości kapitału po tym czasie. Zatem, uwzgledniajac wzór (15) otrzymujemy, że podokresowe stopy proentowe r_1 i r_2 sa równoważne w czaei l lat, wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$(l + r_1)^{m_1} = (1 + r_2)^{m_2} \tag{19}$$

Korzystajac ze wzory (17) warunek (19) można przedstawić w nastepujacej równoważnej postaci:

$$(1 + \frac{r_1}{m_1})^{m_1} = (1 + \frac{r_2}{m_2})^{m_2} \tag{20}$$

gdzie r_1 i r_2 sa nominanymi stopami procentowymi, odpowiednio r_1 i r_2.

4.1 Przykład 11

Wyznaczymy miesieczna stope procentowa równoważna kwartalnej stopie procentowej $r_{okr}^{(1)} = 4\%$.

Ponieważ $r_1 = \%, m_1 = 4im_2 = 12$ na podstawie (1) mamy:

$(1 + 0,04)^4 = (1 + r_2)^{12}$.

Stad $r_2 = (1 + 0,04)^{\frac{4}{12}} - 1 = 1,3159\%$

4.2 Przykład 12

Wyznaczymy nominalna stope peocentowa, która przy kapitalizacji kwarta;nej jest równoważna nomnalnej stopei $r_1 = 5\%$ przy kapitalizacji półrocznej.

Korzystajac ze wzoru (20) z $r_1 = 5\%, m_1 = 2im_2 = 4$ dostajemy:

$(1 + \frac{0,05}{2})^2 = (1 + \frac{r_2}{4})^4$.

Wobec tego

$r_2 = 4,9691\%$.

5 Efektywna stopa procentowa

Efektywna stopa procentowa nazywa sie roczna stope procentowa równoważna danej podokresowej stopie procentowej. Wobec tego, jeśli r_{okr} jest podokresowa stopa procentowa, zaś m jest czestotliwościa kapitalizacji, to korzystajac z (19) mamy:

$$r_{ef}^{(m)} = (1 + r_{okr})^m - 1 \tag{21}$$

Z kolei na podstawie (2), efektywna stope procentowa odpowiadajaca nominalnej stopie procentowej r przy m-krotnej kapitalizacji w ciagu roku, wyznacza sie z równania:

$$r_{ef}^{(m)} = (1 + \frac{r}{m})^m - 1 \tag{22}$$

Efektywna stopa procentowa pozwala na zmiane okresu stopy procentowej bez zmiany eektywności kapitalizacji.

5.1 Przykład 13

Wyznacyzmy efektywna stope procentowa odpowiadajaca nominalnej stopie procentowej równiej 6% przy kapitalizacji: półrocznej, kwartalnej, miesiecznej, dziennej.

Korzystajac ze wzoru (22), otrzymujemy

$r_{ef}^{(m)} = (1 + \frac{0,06}{2})^2 - 1 = (1,03)^2 - 1 = 6,09\%$

$r_{ef}^{(m)} = (1 + \frac{0,06}{4})^4 - 1 = (1,015)^4 - 1 = 6,14\%$

$r_{ef}^{(m)} = (1 + \frac{0,06}{12})^1 2 - 1 = (1,005)^1 2 - 1 = 6,17\%$

$r_{ef}^{(m)} = (1 + \frac{0,06}{360})^3 60 - 1 = (1,00016)^3 60 - 1 = 6,18\%$

Do wyznaczania efektywnej stopy procentowej stopy procentowej można zastosować formułe **EFEKTYWNA** wbudowana w pakiecie MS Excel. Jej argumentami sa stopa nominalna i liczba okresów.

5.1.1 Przykład 13 a)

$EFEKTYWNA(6\%, 2) = 6.0900\%$

5.2 Przykład 14

Wyznaczymy nominalna stope procentowa, której przy: a) kwartalnej, b) miesiecznej kapitalizacji odsetek odpowiada efektywna stopa procentowa równa 5%.

Wyznaczajac r ze wzoru (22), dostajemy:

$$r = m(\sqrt{1 + r_{ef}^{(m)}} - 1)$$

5.2.1 a)

$r = 4,9089\%$

5.2.2 b)

$r = 4,8889\%$

Do wyznaczania nominalnej stopy procentowej można zastosować fomułe **NOMINALNA** z Excela. Jej argumentami sa stopa efektywna i liczba okresów.

6 Kapitalizacja ciagła

Jeżeli przy m-krotnej kapitalizacji w ciagu roku powieksza sie liczba okresów, to w granicy przy $m \to \infty$ mamy do czynienia z ciagla kapitalizacja odsetek. W takim przypadku na podstawie wzoru (17) wartość kapitału W po l latach można wyznaczyć w nastepujacy sposób.

$$W_l^{(\infty)} = We^{l*r} \tag{23}$$

Można pokazać, że wzór (23) jesy prawdiwy dla $l > 0$

6.1 Przykład 15

Przy założeniu ciagłej kapitalizacji odsetek i rocznej stopie procentowej $r = 5\%$ wyznaczymy wartość kwoty 10 000 PLN po: a) 8 latach, b) 4 latach i 7 miesiacach.

6.1.1 a)

ze wzoru (23), $W = 10000, l = 8, r = 5\%$

$$W = 10000 * e^{8*0,05} = 10000 * e^{0,04} = 14918,25$$

6.1.2 b)

ze wzoru (23), $W = 10000, l = 4\frac{7}{12}, r = 5\%$

$$W = 10000 * e^{4\frac{7}{12}*0,05} = 10000 * e^{0,2292} = 12575,94$$

7 Nateżenie procentowe

W przypadku ciagłej kapitalizacji odsetek efektywna stope procentowa wyznacza sie z równania:

$$l + r_{ef} = e^r \tag{24}$$

gdzie r jest stopa nominalna. Zatem:

$$r_{ef} = e^r - 1 \tag{25}$$

Jeżeli natomiast dana jest efektywna stopa procentowa r_{ef} to z (24) otrzymujemy stope nominalna:

$$r = ln(1 + r_{ef}) \tag{26}$$

Nazywa sie nateżeniem oprocentowania zwiazanym z efektywna stopa procentowa r_{ef}.

7.1 Przykład 16

Wyznaczymy nateżenie oprocentowania zwiazane z efektywna stopa procentowa równa 6%.

Stosujac (26):

$r = ln(1 + 0,06) = Ln(1,06) = 5,83\%$

8 Dyskonto proste i składane

Teraz zajmiemy sie zagadnieniem ustalania poczatkowej wartości kapitału na podstawie jego wartości na końcu pewnego okresu. Proces ten nazywa sie **dyskontowaniem**.

Dyskonto proste, które jest bezpośrednio zwiazane z prosta kapitalizacja oesetek. W przypadku kapitalizacji prostej na podstawie (2), wartość kapitału poczatkowego W po n latach.

W przypadku dyskonta prostego, obecna wartość kapitału W, która mamy otrzymać (badź zaplacić) za n lat wyznacz sie na podstawie równości:

$$PV(W) = \frac{W}{1+nr} \tag{27}$$

Dyskontem nazywa sie różnice miedzy wartościa kapitału na koncu pewnego ustalonego okresu, a jego wartościa na poczatku tego okresu. Oznaczająć dyskonta przed D i uwzledniajac (27) otrzymujemy:

$$D = \frac{nrW}{1+nr} \tag{28}$$

8.1 Przykład 17

Zakładajac dyskonto proste i przyjmujac stope procentowa $r = 4\%$ wyznaczyć wartość oraz dyskonto kwoty 50 000 PLN która mamy otrzymać za 8 lat.

Korzystajac z (27, 28) $W = 50000, r = 0,04, n = 8$

$PV = \frac{50000}{1+8*0,04} = 37878,79$

$D = 50000 - 37878,79 = 12121,21$

W przypadku **dyskonta składanego**, przy rocznej kapitalizacji odsetek wartość kapitału poczatkowego W po n latach, wyznaczona na podstawie wzoru (10).

Zatem obena wartość kapitału W która mamy otrzymać (badź zapłacic) za n lat wwyznacza sie z równości:

$$PV(W) = \frac{W}{(1+r)^n} \tag{29}$$

Wielkość $\frac{1}{(1+r)}$ nazywa sie **rocznym czynnikiem dyskontujacym**. Dyskonto wyraża sie w tym przypadku wzorem:

$$PD = W(1 - \frac{1}{(1+r)^n}) \tag{30}$$

8.2 Przykład 18

Zakładajac dyskonto składane i przyjmujac stope procentowa $r = 4\%$ wyznaczyć wartość oraz dyskonto kwoty 50 000 PLN która mamy otrzymać za 8 lat.

Korzystajac z (29, 30) $W = 50000, r = 0,04, n = 8$

$PV = \frac{50000}{(1+0,04)^8} = 36534,51$

$D = 50000 - 36534,51 = 13465,49$