

# Contents

<b>1</b>	<b>Wstęp</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Kapitalizacja prosta</b>	<b>6</b>
2.1	Przykład 1 . . . . .	7
2.1.1	a) . . . . .	7
2.1.2	b) . . . . .	7
2.2	Przykład 2 . . . . .	8
2.2.1	a) . . . . .	8
2.2.2	b) . . . . .	8
2.3	Przykład 3 . . . . .	9
2.3.1	a) roczna . . . . .	9
2.3.2	b) miesięczna . . . . .	9
2.3.3	c) tygodniowa . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Kapitalizacja złożona</b>	<b>10</b>
3.1	Przykład 4 . . . . .	10
3.2	Przykład 5 . . . . .	11
3.3	Przykład 6 . . . . .	11
3.3.1	a) . . . . .	11
3.3.2	b) . . . . .	11
3.3.3	c) . . . . .	12
3.4	Przykład 7 . . . . .	12
3.5	Przykład 8 . . . . .	13
3.5.1	a) . . . . .	13
3.5.2	b) . . . . .	13
3.6	Przykład 9 . . . . .	13
3.7	Przykład 10 . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Równoważność stóp pod okresowych przy kapitalizacji złożonej</b>	<b>14</b>
4.1	Przykład 11 . . . . .	14
4.2	Przykład 12 . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Efektywna stopa procentowa</b>	<b>15</b>
5.1	Przykład 13 . . . . .	15
5.1.1	a) . . . . .	15
5.2	Przykład 14 . . . . .	16
5.2.1	a) . . . . .	16
5.2.2	b) . . . . .	16
<b>6</b>	<b>Kapitalizacja ciągła</b>	<b>17</b>
6.1	Przykład 15 . . . . .	17
6.1.1	a) . . . . .	17
6.1.2	b) . . . . .	17

<b>7</b>	<b>Nateżenie procentowe</b>	<b>18</b>
7.1	Przykład 16 . . . . .	18
<b>8</b>	<b>Dyskonto proste i składane</b>	<b>19</b>
8.1	Przykład 17 . . . . .	19
8.2	Przykład 18 . . . . .	20
<b>9</b>	<b>Dyskonto przy wielokrotnej kapitalizacji w ciągu roku</b>	<b>21</b>
9.1	Przykład 19 . . . . .	21
9.1.1	a) . . . . .	21
9.1.2	b) . . . . .	22
9.2	Przykład 20 . . . . .	22
9.2.1	a) . . . . .	22
9.2.2	b) . . . . .	22
9.2.3	c) . . . . .	22
9.3	Przykład 21 . . . . .	22
<b>10</b>	<b>Dyskonto przy kapitalizacji ciągłej</b>	<b>24</b>
10.1	Przykład 22 . . . . .	24
10.2	Przykład 23 . . . . .	24
<b>11</b>	<b>Dyskonto handlowe</b>	<b>26</b>
<b>12</b>	<b>Stopa dyskontowa</b>	<b>27</b>
12.1	Przykład 24 . . . . .	27
12.2	Przykład 25 . . . . .	27
12.3	Przykład 26 . . . . .	27
12.4	Przykład 27 . . . . .	28
<b>13</b>	<b>Zasada równoważności stopy procentowej i stopy dyskontowej</b>	<b>29</b>
13.1	Przykład 28 . . . . .	29
13.2	Przykład 29 . . . . .	29
13.3	Przykład 30 . . . . .	29
<b>14</b>	<b>Weksle</b>	<b>31</b>
14.1	Przykład 31 . . . . .	31
14.2	Przykład 32 . . . . .	31
<b>15</b>	<b>Zasada równoważności kapitałów</b>	<b>32</b>
15.1	Przykład 33 . . . . .	33
15.2	Przykład 34 . . . . .	33
15.3	Przykład 35 . . . . .	34
<b>16</b>	<b>Zasada równoważności przy kapitalizacji ciągłej</b>	<b>35</b>
16.1	Przykład 36 . . . . .	35

<b>17 Stopa procentowa a równoważność kapitału</b>	<b>36</b>
17.1 Przykład 37 . . . . .	36
17.2 Przykład 38 (kolos) . . . . .	37
17.3 Przykład 39 . . . . .	37
<b>18 Równoważność ciągów kapitałów</b>	<b>38</b>
18.1 Przykład 40 . . . . .	39
18.2 Przykład 41 . . . . .	39
18.3 Przykład 42 . . . . .	39
18.4 Przykład 43 . . . . .	40
<b>19 Mierniki oceny inwestycji finansowych</b>	<b>41</b>
19.1 Przykład 44 . . . . .	41
<b>20 Wartość bieżąca netto</b>	<b>42</b>
20.1 Przykład 45 . . . . .	42
20.2 Przykład 46 . . . . .	42
20.3 Przykład 47 . . . . .	42
20.4 Przykład 48 . . . . .	43
20.5 Przykład 49 . . . . .	43
20.6 Przykład 50 (Kolos) . . . . .	44
<b>21 Wewnętrzna stopa zwrotu</b>	<b>45</b>
21.1 Przykład 51 (kolos) . . . . .	45
21.2 Przykład 52 . . . . .	45
<b>22 Średni czas trwania</b>	<b>46</b>
22.1 Przykład 53 . . . . .	46
<b>23 Renty</b>	<b>47</b>
<b>24 Renty z roczną kapitalizacją odsetek</b>	<b>48</b>
24.1 Przykład 54 . . . . .	49
24.1.1 a) . . . . .	49
24.1.2 b) . . . . .	49
<b>25 Renty z wielokrotną kapitalizacją odsetek w ciągu roku</b>	<b>50</b>
25.1 Przykład 55 . . . . .	50
25.1.1 a) . . . . .	50
25.1.2 b) . . . . .	50
<b>26 Wyznaczanie wartości końcowej i wartości początkowej w arkuszu MS Excel</b>	<b>52</b>
26.1 Przykład 56 . . . . .	52
26.2 Przykład 57 . . . . .	52
26.3 Przykład 58 . . . . .	52
26.4 Przykład 59 . . . . .	53

26.5 Przykład 60 . . . . .	53
<b>27 Spłata rat kredytu</b>	<b>54</b>
<b>28 Zasada równoważności długu i rat</b>	<b>54</b>
28.1 Przykład 61 . . . . .	55
28.1.1 a) . . . . .	55
28.1.2 b) . . . . .	55
28.2 Przykład 62 . . . . .	55
28.3 Przykład 63 . . . . .	56
<b>29 Schematy spłaty długu</b>	<b>57</b>
29.1 Przykład 64 . . . . .	59
29.2 Przykład 65 . . . . .	59
<b>30 Rzeszywista stopa opocentowania (RRSO)</b>	<b>59</b>
30.1 Przykład 66 . . . . .	60
30.1.1 a) . . . . .	61
30.1.2 b) . . . . .	61
30.2 Przykład 67 . . . . .	61
30.3 Przykład 68 . . . . .	61
30.4 Przykład 69 . . . . .	61
30.5 Przykład 70 . . . . .	62
<b>31 Wyznaczanie wysokości raty kredytu o równych ratach w arkuszu kalkulacyjnym Excel</b>	<b>63</b>
31.1 Przykład 71 . . . . .	63
<b>32 Wyznaczanie części odsetkowej i części kapitałowej rat kredytu o równych ratach w arkuczu Excel</b>	<b>64</b>
32.1 Przykład 72 . . . . .	64
<b>33 Wyznaczanie rat kredytu przy zmianie oprocentowania</b>	<b>65</b>
33.1 Przykład 73 . . . . .	65
<b>34 Tablice trwania życia</b>	<b>66</b>
<b>35 Przyszły czas życia</b>	<b>66</b>
<b>36 Hipoteza agregacji</b>	<b>68</b>
<b>37 Hipotezja jednostajności</b>	<b>69</b>
<b>38 Tablice trwania życia</b>	<b>70</b>
38.1 Przykład 74 . . . . .	71
38.2 Przykład 75 . . . . .	71
38.3 Przykład 76 . . . . .	71

38.4 Przykład 77 . . . . .	71
<b>39 Podstawowe rodzaje ubezpieczeń życiowych</b>	<b>72</b>
39.1 Ubezpieczenie na życie . . . . .	72
<b>40 Ubezpieczenie na dożycie</b>	<b>72</b>
<b>41 Ubezpieczenie mieszane (na życie i dożycie)</b>	<b>73</b>
<b>42 Ubezpieczenie rentowe</b>	<b>73</b>
<b>43 Jednorazowa składka netto</b>	<b>74</b>
43.1 Ubezpieczenie na całe życie . . . . .	74
43.1.1 Przykład 78 . . . . .	75
43.2 Ubezpieczenie terminowe na życie . . . . .	75
43.2.1 Przykład 79 . . . . .	75

## 1 Wstęp

**Odestkami** - nazywa się kwotę, która należy zapłacić za prawo użytkowania określonego kapitału. Odsetki są zatem ceną płaconą za wypożyczenie kapitału. Ustala się je w odniesieniu do pewnego ustalonego okresu. Stosunek odsetek do kapitału, który je wygenerował w ustalonym okresie, nazywa się **okresowa stopa procentowa**.

W praktyce najczęściej mamy do czynienia ze stopami procentowymi ustalonymi dla okresy rocznego. Mówimy wtedy o **rocznej stopie procentowej**.

Jeżeli np. odsetki za 1 rok od pożyczonego kapitału 60 000 PLN wynoszą 1 500 PLN, to roczna stopa procentowa jest równa  $r = \frac{1500}{60000} = 2,5\%$ .

Powiększenie kapitału o odsetki, które zostały przez niego wygenerowane, nazywa się **kapitalizacja odsetek**. Czas, w którym odsetki są generowane, nazywa się okresem kapitalizacji. W dalszym ciągu rozważań ograniczymy się do przypadku, gdy odsetki są dopisywane na końcu okresów kapitalizacji. Mówimy wtedy o kapitalizacji z dołu.

Wyróżniamy dwa podstawowe rodzaje kapitalizacji: **prosta i złożona**.

## 2 Kapitalizacja prosta

W przypadku kapitalizacji prostej odsetki od kapitału oblicza się od kapitału początkowego proporcjonalnie od długości okresu oprocentowania. Oznaczamy przez  $W$  początkową wartość kapitału, przez  $r$  roczną stopę procentową, przez  $I_n$  należne za czas  $n$ , zaś przez  $W_n$  oznaczamy końcową wartość kapitału w czasie  $n$  (w latach).

**Reguła bankowa** – każdy rok ma 360 dni, zaś każdy miesiąc ma 30 dni.

$$I_n = Wnr \quad (1)$$

Natomiast wartość końcowa kapitału:

$$W_n = W(1 + nr) \quad (2)$$

## 2.1 Przykład 1

Przy kapitalizacji prostej i rocznej stopie procentowej  $r = 4\%$  wyznaczyć odsetki i końcowa wartość kapitału 25 000 PLN po upływie a) 3lat, b) 142dni.

### 2.1.1 a)

$$I_n = 25000 * 3 * 0,04 = 3000 PLN$$

### 2.1.2 b)

$$W_n = 25000(1 + \frac{142}{360} * 0.04) = 25394,44 PLN$$

Załóżmy że czas trwania inwestycji wynosi  $n$  lat i składa się z  $m$  następujących po sobie okresów o długości  $n_1, \dots, n_m$ . Przyjmijmy że w każdym z nich obowiązuje roczna stopa procentowa, odpowiednio,  $r_1, \dots, r_m$ . Wtedy wartość kapitału początkowego  $W$  po pierwszym okresie wyniesie:

$$W_n = W(1 + \sum_{i=1}^m r_i n_i) \quad (3)$$

$$I_n = W \sum_{i=1}^m r_i n_i \quad (4)$$

**Przeciętna roczna stopa procentowa oprocentowania kapitału  $W$**  w czasie  $n$  nazywa się roczną stopę, przy której kapitał  $W$  generuje w czasie  $n$  odsetki o takiej samej wartości jak przy stopach zmiennych. Definicja ta dotyczy zarówno kapitalizacji prostej i złożonej.

Oznaczając przez  $r$  (z kreską na górze) przeciętna roczna stopa oprocentowania, na podstawie wzorów (1) i (4) mamy

$$r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m r_i n_i \quad (5)$$

Gdyby wszystkie okresy miały jednakową długość to wzór:

$$r = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m r_i \quad (6)$$

## 2.2 Przykład 2

Przez początkowe 4 miesiące trwania obowiązywała roczna stopa procentowa 6

Dane:

$$N_1 = \frac{4}{12}$$

$$N_2 = \frac{5}{12}$$

$$N_3 = \frac{3}{12}$$

$$R_1 = 0,06$$

$$R_2 = 0,07$$

$$R_3 = 0,075$$

$$W = 20000\text{ PLN}$$

### 2.2.1 a)

Korzystając ze wzoru (3) mamy

$$W_3 = 20000(1 + 0.06 * \frac{4}{12} + 0.07 * \frac{5}{12} + 0.075 * \frac{3}{12}) = 21358,40\text{ PLN}$$

### 2.2.2 b)

Obliczyć wysokość przeciętnej rocznej stopy oprocentowania

Korzystając ze wzoru (5) mamy

$$r = 0.06 * \frac{4}{12} + 0.07 * \frac{5}{12} + 0.075 * \frac{3}{12} = 6,79\%$$

Często zdarza się, że stopa procentowa, przy której należy obliczyć odsetki nie jest stopa roczna lecz np. miesięczna lub kwartalna. Okres, po którym odsetki podlegają kapitalizacji nazywa się **podokresem kapitalizacji**. Stopa procentowa ustalona dla podokresu kapitalizacji nazywa się **stopa pod okresem**. **Częstotliwość kapitalizacji** oznacza ile razy odsetki są kapitalizowane w ciągu roku.

W dalszym ciągu zakładamy że częstotliwość kapitalizacji wynosi  $m$ . Wobec tego każdy rok jest podzielony na  $m$  równych podokresów kapitalizacji.

$m = 1$  – kapitalizacja roczna

$m = 2$  – kapitalizacja półroczna

$m = 4$  – kapitalizacja kwartalna



$m = 12$  – kapitalizacja miesięczna

$m = 360$  – kapitalizacja dobową(dzienna)

Jeżeli  $r_{okr}$  jest stopa podokresowa, to zgodnie z zasadą oprocentowania prostego odsetki od kapitału  $W$  po upływie  $k$  podokresów wyznacza się ze wzoru

$$I_k = Wkr_{okr} \quad (7)$$

Natomiast końcowa wartość kapitału  $W$  po upływie  $k$ :

$$W_k = W(1 + kr_{okr}) \quad (8)$$

Założmy że  $r_1$  i  $r_2$  są podokresowymi stopami procentowymi, zaś  $m_1$  i  $m_2$  są odpowiadającymi im częstotliwościami kapitalizacji. Stopy  $r_1$  i  $r_2$  nazywamy równoważnymi w czasie  $n$ , jeżeli przy każdej z nich odsetki od ustalonego kapitału po czasie  $n$  są równe.

Korzystając z (7) mamy:

$$m_1 * r_1 = m_2 * r_2 \quad (9)$$

Z (9) stopy pod okresowe są wtedy i tylko wtedy ich stosunek jest równy stosunkowi długości odpowiadających im podokresów. Takie stopy pod okresowe nazywają się **proporcjonalnymi**.

## 2.3 Przykład 3

Kwartalna stopa oprocentowania prostego wynosi 6

### 2.3.1 a) roczna

$$6 * 4 = 24\%$$

### 2.3.2 b) miesięczna

$$6/3 = 2\%$$

### 2.3.3 c) tygodniowa

$$6/12 = 0,5\%$$

### 3 Kapitalizacja złożona

W przypadku **kapitalizacji złożonej** odsetki oblicza się za każdy okres równy okresowi kapitalizacji i kapitalizuje się je na koniec tego okresu. Załóżmy, że kwota  $W$  została ulokowana na rachunku z roczną stopą procentową równą  $r$ . W przypadku kapitalizacji złożonej dochód przynosi początkowy kapitał wraz z odsetkami uzyskanymi na koniec poprzedniego okresu kapitalizacji. Przez  $I_n$  oznaczmy odsetki należne po czasie  $n$ , zaś przez  $W_n$  oznaczmy wartość kapitału po  $n$  latach. Wtedy:  $W_1 = w(1 + r)$

$$W_n = W(1 + r)^n \quad (10)$$

Liczba  $(1 + r)^n$  nazywa się **czynnikiem wartości przyszłej** w kapitalizacji złożonej.

Odsetki po okresie  $n$  lat wynoszą:

$$I_n = W((1 + r)^n - 1) \quad (11)$$

#### 3.1 Przykład 4

Przy założeniu kapitalizacji złożonej i rocznej stopie procentowej  $r = 5\%$ , wyznaczmy wartość kapitału 40 000 PLN i odsetki po upływie 4 lat.

$$W_n = 40000(1 + 0,05)^4 = 48620 \text{ PLN}$$

$$I_n = 48620 - 40000 = 8620 \text{ PLN}$$

$$I_n = 40000((1 + 0,05)^4 - 1) = 8620 \text{ PLN}$$

Podobnie jak w przypadku kapitalizacji prostej w kapitalizacji złożonej, możemy dopuścić zmienne stopy procentowe w kolejnych latach trwania inwestycji. Przyjmijmy, że w kolejnych latach stopy procentowe są równe  $r_1, r_2, \dots, r_n$  gdzie  $n$  jest licza lat trwania inwestycji. Wtedy wartość początkowego kapitału  $W$  po pierwszym roku wyniesie.  $W_1 = W(1 + r_1)$ , po drugim  $W_2 = W(1 + r_1)(1 + r_2)$

Wartość kapitału po  $n$  latach:

$$W_n = W \prod_{i=1}^n (1 + r_i) \quad (12)$$

$$I_n = W(\Pi_{i=1}^n(1 + r_i) - 1) \quad (13)$$

Przeciętna roczna stopa oprocentowania w przypadku kapitalizacji złożonej:

$$r = (\Pi_{i=1}^n(1 + r_i))^{\frac{1}{n}} - 1 \quad (14)$$

### 3.2 Przykład 5

Kapitał 20 000 PLN został ulokowany na okres 5 lat. Przy założeniu kapitalizacji złożonej i rocznej stopie procentowej równej w kolejnych latach, 5%, 6%, 5%, 4%, 7%, wyznaczmy wartości kapitału na koniec kolejnych lat oraz przeciętna roczna stopa oprocentowania tego kapitału w czasie 5 lat.

$$W_1 = 21000 PLN$$

$$W_5 = 20000(1 + 0.05)(1 + 0.06)(1 + 0.05)(1 + 0.04)(1 + 0.07) = 26009.47 PLN$$

$$r = ((1 + 0.05)(1 + 0.06)(1 + 0.05)(1 + 0.04)(1 + 0.07))^{\frac{1}{5}} - 1 = 5.40\%$$

Niech  $r_{okr}$  będzie stopa pod okresowa. Przy założeniu kapitalizacji złożonej, przyszła wartość kwoty  $W$  po  $l$  latach i  $n$  spośród  $m$  pod okresów  $l + 1$  roku, gdzie  $0 \leq n < m$  wynosi:

$$W_{(l,n)}^{(m)} = W(1 + r_{okr})^{l*m+n} \quad (15)$$

### 3.3 Przykład 6

Zakładając kapitalizację a) półroczną, b) kwartalną c) miesięczną i przyjmując stopę pod okresową  $r_{okr} = 2\%$  wyznaczyć przyszłą wartość kapitału 20 000 PLN po 2 latach i 6 miesiącach.

#### 3.3.1 a)

$$W_{(2,1)}^{(2)} = W(1 + 0,02)^{2*2+1} = 22081,62 PLN$$

#### 3.3.2 b)

$$W_{(2,2)}^{(4)} = W(1 + 0,02)^{10} = 24379,89 PLN$$

### 3.3.3 c)

$$W_{(2,6)}^{(12)} = W(1 + 0,02)^{30} = 36227,23 PLN$$

Roczna stopa procentowa  $r$  proporcjonalna do danej stopy pod okresowej  $r_{okr}$  nazywa się **stopa nominalna**. (wylczyć roczną stopę, np. jak miesięczna jest 1% to roczna jest 12% itp.)

$$W_{(l,n)}^{(m)} = W\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{l*m+n} \quad (16)$$

Przyjmując  $n = 0$  wtedy:

$$W_l^{(m)} = W\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{l*m} \quad (17)$$

Liczbę:

$$R_m = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m \quad (18)$$

Nazywa się rocznym **czynnikiem oprocentowania**.

## 3.4 Przykład 7

Kapitał w wysokości 40 000 PLN został ulokowany na rachunku z nominalną stopą procentową równą 12%. Zakładając kapitalizację, roczną, półroczną, kwartalną, miesięczną oraz dzienną, wyznaczyć przyszłą wartość kapitału po 4 latach.

Ze wzory (17)

$$W(1)4 = 62940,77 PLN$$

$$W(2)4 = 63753,92 PLN$$

$$W(4)4 = 64188,26 PLN$$

$$W(12)4 = 64489,04 PLN$$

$$W(360)4 = 64606,80 PLN$$

### 3.5 Przykład 8

Wyznamy wartość kapitału 40 000 PLN po 5 latach i 9 miesiącach przy założeniu że roczna stopa procentowa wynosi 6%, a kapitalizacji odsetek jest a) kwartalna, b) miesięczna.

Korzystając(16)

#### 3.5.1 a)

$$W_{(5,3)}^4 =$$

#### 3.5.2 b)

$$W_{(5,9)}^{12} =$$

### 3.6 Przykład 9

Przy założeniu miesięcznej kapitalizacji odsetek i rocznych stopach procentowych równych 6% w pierwszym i drugim roku. 9% w trzecim i 12% w czwartym roku wyznaczyć wartość kapitału 100 000 PLN po a) 3 latach i 7 miesiącach b) 4 latach.

X = kapitał po 3 latach i 7 m

Y = po 4 latach

Wzór (16)

$$X = 100000 * (1 + \frac{0.06}{12})^{24} * (1 + \frac{0.09}{12})^{12} * (1 + \frac{0.12}{12})^7 = 132183 PLN$$

$$Y = 100000 * (1 + \frac{0.06}{12})^{24} * (1 + \frac{0.09}{12})^{12} * (1 + \frac{0.12}{12})^{12} = 138925,70 PLN$$

### 3.7 Przykład 10

Przy miesięcznej kapitalizacji odsetek i nominalnej stopie procentowej równej 3% po 1 roku i 7 miesiącach uzyskano z lokaty 100 PLN odsetek. Jaka była kwota lokaty?

Odsetki uzyskane z inwestycji stanowią różnicę między wartością kapitału po 1 roku i 7 miesiącach a jego wartością początkową.  $W = ?$

$$W_{(1,7)}^{12} - W = 100 \Rightarrow W = 2058,29 PLN$$

## 4 Równoważność stóp pod okresowych przy kapitalizacji złożonej

Założmy że  $r_1$  i  $r_2$  są pod okresowymi stopami procentowymi, zaś  $m_1$  i  $m_2$  są odpowiadającymi im częstotliwościami kapitalizacji. Stopy  $r_1$  i  $r_2$  **nazywamy równoważnymi w czasie  $l$  lat**, gdzie  $l \in \mathbb{N}$ , jeżeli przy każdej z nich odsetki od ustalonego kapitału po  $l$  latach są równe.

Zauważmy, że równość odsetek po  $l$  latach oznacza równość wartości kapitału po tym czasie. Zatem, uwzględniając wzór (15) otrzymujemy, że podokresowe stopy procentowe  $r_1$  i  $r_2$  są równoważne w czasie  $l$  lat, wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$(1 + r_1)^{m_1} = (1 + r_2)^{m_2} \quad (19)$$

Korzystając ze wzoru (17) warunek (19) można przedstawić w następującej równoważnej postaci:

$$\left(1 + \frac{r_1}{m_1}\right)^{m_1} = \left(1 + \frac{r_2}{m_2}\right)^{m_2} \quad (20)$$

gdzie  $r_1$  i  $r_2$  są nominalnymi stopami procentowymi, odpowiednio  $r_1$  i  $r_2$ .

### 4.1 Przykład 11

Wyznamy miesięczną stopę procentową równoważną kwartalnej stopie procentowej  $r_{okr}^{(1)} = 4\%$ .

Ponieważ  $r_1 = \%$ ,  $m_1 = 4$  i  $m_2 = 12$  na podstawie (1) mamy:

$$(1 + 0,04)^4 = (1 + r_2)^{12}.$$

$$\text{Stąd } r_2 = (1 + 0,04)^{\frac{4}{12}} - 1 = 1,3159\%$$

### 4.2 Przykład 12

Wyznamy nominalną stopę procentową, która przy kapitalizacji kwartalnej jest równoważna nominalnej stopie  $r_1 = 5\%$  przy kapitalizacji półrocznej.

Korzystając ze wzoru (20) z  $r_1 = 5\%$ ,  $m_1 = 2$  i  $m_2 = 4$  dostajemy:

$$\left(1 + \frac{0,05}{2}\right)^2 = \left(1 + \frac{r_2}{4}\right)^4 \Rightarrow r_2 = 4,9691\%$$

## 5 Efektywna stopa procentowa

**Efektywna stopa procentowa** nazywa się roczna stopa procentowa równoważna danej podokresowej stopie procentowej. Wobec tego, jeśli  $r_{okr}$  jest podokresowa stopa procentowa, zaś  $m$  jest częstotliwością kapitalizacji, to korzystając z (19) mamy:

$$r_{ef}^{(m)} = (1 + r_{okr})^m - 1 \quad (21)$$

Z kolei na podstawie (2), efektywna stopa procentowa odpowiadająca nominalnej stopie procentowej  $r$  przy  $m$ -krotnej kapitalizacji w ciągu roku, wyznacza się z równania:

$$r_{ef}^{(m)} = (1 + \frac{r}{m})^m - 1 \quad (22)$$

Efektywna stopa procentowa pozwala na zmianę okresu stopy procentowej bez zmiany efektywności kapitalizacji.

### 5.1 Przykład 13

Wyznamy efektywną stopę procentową odpowiadającą nominalnej stopie procentowej równej 6% przy kapitalizacji: półrocznej, kwartalnej, miesięcznej, dziennej.

Korzystając ze wzoru (22), otrzymujemy

$$r_{ef}^{(m)} = (1 + \frac{0,06}{2})^2 - 1 = (1,03)^2 - 1 = 6,09\%$$

$$r_{ef}^{(m)} = (1 + \frac{0,06}{4})^4 - 1 = (1,015)^4 - 1 = 6,14\%$$

$$r_{ef}^{(m)} = (1 + \frac{0,06}{12})^{12} - 1 = (1,005)^{12} - 1 = 6,17\%$$

$$r_{ef}^{(m)} = (1 + \frac{0,06}{360})^{360} - 1 = (1,00016)^{360} - 1 = 6,18\%$$

Do wyznaczania efektywnej stopy procentowej stopy procentowej można zastosować formułę **EFEKTYWNA** wbudowaną w pakiecie MS Excel. Jej argumentami są stopa nominalna i liczba okresów.

#### 5.1.1 a)

$$EFEKTYWNA(6\%, 2) = 6.0900\%$$

## 5.2 Przykład 14

Wyznamy nominalną stopę procentową, której przy: a) kwartalnej, b) miesięcznej kapitalizacji odsetek odpowiada efektywna stopa procentowa równa 5%.

Wyznaczając  $r$  ze wzoru (22), dostajemy:

$$r = m(\sqrt{1 + r_{ef}^{(m)}} - 1)$$

### 5.2.1 a)

$$r = 4,9089\%$$

### 5.2.2 b)

$$r = 4,8889\%$$

Do wyznaczania nominalnej stopy procentowej można zastosować formułę **NOMINALNA** z Excela. Jej argumentami są stopa efektywna i liczba okresów.



## 6 Kapitalizacja ciągła

Jeżeli przy  $m$ -krotnej kapitalizacji w ciągu roku powiększa się liczba okresów, to w granicy przy  $m \rightarrow \infty$  mamy do czynienia z ciągłą kapitalizacją odsetek. W takim przypadku na podstawie wzoru (17) wartość kapitału  $W$  po  $l$  latach można wyznaczyć w następujący sposób.

$$W_l^{(\infty)} = W e^{l*r} \quad (23)$$

Można pokazać, że wzór (23) jest prawdziwy dla  $l > 0$

### 6.1 Przykład 15

Przy założeniu ciągłej kapitalizacji odsetek i rocznej stopie procentowej  $r = 5\%$  wyznaczmy wartość kwoty 10 000 PLN po: a) 8 latach, b) 4 latach i 7 miesiącach.

#### 6.1.1 a)

ze wzoru (23),  $W = 10000, l = 8, r = 5\%$

$$W = 10000 * e^{8*0,05} = 10000 * e^{0,4} = 14918,25$$

#### 6.1.2 b)

ze wzoru (23),  $W = 10000, l = 4\frac{7}{12}, r = 5\%$

$$W = 10000 * e^{4\frac{7}{12}*0,05} = 10000 * e^{0,2292} = 12575,94$$

## 7 Nateżenie procentowe

W przypadku ciągłej kapitalizacji odsetek efektywna stopa procentowa wyznacza się z równania:

$$l + r_{ef} = e^r \quad (24)$$

gdzie  $r$  jest stopa nominalna. Zatem:

$$r_{ef} = e^r - 1 \quad (25)$$

Jeżeli natomiast dana jest efektywna stopa procentowa  $r_{ef}$  to z (24) otrzymujemy stopę nominalną:

$$r = \ln(1 + r_{ef}) \quad (26)$$

Nazywa się nateżeniem oprocentowania związanym z efektywną stopą procentową  $r_{ef}$ .

### 7.1 Przykład 16

Wyznamy nateżenie oprocentowania związane z efektywną stopą procentową równą 6%.

Stosując (26):

$$r = \ln(1 + 0,06) = \ln(1,06) = 5,83\%$$

## 8 Dyskonto proste i składane

Teraz zajmiemy się zagadnieniem ustalania początkowej wartości kapitału na podstawie jego wartości na końcu pewnego okresu. Proces ten nazywa się **dyskontowaniem**.

Dyskonto proste, które jest bezpośrednio związane z prostą kapitalizacją odsetek. W przypadku kapitalizacji prostej na podstawie (2), wartość kapitału początkowego  $W$  po  $n$  latach.

W przypadku dyskonta prostego, obecna wartość kapitału  $W$ , która mamy otrzymać (bądź zapłacić) za  $n$  lat wyznacza się na podstawie równości:

$$PV(W) = \frac{W}{1 + nr} \quad (27)$$

**Dyskontem** nazywa się różnicę między wartością kapitału na końcu pewnego ustalonego okresu, a jego wartością na początku tego okresu. Oznaczając dyskonto przed  $D$  i uwzględniając (27) otrzymujemy:

$$D = \frac{nrW}{1 + nr} \quad (28)$$

### 8.1 Przykład 17

Zakładając dyskonto proste i przyjmując stopę procentową  $r = 4\%$  wyznaczyć wartość oraz dyskonto kwoty 50 000 PLN która mamy otrzymać za 8 lat.

Korzystając z (27, 28)  $W = 50000, r = 0,04, n = 8$

$$PV = \frac{50000}{1 + 8 \cdot 0,04} = 37878,79$$

$$D = 50000 - 37878,79 = 12121,21$$

W przypadku **dyskonta składanego**, przy rocznej kapitalizacji odsetek wartość kapitału początkowego  $W$  po  $n$  latach, wyznaczona na podstawie wzoru (10).

Zatem obecna wartość kapitału  $W$  która mamy otrzymać (bądź zapłacić) za  $n$  lat wyznacza się z równości:

$$PV(W) = \frac{W}{(1 + r)^n} \quad (29)$$

Wielkość  $\frac{1}{(1+r)}$  nazywa się **rocznym czynnikiem dyskontującym**. Dyskonto wyraża się w tym przypadku wzorem:

$$PD = W(1 - \frac{1}{(1+r)^n}) \quad (30)$$

## 8.2 Przykład 18

Zakładając dyskonto składane i przyjmując stopę procentową  $r = 4\%$  wyznaczyć wartość oraz dyskonto kwoty 50 000 PLN która mamy otrzymać za 8 lat.

Korzystając z (29, 30)  $W = 50000, r = 0,04, n = 8$

$$PV = \frac{50000}{(1+0,04)^8} = 36534,51$$

$$D = 50000 - 36534,51 = 13465,49$$

## 9 Dyskonto przy wielokrotnej kapitalizacji w ciągu roku

Założmy że kapitalizacja odsetek odbywa się  $m$ -krotnie w ciągu roku (w równoległych odstępach czasu). Wówczas korzystając ze wzoru (16) obecna wartość  $PV(W)$  kwoty  $W$ , która mamy otrzymać w przyszłości po  $l$  latach i  $n$  spośród  $m$  podokresów  $l + 1$  roku ( $0 \leq n < m$ ) wyznaczamy wzór:

$$PV(W) = \frac{W}{(1 + \frac{r}{m})^{lm+n}} \quad (31)$$

Wzór na dyskonto a postać:

$$D = W(1 - \frac{1}{(1 + \frac{r}{m})^{lm+n}}) \quad (32)$$

W szczególnym przypadku gdy  $n = 0$  możemy wyznaczyć obecna wartość kwoty  $W$ , która mamy otrzymać po  $l$  latach:

$$PV(W) = \frac{W}{(1 + \frac{r}{m})^{lm}} \quad (33)$$

Wzór na dyskonto ma w tym przypadku postać:

$$D = W(1 - \frac{1}{(1 + \frac{r}{m})^{lm}}) \quad (34)$$

### 9.1 Przykład 19

Przyjmując nominalną stopę procentową  $r = 6\%$  i zakładając kapitalizację a) kwartalną, b) miesięczną, wyznaczyć obecna wartość i dyskonto kwoty 50 000 PLN, która mamy otrzymać za 2 lata i 3 miesiące.

#### 9.1.1 a)

ze wzoru (31)

$$PV = \frac{50000}{(1 + \frac{0.06}{4})^9} = 43729,61 \text{ PLN}$$

$$D = 50000 - 43729,61 = 6270,39 \text{ PLN}$$

### 9.1.2 b)

ze wzoru (31)

$$PV = \frac{50000}{(1 + \frac{0,06}{12})^{27}} = 43700,49 PLN$$

$$D = 50000 - 43700,49 = 6299,51 PLN$$

## 9.2 Przykład 20

Przyjmując nominalną stopę procentową równą  $r = 6\%$  i zakładając kapitalizację a) półroczną, b) miesięczną, c) dzienną, wyznaczyć obecną wartość kwoty 100 000 PLN, którą mamy otrzymać za 3 lata. W każdym przypadku wyznaczyć wartość dyskonta

### 9.2.1 a)

używamy wzoru (33)

$$PV = \frac{100000}{(1 + \frac{0,06}{2})^6} = 83748,43 PLN$$

$$D = 100000 - 83748,43 = 16251,57 PLN$$

### 9.2.2 b)

$$PV = \frac{100000}{(1 + \frac{0,06}{12})^{36}} = 83564,49 PLN$$

$$D = 100000 - 83564,49 = 16435,51 PLN$$

### 9.2.3 c)

$$PV = \frac{100000}{(1 + \frac{0,06}{360})^{1080}} = 83528,27 PLN$$

$$D = 100000 - 83528,27 = 16471,73 PLN$$

## 9.3 Przykład 21

Przy założeniu miesięcznej kapitalizacji odsetek obecną wartość kwota 40 000 PLN, którą mamy otrzymać za 2 lata wynosi 36 500 PLN. Wyznaczyć wysokość nominalnej stopy procentowej.

Przez  $r$  oznaczmy szukaną nominalną stopę procentową.

Korzystając z (33) otrzymujemy równanie na  $r$

$$36500 = \frac{40000}{(1 + \frac{r}{12})^{24}}$$

$$(1 + \frac{r}{12})^{24} = \frac{40000}{36500}$$

$$r = 12(1,0959^{\frac{1}{24}} - 1) = 4,59\%$$

## 10 Dyskonto przy kapitalizacji ciągłej

W przypadku ciągłej kapitalizacji odsetek, obecna wartość kwoty  $W$ , która mamy otrzymać za  $n$  lat, wyznacza się z równania  $W = PV(W) \cdot e^{rn}$ , gdzie  $r$  jest roczna stopa procentowa. Stąd:

$$PV(W) = W \cdot e^{-r \cdot n} \quad (35)$$

Wzór na dyskonto ma postać

$$D = W(1 - e^{-r \cdot n}) \quad (36)$$

Wzory (35) i (36) pozostają prawdziwe dla dowolnego  $n > 0$ .

### 10.1 Przykład 22

Zakładając ciągłą kapitalizację odsetek i otrzymując roczną stopę procentową równą  $r = 5\%$ , wyznaczyć obecną wartość i dyskonto kwoty 50 000 PLN, która mamy otrzymać za 3 lata i 5 miesięcy.

Wzór (35)

$$PV(W) = 50000 \cdot e^{-3\frac{5}{12} \cdot 0,05} = 42148,10 \text{ PLN}$$

$$D = 50000 - 42148,10 = 7851,90 \text{ PLN}$$

### 10.2 Przykład 23

Przy założeniu ciągłej kapitalizacji odsetek, obecna wartość kwoty 100 000 PLN, która mamy otrzymać za 8 lat wynosi 80 000 PLN. Wyznaczyć efektywną stopę procentową.

Przez  $r$  oznaczamy szukaną roczną stopę procentową

Ze wzoru (35)

$$80000 = 100000 \cdot e^{-8r}$$

$$\frac{80000}{100000} = e^{-8r}$$

$$\ln e^{-8r} = \ln 0,8$$

$$-8r = \ln 0,8$$



$$r = -\frac{1}{8} \ln 0,8$$

$$r = 0,0279$$

$$r = 2,79\%$$

Efektywna stopa wynosi ze wzoru (25):

$$r_{ef} = e^r - 1 = e^{0,0279} - 1 = 2,93\%$$

## 11 Dyskonto handlowe

Nasze dotychczasowe rozważania dotyczyły dyskonta rzeczywistego, tzn. dyskonta opartego na stopie procentowej. Teraz omówimy dyskonto handlowe. Ograniczymy się przy tym jedynie do dyskonta handlowego prostego, gdyż dyskonto handlowe składane na ogół nie jest wykorzystywane w praktyce.

**Dyskontem handlowym** nazywa się opłatę za pożyczkę obliczoną na podstawie kwoty, którą dłużnik zwróci po ustalonym czasie, zapłaconą w chwili otrzymania pożyczki.

Dyskonto handlowe jest również nazywane odsetkami płatnymi z góry, co trafnie oddaje istotę dyskonta, które należy zapłacić w momencie otrzymania pożyczki, a nie przy jej zwrocie.

Zasada dyskonta prostego mówi, że dyskonto jest obliczane od kwoty, którą dłużnik zwróci po ustalonym czasie, jest proporcjonalne do tego czasu i jest odejmowane od tej kwoty w momencie udzielania pożyczki.

Jeżeli przez  $D$  oznaczymy dyskonto, przez  $P$  początkowa wartość pożyczki (tzn. wartość, która fizycznie dostajemy), a przez  $F$  nominalna wartość pożyczki (to co mamy oddać, na kartce), to otrzymujemy równość:

$$D = F - P \tag{37}$$

W dalszym ciągu będziemy zakładać  $F > P > 0$

## 12 Stopa dyskontowa

W przypadku dyskonta handlowego prostego **stopa dykonstowa** nazywa się liczbę określona:

$$d = \frac{D - P}{nF} \quad (38)$$

gdzie  $n$  oznacza liczbę lat, po której ma nastąpić zwrot pożyczki.

### 12.1 Przykład 24

Wyznaczyć stopę dyskontową pożyczki w kwocie 50 000 PLN udzielonej na 5 lat, jeżeli jej wartość nominalna wynosi 70 000 PLN.

Ze wzoru (38)

$$d = \frac{70000 - 50000}{5 \cdot 70000} = 5,71\%$$

### 12.2 Przykład 25

Obliczyć nominalną wartość 4-letniej pożyczki udzielonej w kwocie 100 000 PLN przy stopie dyskontowej równej 5%

Ze wzoru (38)

$$d = \frac{D - P}{nF}$$

$$dnF = F - P$$

$$P = F - dnF$$

$$P = F(1 - dn)$$

$$F = \frac{P}{1 - dn}$$

$$F = \frac{100000}{1 - 4 \cdot 0,05} = 125000 \text{ PLN}$$

### 12.3 Przykład 26

Przy stopie dyskontowej równej  $r\%$  wyznaczyć początkową wartość dziesięcioletniej pożyczki o nominalnej wartości 200 000 PLN.

Ze wzoru (38)

$$d = \frac{D-P}{nF}$$

$$dnF = F - P$$

$$P = F - dnF$$

$$P = F(1 - dn)$$

$$P = 200000 - 0,05 \cdot 10 \cdot 200000 = 120000 \text{ PLN}$$

## 12.4 Przykład 27

Pożyczka w wysokości 180 000 PLN udzielona na okres 5 lat ma nominalną wartość 240 000 PLN, Obliczyć stopę dyskontową i zbadać jaki wpływ na nominalną wartość pożyczki miałoby podniesienie stopy dyskontowej o 1 pkt procentowy.

Ze wzory (38)

$$d = \frac{240000 - 180000}{5 \cdot 240000} = 5\%$$

$$F = \frac{P}{1-dn}$$

$$F = \frac{180000}{1-0,06 \cdot 5} = 257142,90 \text{ PLN}$$

Wzrost wartości stopy dyskontowej o 1 pkt procentowy spowodowałby wzrost nominalnej wartości pożyczki z 240 000 do 257 142,90.

## 13 Zasada równoważności stopy procentowej i stopy dyskontowej

Zarówno odsetki jak i dyskonto stanowią opłatę za udzieloną pożyczkę. Czyli za możliwość dysponowania określonym kapitałem przez ustalony czas. Ponieważ wielkość te wyznacza się z różnych modeli naturalne wydaje się pytanie, jaki związek między nimi gwarantuje równość opłat za pożyczkę.

Roczna stopa procentowa  $r$  i stopa dyskontowa  $d$  nazywają się **równoważnymi w czasie  $n$**  jeżeli dla dowolnej pożyczki odsetki i dyskonto handlowe wyznaczone przy tych stopach są równe. Tak sformułowana zasada nosi nazwę **zasady równoważności stopy procentowej i stopy dyskontowej**.

Założmy, że wartość pożyczki wynosi  $P$ . Przy założeniu kapitalizacji prostej i rocznej stopie procentowej równej  $r$ , na podstawie wzoru (2) wartość kwoty  $P$  po  $n$  latach wynosi:  $P_n = P(1 + nr)$ . Zatem odsetki są równe  $P_n - P = nrP$ .

Z drugiej strony ze wzoru (37) i (38) mamy  $D = F - P = ndF$ . Na podstawie zasady równoważności stopy procentowej i stopy dyskontowej otrzymujemy więc równość  $ndF = nrP$ . Stąd wynika, że  $dF = rP$ . ze wzoru (38) dostajemy  $F = \frac{P}{1-dn}$ . Na końcu otrzymujemy:

$$r = \frac{d}{1 - dn} \quad (39)$$

### 13.1 Przykład 28

Wyznamy stopę procentową równoważną w czasie 6 lat stopie dyskontowej 8%.

Ze wzoru (39) otrzymujemy  $r = \frac{0,08}{1-0,08 \cdot 6} = 15,38\%$

### 13.2 Przykład 29

Wyznamy stopę dyskontową równoważną w czasie 8 lat stopie procentowej 4%.

Ze wzoru (39) otrzymujemy  $d = \frac{r}{1+rn}$ , zatem  $d = \frac{0,04}{1+8 \cdot 0,04} = 3,03\%$

### 13.3 Przykład 30

Wyznamy czas, w którym stopa dyskontowa równa 5% jest równoważna stopie procentowej równie 8%.

Ze wzoru (39) otrzymujemy  $n = \frac{1}{d} - \frac{1}{r}$ , zatem  $n = \frac{1}{0,05} - \frac{1}{0,08} = 7,5$ . Podane stopy są więc równoważne w czasie 7 lat i 6 miesięcy.

## 14 Weksle

Dyskonto handlowe znajduje zastosowanie w m.in. w rachunku weksli. **Weksel** to zobowiązanie do zapłaty określonej kwoty w ustalonym terminie. Ma on formę dokumentu sprecyzowana odpowiednimi przepisami prawa. Kwota do zapłaty, której zobowiązuje weksel, nazywa się jego **wartością nominalną**. Termin, w którym weksel ma być spłacony nazywa się **terminem wykupu** weksla. Kwota nominalna pomniejszona o dyskonto nazywa się **wartością aktualną** weksla.

### 14.1 Przykład 31

Zobowiązanie do zapłaty za dostarczony towar o wartości 390 000 PLN ma formę weksla podpisanego w dniu 5 maja na sumę 400 000 PLN z terminem wykupu 5 sierpnia tego samego roku. Mamy zatem  $P = 390000$ ,  $F = 400000$ ,  $n = \frac{90}{360}$ . Stad  $D = F - P = 10000$  (dyskonto), czyli na podstawie (39) stopa dyskontowa wynosi,  $d = \frac{10000}{\frac{30}{360} \cdot 400000} = 0,1 = 10\%$

### 14.2 Przykład 32

Załóżmy że wytwórca eksla z przykładu 31 ma możliwość otrzymania w dniu 5 maja trzymiesięcznej pożyczki w kwocie 390 000 PLN dzięki której mógłby zapłacić za towar i nie musiałby podpisywać weksla. Możemy wyznaczyć wysokość oprocentowania pożyczki przy której jej zaciągnięcie byłoby korzystniejsze od podpisywanie weksla. Zatem  $d = 10\%$ ,  $n = \frac{90}{360}$ , więc (39)  $r = \frac{0,1}{1 - 0,1 \cdot \frac{90}{360}} = 10,26$

## 15 Zasada równoważności kapitałów

Wartość kapitału zmienia się w czasie, we wszystkich rodzajach inwestycji podstawowe mają dwa pojęcia

- przyszła wartość kapitału - FV;
- obecna wartość kapitału - PV;

W poprzednich rozdziałach rozważaliśmy, w jaki sposób wyznaczyć obecną wartość kapitału, który mamy otrzymać lub zapłacić w przyszłości oraz przyszłą wartość kapitału, który posiadamy obecnie. Teraz rozszerzymy tę analizę na bardziej ogólne przypadki. Będziemy zakładać **złożona kapitalizacja odsetek**.

Aktualizacja wartości kapitału dotyczy kapitału, którego wartość jest znana dla ustalonego momentu i polega na obliczeniu jego wartości na inny moment (późniejszy lub wcześniejszy). Aby zilustrować to pojęcie załóżmy, że wartość kapitału w chwili  $n_0$  wynosi  $K(n_0)$ , gdzie  $n_0$  jest liczbą całkowitą. Wtedy korzystając ze wzorów (10) i (29), możemy wyznaczyć wartość tego kapitału w dowolnym momencie  $n$ . Mianowicie mamy

$$K(n) = K(n_0) \cdot (1 + r)^{n - n_0} \quad (40)$$

Wielkość  $K(n)$  nazywa się **zaktualizowaną wartością kapitału  $K(n_0)$  na moment  $n$**

Zasada równoważności kapitałów na dany moment: **kapitały  $K_1$  i  $K_2$  są równoważne na moment  $n \in \mathbb{Z}$ , jeżeli ich wartości zaktualizowane na moment  $n$  są równe**.

Rozważmy model opisany wzorem (40). Załóżmy że znane są wartości kapitałów  $K_1$  i  $K_2$  w dwóch ustalonych momentach  $n_1$  i  $n_2 \in \mathbb{Z}$ , tzn. są znane wielkości  $K_1(n_1)$  i  $K_2(n_2)$ . Wtedy zgodnie ze wzorem (40) dla dowolnie ustalonego momentu  $n \in \mathbb{Z}$  zaktualizowanie wartości kapitałów  $K_1$  i  $K_2$  na ten moment wynoszą odpowiednio:

$$K_1(n) = K_1(n_1)(1 + r)^{n - n_1}$$

oraz

$$K_2(n) = K_2(n_2)(1 + r)^{n - n_2}$$



Zatem kapitały  $K_1$  i  $K_2$  są równoważne na moment  $n$  wtedy i tylko wtedy gdy zachodzi równość:

$$K_1(n_1)(1+r)^{n-n_1} = K_2(n) = K_2(n_2)(1+r)^{n-n_2}$$

$$K_1(n_1)(1+r)^{-n_1} = K_2(n_2)(1+r)^{-n_2} \quad (41)$$

Obserwacja prowadzi nas do następującego wniosku: **jeżeli dwa kapitały są równoważne na pewien moment, to są one równoważne na każdy moment.**

Uwzględniając ten fakt, możemy sformułować zasadę równoważności kapitałów w następujący sposób: **dwa kapitały są równoważne, jeżeli ich zaktualizowane wartości na jakikolwiek moment są równe**

### 15.1 Przykład 33

Zbadamy czy przy rocznej stopie procentowej równej 5% kwota 10 000 PLN zainwestowana 2 lata temu jest równoważna kwocie 11 800 PLN, która będzie zainwestowana za rok.

Wystarczy sprawdzić czy spełniony jest warunek (41)

Ponieważ  $n_1 = -2, n_2 = 1, r = 5\%$  zatem:

$$L = K_1(n_1)(1+r)^{-n_1} = 10000(1+0,05)^2 = 11025$$

$$P = K_2(n_2)(1+r)^{-n_2} = 11800(1+0,05)^{-1} = 11238,10$$

Zatem kapitały nie są równoważne.

### 15.2 Przykład 34

Przyjmując dane z poprzedniego przykładu. Wyznaczyć wartość kapitału, który zainwestowany za rok jest równoważny temu, który został zainwestowany przed dwoma laty. Korzystając z (41) otrzymujemy równość:  $11025 - K_2(n_2)(1+r)^{-n_2}$  stąd  $K_2(1) = 11576,25$

### 15.3 Przykład 35

W jakim monecie należy otrzymać kapisał 243 101,25 PLN, aby przy rocznej stopie procentowej  $r = 5\%$  był on równoważny kapitałowi 200 000 PLN uzyskanemu 3 lata temu.

$$n_1 = -3, K_1(-3) = 200000, K_2(n_2) = 243101,25, r = 5\%$$

Zatem warunek (41) prowadzi do równania:

$$200000(1 + 0,05)^3 = 243101,25(1 + 0,05)^{-n_2}$$

$$(1,05)^{n_2+3} = \frac{243101,25}{200000}$$

$$(n_2 + 3)\ln(1,05) = \ln\left(\frac{243101,25}{200000}\right)$$

$$n_2 + 3 = \frac{\ln(1,05)}{\ln\left(\frac{243101,25}{200000}\right)}$$

$$n_2 + 3 = 4 \Rightarrow n_2 = 1$$

Wykazaliśmy więc, że kapitały będą równoważne jeżeli pierwszy otrzymamy za rok.

## 16 Zasada równoważności przy kapitalizacji ciągłej

Równoważność kapitałów można również badać przy założeniu kapitalizacji ciągłej. Wówczas odpowiednikiem warunku (41) jest następujący warunek:

$$K_1(n_1) \cdot e^{-r \cdot n_1} = K_2(n_2) \cdot e^{-r \cdot n_2} \quad (42)$$

### 16.1 Przykład 36

Przy założeniu kapitalizacji ciągłej i rocznej stopie procentowej  $r = 5\%$  wyznaczmy taką wartość kapitału, który mamy otrzymać za 4 lata aby był on równoważny kapitałowi o wartości 20 000 PLN, który mamy otrzymać za 2 lata.

$$n_1 = 4, n_2 = 2, K_2(n_2) = 20000, r = 5\%$$

ze wzoru (42)

$$K_1(n_1) \cdot e^{-0,05 \cdot 4} = 20000 \cdot e^{-0,05 \cdot 2}$$

$$K_1(n_1) = 20000 \cdot e^{0,1} = 22103,42$$

## 17 Stopa procentowa a równowaga kapitału

Odpowiedź na pytanie o równowagę dwóch kapitałów zależy od wartości rocznej stopy procentowej. Jeżeli przy ustalonej stopie procentowej dwa kapitały są równoważne, to po jej zmianie przestają być równoważne. Obserwacja taka wynika bezpośrednio z warunku (41)

### 17.1 Przykład 37

W przykładzie 34 stwierdziliśmy, że przy rocznej stopie procentowej równej 5%, kapitał o wartości 10 000 PLN zainwestowany przed dwoma laty jest równoważny kapitałowi o wartości 11 576,25 PLN, który ma być zainwestowany za rok. Przypuśćmy, że wysokość rocznej stopy procentowej zmieniła się i wynosi  $r' = 4\%$ . Wówczas

$$K_1(-2)(1+r')^{-(-2)} = 10000 \cdot (1,04)^2 = 10816 \text{ PLN}$$

$$K_1(1)(1+r')^{-1} = 11576,25 \cdot (1,04)^{-1} = 11131,01 \text{ PLN}$$

Zatem, po zmianie wysokości rocznej stopy procentowej, warunek (41) nie jest spełniony, wobec czego kapitały nie są równoważne.

Zauważmy, że mając dane wartości kapitałów w dwóch różnych momentach i zakładając kapitalizację złożoną, na podstawie warunku równowagi kapitałów (41) możemy wyznaczyć wysokość rocznej stopy procentowej, przy której są równoważne. Istotnie, z (41) wynika, że

$$(1+r)^{n_2-n_1} = \frac{K_2(n_2)}{K_1(n_1)}$$

Stąd

$$r = \left( \frac{K_2(n_2)}{K_1(n_1)} \right)^{\frac{1}{n_2-n_1}} - 1 \quad (43)$$

Podobnie, zakładając kapitalizację ciągłą, na podstawie warunku równowagi kapitałów (42), dostajemy

$$r = \frac{1}{n_2 - n_1} \ln \left( \frac{K_2(n_2)}{K_1(n_1)} \right) \quad (44)$$

## 17.2 Przykład 38 (kolos)

Wyznamy wysokość rocznej stopy procentowej przy której kapitał 10 000 PLN zainwestowany przed 3 laty jest równowazny kapitałowi 16 000 PLN, który będzie zainwestowany za dwa lata.

Z warunku (41) zachodzi równość

$$10000(1+r)^3 = 16000(1+r)^{-2}$$

$$(1+r)^5 = 1,6$$

$$r = (1,6)^{\frac{1}{5}} - 1 = 8,15\%$$

Wysokość rocznej stopy procentowej, przy której rozważane kapitały są równoważne, wynosi 8,15 %.

## 17.3 Przykład 39

Zakładając kapitalizację ciągłą wyznaczmy wysokość rocznej stopy procentowej, przy której kapitał 15 000 PLN zainwestowany przed rokiem jest równowazny kapitałowi 19 800 PLN, który będzie zainwestowany za 5 lat.

$$n_1 = -1, n_2 = 5, K_1(n_1) = 15000, K_2(n_2) = 19800$$

Ze wzoru (44)

$$r = \frac{1}{5-(-1)} \ln\left(\frac{19800}{15000}\right) = \frac{1}{6} \ln\left(\frac{198}{150}\right) = 4,63\%$$

**Uwaga** W przypadku kapitalizacji prostej dwa kapitały równoważne w jednym momencie mogą nie być równoważne w innym. Wobec tego w tym przypadku nie istnieje pojęcie kapitałów równoważnych.

## 18 Równoważność ciągów kapitałów

Dotychczas rozważaliśmy szereg zagadnień związanych z równoważnością kapitałów. Analizę tę przeniesiemy teraz na ciągi kapitałów. Jak poprzednio, stale zakładamy złożoną kapitalizację odsetek. roczną stopę procentową oznaczamy przez  $r$ , zaś za jednostkę czasu przyjmujemy 1 rok.

Najpierw zajmiemy się problemem równoważności kapitału i ciągu kapitałów. Rozważmy skończony ciąg kapitałów  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Każda z liczb  $x_i$ , gdzie  $i \in 0, 1, 2, \dots, n$ , może np. wyrażać nakład poniesiony przez inwestora w  $i$ -tym roku lub uzyskany przez niego w  $i$ -tym roku dochód. Nówimy, że dany kapitał jest **równoważny na moment**  $k \in \mathbb{Z}$  ciągowi kapitałów  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , jeżeli jego wartość zaktualizowana na moment  $k$  jest równa sumie zaktualizowanych na ten moment wartości wyrazów ciągu.

Ustalmy  $k \in \mathbb{Z}$  i załóżmy, że wartość kapitału w chwili  $n_0 \in \mathbb{Z}$  wynosi  $K_{n_0}$ . Przez  $K_{n_0}(k)$  oznaczmy wartość tego kapitału zaktualizowaną na moment  $k$ . Niech ponadto  $x_i(k)$  dla  $i \in 0, 1, 2, \dots, n$  oznacza wartość kapitału  $x_i$  zaktualizowaną na moment  $k$ . Wówczas rozważany kapitał jest równoważny ciągowi kapitałów  $x_0, x_1, \dots, x_n$  na moment  $k \in \mathbb{Z}$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$K_{n_0}(k) = \sum_{i=0}^n x_i(k) \quad (45)$$

Na podstawie wzoru (40) warunek (45) można zapisać w następującej równoważnej postaci

$$K_{n_0} \cdot (1+r)^{-n_0} = \sum_{i=0}^n x_i \cdot (1+r)^{-i} \quad (46)$$

Zatem kapitał  $K_{n_0}$  jest równoważny na moment  $k \in \mathbb{Z}$  ciągowi kapitałów  $x_0, x_1, \dots, x_n$  wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek (46).

**Uwaga** Zauważmy, że jeżeli kapitał jest równoważny ciągowi kapitałów na pewien moment, to jest on równoważny temu ciągowi na każdy moment.

W oparciu o powyższe uwagi, kapitał będziemy nazywać **równoważnym** ciągowi kapitałów  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , jeżeli jest mu równoważny na jakikolwiek moment  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Uwaga** Mnożąc obie strony równoważności (46) przez  $(1+r)^{n_0}$ , otrzymujemy

$$K_{n_0} = \sum_{i=0}^n x_i \cdot (1+r)^{n_0-i} \quad (47)$$

Wzór (47) pozwala wyznaczyć wartość, w chwili  $n_0$  kapitału, który jest równoważny ciagowi kapitałów  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Przyjmując w (47)  $n_0 = 0$  dostajemy w szczególności wzór na obecną wartość kapitału równoważnego ciagowi kapitałów  $x_0, x_1, \dots, x_n$

$$K_{n0} = \sum_{i=0}^n \frac{x_i}{(1+r)^i} \quad (48)$$

### 18.1 Przykład 40

Sprawdzimy czy przy rocznej stopie procentowej równej 8%, kapitał 120 000 PLN, który mamy otrzymać za 2 lata, jest równoważny na moment  $k = 3$  następującemu ciagowi kapitałów:

$$x_0 = 10000 \text{ PLN}, x_1 = 5000 \text{ PLN}, x_2 = 25000 \text{ PLN}, x_3 = 30000 \text{ PLN}, x_4 = 20000 \text{ PLN}, x_5 = 35000 \text{ PLN}$$

Ponieważ  $r = 8\%$ , mamy

$$\sum_{i=0}^5 \frac{x_i}{(1+r)^i} = 10000 + \frac{5000}{1,8} + \frac{25000}{(1,08)^2} + \frac{30000}{(1,08)^3} + \frac{20000}{(1,08)^4} + \frac{35000}{(1,08)^5} = 98399,07$$

Z drugiej strony, obecna wartość kapitału 120 000 PLN, który mamy otrzymać za 2 lata wynosi

$$K_{n0} = \frac{120000}{(1,08)^2} = 102880,66 \text{ PLN}$$

Zatem warunek (48) nie jest spełniony, czyli kapitał 120 000 PLN, który mamy otrzymać za 2 lata, nie jest równoważny rozważanemu ciagowi kapitałów.

### 18.2 Przykład 41

Przy założeniu, że roczna stopa procentowa jest równa 8%, wyznaczmy kapitał, który otrzymamy za 2 lata jest równoważny ciagowi kapitałów z przykładu 40.

Stosując wzór (47) oraz korzystając z obliczeń z poprzedniego przykładu

$$K_2 = \sum_{i=0}^5 x_i \cdot (1+r)^{2-i} = (1,08)^2 \cdot \sum_{i=0}^5 \frac{x_i}{(1,08)^i} = 114772,68 \text{ PLN}$$

### 18.3 Przykład 42

Sprawdzimy, czy przy rocznej stopie procentowej równej 5%, kapitał 79 790, który mamy otrzymać za 3 lata, jest równoważny następującemu ciagowi kapitałów:

$$x_0 = 20000 \text{ PLN}, x_1 = 15000 \text{ PLN}, x_2 = 12000 \text{ PLN}, x_3 = 27500 \text{ PLN}$$

Wystarczy sprawdzić czy zachodzi równość (47),  $n_0 = 3, r = 5\%$

$$\sum_{i=0}^3 x_i (1,05)^{3-i} = 79790,00 = K_3$$

Wobec tego, zachodzi równość (47), czyli kapitał 79 90, który mamy otrzymać za 3 lata, jest równoważny podanemu ciągowi kapitałów.

Założmy, że mamy dwa ciągi kapitałów  $x_0, x_1, \dots, x_n$  oraz  $y_0, y_1, \dots, y_m$ . Niech  $X$  będzie kapitałem równoważnym  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , zaś  $Y$  niech będzie kapitałem równoważnym ciągowi  $y_0, y_1, \dots, y_m$ . Ciągi kapitałów nazywamy **równoważnymi** jeśli kapitały  $X$  i  $Y$  są równoważne. W przeciwnym padku mówimy, że  $x_0, x_1, \dots, x_n$  i  $y_0, y_1, \dots, y_m$  są **nierównoważnymi** ciągami kapitałów.

**Uwaga** Przypomnijmy, że dwa kapitały są równoważne wtedy i tylko wtedy gdy ich obecne wartości są równe. Wobec tego na podstawie (48) otrzymujemy, że ciągi kapitałów  $x_0, x_1, \dots, x_n$  i  $y_0, y_1, \dots, y_m$  są równoważne wtedy i tylko wtedy gdy

$$\sum_{i=0}^n \frac{x_i}{(1+r)^i} = \sum_{j=0}^m \frac{y_j}{(1+r)^j} \quad (49)$$

#### 18.4 Przykład 43

Przy założeniu, że roczna stopa procentowa  $r = 5\%$  sprawdzimy, czy podane ciągi kapitałów są równoważne

$$x_0 = -4000PLN, x_1 = 10000PLN, x_2 = 8000PLN, x_3 = 12000PLN$$

$$y_0 = 5000PLM, y_1 = 2000PLN, y_2 = 3000PLM, y_4 = 7000PLN, y_5 = 9000PLN$$

Mamy

$$\sum_{i=0}^3 \frac{x_i}{(1,05)^i} = 23146,10PLN$$

$$\sum_{j=0}^4 \frac{y_j}{(1,05)^j} = 23077,04PLN$$

Zatem równość (49) nie zachodzi, czyli ciągi nie są równoważne.

**Uwaga** Równoważność ciągów kapitałów zależy od wartości rocznej stopy procentowej.

**Uwaga** Równoważność ciągów kapitałów ma ścisły związek z badaniem efektywności inwestycji finansowych. Zagadnieniem tym zajmiemy się szczegółowo w kolejnej części wykładu.



## 19 Mierniki oceny inwestycji finansowych

Pojęcie inwestycji finansowej jest na ogół ojarzone z zakupem akcji lub innych papierów wartościowych. W istocie ma ono jednak bardziej ogólne znaczenie i obejmuje szeroki zakres przedsięwzięć podejmowanych z wykorzystaniem posiadanego kapitału. Każda inwestycja finansowa wymaga nakładu, czyli zaangażowania pewnych środków finansowych, który daje prawo do ewentualnych dochodów w przyszłości. W działalności gospodarczej inwestycja finansowa najczęściej wiąże się z powiększeniem lub modernizacją środków trwałych.

Przez inwestycje finansowa będziemy rozumieć ciąg płatności znany zarówno co do wielkości jak i momentów ich występowania. Płatności ujemna reprezentuje nakład inwestora, a dodatnia reprezentuje jego dochód. Jeżeli nakład i dochód występuje w tym samym momencie, to płatność w tym momencie jest sumą tych dwóch wielkości. Stale będziemy zakładać że pierwsza płatność jest nakładem (czyli jest ujemna), a moment jej wystąpienia jest początkiem okresu inwestycyjnego. Wśród pozostałych płatności co najmniej jedna powinna stanowić dochód (czyli być dodatnia).

**Horyzontem czasowym** inwestycji nazywamy długość okresu objętego inwestycją. W całym wykładzie jednostką czasu przyjmiemy 1 rok. Przez  $n$  oznaczamy horyzont inwestycyjny wyrażony w latach. Z kolei przez  $x_j$  dla  $j \in 0, 1, 2, \dots, n$  oznaczać będziemy wysokość płatności w momencie  $j$ .

### 19.1 Przykład 44

ŚInwestycja wymagająca nakładów w wysokości 100 000 PLN obecnie i 50 000 PLN za rok, po drugim roku prz7niesie dochód w wysokości 40 000 PLN. Zaś po trzecim i czwartym roku 120 000 PLN.

W tym przypadku horyzont jest równy  $n = 4$  lata. Ponadto płatności w kolejnych latach wynoszą:

$$x_0 = -100000\text{PLN}, x_1 = -50000\text{PLN}, x_2 = 40000\text{PLN}, x_3 = 120000\text{PLN}, x_4 = 120000\text{PLN}$$

Istotnym problemem jest określenie celowości danej inwestycji finansowej. Służą do tego różne narzędzia, zwane miernikami oceny inwestycji finansowych. W tym wykładzie omówimy 3 najważniejsze z pośród nich:

Wartość bieżąca netto inwestycji

Wewnętrzna stopa zwrotu

Średni czas trwania

## 20 Wartość bieżąca netto

Jedną z podstawowych miar służących do oceny decyzji inwestycyjnej, jest **wartość bieżąca netto** (w skrócie **NPV**). Jest to suma zdyskontowanych na moment 0 nakładów i dochodów z inwestycji przy ustalonej stopie procentowej. Przy założeniu kapitalizacji złożonej mamy:

$$= \sum_{j=0}^n \frac{x_j}{(1+r)^j} \quad (50)$$

gdzie  $n$  jest czasem trwania inwestycji (w latach),  $x_j$  dla  $j \in 0, 1, \dots, n$  jest wartością płatności na koniec  $j$ -tego roku, zaś  $r$  oznacza roczną stopę procentową.

### 20.1 Przykład 45

Wyznamy wartość bieżąca netto inwestycji z przykładu 44. Przyjmijmy roczną stopę procentową  $r = 5\%$ .

Ponieważ  $n = 4$ , stosując (50), dostajemy

$$NPV = -100000 + \frac{-50000}{1,05} + \frac{40000}{1,05^2} + \frac{120000}{1,05^3} + \frac{120000}{1,05^4} = 91046,94 PLN$$

Do wyznaczania wartości bieżącej netto można zastosować wbudowaną formułę NPV dostępną w pakiecie Excel.

### 20.2 Przykład 46

Dla danych z przykładu 44 mamy  $NPV = -100\ 000 + NPV()$ ;

**Uwaga** Ze wzoru (50) wynika, że wysokość bieżącej netto inwestycji zależy od wysokości rocznej stopy procentowej. Fakt ten ilustruje kolejny przykład.

### 20.3 Przykład 47

Wyznamy wartość bieżąca netto inwestycji z przykładu 44, przy założeniu, że roczna stopa procentowa jest równa  $r = 6\%$ .

Na podstawie wzoru (50) otrzymujemy:

$$NPV = 84235,60 PLN$$

**Uwaga** Wartość bieżąca netto inwestycji ma następującą interpretację. W porównaniu z rachunkiem bankowym oprocentowanym według stopy procentowej  $r$ , dana inwestycja jest bardziej opłacalna, jeżeli jej wartość bieżąca netto jest dodatnia. Jeżeli wartość bieżąca netto inwestycji jest ujemna, to inwestycja

jest mniej opłacalna w porównaniu z rachunkiem bankowym oprocentowanym według rocznej stopy procentowej  $r$ . Jeżeli natomiast wartość bieżąca netto inwestycji jest równa zerom to inwestycja jest tak samo opłacalna jak lokata bankowa oprocentowana według rocznej stopy procentowej  $r$ .

**Uwaga** Wartość bieżąca netto inwestycji może y do porównania jej opłacalności nie tylko z lokatą bankową, lecz również z opłacalnością innych inwestycji. Porównanie takie musi się jednak opierać na założeniu, że wartość bieżąca netto każdej z porównywanych inwestycji jest wyznaczona przy tej samej stopie procentowej. Zagadnienie to jest ściśle związane z pojęciem równoważności ciągów kapitałów, które omówiliśmy wcześniej.

Przypomnijmy ze ciągu kapitałów

$$\sum_{i=0}^n \frac{x_i}{(1+r)^i} = \sum_{j=0}^m \frac{x_j}{(1+r)^j} \text{ (niepisać)} \quad (51)$$

Wynika stąd że ciągi kapitałów są równoważne wtedy i tylko wtedy gdy ich wartości bieżące netto są równe.

## 20.4 Przykład 48

Inwestor ma do wyboru dwie możliwości inwestycji kapitału, przynoszące w kolejnych latach następujące płatności

inwestycja A: -5000, -10000, 0, 200000, 30000

inwestycja B: -5000, 10000, 10000, 10000, 5000

Sprawdzić czy inwestycje A i B są równoważne przy rocznej stopie procentowej  $r = 5\%$

Dla obydwu wyznaczymy NPV

A:  $NPV = 27434,02 PLN$

B:  $NPV = 26345,99 PLN$

Zatem  $NPV(B) < NPV(A)$ , czyli inwestycje nie są równoważne przy rocznej stopie procentowej  $r = 5\%$ . Inwestycja A jest bardziej korzystna niż B.

## 20.5 Przykład 49

Rozważmy inwestycje z przykładu 48 założeniu że roczna stopa procentowa wynosi  $7\%$ . Wtedy wartości bieżące netto inwestycji wynoszą odpowiednio:

$$NPV(A) = 24867,02$$

$$NPV(B) = 25057,64$$

Wobec tego inwestycje również nie są równoważne, ale tym razem  $NPV(A) < NPV(B)$ , czyli przy rocznej stopie procentowej  $r = 7\%$  inwestycja B jest korzystniejsza od inwestycji A.

**Uwaga** Przykłady 48 i 49 pokazują zasadniczą trudność związaną z oceną opłacalności poszczególnych inwestycji na podstawie ich wartości bieżącej netto. Ocena taka zależy bowiem od prawidłowego ustalenia wartości rocznej stopy procentowej.

## 20.6 Przykład 50 (Kolos)

Inwestor ma do wyboru dwie możliwości inwestycji kapitału, przynoszące w kolejnych latach następujące płatności

inwestycja A:  $-4000, -10000, 0, 20000, 40000$

inwestycja B:  $-4000, 10000, 1000, 10000, W$

Dla jakiej wartości parametru  $W$  inwestycje A i B są równoważne przy rocznej stopie procentowej równej  $4\%$ .

Dla obydwu inwestycji wyznaczamy bieżące wartości netto ciągów kapitałów

$$NPV(A) = 38356,71$$

$$NPV(B) = \dots + \frac{W}{(1+0,04)^4} = 23750,91 + \frac{W}{(1+0,04)^4}$$

$$38356,71 = 23750,91 + \frac{W}{(1+0,04)^4}$$

$$W = 17086,72$$

## 21 Wewnętrzna stopa zwrotu

Drugim ważnym narzędziem służącym do oceny inwestycji finansowych jest **wewnętrzna stopa zwrotu (IRR)**. Jest to roczna stopa procentowa, dla której wartość bieżąca netto inwestycji jest równa 0. Oznaczając wewnętrzną stopę zwrotu przez  $r$ , na podstawie (50) dostajemy następujące równanie na  $r$

$$\sum_{j=0}^n \frac{x_j}{(1+r)^j} = 0 \quad (52)$$

**Uwaga** Dla inwestycji o pojedynczym nakładzie wewnętrzna stopa zwrotu jest maksymalna stopa procentowa przy której inwestycja jest opłacalna. Ściślej mówiąc jest to maksymalna stopa procentowa przy której inwestycja się zwraca.

**Uwaga** Zauważmy, że wyznaczanie wewnętrznej stopy zwrotu sprowadza się do wyznaczenia rozwiązań pewnego równania. Wobec tego, dla niektórych inwestycji może ona nie istnieć, zaś dla innych może nie być wyznaczona jednoznacznie. Można jednak wykazać, że dla każdej inwestycji w której ciąg dochodów poprzedzony jest ciągiem nakładów, wewnętrzna stopa zwrotu istnieje i jest, wyznaczona jednoznacznie.

### 21.1 Przykład 51 (kolos)

Inwestycja wymagająca nakładów w wysokości 300 000 obecnie i 100 000 za rok, po drugim roku przyniesie dochód w wysokości 50 000, zaś po trzecim i czwartym roku 250 000.

a) wyznaczyć wartość bieżąca netto tej inwestycji przy założeniu że roczna stopa procentowa jest równa 5%.

b) Wyznaczyć wewnętrzną stopę zwrotu z tej inwestycji

a)  $NPV = 71748,40$

B) ze wzoru (52)

$$-300000 - \frac{100000}{1+r} + \frac{50000}{1+r^2} + \frac{250000}{(1+r)^3} + \frac{250000}{(1+r)^4} = 0$$

Skorzystamy z formuły IRR -i IRR(-300000;-100000;5000;250000;250000) = 10,81%

### 21.2 Przykład 52

Rozważmy inwestycje o stopującym płatnościach: -4000, 5000, -2000.

Wewnętrzna stopa zwrotu dla tej inwestycji nie istnieje.

## 22 Średni czas trwania

Rozważmy inwestycje finansowa o oryzoncie czasowym  $n$  i płatnościach  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Niech  $r^*$  będzie wewnętrzną stopą zwrotu z tej inwestycji. Wtedy zgodnie ze wzorem (52), mamy

$$\sum_{j=0}^n \frac{x_j}{(1+r^*)^j} = 0$$

Przyjmijmy oznaczenie

$$P_0 = \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{(1+r^*)^j} \quad (53)$$

Uwaga Z (53) i (54) wynika, że

$$P_0 = -x_0 \quad (54)$$

**Średnim czasem trwania inwestycji** (ang. duration) nazywamy liczbę  $D$  określaną w następujący sposób

$$D = \frac{1}{P_0} \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{(1+r^*)^j} \cdot j \quad (55)$$

Średni czas trwania inwestycji jest zatem średnią ważoną momentów występowania płatności, przy czym wagami są zdyskontowane, przy założeniu wewnętrznej stopy zwrotu, udziały poszczególnych płatności w wartości bieżącej netto inwestycji. Przy wyborze inwestycji na podstawie średniego czasu trwania inwestor powinien kierować się jak najmniejszą wartością tego wskaźnika.

### 22.1 Przykład 53

Rozważmy inwestycje z przykładu 51. Wtedy  $r^* = 10,81\%$ . Ponadto  $P_0 = 300000$ , wobec tego stosując (55) otrzymujemy:

$$D = \frac{1}{300000} \left( -\frac{100000}{1+0,1081} \cdot 1 + \frac{50000}{(1+0,1081)^2} \cdot 2 + \frac{250000}{(1+0,1081)^3} \cdot 3 + \frac{250000}{(1+0,1081)^4} \cdot 4 \right) = 4,02$$

Zatem średni czas trwania inwestycji wynosi 4,02 lat

## 23 Renty

**Renta** nazywamy ciąg płatności w równych odstępach czasu. Kolejne kwoty wypłacane z tytułu renty nazywamy **ratami renty**. Okres między dwiema kolejnymi ratami nazywa się **okresem bazowym**. Rente o skończonej liczbie lat nazywa się **renta okresowa**, zaś rente o nieskończonej liczbie lat - **renta wieczysta**. Rente której raty wypłacane są na koniec okresów bazowych nazywamy **renta płatna z dołu**. Jeżeli raty renty wypłacane są na początku okresów bazowych to nazywamy ją **renta płatna z góry**. Raty renty mogą być stałe albo zmieniać się w czasie. W dalszym ciągu ograniczymy się do rent o stałych ratach. Głównym celem naszych rozważań będzie zagadnienie **wyceny renty** tzn. wyznaczenie kapitału równoważnego rente. Wycenę renty można oczywiście przeprowadzić na dowolny moment. W praktyce najważniejsze są wycena renty na jej początek, czyli wyznaczenie **początkowej wartości renty** oraz wycena renty na jej koniec czyli wyznaczenie **końcowej wartości renty**.

- **Początkowa wartość renty** jest sumą wartości rat renty zaktualizowanych na moment początkowy renty,

- **Końcowa wartość renty** jest sumą wartości rat renty zaktualizowanych na moment końcowy renty

Będziemy rozważać zarówno przypadek kapitalizacji rocznej, jak również model oparty na wielokrotnej kapitalizacji w ciągu roku.

## 24 Renty z roczną kapitalizacją odsetek

Założmy, że z tytułu renty przez  $n$  lat wypłacana będzie corocznie **z dołu** ustalana kwota  $W$ . Przez  $r$  oznaczmy roczną stopę procentową. Wówczas początkowa wartość takiej renty, będąca sumą wartości jej rat zaktualizowanych na moment początkowy, jest równa:

$$P_D = W \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1+r)^i} (\text{niepracujemy natym}) \quad (56)$$

Stosując wzór na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o pierwszych wyrazach.... dostajemy stąd:

$$P_D = \frac{W}{r} \left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right) \quad (57)$$

Z kolei wartość końcowa rozważanej renty jest równa,

$$F_D = P_D(1+r)^n \quad (58)$$

$$F_D = \frac{W}{r} ((1+r)^n - 1) \quad (59)$$

Oznaczając przez  $P_G$  początkową wartość renty płatnej **z góry** mamy

$$P_G = W \sum_{i=1}^{n-1} (\text{aaaniewartouzuwac tego}) \quad (60)$$

$$P_G = W \frac{1+r}{r} \left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right) \quad (61)$$

Wartość końcowa takiej renty wynosi

$$\text{tylkodoliczenia} \quad (62)$$

Ze wzoru (60) i (62) otrzymujemy:

$$F_G = P_G(1+r)^n \quad (63)$$



Zatem uwzględniając (61) otrzymujemy

$$F_G = W \frac{1+r}{r} \cdot ((1+r)^n - 1) \quad (64)$$

**Uwaga** Ze wzorów (57) i (58) otrzymujemy następujący związek między początkowymi wartościami renty płatnej z dołu i renty płatnej z góry

$$P_G = P_D(1+r) \quad (65)$$

## 24.1 Przykład 54

Przyjmując roczną stopę procentową równą 5% i zakładając roczną kapitalizację odsetek, wyznaczyć początkową wartość 8-letniej renty płatnej corocznie a) z dołu, b) z góry w kwocie 10 000 PLN. Ile wynosi końcowa wartość takiej renty?

### 24.1.1 a)

Korzystając ze wzoru (57)

$$P_D = 64632,13 \text{ PLN}$$

Ponadto, na podstawie wzoru (58), mamy

$$F_D = 95491,09 \text{ PLN}$$

### 24.1.2 b)

Stosując wzór (65) i korzystając z obliczeń z wykonanych w punkcie a

$$P_G = 67863,74 \text{ PLN}$$

Uwzględniając (63) mamy

$$F_G = 100265,65 \text{ PLN}$$

## 25 Renty z wielokrotna kapitalizacja odsetek w ciągu roku

Założmy, że kapitalizacja odsetek odbywa się  $m$ -krotnie w ciągu roku (w równych odstępach czasu). Przyjmijmy, że raty renty w wysokości  $W$  wypłacane są  $m$  razy w ciągu roku przez okres  $l$  lat i  $n$  spośród  $m$  podokresów  $l + 1$  roku ( $0 \leq n < m$ ). Niech  $r$  oznacza nominalną stopę procentową. Wtedy początkowa wartość renty płatnej z dołu, tzn. na końcu każdego podokresu, wynosi

$$P_D^{(m)} = \frac{W}{\frac{r}{m}} \cdot \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{lm+n}}\right) \quad (66)$$

W przypadku renty płatnej z góry

$$P_G^{(m)} = W \cdot \frac{1 + \frac{r}{m}}{\frac{r}{m}} \cdot \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{lm+n}}\right) \quad (67)$$

### 25.1 Przykład 55

Przyjmując nominalną stopę procentową równą 4% i zakładając kwartalną kapitalizację odsetek wyznaczmy początkową wartość renty płatnej co kwartał: a) z dołu, b) z góry w wysokości 2 500 PLN przez 3 lata i 3 miesiące.

Stosując wzory (66) i (67) otrzymujemy

#### 25.1.1 a)

$$P_D^{(4)} = 30334,35 \text{ PLN}$$

#### 25.1.2 b)

$$P_G^{(4)} = 30637,69 \text{ PLN}$$

**Uwaga** W praktyce często mamy do czynienia z rentami o zmiennych ratach. W takim przypadku jeżeli raty renty płatnej z dołu wynoszą w kolejnych latach  $W_1, \dots, W_n$ , to jej wartość początkowa jest równa

$$P_D = \sum_{i=1}^n \frac{W_i}{(1+r)^i} \quad (68)$$

zaś wartość końcowa jest równa

$$F_D = \sum_{i=1}^n \frac{W_i}{(1+r)^{n-i}} \quad (69)$$

W przypadku renty płatnej z góry mamy

$$P_D = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{W_i}{(1+r)^i} \quad (70)$$

oraz

$$F_D = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{W_i}{(1+r)^{n-i}} \quad (71)$$

## 26 Wyznaczanie wartości końcowej i wartości początkowej w arkuszu MS Excel

Do wyznaczania wartości końcowej można zastosować wbudowaną formułę **FV**. Jej argumentami są: stopa procentowa, liczba rat, wysokość raty, saldo początkowe i typ. Argument typ dotyczy momentu płatności i wynosi: 0 dla rat płatnych z dołu, zaś 1 dla rat płatnych z góry.

**FV(stopa procentowa; liczba rat; rata; saldo początkowe; 0 lub 1**

Dwa ostatnie argumenty można pominąć. Wtedy dla salda początkowego zostanie przyjęta domyślna wartość 0. Dla argumentu typ wartość domyślna również jest 0 tzn. uzyskany w ten sposób wynik dotyczy rat płatnych z dołu.

### 26.1 Przykład 56

Na rachunku bankowym zdeponowano 20 000 PLN. Roczna stopa procentowa jest równa 5%. Wyznamy saldo rachunku po 3 latach, jeżeli na początku każdego kwartału wypłacana będzie z niego kwota 800 PLN.

Mamy

$$FV(5\%/4;12;800;-20000;1) = 12\,798,20 \text{ PLN}$$

### 26.2 Przykład 57

Obecne zadłużenie wynosi 100 000 PLN. Obliczymy poziom zadłużenia po 5 latach, jeżeli przy rocznej stopie procentowej równej 4% na koniec każdego miesiąca spłacana będzie rata w wysokości 1 000 PLN.

$FV(4\%/12;60;1000;-100000;0) = 55\,800,68 \text{ PLN}$  -i. Zatem zadłużenie po 3 latach będzie wyniosło 55 800,68

Do wyznaczania wartości początkowej można zastosować wbudowaną formułę **PV**. Formuła posiada te same argumenty co formuła FV oraz ta sama konwencja.

**PV(stopa procentowa; liczba rat; rata; saldo początkowe; 0 lub 1**

### 26.3 Przykład 58

Przy założeniu, że roczna stopa procentowa jest równa 5% wyznaczmy początkową wartość 24 rat płaconych w wysokości 500 PLN na koniec kolejnych miesięcy.

Mamy

$$PV(5\%/12;24;-500;0;0) = 11\,396,95 \text{ PLN}$$

#### **26.4 Przykład 59**

Przy założeniu, że roczna stopa procentowa jest równa 5% wyznaczmy początkową wartość 15 rat płaconych w wysokości 800 PLN na początku kolejnych kwartałów.

$$PV(5\%/4;15;-800;0;1) = 11\,016,44 \text{ PLN}$$

#### **26.5 Przykład 60**

Przy założeniu że roczna stopa procentowa jest równa 6%, wyznaczmy kwotę kredytu spłacanego w 12 kwartalnych ratach płatnych z dołu w wysokości 2 000 PLN.

$$PV(6\%/4;12;-2000;0;0) = 21\,815,01 \text{ PLN}$$

## 27 Spłata rat kredytu

### Wprowadzenie

Przeprowadzimy teraz analizę spłaty rat kredytu. Udzielenie kredytu jest szczególnym przypadkiem inwestycji finansowej. Inwestorem jest strona udzielająca kredytu, zaś raty spłaty długu stanowią ciąg zwrotów z inwestycji. Takie spojrzenie na kredyt jest zgodne z praktyką. Instytucja finansowa lub osoba fizyczna podejmująca decyzje o przeznaczeniu środków na udzielenie kredytu pozbawia się innych możliwości ich zainwestowania. Prezentowane poniżej metody analizy dotyczące ratalnej spłaty kredytu pierają się na oprocentowaniu złożonym, na pojęciu wartości kapitału w czasie oraz na zasadzie równoważności ciągów kapitałów.

## 28 Zasada równoważności długu i rat

Założmy, że w momencie  $n = 0$  zaciągnięty został kredyt w wysokości  $K_0$ . Przyjmijmy, że kredyt będzie spłacany w równych odstępach czasu, w  $n$  ratach o wartościach  $R_1, R_2, \dots, R_n$ . Kwota każdej raty zawiera zwrot części kapitału wraz z odsetkami, ale nie obejmuje kosztów takich jak np. prowizja czy ubezpieczenie. Analiza ratalnej spłaty kredytu opiera się na następującej zasadzie równoważności długu i rat.

Kredyt o wartości  $K_0$  jest **równoważny** na moment  $n = 0$  ciągowi rat  $R_1, \dots, R_n$  płatnych w momentach  $i = 1, \dots, n$ , jeżeli kapitały przekazane sobie nawzajem przez wierzyciela i dłużnika są równoważne na moment 0.

Przy założeniu kapitalizacji złożonej zasada równoważności długu i rat prowadzi do warunku

$$K_0 = \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{(1 + r_{okr})^i} \quad (72)$$

gdzie  $r_{okr}$  jest podokresowa stopa procentowa. Mnożąc obie strony równania (72) przez  $\frac{R_i}{(1+r_{okr})^n}$ , dostajemy warunek równoważności długu i rat na moment  $n$ .

$$K_0(1 + r_{okr})^n = \sum_{i=1}^n R_i(1 + r_{okr})^{n-i} \quad (73)$$

Jeżeli wszystkie raty kredytu są równe:  
to warunek (72) przyjmuje postać

$$K_0 = r \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1 + r_{okr})^i} \quad (74)$$

Stosując wzór na sumę wyrazów szeregu geometrycznego, dostajemy zatem

$$K_0 = \frac{R}{r_{okr}} \left( 1 - \frac{1}{(1 + r_{okr})^n} \right) \quad (75)$$

Wyznaczając stąd  $R$  otrzymujemy:

$$R = \frac{K_0 \cdot r_{okr}}{1 - \frac{1}{(1 + r_{okr})^n}} \quad (76)$$

## 28.1 Przykład 61

Kredyt w kwocie 40 000 PLN zaciągnięty na okres 5 lat ma być spłacany w równych ratach: a) rocznych, b) miesięcznych. Przy założeniu, że nominalna stopa procentowa jest równa 4%, wyznaczmy wysokość raty.

### 28.1.1 a)

ze wzoru (75)  $K_0 = 40000, n = 5, r_{okr} = r = 4\%$

$$R = \left( \frac{40000 \cdot 0,04}{1 - \frac{1}{1,04^5}} \right) = 8985,08 PLN$$

### 28.1.2 b)

Najpierw wyznaczmy miesięczną stopę procentową równoważną rocznej stopie procentowej  $r = 4\%$ .

$$r_{okr} = 1,04^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,3274$$

Zatem, stosując (75) mamy  $K_0 = 40000, n = 60, r_{okr} = 0,3274$

$$R = 735,38 PLN$$

## 28.2 Przykład 62

Pięcioletni kredyt ma być spłacany w rocznych ratach płatnych na koniec kolejnych lat w wysokości: 6 000 PLN po pierwszym i drugim roku, 7 200 PLN po trzecim roku, 8 000 PLN po czwartym roku i 9 000 PLN po piątym roku. Przyjmując, że roczna stopa procentowa wynosi 8% wyznaczmy kwotę kredytu.

Stosując wzór (72),  $n = 5, r_{okr} = r = 8\%, R_1 = R_2 = 6000, R_3 = 7200, R_4 = 8000, R_5 = 9000$

$$K_0 = \frac{6000}{1,08} + \frac{6000}{(1,08)^2} + \frac{72000}{(1,08)^3} + \frac{8000}{(1,08)^4} + \frac{9000}{(1,08)^5} = 28420,67 PLN$$

### 28.3 Przykład 63

Czteroletni kredyt ma być spłacany w kwartalnych ratach płatnych w następującej wysokości: 1 PLN na koniec pierwszych 5 kwartałów, 2 000 PLN na koniec kolejnych pięciu kwartałów i 2 500 PLN na koniec każdego z pozostałych kwartałów. Wiedząc, że roczna stopa procentowa wynosi 8%, wyznaczyć kwotę kredytu.

Rozpoczniemy od wyznaczenia kwartalnej stopy:  $r_{okr} = 1,08^{\frac{1}{4}} = 1,9427$

Zatem ze wzoru (72),  $n = 16$ ,  $r_{okr} = 1,9427$

$K_0 = 24872,76$



## 29 Schematy spłaty długu

Omówimy teraz zagadnienia związane z zadłużeniem w dowolnym momencie spłaty kredytu. Zauważmy najpierw, że mnożąc obie strony równości (72) przez  $(1 + r_{okr})^j$  gdzie  $j \in (1, \dots, n)$ , dostajemy aktualizację długu i wartości poszczególnych rat na moment  $j$ . Przedstawiając prawa stronę tej równości w postaci sumy rat już zapłaconych do momentu  $j$  (włącznie) i rat, które pozostały jeszcze do spłacenia trzymujemy:

$$K_0(1 + r_{okr})^j = \sum_{i=1}^j R_i(1 + r_{okr})^{j-i} + \sum_{i=j+1}^n R_i(1 + r_{okr})^{j-i} \quad (77)$$

**Uwaga** Z punktu widzenia wierzyciela równość (76) pozwala na stwierdzenie, jaka wartość pożyczonego kapitału została odzyskana do momentu  $j$ , a jaka pozostała jeszcze do odzyskania, Z kolei, z punktu widzenia dłużnika, równość (76) informuje o tym, jaka wartość otrzymanego kapitału wraz z naliczonymi odsetkami została już oddana, a jaka pozostaje do oddania

**Długiem bieżącym**  $K_j$  w momencie  $j \in 0, \dots, n$  nazywa się wartość kapitału pozostałego do spłacenia po zapłaceniu raty  $R_j$ . Z równości (76):

(78)

$$K_j = \sum_{i=j+1}^n R_i(1 + r_{okr})^{j-i} \quad (79)$$

**Uwaga** We wzorach (77) i (78) przyjmujemy konwencje, odpowiednio

$$\sum_{i=1}^0 R_i() \dots = 0 \text{ oraz } \sum_{i=n+1}^n \dots = 0$$

**Uwaga** Wzór (77) wyraża zależność długu bieżącego od długu początkowego i rat już zapłaconych, zaś wzór (78) wyraża zależność długu bieżącego od rat, które jeszcze nie zostały spłacone. Pierwsza z tych zależności nazywa się **zależnością retrospektywną**, druga **zależnością prospektywną**. Zarówno z zależności retro czy prospektywnej wynika, że dług bieżący w momencie  $j = 0$  wynosi  $K_0$ , zaś dług bieżący w momencie  $j = n$ , czyli po zapłaceniu ostatniej raty wynosi 0

**Uwaga** Wartość długu bieżącego w danym momencie spłaty kredytu jest ważną informacją zarówno dla wierzyciela jak i dłużnika. Można ona w szczególności stanowić podstawę do zmiany wartości przyszłych rat, np. z powodu zmiany wysokości stopy procentowej lub z powodu restrukturyzacji kredytu.

Dla każdego  $j=1, \dots, n$  przez  $T_j$  oznaczmy część kwoty pożyczki spłacona w  $j$ -tej racji, przez  $Z_j$  odsetki spłacone w  $j$ -tej racji, zaś  $K_j$  resztę długu pozostałą do spłacenia po spłaceniu  $j$ -tej raty. Dla każdego  $j=1, \dots, n$ :

- wielkość  $T_j$  nazywa się **częścią kapitałową**  $j$ -tej raty;
- wielkość  $Z_j$  nazywa się **częścią odsetkową**  $j$ -tej raty;

Zauważmy że

$$R_j = T_j + Z_j$$

Dla każdego  $j=1, \dots, n$ , odsetki spłacone w  $j$ -tej racji są wyznaczone według okresowej stopy procentowej  $r_{okr}$  na podstawie stanu zadłużenia na początku  $j$ -tego okresu. Wynika stąd, że:

$$Z_j = K_{j-1} \cdot r_{okr}, \text{ dla } j=1, 2, \dots, n \quad (80)$$

Z kolei kwota długu spłacenia w  $j$ -tej racji wynosi

$$T_j = R_j - Z_j, \text{ dla } j=1, 2, \dots, n \quad (81)$$

**Uwaga** Na podstawie zależności prostej (78), dla każdego  $j=1, 2, \dots, n$  mamy  $K_j = K_{j-1} + K_{j-1}r_{okr} - R_j$ , uwzględniając (79) dostajemy stąd

$$K_j = K_{j-1} - T_j, \text{ dla } j=1, 2, \dots, n \quad (82)$$

**Uwaga** Warto podkreślić, że część odsetkowa raty  $Z_j$  jest zdefiniowana jako wartość odsetek należnych za  $j$ -ty okres, a nie jako wartość odsetek spłacanych w tym okresie. W niektórych okresach rata może być niższa niż naliczone odsetki, w związku z czym nie mogą być one spłacone. Ponadto, gdyby w danej racji spłacony był jedynie kapitał, a odsetki nie, to dłużnik spłaciłby część kredytu, a jednocześnie zaciągnąłby nowy kredyt, o wartości równej odsetkom, które nie zostały zapłacone. Aby uniknąć takiej sytuacji wygodniej jest założyć, że

- jeżeli  $R_j \geq Z_j$  dla pewnego  $j=1, \dots, n$  to w  $j$ -tej racji spłacane są odsetki  $Z_j$  a dług zmniejsza się o  $T_j = R_j - Z_j$
- jeżeli  $R_j < Z_j$  dla pewnego  $j=1, \dots, n$  to w  $j$ -tej racji spłacane są odsetki  $Z_j$  a dług zwiększa się o  $Z_j - R_j$

Przetawione założenia nazywane są **priorytetem spłaty odsetek**

**Uwaga** Rozkład raty na część kapitałowa i odsetkowa pozwala prześledzić proces umarzania bieżących odsetek i długu przez kolejne raty. Do opisu tego procesu stosuje się tabele zwane **schematem spłaty długu**. Jej wiersze dotyczą kolejnych okresów spłaty długu, zaś w jej kolumnach znajdują się kolejno:

- $j$  - numer okresu bazowego
- $K_{j-1}$  - dług bieżący na początku  $j$ -tego okresu bazowego
- $R_j$  - rata spłacana w  $j$ -tym okresie bazowym
- $Z_j$  - część odsetkowa raty  $R_j$
- $T_j$  - część kapitałowa raty  $R_j$
- $K_j$  - dług bieżący na koniec  $j$ -tego okresu bazowego

**Uwaga** Przedstawimy teraz 2 przykłady dotyczące schematów spłaty kredytu w równych ratach oraz kredytu o równych częściach kapitałowych. Warto wspomnieć, że innymi występującymi w praktyce schematami spłaty kredytów są spłata odsetek w jednej racie i równe raty kapitałowe oraz bieżąca spłata odsetek i zwrot kapitału w ostatniej racie.

### 29.1 Przykład 64

Zbudować schemat spłaty kredytu z przykładu 61a). Przypomnijmy, że rata wynosi 8 985,08

### 29.2 Przykład 65

Jak wspomnieliśmy wcześniej, poza kredytami o stałych ratach, często stosowanym rodzajem kredytów są kredyty o stałych częściach kapitałowych. Pokażemy schemat konstrukcji spłaty takiego kredytu. rozważać będziemy kredyt z przykładu 64. Zauważmy najpierw, że:  $T_j = \frac{40000}{5} = 8000 PLN$  dla  $j \in 1, 2, 3, 4, 5$

## 30 Rzeczywista stopa oprocentowania (RRSO)

Wcześniej zauważyliśmy, że udzielenie kredytu można w naturalny sposób traktować jako inwestycję finansową. Wobec tego do jej oceny należy używać mierników stosowanych w analizie efektywności inwestycji. Kilka z nich omówiliśmy na poprzednich przykładach. Do najważniejszych mierników należy wewnętrzna stopa zwrotu (IRR), która w kontekście udzielania kredytu nazywa się rzeczywistą stopą oprocentowania. Opiera się ona na zasadzie równowagi długu i rat,

Załóżmy, że kredyt w kwocie  $K_0$  jest spłacany przez wierzyciela w  $n$  ratach równych  $R_1, \dots, R_n$  płatnych w wyrażonych w latach chwilach  $T_1, \dots, T_n$  od momentu  $t = 0$  w którym kredyt został udzielony

**Rzeczywista roczna stopa oprocentowania RRSO** nazywamy roczną stopę procentową, która jest rozwiązaniem równania.

$$K_0 = \sum_{i=1}^n R_i (1+r)^{-t_i}$$

Przyjmijmy, że istnieje jednostka czasu zwana okresem bazowym za pomocą której termin dowolnej raty kredytu można wyrazić liczbą całkowitą. W praktyce założenie to jest spełnione, gdyż na ogół terminy spłat ustalane są na koniec lat, kwartałów, czy miesięcy. W szczególności bazowy okres można przyjąć 1 dzień. Załóżmy, że rok składa się z  $m$  okresów bazowych, wtedy dla każdego  $i \in 1, 2, \dots, n$

$$K_0 = \sum_{i=1}^n R_i (1+r)^{\frac{k_i}{m}} \quad (83)$$

Niech  $r_{okr}$  będzie stopa podokresowa równoważna rocznej stopie  $r$ . Wtedy

$$(1+r_{okr})^m = 1+r \quad (84)$$

stad wynika, że  $(1+r)^{\frac{1}{m}} = 1+r_{okr}$

$$K_0 = \sum_{j=1}^{K_n} R_j (1+r_{okr})^{-j} \quad (85)$$

Stopa procentowa  $r_{okr}$  która jest rozwiązaniem równania (85) nazywa się **okresowa strzeczysta stopa oprocentowania**

**Uwaga** Z równości (84) wynika, że okresowa rzeczywista stopa oprocentowania jest równoważna rocznej rzeczywistej stopie oprocentowania. **RRSO jest równoważnie ORSO**

**Uwaga** W celu wyznaczenia rzeczywistej rocznej stopy oprocentowania należy rozwiązać równanie (82) ze względu na  $r$ . Podobnie, żeby wyznaczyć okresową rzeczywistą stopę oprocentowania, należy rozwiązać równanie (85) ze względu na  $r_{okr}$ . Można się posłużyć Excelem. Rzeczywista stopa oprocentowania można wyznaczyć przy użyciu formuły **IRR**. Jeżeli raty są równe to do wyznaczenia rzeczywistej rocznej stopy oprocentowania można zastosować formułę **RATE**. Jej argumentami są liczba rat; wysokość rat; wysokość kredytu ; saldo początkowe ; typ.

### 30.1 Przykład 66

Wyznaczyć rzeczywistą roczną stopę oprocentowania kredytu w wysokości 100 000 PLN ślącemu a) na początku b) na końcu kolejnych pięciu lat ratami w wysokości: 20 000 PLN w pierwszym i drugim roku oraz 30 000 PLN w 3,4,5

roku.

Mamy

### 30.1.1 a)

$$RRSO = IRR(-80000;20000;30000;30000;30000) = 13,22 \%$$

### 30.1.2 b)

$$RRSO = IRR(-100000;20000;20000;30000;30000;30000) = 8,68 \%$$

## 30.2 Przykład 67

Sześcioletni kredyt w kwocie 12 000 PLN jest spłacony w równych rocznych ratach płatnych z dołu w wysokości 2 400 PLN.

$$IRR = 5,47 \%$$

$$RATE = (6 ; -2400 ; 12\ 000)$$

## 30.3 Przykład 68

Rozważmy kredyt z przykładu 67, ale przy założeniu że raty płacone są z góry.

$$IRR = 7,93 \%$$

$$RATE = (5 ; -2400 ; 9600)$$

## 30.4 Przykład 69

Kredyt w wysokości 10 000 PLN będzie spłacony przez 2 lata w równych miesięcznych ratach. Płatnych w wysokości 500 PLN na koniec kolejnych miesięcy. Wyznaczyć rzeczywistą roczną stopę oprocentowania tego kredytu.

Stosując RATE dostajemy wartość okresowej rzeczywistej stopy oprocentowania.

$$RATE(24;-500;10000) = r_{okr} = 1,5131 \%$$

RRSO jest roczna stopa oprocentowania równoważna stopie  $r_{okr}$ . Mamy zatem:  $RRSO = (1 + r_{okr})^{12} - 1 = (1,015131)^{12} - 1 = 19,79\%$

### 30.5 Przykład 70

Kredyt w wysokości 6 000 PLN będzie spłacany przez rok w miesięcznych ratach płatnych w wysokości 550 PLN na koniec pierwszych 4 miesięcy, 525 PLN na koniec kolejnych 4 miesięcy i 500 PLN na koniec ostatnich 4 miesięcy, Wyznaczyć RRSO.

$$r_{okr} = IRR(-6000; 550; 550; 550; 550; 525; 525; 525; 525; 500; 500; 500; 500) = 0,7741\%$$

$$RRSO = (1 + 0,7741)^{12} - 1 = 9,70\%$$

## 31 Wyznaczanie wysokości raty kredytu o równych ratach w arkuszu kalkulacyjnym Excel

Do wyznaczenia wysokości raty kredytu o równych ratach można zastosować wbudowaną formułę **PMT**

**PMT(stopa procentowa ; liczba rat ; wysokość kredytu ; saldo początkowe ; 0 lub 1)**

### 31.1 Przykład 71

Przy założeniu, że nominalna stopa procentowa równa jest 6% wyznaczyć wysokość raty kredytu w wysokości 100 000 PLN zaciągniętego na okres 5 lat, spacanego w miesięcznych ratach płatnych a) z dołu, b) z góry

## 32 Wyznaczanie części odsetkowej i części kapitałowej rat kredytu o równych ratach w arkuczu Excel

Do wyznaczenia części odsetkowej rat kredytu o równych ratach można zastosować wbudowaną formułę **IPMT**. Jej argumentami są: stopa procentowa, numer raty, liczba rat, wysokość kredytu, saldo początkowe i typ.

**IPMT**(stopa procentowa ; numer raty ; liczba rat ; wysokość kredytu ; saldo początkowe ; 0 lub 1)

Do wyznaczenia części kapitałowej rat kredytu o równych ratach można zastosować formułę **PPMT**. Jej argumenty są identyczne jak w **IPMT**.

### 32.1 Przykład 72

Przy założeniu, że nominalna stopa procentowa jest równa 8%, wyznaczyć wartość raty kredytu w wysokości 15 000 PLN zaciągniętego na okres 2 lat i spłacanego w równych miesięcznych ratach płatnych z dołu. Następnie wyznaczyć wartość części odsetkowej, części kapitałowej dziewiątej raty tego kredytu.

$$\text{PMT}(8\%/12 ; 24 ; -15000) = 678,41$$

$$\text{IPMT}(8\%/12 ; 9 ; 24 ; -15000) = 68,42$$

$$\text{PPMT}(8\%/12 ; 9 ; 24 ; -15000) = 609,99$$



### 33 Wyznaczanie rat kredytu przy zmianie oprocentowania

Założmy, że w trakcie spłaty kredytu stopa procentowa uległa zmianie. Wówczas zachodzi konieczność wyznaczenia nowej wysokości pozostałych do spłaty rat kredytu.

#### 33.1 Przykład 73

Kredyt w wysokości 50 000 PLN zaciągnięty na okres 4 lat był spłacany równymi ratami, płatnymi na koniec kolejnych kwartałów. Nominalna stopa procentowa, która początkowa była równa 5%, od początku czwartego roku wzrosła do 6%. Wyznaczyć wysokość pozostałych do spłaty rat kredytu.

1. Najpierw obliczymy wysokość raty przed podniesieniem stopy procentowej. Mamy:  $PMT(5\%/4 ; 16 ; -50000) = 3\,467,34$  PLN
2. Następnie obliczamy, do jakiego poziomu zmaleje dług po trzech latach spłaty rat. Stosując FV lub wzór:  $FV(5\%/4 ; 12 ; 3467,34 ; -50000) = 13\,446,53$
3. Na koniec wyznaczymy wysokość rat po zmianie stopy procentowej. W tym celu zastosujemy formułę PMT:  $PMT(6\%/4 ; 4 ; -13466,53) = 3488,63$

## 34 Tablice trwania życia

## 35 Przyszły czas życia

**Przyszły czas życia**  $x$ -latka, tzn. czas który pozostał mu do śmierci, będziemy oznaczać przez  $T_x$ . Oczywiście  $T_x$  na ogół nie jest dokładnie znana. Wobec tego będziemy traktować  $T_x$  jako zmienną losową. Przyjmuje ona wyłącznie wartości nieujemne, choć nie koniecznie całkowite. Przez  $F_x$  oznaczmy dystrybuantę zmiennej  $T_x$  tzn.

$$F_x(t) = P(T_x \leq t) \text{ dla } t \geq 0, \quad (86)$$

gdzie  $P$  oznacza prawdopodobieństwo. Dalsze rozważania będziemy prowadzić przy stałym założeniu, że dla każdego  $x \geq 0$ , dystrybuanta  $F_x$  jest funkcją ciągłą.

Wprowadzimy teraz oznaczenia które, podobnie jak notacja aktuarialna w dalszej części wykładu, są zgodne z Międzynarodowym Systemem Oznaczeń AKtuarialnych, obowiązujących od 1898 roku. Zgodnie z tym systemem:

- (i)  ${}_tq_x$  oznacza prawdopodobieństwo śmierci  $x$ -latka przed upływem czasu  $t$ ,

$${}_tq_x = F_x(t) \quad (87)$$

- (ii)  ${}_tp_x$  oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że  $x$ -latek przeżyje więcej niż czas  $t$ ,

$${}_tp_x = P(T_x > t) = 1 - F_x(t) \quad (88)$$

- (iii)  ${}_s|{}_tq_x$  oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że  $x$ -latek przeżyje jeszcze  $s$  lat, a następnie umrze przed upływem czasu  $t$ ,

$${}_s|{}_tq_x = P(s < T_x \leq s + t) = F_x(s + t) - F_x(s) \quad (89)$$

- (iv)  ${}_tp_{[x]+s}$  oznacza prawdopodobieństwo warunkowe przeżycia przez  $x$ -latka kolejnych  $t$  lat pod warunkiem, że wcześniej przeżyje on  $s$  lat,

$${}_tp_{[x]+s} = P(T_x > s + t | T_x > s) \quad (90)$$

(v)  ${}_tq_{[x]+s}$  oznacza prawdopodobieństwo, że x-latek umrze przed upływem czasu  $s + t$  pod warunkiem, że wcześniej przeżyje czas  $s$ ,

$${}_tq_{[x]+s} = P(T_x \leq s + t | T_x > s) \quad (91)$$

Ponadto, przyjmujemy konwencje, że jeżeli jakiś indeks jest równy 1, to pomijamy go w odpowiednim symbolu, np. zamiast  ${}_1p_x$  będziemy pisać  $p_x$ .

Można sprawdzić, że dla dowolnych  $x, s, t \geq 0$  zachodzą równości

$${}_s|{}_tq_x = {}_s p_x - {}_{s+t} p_x = {}_{s+t} q_x - {}_s q_x \quad (92)$$

Zauważmy, że dla dowolnych  $x, t \geq 0$  mamy  ${}_t p_x + {}_t q_x = 1$

Niech  $< x >$  oznacza część całkowita liczby rzeczywistej  $x$ . Zmienna losowa  $K_x = < T_x >$  nazywamy **obcietym przyszłym czasem życia** x-latka. Zmienna  $K_x$  przyjmuje wyłącznie wartości całkowite nieujemne i wyraża liczbę ukończonych przez x-latka pełnych lat życia.

## 36 Hipoteza agregacji

W praktyce ubezpieczeniowej przyjmuje się, że dla każdego  $x \in N_0$  dany jest rozkład zmiennej  $K_x$ . Jednakże budowanie tablic dla każdego  $x \in N_0$  byłoby w praktyce bardzo kłopotliwe i w istocie nie zawsze sensowne.

Wobec tego przyjmuje się tzw. hipotezę agregacji, które pozwala wyrazić każdy z rozkładów  $K_x$  za pomocą rozkładu zmiennej  $K_0$ . Mówimy mianowicie, że rodzina rozkładów  $(K_x : x \in N_0)$  spełnia **hipotezę agregacji** jeżeli, dla dowolnych  $x, k \in N_0$  spełniających warunek  $P(K_x \geq k) > 0$ , zachodzi równość

$$P(K_x \geq k) = P(K_0 \geq x + k | K_0 \geq x), (HA)$$

Przy założeniu hipotezy agregacji, dla dowolnych  $x \geq 0, k \in N_0$  zachodzi równość

$$P(K_x = k) = P_x \cdot q_{x+k} \quad (93)$$

### 37 Hipoteza jednostajności

Zakładając hipotezę agregacji możemy wyznaczyć wartości  ${}_nP_x$  dla wszystkich  $n, x \in N_0$ , mając dane jedynie wartości  ${}_nP_0$ . W celu opisanego zachowania się funkcji  $t \rightarrow {}_tp_x$  dla  $x \in N_0$ , między punktami  $t = 0, 1, \dots$ , stosuje się tzw. **hipotezy interpolacyjne**. Omówimy jedynie hipotezę jednostajności.

Mówimy, że rozkład  $T_x$  spełnia **hipotezę jednostajności** jeżeli, dla dowolnych  $n \in N_0$  oraz  $\lambda \in [0, 1)$  zachodzi równość

$${}_{n+\lambda}p_x = (1 - \lambda) {}_np_x + \lambda {}_{n+1}p_x, (HU) \quad (94)$$

Zauważmy, że (HU) oznacza, że dla każdego  $x \in N_0$  funkcja  $t \rightarrow {}_tp_x$  jest liniowa na każdym z przedziałów  $[n, n+1]$ , gdzie  $n \in N_0$ .

$$\lambda p_x = 1 - \lambda q_x \quad (95)$$

$$\lambda q_x = \lambda q_x \quad (96)$$

Istotnie ustalamy  $x \in N_0$  i  $\lambda \in [0, 1)$ . Stosując (HU) z  $n = 0$  otrzymamy

$$\lambda p_x = (1 - \lambda) + \lambda p_x = 1 - \lambda(1 - p_x) = 1 - \lambda q_x$$

co dowodzi (94).

## 38 Tablice trwania życia

Tablica trwania życia jest powszechnie stosowana metoda zestawienia informacji dotyczących rozkładu czasu życia. W naszych rozważaniach ograniczymy się do tablic trwania życia związanych ze zmienną losową  $K_0$  tzn. z obcietym przyszłym czasem życia 0-latka.

Przez **tablice trwania życia** (w skrócie TTŻ) zmiennej  $K_0$  będziemy rozumieć ciąg liczb nieujemnych  $(l_k : k \in N_0)$  spełniających zależność:

$$P(K_0 \geq k) = \frac{l_k}{l_0}, \text{ dla } k \in N_0 \quad (97)$$

Liczyby  $l_k$  mają następującą interpretację. Liczba  $l_0$  jest początkową liczebnością generacji (w praktyce najczęściej przyjmuje się  $l_0 = 100000$ ). Dla każdego  $k \geq 0$ ,  $l_k$  wyraża średnią liczbę członków generacji, dożywających powyżej wieku  $k$ . Z definicji TTŻ wynika, że jeżeli  $l_k = 0$  dla pewnego  $k \in N_0$  to dla każdego  $n \in N_0$  takiego że  $n \geq k$ , zachodzi  $l_n = 0$ . Zwykle w TTŻ zakłada się istnienie maksymalnego wieku  $\omega = \min k \in N_0 : l_k = 0$ .

Okazuje się, że mając daną tablicę trwania życia związaną ze zmienną  $K_0$  i zakładając hipotezę agregacji, można zbudować tablice trwania życia dla wszystkich  $K_x$ , gdzie  $x \in N_0$ . Są to tzw. **tablice zagregowane**. Opierając się one na równości

$${}_k p_x = P(K_x \geq k) = \frac{l_x + k}{l_x}, \text{ dla } k \in N_0 \quad (98)$$

Z równości (97) wynika, że dla każdego  $x \in N$  takiego, że  $l_x > 0$  zachodzi równość:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \quad (99)$$

oraz

$$q_x = 1 - p_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \quad (100)$$

Zwykle, poza wartościami  $l_x, x = 0, 1, \dots, \omega - 1$  w tablicach zamieszczone są inne wielkości które można otrzymać za pomocą  $l_x$ . Są to np.  $p_x, q_x$  czy też średnia liczba osób z początkowej generacji, które zmarły w wieku  $x$  lat, tzn.  $d_x := l_x - l_{x+1}$ .

### 38.1 Przykład 74

Obliczymy prawdopodobieństwo, że 50-letnia kobieta przeżyje co najmniej 5 lat.  
tzn  $P(K_{50} \geq 5)$

wzór (97)

$$P(K_{50} \geq 5) = {}_5p_{50} = \frac{l_{55}}{l_{50}} = 0,9841$$

### 38.2 Przykład 75

Obliczymy prawdopodobieństwo że 85-letni mężczyzna przeżyje co najmniej 0,75 roku.

Korzystając z hipotezy jednostajności (94)

$$P(T_{85} \geq 0,75) = {}_{0,75}p_{85} = 1 - 0,75 \cdot q_{85} = 0,9145$$

### 38.3 Przykład 76

Obliczymy prawdopodobieństwo że 50-letni mężczyzna przeżyje jeszcze co najmniej 2,5 roku.

stosujemy (HU)

$$P(T_{50} \geq 2,5) = {}_{2,5}p_{50} = 0,5 \cdot {}_2p_{50} + 0,5 \cdot {}_3p_{50} = 0,5 \frac{l_{52} + l_{53}}{2 \cdot l_{50}} = 0,9815$$

### 38.4 Przykład 77

Obliczymy prawdopodobieństwo, że 20-letnia kobieta przeżyje jeszcze co najmniej 40 lat ale nie więcej niż 45,25 roku.

tzn,  $P(40 < T_{20} \leq 45,25)$ , zatem stosując hipotezę (HU) i (92) otrzymujemy:

$$P(40 < T_{20} \leq 45,25) = {}_{40|5,25}q_{20} = {}_{40}p_{20} - {}_{45,25}p_{20} = {}_{40}p_{20} - ((1 - 0,25) {}_{45}p_{20} + 0,25 \cdot {}_{46}p_{20}) = \frac{l_{60}}{l_{20}} - (0,75 \frac{l_{65}}{l_{20}} + 0,25 \cdot \frac{l_{66}}{l_{20}}) = 0,0410$$

## 39 Podstawowe rodzaje ubezpieczeń życiowych

### 39.1 Ubezpieczenie na życie

- przedmiotem jest śmierć ubezpieczonego w trakcie trwania okresu ubezpieczenia..  
Typowym świadczeniem dodatkowym jest objęcie ochroną ubezpieczeniową utraty zdolności do pracy lub wypłata podwyższonej sumy ubezpieczenia, gdy śmierć nastąpiła wskutek wypadku.

Celem tego ubezpieczenia jest:

- zrekompensowanie utraconych dochodów przez okres umożliwiający rodzinie zmarłego znalezienie nowych źródeł utrzymania;
- zapewnienie spłaty zobowiązań, które stanowiłyby nadmierny wydatek dla rodziny zmarłego;

Wyróżnia się dwa warianty ubezpieczenia na życie:

1. Ubezpieczenie terminowe
2. Ubezpieczenie na całe życie

**Ubezpieczenie terminowe na życie** może być prowadzone przy stałej sumie ubezpieczenia lub przy obniżającą się sumą ubezpieczenia, równą niespłaconej kwocie kredytu. Składka wpłacana jest jednorazowo lub okresowo, przeważnie w równych ratach. Jest to ubezpieczenie o charakterze typowo ochronnym.

**Ubezpieczenie na całe życie** w każdym przypadku kończy się wypłata świadczenia z tytułu śmierci ubezpieczonego. Składka opłacana jest okresowo do końca trwania okresu ubezpieczenia albo do ustalonego czasu (np. do osiągnięcia przez ubezpieczonego wieku emerytalnego). Ubezpieczenie jest [rowadzone albo przy stałej składce, albo przy wzrastającej składce (i wzrastającej odpowiednio sumie ubezpieczenia) w celu zneutralizowania negatywnego wpływu inflacji i utrzymania realnej wartości sumy ubezpieczenia na stałym poziomie. W zależności od zapisów umowy, po ustalonym okresie trwania umowy ubezpieczający ma prawo zaprzestać ubezpieczenia i odzyskać część składki. Ubezpieczenie może być również zamienione na bezskładkowe.

## 40 Ubezpieczenie na dożycie

Ubezpieczenie na dożycie jest ubezpieczeniem o charakterze oszczędnościowym. Suma ubezpieczeniowa jest wypłacana w przypadku dożycia przez ubezpieczonego dokońca okresu ubezpieczenia. W przypadku śmierci ubezpieczonego przed końcem okresu ubezpieczenia ustaje, a wpłacone pieniądze przepadają. Jest to typowe ubezpieczenie dla osób samotnych nie zainteresowanych świadczeniami



w przypadku śmierci. Świadczenie jest wypłacane jednorazowe lub w postaci renty. Ubezpieczenie to występuje samodzielnie bardzo rzadko.

## 41 Ubezpieczenie mieszane (na życie i dożycie)

Celem ubezpieczenia mieszanego jest stworzenie ubezpieczonemu zabezpieczenia finansowego umożliwiającego utrzymanie poziomu życia w wieku emerytalnym, przy jednoczesnym zapewnieniu wsparcia rodzinie ubezpieczonego w przypadku jego śmierci w okresie ubezpieczenia. Każda umowa ubezpieczenia mieszanego kończy się wypłaceniem świadczenia w przypadku śmierci ubezpieczonego jak i przeżycia określonego wieku z umowy. Składki opłacane są przez cały okres ubezpieczenia, zaś świadczenia wypłacane jest jednorazowo lub w formie renty. Jako opja występuje niekiedy objęcie ochroną ubezpieczenia trwałej utraty zdolności do pracy zarobkowej. W takim przypadku ubezpieczyciel zawiesza pobieranie składek nie przerywając ochrony ubezpieczonego.

## 42 Ubezpieczenie rentowe

Wyróżnia się dwa podstawowe rodzaje ubezpieczeń rentowych.

1. Renty płatne natychmiast
2. Renty odroczone

W przypadku **renty płatnej natychmiast** pierwsza wypłata dokonywana jest bezpośrednio po zakupieniu renty, zaś składka jest opłacona w całości z góry, przed rozpoczęciem wypłacania świadczenia. Typowym zastosowaniem takiego rodzaju renty jest zakupienie jej za kwotę uzyskaną przez ubezpieczonego w wieku emerytalnym w przypadku dożycia do końca obowiązywania ubezpieczenia mieszanego. Innym przykładem jest zakupienie renty płatnej natychmiast w zamian za przeniesienie na ubezpieczyciela prawa własności domu zamowanego przez przyszłego rentobiorcy. Pozwala starszym osobom zwiększyć dochody przy jednoczesnym zachowaniu prawa do dożywotniego zamieszkania.

W przypadku **renty odroczonej** wypłata świadczenia rozpoczyna się po okresie odroczenia. Składki są opłacane regularnie przez cały okres odroczenia lub jego część. Możliwy jest wykup polisy lub przekształcenie w ubezpieczenie bezskładkowe. Wpłacony kapitał nie jest zapożyczony i może być podjęty wraz z odsetkami przez ubezpieczonego (po potrąceniu kosztów administracyjnych), ale tylko przed rozpoczęciem płatności renty. Po rozpoczęciu płatności zarówno jak ubezpieczeniowy jak i zakład ponoszą ryzyko wynikające z krótszego lub dłuższego życia ubezpieczonego (i pobierania renty). Niekiedy występuje połączenie renty życiowej z rentą pewną, płatną przez ustalony okres, wtedy niezależnie od śmierci ubezpieczonego. Ma to na celu uniknięcie zbyt dużych

strat osoby ubezpieczonej w przypadku wyjątku wczesnej śmierci, niedługo po rozpoczynaniu płatności renty. Ubezpieczenie rentowe często połączone jest z innymi typami ubezpieczeń (no. mieszanym), gdzie wypłata może być dokonywana w formie renty.

## 43 Jednorazowa składka netto

Zgodnie z umową ubezpieczeniową, ubezpieczony zobowiązany jest zapłacić składkę ubezpieczeniową jednorazowo w chwili zawarcia umowy albo systematycznie w trakcie jej trwania. Składka powinna być skalkulowana w ten sposób, aby też pozwolić na pokrycie kosztów działalności ubezpieczyciela i dać mu określony zysk. W tym rozdziale będziemy rozważać jednorazowe składki netto tzn. takie składki które są płacone jednorazowo w momencie zawierania umowy i mają pokryć środki na wypłatę sumy ubezpieczenia. Będziemy przy tym zakładać że suma ubezpieczenia wynosi 1, zaś stopa procentowa jest stała i równa  $i$ . Jednorazowe składki netto dla ubezpieczeń z wyższymi sumami obliczamy jako wielokrotności składki odpowiedniej polisy. Ponadto ograniczymy się do ubezpieczeń płatnych na koniec roku śmierci ubezpieczonego.

W przypadku ubezpieczeń życiowych **obecna wartość ubezpieczenia** do kwota, którą ubezpieczyciel powinien zainwestować w momencie zawarcia umowy aby uzyskać środki na wypłatę sumy ubezpieczenia. Obecna wartość ubezpieczenia jest więc zmienna losowa, gdyż moment ewentualnej wypłaty nie jest znany w chwili zawarcia umowy. Oznaczmy tę zmienną losową przez  $Z$ .

**Jednorazowa składka netto** (w skrócie JSN) nazywa się wartość oczekiwana zmiennej losowej  $Z$  tzn.  $JSN = E(Z)$ . W dalszym ciągu oznaczmy jednorazowe składki netto dla kilku wybranych ubezpieczeń i rent życiowych.

### 43.1 Ubezpieczenie na całe życie

Zmienna losowa  $Z$  a następujący rozkład (tabelka z rozkładem w pliku Excel o nazwie "JSN<sub>ubnaclezycie</sub>").

Zgodnie z Międzynarodowym Systemem Oznaczeń Aktuarnych, JSN ubezpieczenia na całe życie zawartego przez  $x$ -latka z sumą 1 płatną na koniec roku śmierci ubezpieczonego oznacza się przez  $A_x$ . Wobec tego uwzględniając (93) otrzymujemy:

$$A_x = \sum_i^\infty = 0v_k^{k+1} p_x q_{x+k} \quad (101)$$

Warto zwrócić uwagę, że jeśli założymy istnienie maksymalnego wieku to w sumie po prawej stronie (100) jest tylko pozorna nieskończoność.

#### 43.1.1 Przykład 78

Obliczymy JSN ubezpieczenia na całe życie z sumą ubezpieczenia równą 100 000 PLN. Przyjmiemy że roczna stopa procentowa  $i = 5\%$  zaś ubezpieczonym jest 50-latek mężczyzna.

Zgodnie z (100) mamy:

$$A_{50} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1,05}\right)_k^{k+1} p_{50} q_{50+k} = \sum_{k=0}^{50} \left(\frac{1}{1,05}\right)^{k+1} \frac{l_{50+k}}{l_{50}} 1_{50+k} = 31120,27 PLN$$

### 43.2 Ubezpieczenie terminowe na życie

Przyjmując że okres ubezpieczenia wynosi  $n$ -lat, otrzymujemy następujący rozkład zmiennej losowej  $Z$ .

Na oznaczenie JSN  $n$ -letniego ubezpieczenia terminowego na życie zawieranego przez  $x$ -latka z sumą 1, płatna na koniec roku śmierci ubezpieczonego używa się symbolu  $A_{x:n}^1$

$$A_x = \sum_i^n = {}_0v_k^{k+1} p_x q_{x+k} \quad (102)$$

#### 43.2.1 Przykład 79

Obliczymy JSN 10-letniego ubezpieczenia na życie z sumą ubezpieczenia równą 250 000 PLN. Przyjmiemy, że  $i = 5\%$  a ubezpieczonym jest a) 35-letni mężczyzna, b) 45-letnia kobieta

a)

$$A_{35:10}^1 =$$