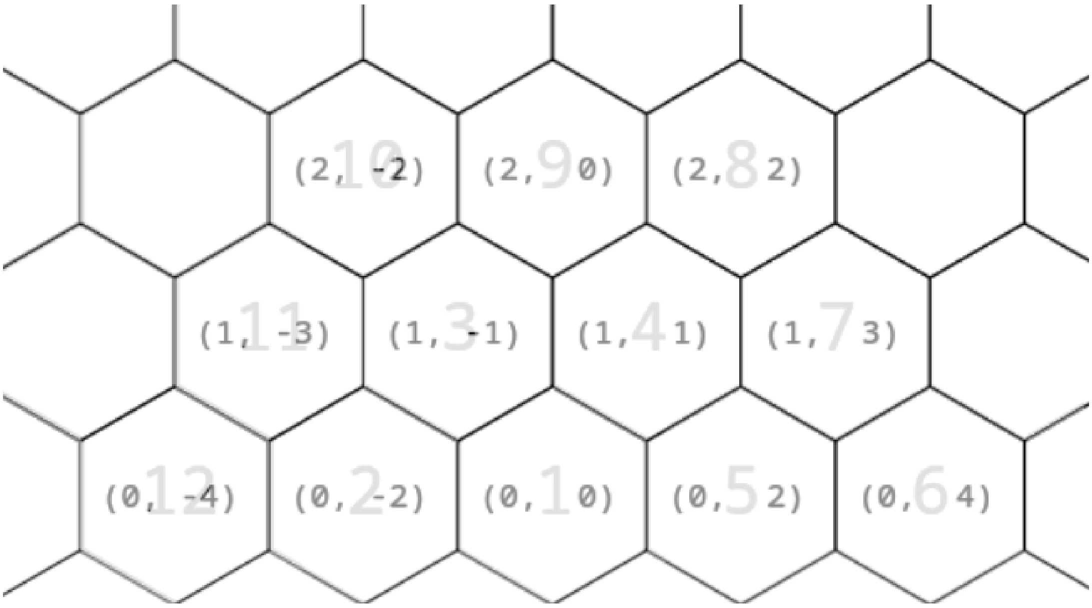
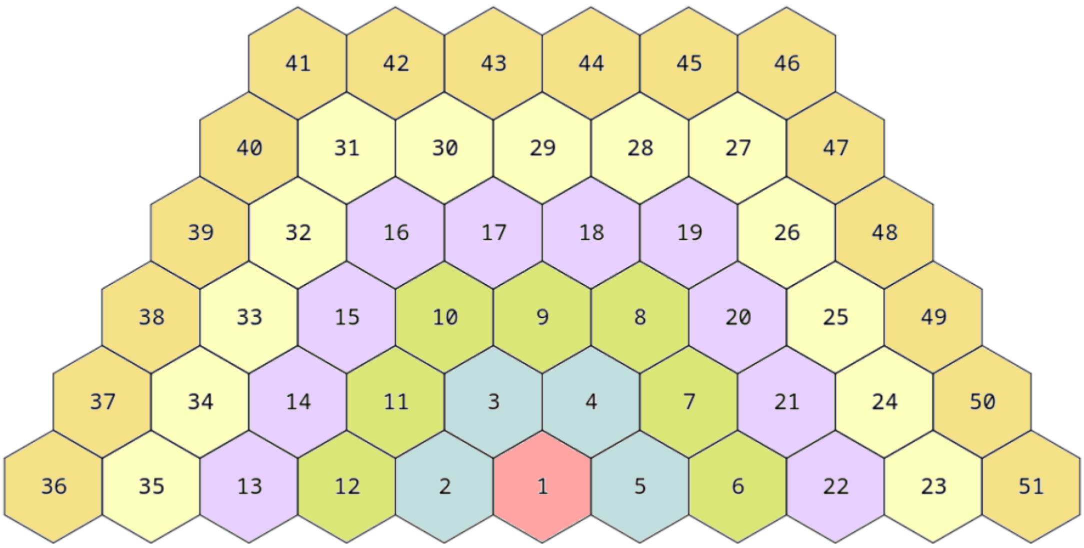
Řešení úlohy č. 1
Prohledávání vesmíru

Úloha se nás ptá na mnoho dotazů, každý dotaz jsou tři čísla reprezentující čísla buněk. Nejdříve je vhodné převedení těchto čísel na nějakou užitečnější formu souřadnic.

V šestiúhelníkové mřížce existuje více „dobrých" souřadnicových systémů, referenční řešení využívá tzv. *Zdvojených souřadnic* (Doubled coordinates), které ale malinko plýtvají pamětí. Konstrukce by měla být zřejmá dle následujícího obrázku:



Pokud stále není konstrukce jasná, tak pěkná animace se nachází zde. Jak ale z čísla buňky takovéto souřadnice získat efektivně? Pomůže nám pár pozorování o charakteru mřížky. První čeho je dobré si všimnout je, že čísla buněk vyplňujeme v alternujících „prstencích":



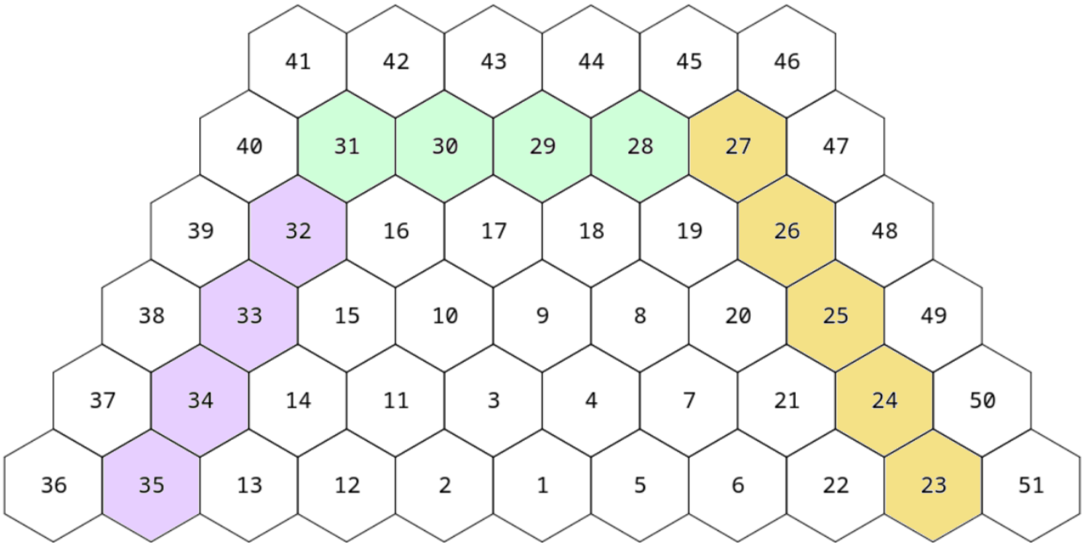
Tyto prstence mají pár zajímavých vlastností. Nejprve, kolik má každý z nich buněk? Je tam nějaký vzor? $1, 4, 7, 10, 13, 16$. Každý následující prstenec má o tři buňky více. Z obrázku si lze jednoduše rozmyslet, proč to platí (zkuste si spojit a napárovat sousední prstence).

Budeme prstence číslovat od nuly, tedy i-tý prstenec má $3i + 1$ buněk. Dále, pokud bychom byly schopni posčítat pro nějaký prstenec počet jeho buněk a buněk všech menších prstenců, tak dostaneme číslo buňky, která má největší číslo a leží v tomto prstenci. Jak to provést? Počty buněk prstenců tvoří aritmetickou posloupnost, kterou lze sečíst známým vzorečkem:

$$\sum_{i=0}^{n}(3i+1) = 3\sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n} 1 = 3(\frac{n(n+1)}{2}) + (n+1) = \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(3n+2)}{2}$$

Tedy pro n-tý prstenec je jeho maximální buňkou buňka s číslem $\frac{(n+1)(3n+2)}{2}$. Díky tomuto vzorečku a binárnímu vyhledávání (či explicitnímu řešení vzniklé kvadratické rovnice a vhodnému zaokrouhlení) jsme schopni zjistit prstenec libovolné buňky. Jednoduše si tipneme prstenec, podíváme se na jeho maximální buňku a podle toho se rozhodneme kde buňka musí ležet. V každé iteraci seřízneme prostor možných prstenců na polovinu, tedy celý proces zvládneme v čase $\mathcal{O}(\log n)$. Řešení je více, stejná myšlenka by fungovala i pokud bychom měli explicitní vzoreček pro první buňku v daném prstenci.

Pokud už víme do jakého prstence buňka patří tak nám nastávají dvě možnosti. Jelikož čísla prstenců „alternují“ (jednou je největší číslo vlevo dole a jednou vpravo dole), tak musíme zjistit paritu prstence (jednoduše se podíváme na zbytek po dělení 2). Poté už máme jeden velmi konkrétní případ prstence a akorát musíme zjistit do jaké „třetiny“ naše buňka patří, souřadnice už po té lze napočítat snadno (jelikož pohyb šikmo nebo rovně vpravo/vlevo má velmi očekávané vlastnosti, stačí přičíst/odečíst nějaké číslo v obou osách).

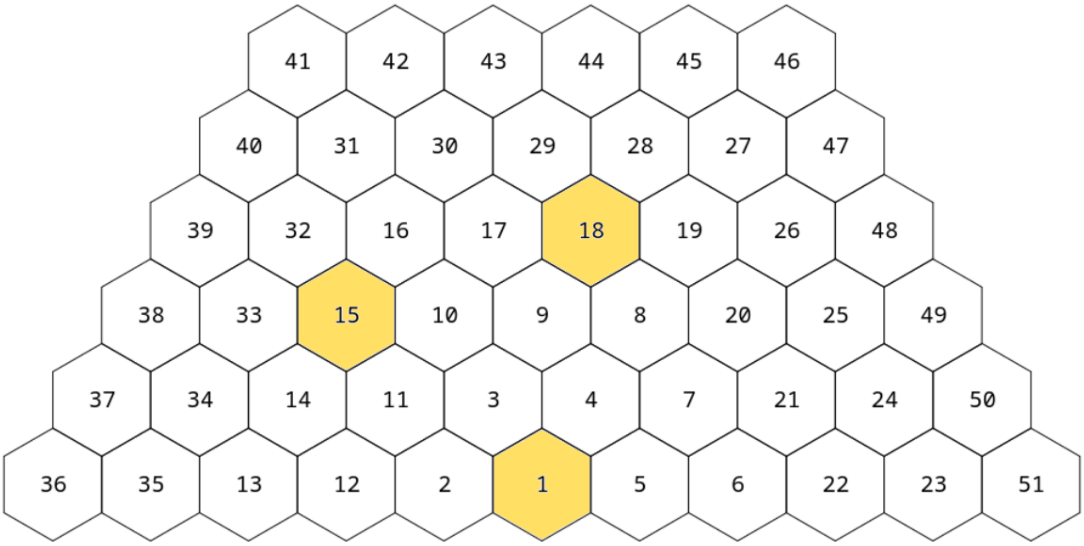


Nakonec je dobré si ještě rozmyslet, že pokud máme buňku, která má největší číslo v nějakém prstenci, tak zjistit její souřadnice je také snadné (zkuste si vypsat souřadnice pro prvních pár buněk). Poskládáním těchto myšlenek bychom měli mít funkční převod do rozumnějšího souřadnicového systému.

Jak nyní detekovat, zda tři buňky tvoří trojúhelník? Prakticky stejně jako v zadání, budou nás zajímat vzdálenosti mezi těmito buňkami, tyto vzdálenosti se budou muset rovnat. Ve zdvojených souřadnicích se dá vzdálenost dvou buněk vypočítat následovně:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |y_1 - y_2| + \max\left(0, \left\lfloor \frac{|x_1 - x_2| - |y_1 - y_2|}{2} \right\rfloor\right)$$

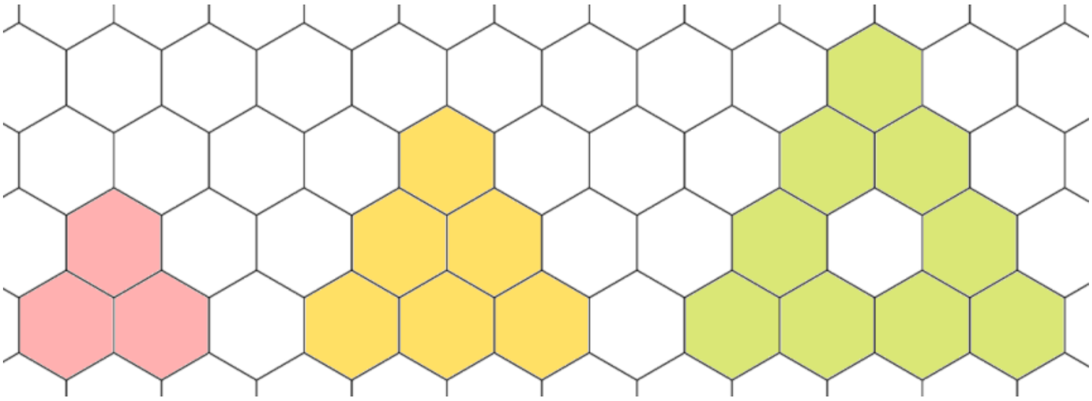
Pouze rovnost vzdáleností ale nestačí, viz např. tento speciální degenerovaný případ:

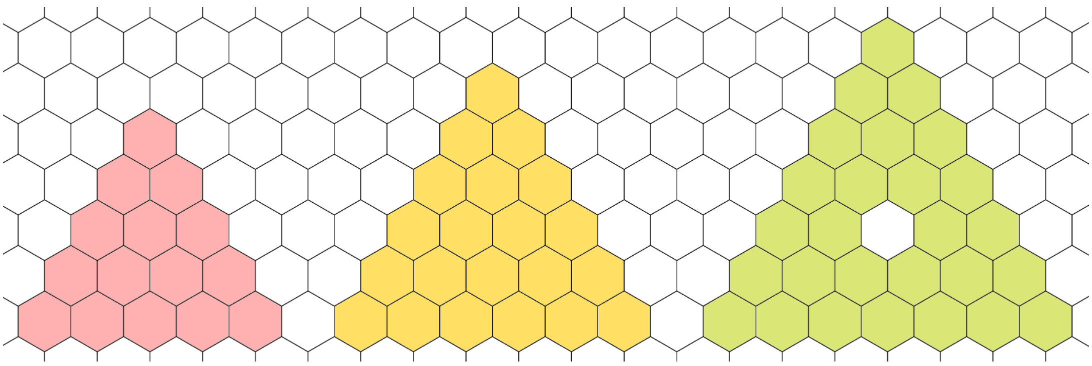


Potřebujeme totiž ještě aby platilo následující:

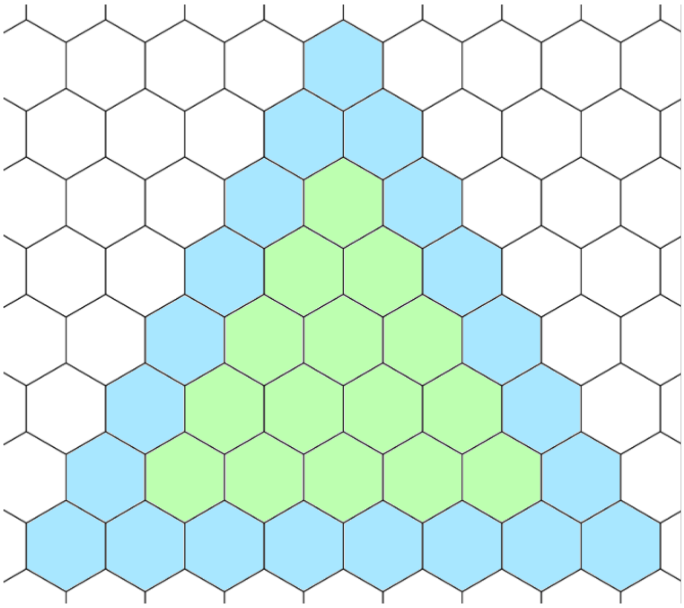
$$(y_1 = y_2) \vee (y_1 = y_3) \vee (y_2 = y_3)$$

Další vyskytující se problém je detekce trojúhelníků, pro které existuje střed. Jak na to? Vypíšeme si prvních pár trojúhelníků a podíváme se, pro které platí, že mají střed:





Vypadá to, že každý třetí má střed (délka strany se musí rovnat $3n + 1$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$). Proč to ale platí? Pomůže nám stará dobrá matematická indukce. Pro první tři trojúhelníky jsme ověřili, který z nich má střed a pro obecně velký trojúhelník můžeme vypozorovat, že pokud odebereme okolní vrstvu (zmenšíme tím stranu trojúhelníka o 3), tak pokud měl střed trojúhelník předtím, tak má i ten nýnější a i naopak:



Pokud už umíme detekovat trojúhelníky a víme, které z nich mají středy, tak už nám jen zbývá vypsání případných středů. Budeme tedy potřebovat převod ze zdvojených souřadnic zpátky do původních. Jak to provedeme? Velmi obdobně jako v převodu dříve. Všimneme si, že vzdálenost buňky pro kterou hledáme číslo od buňky s číslem 1 (a tedy souřadnicemi $(0, 0)$) nám udává prstenec, ve kterém se nacházíme. Poté už nám opět stačí kontrola a výpočet ve které z třetin prstence se nacházíme a výpočet čísla buňky už pak není náročný.

Aby program stihl zodpovědět všechny dotazy pro zisk maxima bodů, tak musí být časová složitost řešení každého dotazu zhruba $\mathcal{O}(\log n)$, což řešení výše splňuje.