Contents

1 Wstep

Odestkami - nazywa sie kwote, która należy zapłacić za prawo użytkowania określonego kapitału. Odsetki sa zatem cena płacona za wypożyczenie kapitału. Ustala sie je w odniesieniu do pewnego ustalonego okresu. Stosunek odsetek do kapitału, który je wygenerował w ustalonym okresie, nazywa sie **okresowa stopa procentowa.**

W praktyce najcześciej mamy do czynienia ze stopami procentowymi ustalonymi dla okresy rocznego. Mówimy wtedy o **rocznej stopie procentowej**.

Jeżeli np. odsetki za 1 rok od pożyczonego kapitału 60 000 PLN wynosza 1 500 PLN, to roczna stopa procentowa jest równa $r = \frac{1500}{60000} = 2,5\%$.

Powiekszenie kapitału o odsetki, które zostały przez niego wygenerowane, nazywa sie **kapitalizacja odsetek**. Czas, w którym odsetki sa generowane, nazywa sie okresem kapitalizacji. W dalszym ciagu rozważań ograniczymy sie do przypadku, gdy odsetki sa dopisywane na końcu okresów kapitalizacji. Mówimy wtedy o kapitalizacji z dołu.

Wyróżniamy dwa podstawowe rodzaje kapitalizacji: **prosta i złożona**.

2 Kapitalizacja prosta

W przypadku kapitalizacji prostej odsetki od kapitału oblicza sie od kapitału poczatkowego proporcjonalnie od długości kresu oprocentowania. Oznaczamy przez W poczatkowa wartość kapitału, przez r roczna stope procentowa, przez I_n należne za czas n, zaś przez W_n oznaczamy końcowa wartość kapitału w czasie n (w latach).

Reguła bankowa – każdy rok ma 360 dni, zaś każdy miesiac ma 30 dni.

$$I_n = Wnr \tag{1}$$

Natomiast wartość końcowa kapitału:

$$W_n = W(1 + nr) \tag{2}$$

2.1 Przykład 1

Przy kapitalizacji prostej i rocznej stopie procentowej $r = 4\%$ wyznaczyć odsetki i końcowa wartość kapitału 25 000 PLN po upływie a) 3lat, b) 142dni.

2.1.1 a)

$I_n = 25000 * 3 * 0,04 = 3000 PLN$

2.1.2 b)

$W_n = 25000(1 + \frac{142}{360} + 0.04) = 25394,44 PLN$

Załóżmy że czas trwania inwestycji wynosi n lat i składa sie z m nastepujacych po sobie okresów o długości $n_1, ..., n_m$. Przyjmijmy że w każdym z nich obowiazuje roczna stopa procentowa, odpowiednio, $r_1, ..., r_m$. Wtedy wartość kapitału poczatkowego W po pierwszym okresie wyniesie:

$$W_n = W(1 + \Sigma_{i=0}^{m} r_i n_i) \tag{3}$$

$$I_n = W \Sigma_{i=0}^{m} r_i n_i \tag{4}$$

Przecietna roczna stopa procentowa oprocentowania kapitału W w czasie n nazywa sie roczna stope, przy której kapitał W generuje w czasie n odsetki o takiej samej wartości jak przy stopach zmiennych. Definicja ta dotyczy zarówno kapitalizacji prostej i złożonej.

Oznaczajac przez r(z kreska na górze) przecietna roczna stopa oprocen, na podstawie wzorów (1) i (4) mamy

$$r = \frac{1}{n} \Sigma_{i=1}^{m} r_i n_i \tag{5}$$

Gdyby wszystkie okresy miały jednakowa długość to wzór:

$$r = \frac{1}{m} \Sigma_{i=1}^{m} r_i \tag{6}$$

2.2 Przykład 2

Przez poczatkowe 4 miesiaca trwania obowiazywała roczna stopa procentowa 6
Dane:

$N_1 = \frac{4}{12}$

$N_2 = \frac{5}{12}$

$N_3 = \frac{3}{12}$

$R_1 = 0,06$

$R_2 = 0,07$

$R_3 = 0,075$

$W = 20000PLN$

2.2.1 a)

Korzystajac ze wzoru (3) mamy
$W_3 = 20000(1 + 0.06 * \frac{4}{12} + 0.07 * \frac{5}{12} + 0.075 * \frac{3}{12}) = 21358,40PLN$

2.2.2 b)

Obliczyć wysokość przecietnej rocznej stopy oprocentowania
Korzystajac ze wzory (5) mamy
$r = 0.06 * \frac{4}{12} + 0.07 * \frac{5}{12} + 0.075 * \frac{3}{12} = 6,79\%$

Czesto zdarza sie, że stopa procentowa, przy której należy obliczyć odsetki nie jest stopa roczna lecz np. miesieczna lub kwartalna. Okres, po którym odsetki podlegaja kapitalizacji nazywa sie **podokresem kapitalizacji**. Stopa procentowa ustalona dla podokresu kapitalizacji nazywa sie **stopa pod okresowa. Czestotliwość kapitalizacji** oznacza ile razy odsetki sa kapitalizowane w ciagu roku.

W dalszym ciagu zakładamy że czestotliwość kapitalizacji wynosi m. Wobec tego każdy rok jest podzielony na m równych podokresów kapitalizacji.

$m = 1$ – kapitalizacja roczna

$m = 2$ – kapitalizacja półroczna

$m = 4$ – kapitalizacja kwartalna

$m = 12$ – kapitalizacja miesieczna

$m = 360$ – kapitalizacja dobowa(dzienna)

Jeżeli r_{okr} jest stopa podokresowa, to zgodnie z zasada oprocentowania prostego odsetki od kapitału W po upływie k podokresów wyznacza sie ze wzoru

$$I_k = Wkr_{okr} \tag{7}$$

Natomiast końcowa wartość kapitału W po upływie k:

$$W_k = W(1 + kr_{okr}) \tag{8}$$

Załóżmy że r_1 i r_2 sa podokresowymi stopami procentowymi, zaś m_1 i m_2 sa odpowiadajacymi im czestotliwościami kapitalizacji. Stopy r_1 i r_2 nazywamy równoważnymi w czasie n, jeżeli przy każdej z nich odsetki od ustalonego kapitału po czasie n sa równe.

Korzystajac z (7) mamy:

$$m_1 * r_1 = m_2 * r_2 \tag{9}$$

Z (9) stopy pod okresowe sa wtedy i tylko wtedy ich stosunek jest równy stosunkowi długości odpowiadajacych im po okresów. Takie stopy pod okresowe nazywaja sie **proporcjonalnymi**.

2.3 Przykład 3

Kwartalna stopa oprocentowania prostego wynosi 6

2.3.1 a) roczna

$6 * 4 = 24\%$

2.3.2 b) miesieczna

$6/3 = 2\%$

2.3.3 c) tygodniowa

$6/12 = 0,5\%$

3 Kapitalizacja złożona

W przypadku **kapitalizacji złożonej** odsetki oblicza sie za każdy okres równy okresowi kapitalizacji i kapitalizuje sie je na koniec tego okresu. Załóżmy, że kwota W została ulokowana na rachunku z roczna stopa procentowa równa r. W przypadku kapitalizacji złożonej dochód przynosi poczatkowy kapitał wraz z odsetkami uzyskanymi na koniec poprzedniego okresu kapitalizacji. Przez I_n oznaczmy odsetki należne po czasie n, zaś przez W_n oznaczmy wartość kapitału po n latach. Wtedy: $W_1 = w(1 + r)$

$$W_n = W(1 + r)^n \tag{10}$$

Liczba $(1+r)^n$ nazywa sie **czynnikiem wartości przyszłej** w kapitalizacji złożonej.

Odsetki po okresie n lat wynosza:

$$I_n = W((1 + r)^n - 1) \tag{11}$$

3.1 Przykład 4

Przy założeniu kapitalizacji złożonej i rocznej stopie procentowej r = 5%, wyznaczymy wartość kapitału 40 000 PLN i odsetki po upływie 4 lat.

$W_n = 40000(1 + 0,05)^4 = 48620PLN$

$I_n = 48620 - 40000 - 8620PLN$

$I_n = 40000((1 + 0,05)^4 - 1) = 8620PLN$

Podobnie jak w przypadku kapitalizacji prostej w kapitalizacji złożonej, możemy dopuścić zmienne stopy procentowe w kolejnych latach trwania inwestycji. Przyjmijmy, że w kolejnych latach stopy procentowe sa równe $r_1, r_2, ..., 4_n$ gdzie n jest licza lat trwania inwestycji. Wtedy wartość poczatkowego kapitału W po pierwszym roku wyniesie. $W_1 = W(1 + r_1)$, po drugim $W_2 = W(1 + r_1)(1 + r_2)$

Wartość kapitału po n latach:

$$W_n = W\Pi_{i=1}^{n}(1 + r_i) \tag{12}$$

$$I_n = W(\Pi_{i=1}^{n}(1 + r_i) - 1) \quad (13)$$

Przecietna roczna stopa oprocentowania w przypadku kapitalizacji złożonej:

$$r = (\Pi_{i=1}^{n}(1 + r_1))^{\frac{1}{n}} - 1 \quad (14)$$

3.2 Przykład 5

Kapitał 20 000 PLN został ulokowany na okres 5 lat. Przy założeniu kapitalizacji złożonej i rocznej stopie procentowej równej w kolejnych latach, 5%, 6%, 5%, 4%, 7%, wyznaczymy wartości kapitału na koniec kolejnych lat oraz przecietna roczna stope oprocentowania tego kapitału w czasie 5 lat.

$W_1 = 21000PLN$

$W_5 = 20000(1+0.05)(1+0.06)(1+0.05)(1+0.04)(1+0.07) = 26009.47PLN$

$r = ((1 + 0.05)(1 + 0.06)(1 + 0.05)(1 + 0.04)(1 + 0.07))^{\frac{1}{5}} - 1 = 5.40\%$

Niech r_{okr} bedzie stopa pod okresowa. Przy założeniu kapitalizacji złożonej, przyszła wartość kwoty W po l latach i n spośród m pod okresów $l + 1$ roku, gdzie $0 \leq n < m$ wynosi:

$$W_{(l,n)}^{(m)} = W(1 + r_{okr})^{l*m+n} \quad (15)$$

3.3 Przykład 6

Zakładajac kapitalizacje a) półroczna, b) kwartalna c) miesieczna i przyjmujac stope pod okresowa $r_{okr} = 2\%$ wyznaczyć przyszła wartość kapitału 20 000 PLN po 2 latach i 6 miesiacach.

3.3.1 a)

$W_{(2,1)}^{(2)} = W(1 + 0,02)^{2*2+1} = 22081,62PLN$

3.3.2 b)

$W_{(2,2)}^{(4)} = W(1 + 0,02)^{10} = 24379,89PLN$

3.3.3 c)

$W_{(2,6)}^{(12)} = W(1+0,02)^{30} = 36227,23PLN$

Roczna stopa procentowa r proporcjonalna do danej stopy pod okresowej r_{okr} nazywa sie **stopa nominalna**. (wyliczyć roczna stope, np. jak miesieczna jest 1% to roczna jest 12% itp.)

$$W_{(l,n)}^{(m)} = W(1+\frac{r}{m})^{l*m+n} \tag{16}$$

Przyjmujac n = 0 wtedy:

$$W_{l}^{(m)} = W(1+\frac{r}{m})^{l*m} \tag{17}$$

Liczbe:

$$R_m = (1+\frac{r}{m})^{m} \tag{18}$$

Nazywa sie rocznym **czynnikiem oprocentowania**.

3.4 Przykład 7

Kapitał w wysokości 40 000 PN został ulokowany na rachunku z nominalna stopa procentowa równa 12%. Zakładajac kapitalizacje, roczna, półroczna, kwartalna, miesieczna oraz dzienna, wyznaczyć przyszła wartość kapitału po 4 latach.

Ze wzory (17)

$W(1)4 = 62940,77PLN$

$W(2)4 = 63753.92PLN$

$W(4)4 = 64188.26PLN$

$W(12)4 = 64489.04PLN$

$W(360)4 = 64606.80PLN$

3.5 Przykład 8

Wyznaczymy wartość kapitału 40 000 PLN po 5 latach i 9 miesiacach przy założeniu że roczna stopa procentowa wynosi 6%, a kapitalizacji odsetek jest a) kwartalna, b) miesieczna.

Korzystajac(16)

3.5.1 a)

$W^{4}_{(5,3)} =$

3.5.2 b)

$W^{12}_{(5,9)} =$

3.6 Przykład 9

Przy założeniu miesiecznej kapitalizacji odsetek i rocznych stopach procentowych równych 6% w pierwszym i drugim roku. 9% w trzecim i 12% w czwartym roku wyznaczyć wartość kapitału 100 000 PLN po a)3 latach i 7 miesiacach b) 4 latach.

X = kapitał po 3 latach i 7 m

Y = po 4 latach

Wzór (16)

$X = 100000 * (1 + \frac{0,06}{12})^{24} * (1 + \frac{0,09}{12})^{12} * (1 + \frac{0,12}{12})^{7} = 132183PLN$

$Y = 100000 * (1 + \frac{0,06}{12})^{24} * (1 + \frac{0,09}{12})^{12} * (1 + \frac{0,12}{12})^{12} = 138925,70PLN$

3.7 Przykład 10

Przy miesiecznej kapitalizacji odsetek i nominalnej stopie procentowej równej 3% po 1 roku i 7 miesiacach uzyskano z lokaty 100 PLN odsetek. Jaka była kwota lokaty?

Odsetki uzyskane z inwestycji stanowia różnice miedzy wartościa kapitału po 1 roku i 7 miesiacach a jego wartościa poczatkowa. W = ?

$W^{12}_{(1,7)} - W = 100 \Rightarrow W = 2058,29PLN$

4 Równoważność stóp pod okresowych przy kapitalizacji złożonej

Załóżmy że r_1 i r_2 sa pod okresowymi stopami procentowymi, zaś m_1 i m_2 sa odpowiadajacymi im czestotliwościami kapitalizacji. Stopy r_1 i r_2 **nazywamy równoważnymi w czasie** l **lat**, gdzie $l \in N$, jeżeli przy każdej z nich odsetki od ustalonego kapitału po l latach sa równe.

Zauważmy, że równość odsetek po l latach oznacza równość wartości kapitału po tym czasie. Zatem, uwzgledniajac wzór (15) otrzymujemy, że podokresowe stopy procentowe r_1 i r_2 sa równoważne w czasie l lat, wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$(1 + r_1)^{m_1} = (1 + r_2)^{m_2} \tag{19}$$

Korzystajac ze wzory (17) warunek (19) można przedstawić w nastepujacej równoważnej postaci:

$$(1 + \frac{r_1}{m_1})^{m_1} = (1 + \frac{r_2}{m_2})^{m_2} \tag{20}$$

gdzie r_1 i r_2 sa nominalnymi stopami procentowymi, odpowiednio r_1 i r_2.

4.1 Przykład 11

Wyznaczymy miesieczna stope procentowa równoważna kwartalnej stopie procentowej $r_{okr}^{(1)} = 4\%$.

Ponieważ $r_1 = \%, m_1 = 4im_2 = 12$ na podstawie (1) mamy:

$(1 + 0,04)^4 = (1 + r_2)^{12}$.

Stad $r_2 = (1 + 0,04)^{\frac{4}{12}} - 1 = 1,3159\%$

4.2 Przykład 12

Wyznaczymy nominalna stope procentowa, która przy kapitalizacji kwartalnej jest równoważna nominalnej stopie $r_1 = 5\%$ przy kapitalizacji półrocznej.

Korzystajac ze wzoru (20) z $r_1 = 5\%, m_1 = 2im_2 = 4$ dostajemy:

$(1 + \frac{0,05}{2})^2 = (1 + \frac{r_2}{4})^4 \Rightarrow r_2 = 4,9691\%$

5 Efektywna stopa procentowa

Efektywna stopa procentowa nazywa sie roczna stope procentowa równoważna danej podokresowej stopie procentowej. Wobec tego, jeśli r_{okr} jest podokresowa stopa procentowa, zaś m jest czestotliwościa kapitalizacji, to korzystajac z (19) mamy:

$$r_{ef}^{(m)} = (1 + r_{okr})^m - 1 \tag{21}$$

Z kolei na podstawie (2), efektywna stope procentowa odpowiadajaca nominalnej stopie procentowej r przy m-krotnej kapitalizacji w ciagu roku, wyznacza sie z równania:

$$r_{ef}^{(m)} = (1 + \frac{r}{m})^m - 1 \tag{22}$$

Efektywna stopa procentowa pozwala na zmiane okresu stopy procentowej bez zmiany efektywności kapitalizacji.

5.1 Przykład 13

Wyznaczymy efektywna stope procentowa odpowiadajaca nominalnej stopie procentowej równiej 6% przy kapitalizacji: półrocznej, kwartalnej, miesiecznej, dziennej.

Korzystajac ze wzoru (22), otrzymujemy

$r_{ef}^{(m)} = (1 + \frac{0,06}{2})^2 - 1 = (1,03)^2 - 1 = 6,09\%$

$r_{ef}^{(m)} = (1 + \frac{0,06}{4})^4 - 1 = (1,015)^4 - 1 = 6,14\%$

$r_{ef}^{(m)} = (1 + \frac{0,06}{12})^1 2 - 1 = (1,005)^1 2 - 1 = 6,17\%$

$r_{ef}^{(m)} = (1 + \frac{0,06}{360})^3 60 - 1 = (1,00016)^3 60 - 1 = 6,18\%$

Do wyznaczania efektywnej stopy procentowej stopy procentowej można zastosować formułe **EFEKTYWNA** wbudowana w pakiecie MS Excel. Jej argumentami sa stopa nominalna i liczba okresów.

5.1.1 a)

$EFEKTYWNA(6\%, 2) = 6.0900\%$

5.2 Przykład 14

Wyznaczymy nominalna stope procentowa, której przy: a) kwartalnej, b) miesiecznej kapitalizacji odsetek odpowiada efektywna stopa procentowa równa 5%.

Wyznaczajac r ze wzoru (22), dostajemy:

$$r = m(\sqrt{1 + r_{ef}^{(m)}} - 1)$$

5.2.1 a)

$r = 4,9089\%$

5.2.2 b)

$r = 4,8889\%$

Do wyznaczania nominalnej stopy procentowej można zastosować formułe **NOMINALNA** z Excela. Jej argumentami sa stopa efektywna i liczba okresów.

6 Kapitalizacja ciagła

Jeżeli przy m-krotnej kapitalizacji w ciagu roku powieksza sie liczba okresów, to w granicy przy $m \to \infty$ mamy do czynienia z ciagła kapitalizacja odsetek. W takim przypadku na podstawie wzoru (17) wartość kapitału W po l latach można wyznaczyć w nastepujacy sposób.

$$W_l^{(\infty)} = We^{l*r} \tag{23}$$

Można pokazać, że wzór (23) jest prawdziwy dla $l > 0$

6.1 Przykład 15

Przy założeniu ciagłej kapitalizacji odsetek i rocznej stopie procentowej $r =$ 5% wyznaczymy wartość kwoty 10 000 PLN po: a) 8 latach, b) 4 latach i 7 miesiacach.

6.1.1 a)

ze wzoru (23), $W = 10000, l = 8, r = 5\%$

$$W = 10000 * e^{8*0,05} = 10000 * e^{0,04} = 14918,25$$

6.1.2 b)

ze wzoru (23), $W = 10000, l = 4\frac{7}{12}, r = 5\%$

$$W = 10000 * e^{4\frac{7}{12}*0,05} = 10000 * e^{0,2292} = 12575,94$$

7 Natężenie procentowe

W przypadku ciagłej kapitalizacji odsetek efektywna stope procentowa wyznacza sie z równania:

$$l + r_{ef} = e^r \tag{24}$$

gdzie r jest stopa nominalna. Zatem:

$$r_{ef} = e^r - 1 \tag{25}$$

Jeżeli natomiast dana jest efektywna stopa procentowa r_{ef} to z (24) otrzymujemy stope nominalna:

$$r = ln(1 + r_{ef}) \tag{26}$$

Nazywa sie natężeniem oprocentowania zwiazanym z efektywna stopa procentowa r_{ef}.

7.1 Przykład 16

Wyznaczymy natężenie oprocentowania zwiazane z efektywna stopa procentowa równa 6%.

Stosujac (26):

$r = ln(1 + 0,06) = Ln(1,06) = 5,83\%$

8 Dyskonto proste i składane

Teraz zajmiemy sie zagadnieniem ustalania poczatkowej wartości kapitału na podstawie jego wartości na końcu pewnego okresu. Proces ten nazywa sie **dyskontowaniem**.

Dyskonto proste, które jest bezpośrednio zwiazane z prosta kapitalizacja odsetek. W przypadku kapitalizacji prostej na podstawie (2), wartość kapitału poczatkowego W po n latach.

W przypadku dyskonta prostego, obecna wartość kapitału W, która mamy otrzymać (badź zapłacić) za n lat wyznacz sie na podstawie równości:

$$PV(W) = \frac{W}{1+nr} \tag{27}$$

Dyskontem nazywa sie różnice miedzy wartościa kapitału na końcu pewnego ustalonego okresu, a jego wartościa na poczatku tego okresu. Oznaczajac dyskonta przed D i uwzgledniajac (27) otrzymujemy:

$$D = \frac{nrW}{1+nr} \tag{28}$$

8.1 Przykład 17

Zakładajac dyskonto proste i przyjmujac stope procentowa $r = 4\%$ wyznaczyć wartość oraz dyskonto kwoty 50 000 PLN która mamy otrzymać za 8 lat.

Korzystajac z (27, 28) $W = 50000, r = 0,04, n = 8$

$PV = \frac{50000}{1+8*0,04} = 37878,79$

$D = 50000 - 37878,79 = 12121,21$

W przypadku **dyskonta składanego**, przy rocznej kapitalizacji odsetek wartość kapitału poczatkowego W po n latach, wyznaczona na podstawie wzoru (10).

Zatem obecna wartość kapitału W która mamy otrzymać (badź zapłacić) za n lat wyznacza sie z równości:

$$PV(W) = \frac{W}{(1+r)^n} \tag{29}$$

Wielkość $\frac{1}{(1+r)}$ nazywa sie **rocznym czynnikiem dyskontujacym**. Dyskonto wyraża sie w tym przypadku wzorem:

$$PD = W(1 - \frac{1}{(1+r)^n}) \tag{30}$$

8.2 Przykład 18

Zakładajac dyskonto składane i przyjmujac stope procentowa $r = 4\%$ wyznaczyć wartość oraz dyskonto kwoty 50 000 PLN która mamy otrzymać za 8 lat.

Korzystajac z (29, 30) $W = 50000, r = 0,04, n = 8$

$PV = \frac{50000}{(1+0,04)^8} = 36534,51$

$D = 50000 - 36534,51 = 13465,49$

9 Dyskonto przy wielokrotnej kapitalizacji w ciagu roku

Załóżmy że kapitalizacja odsetek odbywa sie m-krotnie w ciagu roku (w równoległych odstepach czasu). Wówczas korzystajac ze wzoru (16) obecna wartość $PV(W)$ kwoty W, która mamy otrzymać w przyszłości po l latach i n spośród m podokresów $l+1$ roku $(0 <= n < m$ wyznaczamy wzór:

$$PV(W) - \frac{W}{(1+\frac{r}{m})^{lm+n}} \tag{31}$$

Wzór na dyskonto a postać:

$$D = W(1 - \frac{1}{(1+\frac{r}{m})^{lm+n}}) \tag{32}$$

W szczególnym przypadku gdy $n = 0$ możemy wyznaczyć obecna wartość kwoty W, która mamy otrzymać po l latach:

$$PV(W) - \frac{W}{(1+\frac{r}{m})^{lm}} \tag{33}$$

Wzór na dyskonto ma w tym przypadku postać:

$$D = W(1 - \frac{1}{(1+\frac{r}{m})^{lm}}) \tag{34}$$

9.1 Przykład 19

Przyjmujac nominalna stope procentowa $r = 6\%$ i zakładajac kapitalizacje a) kwartalna, b) miesieczna, wyznaczyć obecna wartość i dyskonto kwoty 50 000 PLN, która mamy otrzymać za 2 lata i 3 miesiace.

9.1.1 a)

ze wzoru (31)

$PV = \frac{50000}{(1+\frac{0,06}{4})^9} = 43729,61PLN$

$D = 50000 - 43729,61 = 6270,39PLN$

9.1.2 b)

ze wzoru (31)

$PV = \frac{50000}{(1+\frac{0,06}{12})^{27}} = 43700,49 PLN$

$D = 50000 - 43700,49 = 6299,51 PLN$

9.2 Przykład 20

Przyjmujac nominalna stope procentowa równa $r = 6\%$ i zakładajac kapitalizacje a) półroczna, b) miesieczna, c) dzienna, wzyanczyć obecna wartość kwoty 100 000 PLN, która mamy otrzymać za 3 lata. W każdym przypadku wyznaczyć wartość dyskonta

9.2.1 a)

używamy wzoru (33)

$PV = \frac{100000}{(1+\frac{0,06}{2})^{6}} = 83748,43 PLN$

$D = 100000 - 83748,43 = 16251,57 PLN$

9.2.2 b)

$PV = \frac{100000}{(1+\frac{0,06}{12})^{36}} = 83564,49 PLN$

$D = 100000 - 83564,49 = 16435,51 PLN$

9.2.3 c)

$PV = \frac{100000}{(1+\frac{0,06}{360})^{1080}} = 83528,27 PLN$

$D = 100000 - 83528,27 = 16471,73 PLN$

9.3 Przykład 21

Przy założeniu miesiecznej kapitalizacji odsetek obecna wartość kwota 40 000 PLN, która mamy otrzymać za 2 lata wynosi 36 500 PLN. Wyznaczyć wysokość nominalnej stopy procentowej.

Przez r oznaczmy szukana nominalna stope procentowa.

Korzystajac z (33) otrzymujemy równanie na r

$36500 = \frac{40000}{(1+\frac{r}{12})^{24}}$

$(1+\frac{r}{12})^{24}=\frac{40000}{36500}$

$r=12(1,0959^{\frac{1}{24}}-1)=4,59\%$

10 Dyskonto przy kapitalizacji ciagłej

W przypadku ciagłej kapitalizacji odsetek, obecna wartość kwoty W, która mamy otrzymać za n lat, wyznacza sie z równania $W = PV(W) * e^{rn}$, gdzie r jest roczna stopa procentowa. Stad:

$$PV(W) = W * e^{-r*n} \tag{35}$$

Wzór na dyskonto ma postać

$$D = W(1 = e^{-r*n}) \tag{36}$$

Wzory (35) i (36) pozostaja prawdziwe dla dowolnego $n > 0$.

10.1 Przykład 22

Zakładajac ciagła kapitalizacje odsetek i otrzymujac roczna stope procentowa równa $r = 5\%$, wyznaczyć obecna wartość i dyskonto kwoty 50 000 PLN, która mamy otrzymać za 3 lata i 5 miesiecy.

Wzór (35)

$PV(W) = 50000 \cdot e^{-3\frac{5}{12} \cdot 0,05} = 42148,10PLN$

$D = 50000 - 42148,10 = 7851,90PLN$

10.2 Przykład 23

Przy założeniu ciagłej kapitalizacji odsetek, obecna wartość kwoty 100 000 PLN, która mamy otrzymać za 8 lat wynosi 80 000 PLN. Wyznaczyć efektywna stope procentowa.

Przez r oznaczamy szukana roczna stope procentowa

Ze wzoru (35)

$80000 = 100000 \cdot e^{-8r}$

$\frac{80000}{100000} = e^{-8r}$

$lne^{-8r} = ln0,8$

$-8r = ln0,8$

$r = -\frac{1}{8} ln 0,8$

$r = 0,0279$

$r = 2,79\%$

Efektywna stopa wynosi ze wzoru (25):

$r_{ef} = e^r - 1 = e^{0,0279} - 1 = 2,93\%$

11 Dyskonto handlowe

Nasze dotychczasowe rozważania dotyczyły dyskonta rzeczywistego, tzn. dyskonta opartego na stopie procentowej. Teraz omówimy dyskonto handlowe. Ograniczymy sie przy tym jedynie do dyskonta handlowego prostego, gdyż dyskonto handlowe składane na ogół nie jest wykorzystywane w praktyce.

Dyskontem handlowym nazywa sie opłate za pożyczke obliczona na podstawie kwoty, która dłużnik zwóci po ustalonym czasie, zapłacona w chwili otrzymania pożyczki.

Dyskonto handlowe jest również nazywane odsetkami płatnymi z góry, co trafnie oddaje istote dyskonta, które należy zapłacić w momencie otrzymania pożyczki, a nie przy jej zwrocie.

Zasada dyskonta prostego mówi, że dyskonto jest obliczane od kwoty, która dłużnik zwróci po ustalonym czasie, jest proporcjonalne do tego czasu i jest odejmowane od tej kwoty w momencie udzielania pożyczki.

Jeżeli przez D oznaczymy dyskonto, przez P poczatkowa wartość pożyczki (tzn. wartość, która fizycznie dostajemy), a przez F nominalna wartość pożyczki (to co mamy oddać, na kartce), to otrzymujemy równość:

$$D = F - P \tag{37}$$

W dalszym ciagu bedziemy zakładać $F > P > 0$

12 Stopa dyskontowa

W przypadku dyskonta handlowego prostego **stopa dykonstowa** nazywa sie liczbe okreslona:

$$d = \frac{D - P}{nF} \tag{38}$$

gdzie n oznacza liczbe lat, po której ma nastapić zwrot pożyczki.

12.1 Przykład 24

Wyznaczyć stope dyskontowa pożyczki w kwocie 50 000 PLN udzielonej na 5 lat, jeżeli jej wartość nominalna wynosi 70 000 PLN.

Ze wzoru (38)

$d = \frac{70000-50000}{5 \cdot 70000} = 5,71\%$

12.2 Przykład 25

Obliczyć nominalna wartość 4-letniej pożyczki udzielonej w kwocie 100 000 PLN przy stopie dyskontowej równej 5%

Ze wzoru (38)

$d = \frac{D-P}{nF}$

$dnF = F - P$

$P = F - dnF$

$P = F(1 - dn)$

$F = \frac{P}{1-dn}$

$F = \frac{100000}{1-4 \cdot 0,05} = 125000PLN$

12.3 Przykład 26

Przy stopie dyskontowej równej $r\%$ wyznaczyć poczatkowa wartość dziesiecioletniej pożyczki o nominalnej wartości 200 000 PLN.

Ze wzoru (38)

$d = \frac{D-P}{nF}$

$dnF = F - P$

$P = F - dnF$

$P = F(1 - dnF)$

$P = 200000 - 0,05 \cdot 10 \cdot 200000 = 120000PLN$

12.4 Przykład 27

Pożyczka w wysokości 180 000 PLN udzielona na okres 5 lat ma nominalna wartość 240 000 PLN, Obliczyć stope dyskontowa i zbadać jaki wpływ na nominalna wartość pożyczki miałoby podniesienie stopy dyskontowej o 1 pkt procentowy.

Ze wzory (38)

$d = \frac{240000-180000}{5 \cdot 240000} = 5\%$

$F = \frac{P}{1-dn}$

$F = \frac{180000}{1-0,06 \cdot 5} = 257142,90PLN$

Wzrost wartości stopy dyskontowej o 1 pkt procentowy spowodowałby wzrost nominalnej wartości pożyczki z 240 000 do 257 142,90.

13 Zasada równoważności stopy procentowej i stopy dyskontowej

Zarówno odsetki jak i dyskonto stanowia opłate za udzielona pożyczke. Czyli za możliwość dysponowania określonym kapitałem przez ustalony czas. Ponieważ wielkość te wyznacza sie z różnych modeli naturalne wydaje sie pytanie, jaki zwiazek miedzy nimi gwarantuje równość opłat za pożyczke.

Roczna stopa procentowa r i stopa dyskontowa d nazywaja sie **równoważnymi w czasie** n jeżeli dla dowolnej pożyczki odsetki i dyskonto handlowe wyznaczone przy tych stopach sa równe. Tak sformułowana zasada nosi nazwe **zasady równoważności stopy procentowej i stopy dyskontowej**.