**Odestkami** - nazywa sie kwote, która należy zapłacić za prawo użytkowania określonego kapitału. Odsetki sa zatem cena płacona za wypożyczenie kapitału. Ustala sie je w odniesieniu do pewnego ustalonego okresu. Stosunek odsetek do kapitału, który je wygenerował w ustalonym okresie, nazywa sie **okresowa stopa procentowa.**

W praktyce najcześciej mamy do czynienia ze stopami procentowymi ustalonymi dla okresy rocznego. Mówimy wtedy o **rocznej stopie procentowej**.

Jeżeli np. odsetki za 1 rok od pożyczonego kapitału 60 000 PLN wynosza 1 500 PLN, to roczna stopa procentowa jest równa $r = \frac{1500}{60000} = 2,5\%$.

Powiekszenie kapitału o odsetki, które zostały przez niego wygenerowane, nazywa sie **kapitalizacja odsetek**. Czas, w którym odsetki sa generowane, nazywa sie okresem kapitalizacji. W dalszym ciagu rozważań ograniczymy sie do przypadku, gdy odsetki sa dopisywane na końcu okresów kapitalizacji. Mówimy wtedy o kapitalizacji z dołu.

Wyróżniamy dwa podstawowe rodzaje kapitalizacji: **prosta i złożona**.

# 1 Kapitalizacja prosta

W przypadku kapitalizacji prostej odsetki od kapitału oblicza sie od kapitału poczatkowego proporcjonalnie od długości kresu oprocentowania. Oznaczamy przez $W$ poczatkowa wartość kapitału, przez $r$ roczna stope procentowa, przez $I_n$ należne za czas $n$, zaś przez $W_n$ oznaczamy końcowa wartość kapitału w czasie $n$ (w latach).

**Reguła bankowa** – każdy rok ma 360 dni, zaś każdy miesiac ma 30 dni.

$$I_n = Wnr \tag{1}$$

Natomiast wartość końcowa kapitału:

$$W_n = W(1 + nr) \tag{2}$$

## 1.1 Przykład 1

Przy kapitalizacji prostej i rocznej stopie procentowej $r = 4\%$ wyznaczyć odsetki i końcowa wartość kapitału 25 000 PLN po upływie a) 3lat, b) 142dni.

### 1.1.1 a)

$I_n = 25000 * 3 * 0,04 = 3000PLN$

### 1.1.2 b)

$W_n = 25000(1 + \frac{142}{360} + 0.04) = 25394,44PLN$

Załóżmy że czas trwania inwestycji wynosi $n$ lat i składa sie z $m$ nastepujacych po sobie okresów o długości $n_1, ...., n_m$. Przyjmijmy że w każdym z nich obowiazuje roczna stopa procentowa, odpowiednio, $r_1, ..., r_m$. Wtedy wartość kapitału poczatkowego $W$ po pierwszym okresie wyniesie:

$$W_n = W(1 + \Sigma_{i=0}^{m} r_i n_i) \tag{3}$$

$$I_n = W \Sigma_{i=0}^{m} r_i n_i \tag{4}$$

**Przecietna roczna stopa procentowa oprocentowania kapitału** $W$ w czasie $n$ nazywa sie roczna stope, przy której kapitał $W$ generuje w czasie $n$ odsetki o takiej samej wartości jak przy stopach zmiennych. Definicja ta dotyczy zarówno kapitalizacji prostej i złożonej.

Oznaczajac przez r(z kreska na górze) przecietna roczna stopa oprocen, na podstawie wzorów (1) i (4) mamy

$$r = \frac{1}{n} \Sigma_{i=1}^{m} r_i n_i \tag{5}$$

Gdyby wszystkie okresy miały jednakowa długość to wzór:

$$r = \frac{1}{m} \Sigma_{i=1}^{m} r_i \tag{6}$$

### 1.2 Przykład 2

Przez poczatkowe 4 miesiaca trwania obowiazywała roczna stopa procentowa 6

Dane:
$N_1 = \frac{4}{12}$
$N_2 = \frac{5}{12}$
$N_3 = \frac{3}{12}$

$R_1 = 0,06$
$R_2 = 0,07$
$R_3 = 0,075$
$W = 20000 PLN$

#### 1.2.1 a)

Korzystajac ze wzoru (3) mamy
$W_3 = 20000(1 + 0.06 * \frac{4}{12} + 0.07 * \frac{5}{12} + 0.075 * \frac{3}{12}) = 21358,40 PLN$

#### 1.2.2 b)

Obliczyć wysokość przecietnej rocznej stopy oprocentowania
Korzystajac ze wzory (5) mamy
$r = 0.06 * \frac{4}{12} + 0.07 * \frac{5}{12} + 0.075 * \frac{3}{12} = 6,79\%$

Czesto zdarza sie, że stopa procentowa, przy której należy obliczyć odsetki nie jest stopa roczna lecz np. miesieczna lub kwartalna. Okres, po którym odsetki podlegaja kapitalizacji nazywa sie **podokresem kapitalizacji**. Stopa procentowa ustalona dla podokresu kapitalizacji nazywa sie **stopa pod okresowa. Czestotliwość kapitalizacji** oznacza ile razy odsetki sa kapitalizowane w ciagu roku.

W dalszym ciagu zakładamy że czestotliwość kapitalizacji wynosi $m$. Wobec tego każdy rok jest podzielony na $m$ równych podokresów kapitalizacji.

$m = 1$ – kapitalizacja roczna
$m = 2$ – kapitalizacja półroczna
$m = 4$ – kapitalizacja kwartalna
$m = 12$ – kapitalizacja miesieczna
$m = 360$ – kapitalizacja dobowa(dzienna)

Jeżeli $r_{okr}$ jest stopa podokresowa, to zgodnie z zasada oprocentowania prostego odsetki od kapitału $W$ po upływie $k$ podokresów wyznacza sie ze wzoru

$$I_k = W k r_{okr} \tag{7}$$

Natomast końcowa wartość kapitału W po upływie $k$:

$$W_k = W(1 + kr_{okr}) \tag{8}$$

Załóżmy że $r_1$ i $r_2$ sa podokresowymi stopami procentowymi, zaś $m_1$ i $m_2$ sa odpowiadajacymi im czestotliwościami kapitalizacji. Stopy $r_1$ i $r_2$ nazywamy równoważnymi w czasie $n$, jeżeli przy każdej z nich odsetki od ustalonego kapitału po czasie $n$ sa równe.

Korzystając z (7) mamy:

$$m_1 * r_1 = m_2 * r_2 \tag{9}$$

Z (9) stopy pod okresowe sa wtedy i tylko wtedy ich stosunek jest równy stosunkowi długości odpowiadajacych im po okresów. Takie stopy pod okresowe nazywaja sie **proporcjonalnymi**.

## 1.3 Przykład 3

Kwartalna stopa oprocentowania prostego wynosi 6

### 1.3.1 a) roczna

$6 * 4 = 24\%$

### 1.3.2 b) miesieczna

$6/3 = 2\%$

### 1.3.3 c) tygodniowa

$6/12 = 0,5\%$

# 2 Kapitalizacja złożona

W przypadku **kapitalizacji złożonej** odsetki oblicza sie za każdy okres równy okresowi kapitalizacji i kapitalizuje sie je na koniec tego okresu. Załóżmy, że kwota $W$ została ulokowana na rachunku z roczna stopa procentowa równa $r$. W przypadku kapitalizacji złożonej dochód przynosi poczatkowy kapitał wraz z odsetkami uzyskanymi na koniec poprzedniego okresu kapitalizacji. Przez $I_n$ oznaczmy odsetki należne po czasie $n$, zaś przez $W_n$ oznaczmy wartość kapitału po $n$ latach. Wtedy:

$W_1 = w(1 + r)$

$$W_n = W(1 + r)^n \tag{10}$$

Liczba $(1+r)^n$ nazywa sie **czynnikiem wartości przyszłej** w kapitalizacji złożonej.

Odsetki po okresie n lat wynosza:

$$I_n = W((1 + r)^n - 1) \tag{11}$$

## 2.1 Przykład 4

Przy założeniu kapitalizacji złożonej i rocznej stopie procentowej r = 5%, wyznaczymy wartość kapitału 40 000 PLN i odsetki po upływie 4 lat.

$W_n = 40000(1 + 0, 05)^4 = 48620PLN$

$I_n = 48620 - 40000 - 8620PLN$

$I_n = 40000((1 + 0, 05)^4 - 1) = 8620PLN$

Podobnie jak w przypadku kapitalizacji prostej w kapitalizacji złożonej, możemy dopuścić zmienne stopy procentowe w kolejnych latach trwania inwestycji. Przyjmijmy, że w kolejnych latach stopy procentowe sa równe $r_1, r_2, ..., 4_n$ gdzie $n$ jest licza lat trwania inwestycji. Wtedy wartość poczatkowego kapitału $W$ po pierwszym roku wyniesie. $W_1 = W(1 + r_1)$, po drugim $W_2 = W(1 + r_1)(1 + r_2)$

Wartość kapitału po $n$ latach:

$$W_n = W\Pi_{i=1}^{n}(1 + r_i) \tag{12}$$

$$I_n = W(\Pi_{i=1}^{n}(1 + r_i) - 1) \tag{13}$$

Przecietna roczna stopa oprocentowania w przypadku kapitalizacji złożonej:

$$r = (\Pi_{i=1}^{n}(1 + r_1)^{\frac{1}{n}} - 1 \tag{14}$$

## 2.2 Przykład 5

Kapitał 20 000 PLN został ulokowany na okres 5 lat. Przy założeniu kapitalizacji złożonej i rocznej stopie procentowej równej w kolejnych latach, 5%, 6%, 5%, 4%, 7%, wyznaczymy wartości kapitału na koniec kolejnych lat oraz przecietna roczna stope oprocentowania tego kapitału w czasie 5 lat.

$W_1 = 21000PLN$

$W_5 = 20000(1+0.05)(1+0.06)(1+0.05)(1+0.04)(1+0.07) = 26009.47PLN$

$r = ((1 + 0.05)(1 + 0.06)(1 + 0.05)(1 + 0.04)(1 + 0.07))^{\frac{1}{5}} - 1 = 5.40\%$

Niech $r_{okr}$ bedzie stopa pod okresowa. Przy założeniu kapitalizacji złożonej, przyszła wartość kwoty $W$ po l latach i $n$ spośród $m$ pod okresów $l + 1$ roku, gdzie $0 \leq n < m$ wynosi:

$$W_{(l,n)}^{(m)} = W(1 + r_{okr})^{l*m+n} \tag{15}$$

## 2.3 Przykład 6

Zakładajac kapitalizacje a) półroczna, b) kwartalna c) miesieczna i przyjmujac stope pod okresowa $r_{okr} = 2\%$ wyznaczyć przyszła wartość kapitału 20 000 PLN po 2 latach i 6 miesiacach.

### 2.3.1 a)

$W_{(2,1)}^{(2)} = W(1 + 0,02)^{2*2+1} = 22081,62PLN$

### 2.3.2 b)

$W_{(2,2)}^{(4)} = W(1 + 0,02)^{10} = 24379,89PLN$

### 2.3.3 c)

$W^{(12)}_{(2,6)} = W(1+0,02)^{30} = 36227,23PLN$

Roczna stopa procentowa $r$ proporcjonalna do danej stopy pod okresowej $r_{okr}$ nazywa sie **stopa nominalna**. ( wyliczyć rocza stope, np. jak miesieczna jest 1% to roczna jest 12% itp.)

$$W^{(m)}_{(l,n)} = W(1+\frac{r}{m})^{l*m+n} \tag{16}$$

Przyjmujac n = 0 wtedy:

$$W^{(m)}_{l} = W(1+\frac{r}{m})^{l*m} \tag{17}$$

Liczbe:

$$R_m = (1+\frac{r}{m})^{m} \tag{18}$$

Nazywa sie rocznym **czynnikiem oprocentowania**.

## 2.4 Przykład 7

Kapitał w wysokości 40 000 PN został ulokowany na rachunku z nominalna stopa procentowa równa 12%. Zakładajac kapitalizacje, roczna, półroczna, kwartalna, miesieczna oraz dzienna, wyznaczyć przyszła wartość kapitału po 4 latach.

Ze wzory (17)

$W(1)4 = 62940,77PLN$

$W(2)4 = 63753.92PLN$

$W(4)4 = 64188.26PLN$

$W(12)4 = 64489.04PLN$

$W(360)4 = 64606.80PLN$

## 2.5 Przykład 8

Wyznaczymy wartość kapitału 40 000 PLN po 5 ltach i 9 miesiacach przy założeniu że roczna stopa procentowa wynosi 6%, a kapitalizacji odsetek jest a) kwartalna, b) miesieczna.

Korzystajac(16)

### 2.5.1 a)

$W^4_{(5,3)} =$

### 2.5.2 b)

$W^{12}_{(5,9)} =$

## 2.6 Przykład 9

Przy założeniu miesiecznej kapitalizacji odsetek i rocznych stopach procentowych równych 6% w pierwszym i drugim roku. 9% w trzecim i 12% w czwartym roku wyznaczyć wartość kapitału 100 000 PLN po a)3 latach i 7 miesiacach b) 4 latach.

X = kapitał po 3latach i 7 m

Y = po 4 latach

Wzór (16)

$X = 100000 * (1 + \frac{0,06}{12})^2 4 * (1 + \frac{0,09}{12})^1 2 * (1 + \frac{0,12}{12}/12)^7 = 132183 PLN$

$Y = 100000 * (1 + \frac{0,06}{12})^2 4 * (1 + \frac{0,09}{12})^1 2 * (1 + \frac{0,12}{12}/12)^1 2 = 138925,70 PLN$

## 2.7 Przykład 10

Przy miesiecznej kapitalizacji odsetek i nominalnej stopie procentowej równej 3% po 1 roku i 7 miesiacach uzyskano z lokaty 100 PLN odsetek. Jaka była kwota lokaty?

Odsetki uzyskane z inwestycji stanowia różnice miedzy wartościa kapitału po 1r i 7m a jego wartościa poczatkowa. W = ?

$W^{12}_{(1,7)} - W = 100 \Rightarrow W = 2058,29 PLN$

# 3 Równoważność stóp pod okresowych przy kapitalizacji złożonej

Załóżmy że $r_1$ i $r_2$ sa pod okresowymi stopami procentowymi, zaś $m_1$ i $m_2$ sa odpowiadajacymi im czestotliwościami kapitalizacji. Stopy $r_1$ i $r_2$ **nazywamy równoważnymi w czasie** $l$ **lat**, gdzie $l \in N$, jeżeli przy każdej z nich odsetki od ustalonego kapitału po $l$ latach sa równe.