**Odsetkami -** nazywa się kwotę, którą należy zapłacić za prawo użytkowania określonego kapitału. Odsetki są zatem ceną płaconą za wypożyczenie kapitału. Ustala się je w odniesieniu do pewnego ustalonego okresu. Stosunek odsetek do kapitału, który je wygenerował w ustalonym okresie, nazywa się **okresową stopą procentową.**

W praktyce najczęściej mamy do czynienia ze stopami procentowymi ustalonymi dla okresy rocznego. Mówimy wtedy o **rocznej stopie procentowej.**

*Jeżeli np. odsetki za.1 rok od pożyczonego kapitału 60k wynoszą 1,5k, to roczna stopa procentowa jest równa r = 1 500 / 60 000 = 2,5%.*

Powiększenie kapitału o odsetki, które zostały przez niego wygenerowane, nazywa się **kapitalizacją odsetek.** Czas, w którym odsetki są generowane, nazywa się okresem kapitalizacji. W dalszym ciągu rozważań ograniczymy się do przypadku, gdy odsetki są dopisywane na końcu okresów kapitalizacji. Mówimy wtedy o kapitalizacji z dołu.

Wyróżniamy dwa podstawowe rodzaje kapitalizacji: **prostą i złożoną.**

# Kapitalizacja prosta

W przypadku kapitalizacji prostej odsetki od kapitału oblicza się od kapitału początkowego proporcjonalnie od długości kresu oprocentowania. Oznaczamy przez *W* początkową wartość kapitału, przez *r* roczną stopę procentową, przez *In*należne za czas *n*, zaś przez *Wn* oznaczamy końcową wartość kapitału w czasie *n (w latach).*

**Reguła bankowa** – każdy rok ma 360 dni, zaś każdy miesiąc ma 30 dni.

*In = Wnr (1)*

Natomiast wartość końcowa kapitału:

*Wn = W(1+nr) (2)*

**Przykład 1**

Przy kapitalizacji prostej i rocznej stopie procentowej r = 4% wyznaczyć odsetki i końcową wartość kapitału 25 000 PLN po upływie a: 3lat, b 142dni.

a)

In = 25 000 \* 3 \* 0.04 =3000 PLN

Wn = 25000(1+3\*0.04) = 28 000 PLN

b)

In = 25 000 \* (142/360) \* 0.04 = 394,44 PLN

Wn = 25 000(1 + (142/360) + 0.04) = 25 394,44 PLN

Załóżmy że czas trwania inwestycji wynosi *n* lat i składa się z *m* następujących po sobie okresów o długości n1, …., nm. Przyjmijmy że w każdym z nich obowiązuje roczna stopa procentowa, odpowiednio, r1, …., rm. Wtedy wartość kapitału początkowego *W* po pierwszym okresie wyniesie.

*rokr*

*Wn = W(1 + )* (3)

*In = W*  (4)

**Przeciętną roczną stopą procentową oprocentowania kapitału** W w czasie n nazywa się roczną stopę, przy której kapitał W generuje w czasie n odsetki o takiej samej wartości jak przy stopach zmiennych.Definicja ta dotyczy zarówno kapitalizacji prostej i złożonej.

Oznaczając przez r(z kreską na górze) przeciętną roczną stopą oprocen, na podstawie wzorów (1) i (4) mamy

*r = (5)*

Gdyby wszystkie okresy miały jednakową długość to wzór:

*r = (6)*

**Przykład 2**

*Przez początkowe 4 miesiąca trwania obowiązywała roczna stopa procentowa 6%, przez następnych 5 miesięcy 7%, przez ostatnie 3 miesiące 7,5%.*

*Dane:*

*N1 = 4/12*

*N2 = 5/12*

*N3 = 3/12*

*R1 = 0.06*

*R2 = 0.07*

*R3 = 0.075*

*W = 20 000PLN*

1. *Wyznaczyć wartość lokaty na koniec roku, jeżeli jej początkowa wartość wynosi 20 000PLN.*

*Korzystając ze wzoru (3) mamy W3 = 20000(1 + 0.06\*4/12 + 0.07\*5/12 + 0.075\*3/12) = 21 358,40 PLN*

1. Obliczyć wysokość przeciętnej rocznej stopy oprocentowania

Korzystając ze wzory (5) mamy: r = 0.06\*4/12 + 0.07\*5/12 + 0.075\*3/12 = 6,79%

Często zdarza się, że stopa procentowa, przy której należy obliczyć odsetki nie jest stopa roczną lecz np. miesięczną lub kwartalną. Okres, po którym odsetki podlegają kapitalizacji nazywa się **podokresem kapitalizacji**. Stopa procentowa ustalona dla podokresu kapitalizacji nazywa się **stopą pod okresową**. **Częstotliwość kapitalizacji** oznacza ile razy odsetki są kapitalizowane w ciągu roku.

W dalszym ciągu zakładamy że częstotliwość kapitalizacji wynosi m. Wobec tego każdy rok jest podzielony na m równych podokresów kapitalizacji.

m=1 – kapitalizacja roczna

m=2 – kapitalizacja półroczna

m=4 – kapitalizacja kwartalna

m=12 – kapitalizacja miesięczna

m=360 – kapitalizacja dobowa(dzienna)

Jeżeli rokr jest stopą pod okresową, to zgodnie z zasadą oprocentowania prostego odsetki od kapitału W po upływie k pod okrsów wyznacza się ze wzoru

*Ik = W\*k\* rokr (7)*

Natomast końcowa wartość kapitału W po upływie k:

Wk = W(1 + k\* *rokr*) (8)

Załóżmy że r1 i r2 są pod okresowymi stopami procentowymi, zaś m1 i m2 są odpowiadającymi im częstotliwościami kapitalizacji. Stopy r1 i r2 nazywamy **równoważnymi w czasie n**, jeżeli przy każdej z nich odsetki od ustalonego kapitału po czasie n są równe.

Korzystająć z (7) mamy:

m1 \* r1 = m2 \* r2 (9)

Z (9) stopy pod okresowe są ⬄ ich stosunek jest równy stosunkowi długości odpowiadających im po okresów. Takie stopy pod okresowe nazywają się **proporcjonalnymi**.

**Przykład 3**

Kwartalna stopa oprocentowania prostego wynosi 6%. Wyznaczyć następujące równoważne stopy oprocentowania prostego:

1. Roczną

6 \* 4 = 24%

1. Miesięczną

6 / 3 = 2%

1. Tygodniowa

6/12 = 0.5%

# Kapitalizacja złożona

W przypadku **kapitalizacji złożonej** odsetki oblicza się za każdy okres równy okresowi kapitalizacji i kapitalizuje się je na koniec tego okresu. Załóżmy, że kwota W została ulokowana na rachunku z roczną stopą procentową równą r. W przypadku kapitalizacji złożonej dochód przynosi początkowy kapitał wraz z odsetkami uzyskanymi na koniec poprzedniego okresu kapitalizacji. Przez In oznaczmy odsetki należne po czasie n, zaś przez Wn oznaczmy wartość kapitału po n latach. Wtedy:

W1 = W(1+r)

Wn = W(1+r)n (10)

Liczba (1+r)n nazywa się **czynnikiem wartości przyszłej** w kapitalizacji złożonej.

Odsetki po okresie n lat wynoszą:

In=W((1+r)n – 1) (11)

**Przykład 4.**

Przy założeniu kapitalizacji złożonej i rocznej stopie procentowej r = 5%, wyznaczymy wartość kapitału 40 000 PLN i odsetki po upływie 4 lat.

Wn = 40 000(1 + 0.05)4 = 48 620 PLN

In = 40 000((1 + 0.05)4 - 1) = 8 620 PLN

In = 48 620 – 40 000 = 8 620 PLN

Podobnie jak w przypadku kapitalizacji prostej w kapitalizacji złożonej, możemy dopuścić zmienne stopy procentowe w kolejnych latach trwania inwestycji. Przyjmijmy, że w kolejnych latach stopy procentowe są równe r1, r2, … rn, gdzie n jest liczą lat trwania inwestycji. Wtedy wartość początkowego kapitału W po pierwszym roku wyniesie.

W1 = W(1+r1)

Po drugim

W2 = W(1+r1)(1+r2)

Wartość kapitału po n latach:

Wn = W (12)

In = W() (13)

Przeciętna roczna stopa oprocentowania w przypadku kapitalizacji złożonej:

r = () 1/n – 1 (14)

**Przykład 5**

Kapitał 20 000 PLN został ulokowany na okres 5 lat. Przy założeniu kapitalizacji złożonej I rocznej stopie procentowej równej w kolejnych latach, 5%, 6%, 5%, 4%, 7%, wyznaczymy wartości kapitału na koniec kolejnych lat oraz przeciętną roczną stopę oprocentowania tego kapitału w czasie 5 lat.

W1 = 21 000 PLN

W5 = 20 000(1+0.05)(1+0.06)(1+0.05)(1+0.04)(1+0.07) = 26 009.47 PLN

r = ((1+0.05)(1+0.06)(1+0.05)(1+0.04)(1+0.07))1/5 – 1 = 5.40%

Niech rokres będzie stopą pod okresową. Przy założeniu kapitalizacji złożonej, przyszła wartość kwoty W po *l* latach i n spośród m pod okresów l+1 roku, gdzie 0<=n<m wynosi:

W(m)(l, n) = W(1 + rokr)l\*m+n (15)

Przykład 6

Zakładając kapitalizację a) półroczną, b) kwartalną c) miesięczną i przyjmując stopę pod okresową rokr = 2% wyznaczyć przyszłą wartość kapitału 20k PLN po 2 latach i 6 miesiącach.

1. W(2)(2, 1) = 20 000(1 + 0.02)2 \* 2 + 1 = 22 081.62 PLN
2. W(4)(2, 2) = 20 000(1+0.02)10 = 24 379.89 PLN
3. W(12)(2, 6) = 20 000(1+0.02)30 = 36 227.23 PLN

Roczna stopa procentowa r proporcjonalna do danej stopy pod okresowej rokr nazywa się **stopą nominalną**. ( wyliczyć roczą stopę, np. jak miesięczna jest 1% to roczna jest 12% itp.)

rokr = r/m

W(m)(l, n) = W(1 + r/m)l\*m+n (16)

Przyjmując n = 0 wtedy:

W(m)l = W(1 + r/m)l\*m (17)

Liczbę:

Rm = (1 + r/m)m (18)

Nazywa się rocznym **czynnikiem oprocentowania**.

**Przykład 7**

Kapitał w wysokości 40 000 PN został ulokowany na rachunku z nominalną stopą procentową równą 12%. Zakładając kapitalizację, roczną, półroczną, kwartalną, miesięczną oraz dzienna, wyznaczyć przyszłą wartość kapitału po 4 latach.

Ze wzory (17)

W(1)4 = 62 940,77 PLN

W(2)4 = 63 753.92 PLN

W(4)4 = 64 188.26 PLN

W(12)4 = 64 489.04 PLN

W(360)4 = 64 606.80 PLN

**Przykład 8**

Wyznaczymy wartość kapitału 40 000 PLN po 5 ltach i 9 miesiącach przy założeniu że roczna stopa procentowa wynosi 6%, a kapitalizacji odsetek jest a) kwartalna, b) miesięczna.

Korzystając (16)

1. W(4)(5, 3) =
2. W(12)(5, 9) =

**Przykład 9**

Przy założeniu miesięcznej kapitalizacji odsetek i rocznych stopach procentowych równych 6% w pierwszym i drugim roku. 9% w trzecim i 12% w czwartym roku wyznaczyć wartość kapitału 100 000 PLN po

a)3 latach i 7 miesiącach

b) 4 latach

X = kapitał po 3latach i 7 m

Y = po 4 latach

Wzór 16

X = 100 000 \* (1+0.06/12)24 \* (1+0.09/12)12 \* (1+0.12/12)7 = 132 183 PLN

Y = 100 000 \* (1+0.06/12)24 \* (1+0.09/12)12 \* (1+0.12/12)12 = 138 925.70 PLN

**Przykład 10**

Przy miesięcznej kapitalizacji odsetek i nominalnej stopie procentowej równej 3% po 1 roku i 7 miesiącach uzyskano z lokaty 100 PLN odsetek. Jaka była kwota lokaty?

Odsetki uzyskane z inwestycji stanowią różnice między wartością kapitału po 1r i 7m a jego wartością początkową. W = ?

W(12)(1,7) – W = 100

W = 2 058.29 PLN

# Równoważność stóp pod okresowych przy kapitalizacji złożonej

Załóżmy że r1 i r2 są pod okresowymi stopami procentowymi, zaś m1 i m2 są odpowiadającymi im częstotliwościami kapitalizacji. Stopy r1 i r2 **nazywamy równoważnymi w czasie l lat**, gdzie l e N, jeżeli przy każdej z nich odsetki od ustalonego kapitału po l latach są równe.