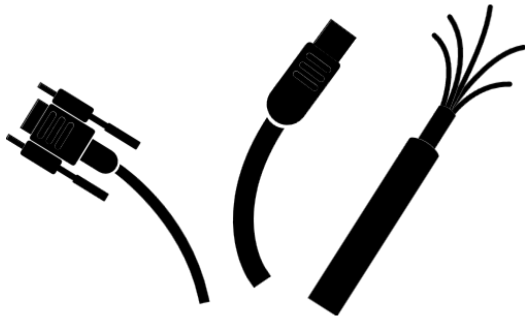
Úloha č. 3
Tu kabel



Zamysli se! 10 b

Tato úloha je čistě teoretická, tvým úkolem zde není napsat program. Namísto toho si dej záležet na kvalitním slovním popisu, kde mimo jiné jasně zdůvodníš, proč tvůj postup skutečně bude fungovat. Více informací najdeš na webových stránkách FIKSu pod záložkou „Jak řešit FIKS“.

Tak a je to tady. První den v raketě se chýlí ke konci, všichni už jsou ve svých ubikacích a připravují se ke spánku. Jen ty nemůžeš spát. Potuluješ se z místnosti do místnosti, přemýšlíš o svých přátelích, o životě, snažíš se z okénka zahlédnout pomalu se přibližující Měsíc. Už je dávno po druhé hodině ranní, když se rozhodneš vydat se do svého pokoje, abys dostal alespoň trochu spánku. Víš, že ho zítra budeš potřebovat.

Už ti chybí jen posledních pár kroků, když v tu náhle tě přepadne únava. Zavřeš oči a…prásk! Zakopls a teď ležíš na zemi. „Stupidní umělá gravitace. Co se sakra stalo?“ říkáš si. Vstaneš a podíváš se za sebe. A tam úplná spoušť. Svým zaškobrtnutím se ti podařilo vykopnout všechny pozapojované kabely. Začíná do tebe pumpovat adrenalin a srdce prudce bít. „Co teď? Co teď?“ Tvoje srdce nyní závodí jako nikdy předtím. „Co to je za kabely?!“ Přemýšlíš rychle, jak nejrychleji dovedeš. „Co to je ksakru za kabely?“ Nemůžeš si vzpomenout. „Mám vzbudit posádku? Mám to nahlásit?“ Začíná se ti motat hlava. „Ne, ty kabely k něčemu jsou a já je musím nějak rychle zapojit zpátky. Co když měly regulovat přívod vzduchu? Zbytek posádky už může být dávno mrtvý!“ Jsi rozhodnut. Jdeš je zapojit zpět. No jo, ale jak? V tom spěchu tě nenapadne nic lepšího, než se pokusit zapojit co možná nejvíc kabelů. Prostě doufáš, že ty kabely tam neměly ležet jen tak ladem.

Máme množinu n zařízení $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ o právě jednom vstupním a jednom výstupním portu a n stejných kabelů o právě dvou koncích. Každý kabel může být zapojen jen a pouze mezi vstupním a výstupním portem nějakých zařízení (potažmo stejného). Protože kabely mají určitou délku, je pro každé p_i určena podmnožina zařízení $P_i \subseteq P$, se kterými je možno zařízení p_i kabelem spojit tak, že kabel jde z výstupního portu p_i do vstupního portu zařízení $p_j \in P_i$. Protože zařízení jsou k raketě přidělené na pevno, může se stát, že lze takto spojit výstupní port p_i se vstupním portem p_j, ale výstupní port p_j se vstupním portem p_i již spojit nelze.

Řešíme následující problém.

	Kabelové zapojení
Vstup:	Přirozené $n \geq 1$, množina zařízení $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ a pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ podmnožina zařízení P_i, se kterými lze zařízení p_i spojit.
Otázka:	Jaká je největší množina M zapojených kabelů v rámci zadaných pravidel?

Instance Kabelového zapojení popisujeme ve tvaru $(n, P, P_1, \ldots, P_n)$, kde n je počet zařízení, $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ je množina zařízení a $P_i = \{p_{i_1}, \ldots, p_{i_{m_i}}\}$ je množina zařízení, se kterými lze p_i spojit. Optimální řešení dané instance označíme M^*.

V zapojování postupuješ systematicky. Předtím než začneš kabely zapojovat, si určíš pořadí zařízení, ve kterém se je budeš postupně snažit zapojovat k ostatním, přesněji je-li pořadí zařízení $(p_1, \ldots, p_n)$,

potom v i-té iteraci se snažíš kabelem spojit výstupní port p_i se vstupním portem jednoho ze zařízení z P_i. Navíc protože nechceš, aby se ostatním členům posádky stala podobná tragédie, snažíš se zařízení spojovat tak, aby kabely byly co nejvíc natažené a moc neplandaly, tj. pro každé p_i je dané i pořadí zařízení z P_i, ke kterým se p_i pokoušíš postupně zapojit.
Celý proces shrneme v následujícím algoritmu.

Algoritmus 1 Kabelové zapojení

Vstup: Pořadí zařízení $(p_1, \dots, p_n)$ a pro každé p_i pořadí zařízení $(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_{m_i}})$ o m_i prvcích, se kterými lze p_i spojit.

$M := \emptyset$
for $i = 1, \dots, n$ **do**
    for $j = 1, \dots, m_i$ **do**
        if vstupní port zařízení p_{i_j} je volný **then**
            Spoj kabelem výstupní port zařízení p_i se vstupním portem zařízení p_{i_j}.
            Přidej uspořádanou dvojici (p_i, p_{i_j}) do M.
            Ukonči vnitřní cyklus.
        end if
    end for
end for
return M

Označme algoritmem vrácené řešení jako M.

Zadání úlohy

Zadání je rozděleno na tři části.

1. Najděte konstantu $c \geq 1$ takovou, že **existuje** instance Kabelového zapojení ve tvaru $(n, P, P_i, \dots, P_n)$ tak, že **existuje** pořadí zařízení $(p_1, \dots, p_n)$ a pro každé p_i **existuje** pořadí $(p_{i_1}, \dots, p_{i_{m_i}})$ takové, že $1 \leq |M| \leq \frac{|M^*|}{c}$. **(2 body)**

2. Najděte konstantu $c > \frac{3}{2}$ takovou, že pro **libovolnou** instanci Kabelového zapojení ve tvaru $(n, P, P_i, \dots, P_n)$ platí, že pro **libovolné** pořadí zařízení $(p_1, \dots, p_n)$ a pro každé p_i **libovolné** pořadí $(p_{i_1}, \dots, p_{i_{m_i}})$ platí $|M| \geq \frac{|M^*|}{c}$. **(5 bodů)**

3. Najděte konstantu $c > \frac{3}{2}$ takovou, že pro **libovolnou** instanci Kabelového zapojení ve tvaru $(n, P, P_i, \dots, P_n)$ platí, že pro **libovolné** pořadí zařízení $(p_1, \dots, p_n)$ a pro každé p_i **libovolné** pořadí $(p_{i_1}, \dots, p_{i_{m_i}})$ platí $|M| \geq \frac{|M^*|}{c}$.

   Zároveň pro stejnou, vámi zvolenou, konstantu c najděte **nekonečnou** množinu $\mathcal{G}$ instancí Kabelového zapojení ve tvaru $(n, P, P_1, \dots, P_n)$ takovou, že pro každou instanci v $\mathcal{G}$ **existuje** pořadí zařízení $(p_1, \dots, p_n)$ a pro každé p_i **existuje** pořadí $(p_{i_1}, \dots, p_{i_{m_i}})$ takové, že $1 \leq |M| \leq \frac{|M^*|}{c}$. **(3 body)**

Poznámky

- Dbejte obzvlášť velký pozor na slovo **existuje** a slovo **libovolný**. Pokud po vás chceme dokázat, že existuje instance, poté stačí nějakou takovou jednu instanci najít. Pokud po vás chceme dokázat tvrzení, že platí pro libovolnou instanci, nelze v řešení psát pouze „předpokládejme tyto instance …“, „pro tyto instance platí …“ a podobné. Tímto tvrzení nedokážete pro libovolnou instanci, ale jen pro ty, které jste si na začátku vyjmenovali.

- **Instance** Kabelového zapojení vyžadují počet zařízení n, množinu zařízení P a pro každé zařízení $p_i \in P$ množinu zařízení $P_i = \{p_{i_1}, \ldots, p_{i_{m_i}}\}$, se kterou lze p_i spojit. **Algoritmus** Kabelové zapojení na vstupu očekává instanci Kabelového zapojení s tím, že pro množinu P a množiny P_i pro každé $p_i \in P$ je ještě navíc dané pořadí, tj. množiny jsou uspořádané.

- Zadání třetí části je úmyslně z poloviny stejné jako zadání části druhé a je vnímáno jako rozšíření druhé části. Abyste získali celé 3 body za třetí část, musíte ji také celou splnit. Nelze pouze najít konstantu a nekonečnou množinu, pro kterou je splněna daná nerovnost. Pro danou konstantu musí platit i první nerovnost třetí části.

- Ve třetí části **nepožadujeme**, aby $|M| \leq \frac{|M^*|}{c}$ platilo pro **všechny** validní instance Kabelového zapojení. Chceme najít jen nějakou podmnožinu validních instancí, pro které existuje uspořádání množin P a $P_1, \ldots, P_n$, které splňují zadanou nerovnost, ale **chceme** jich nekonečně mnoho.

- **Části nejsou na sobě nijak závislé**, můžete dokázat libovolnou podmnožinu všech částí a lze tak učinit bez výsledku těch ostatních. Dejte si ale pozor, pokud budete používat výsledek jedné části v části jiné, aby byl původní výsledek opravdu správný.

Nápovědy

- Ve třetí části se vás efektivně ptáme, abyste pro libovolný počet zařízení (nemusí to být nutně pro každé číslo, ale třeba pro každé sudé či každé desáte číslo) našli pořadí zařízení $(p_1, \ldots, p_n)$ a pro každé p_i našli pořadí $(p_{i_1}, \ldots, p_{i_{m_i}})$ takové, aby vždy byla splněna nerovnost $|M| \leq \frac{|M^*|}{c}$.

- Pokud dokážete rovnou třetí část, první dvě části by měly jít již snadno :-).