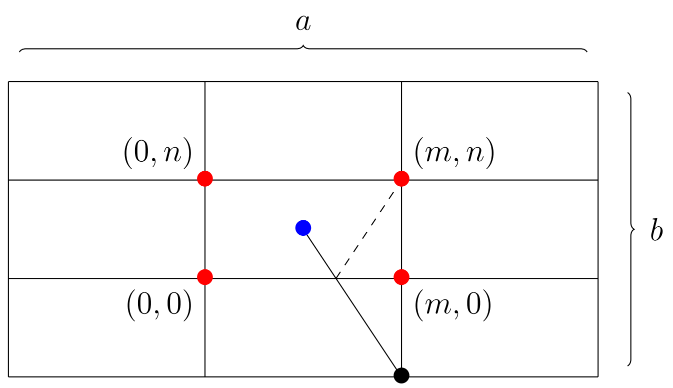
Úloha č. 3 Satelit

Zpracoval Oskar Petr

Úvod do problematiky

Pro zjednodušení řešení této úlohy můžeme uvažovat, že satelit není limitován prostorem obdélníku $m \times n$, ale mřížkou M složené z těchto obdélníků, o velikosti $a \times b$, kde $a, b \in \mathbb{N}$, která jsou násobkem rozměrů obdélníku $m \times n$ a budou specifikována podle jednotlivých případů. Tímto se nám usnadní práce s odrazy satelitu, jelikož nebude potřeba sledovat přesnou dráhu jeho odrazů v původním obdélníku.

Pokud satelit překročí hranice jakéhokoliv obdélníku v mřížce M, lze to považovat za 1 odraz v původním scénáři jednoho obdélníku, a tuto hodnotu můžeme přičíst do počtu odrazů n. Délka dráhy d, kterou satelit urazí lze téže lépe propočítat díky mřížce, jelikož se bude pouze jednat o úsečku z výchozí pozice satelitu (x, y) do rohu některého z obdélníků v mřížce. Souřadnice každého rohu v obdélníku lze zapsat ve tvaru $(i \cdot m,\ j \cdot n)$, přičemž $i, j \in \mathbb{Z}$.



Obrázek 1: Mřížka z obdélníků 2×1, $N = 1$

Kde:
modrý bod označuje výchozí pozici satelitu na (x, y);
černý bod označuje vybraný roh cílového obdélníku na $(i \cdot m,\ j \cdot n)$;
červené body označují rohy původního obdélníku.

Případ dvojic (n, α)

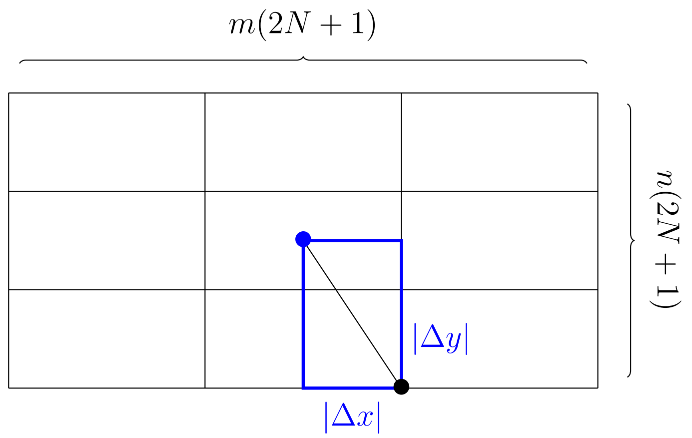
Jako první začneme řešit případ dvojic (n, α), jelikož na tomto typu dvojic je názorněji vidět využití obdélníků v mřížce. Začneme tedy nastavením naší mřížky M, kde v tomto případě budou její rozměry $a = m(2N + 1)$ a $b = n(2N + 1)$. Rozměry mřížky je potřeba nastavit, tak abychom do ní mohli umístit potřebný počet obdélníků v závislosti na maximálním počtu odrazů N, což bude přesně $2N+1$ vynásobeno výškou a šířkou původního obdélníku $m \times n$.

Dalším krokem bude zjistit, které obdélníky v mřížce M lze využít pro určení dvojic (n, α). Z původního místa satelitu (x, y) totiž nelze dosáhnout do všech obdélníků v mřížce, tak aby stále byla dodržena podmínka $n \leq N$ — tento výrok bude následně prokázán.

Využitelné obdélníky

Využitelný obdélník je právě ten obdélník z mřížky M, pro jehož celkový počet odrazů (průchodů mřížkou) n splňuje podmínku $n \leq N$. Abychom zjistili počet odrazů, než satelit dorazí do rohu obdélníku, nejprve musíme zjistit rozměry delta obdélníku $|\Delta x| \times |\Delta y|$, podle kterých následně zjistíme kolika obdélníky z mřížky prošel. Tyto hodnoty zjistíme po odečtení obou souřadnic x a y rohu cílového obdélníku $(i \cdot m,\ j \cdot n)$ a výchozí pozice satelitu (x, y).

$$(\Delta x, \Delta y) = (i \cdot m - x,\ \ j \cdot n - y) \tag{1}$$

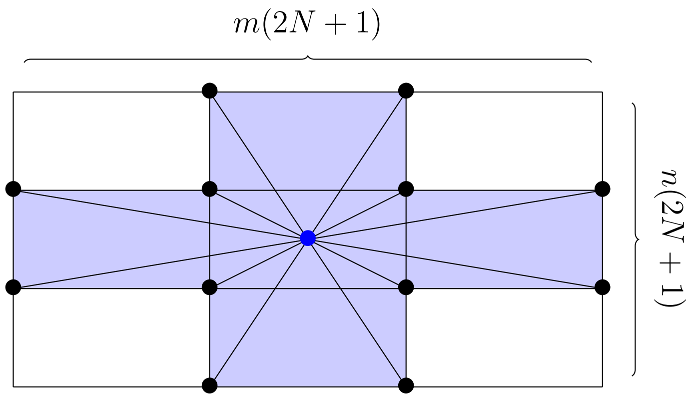


Obrázek 2: Delta obdélník $|\Delta x| \times |\Delta y|$

Pokud již víme rozměry delta obdélníku, kterým projde satelit, můžeme zjistit kolikrát se vejde šířka prvotního obdélníku $m \times n$ do tohoto obdélníku, společně i s jeho výškou, a tím získáme celkový počet odrazů v konkrétním scénáři. Musíme ale počítat s absolutními hodnotami Δx i Δy, jelikož pracujeme s nezápornými rozměry obdélníku.

$$n \text{ (počet odrazů)} = \left\lfloor \frac{|\Delta x|}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{|\Delta y|}{n} \right\rfloor \tag{2}$$

Satelit tedy může dorazit do těch rohů v mřížce, které splňují $n \leq N$, což bude každý roh ve využitelném obdélníku. Existuje i více vizuální způsob určení rohů, jestli patří využitelnému obdélníku či nikoliv, stačí se podívat na mřížku. Všechny využitelné obdélníky totiž budou dohromady tvořit tvar podobný květině. Využitelné obdélníky jsou zaznamenány níže světle modrou barvou:



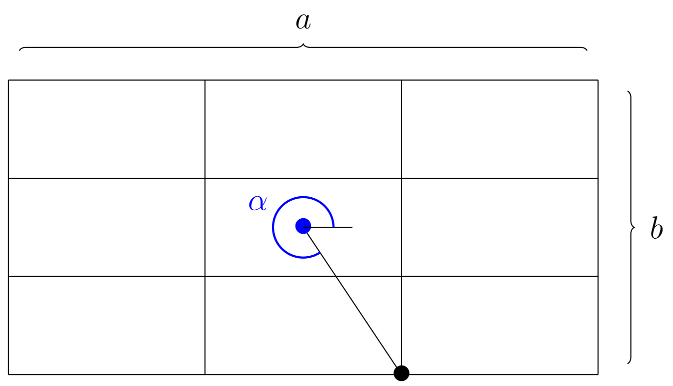
Obrázek 3: Mřížku z obdélníků 2×1, $N = 1$

Úhel počátečního pohybu

Zde můžeme využít stejné proměnné Δx a Δy jako u předchozího kroku, jelikož tyto delta hodnoty lze využít jako souřadnice bodu, pro který spočítáme právě úhel počátečního pohybu α, kde právě $0° \leq \alpha < 360°$.

Pro vypočtení tohoto úhlu můžeme použít trigonometrickou funkci $\mathrm{atan2}(y, x)$, do které dosadíme souřadnice Δy a Δx našeho bodu, kde po dosazení se nám vrátí výsledný úhel v radiánech. Tento úhel je potřeba převést na stupně, čehož můžeme docílit skrze vynásobení úhlu v radiánech výrazem $\frac{180}{\pi}$:

$$\alpha = \mathrm{atan2}(\Delta y,\ \Delta x) \cdot \frac{180}{\pi} \tag{3}$$



Obrázek 4: Úhel odrazu satelitu

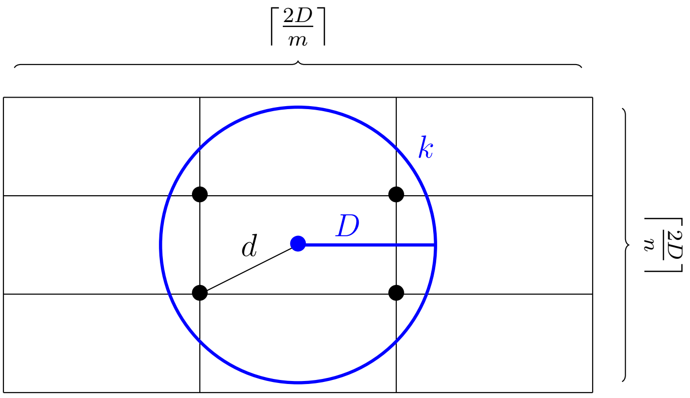
Případ dvojic (d, α)

Nejdříve začneme s nastavením mřížky M, kde $a = \left\lceil \frac{2D}{m} \right\rceil$ a $b = \left\lceil \frac{2D}{n} \right\rceil$. Rozměry této mřížky jsou nastaveny, tak abychom zjistili, kolikrát se šířka a výška původního obdélníku $m \times n$ vejdou do poloměru kružnice k, jejíž poloměr je D.

V případě dvojic (d, α) využijeme trochu jiný postoj než u předchozích dvojic s využitelnými obdélníky, a to postoj využitelných rohů. Z původního místa satelitu (x, y) totiž nelze dosáhnout do všech rohů v mřížce, tak aby stále byla dodržena podmínka $d \leq D$ — tento výrok bude následně prokázán.

Využitelné rohy

Využitelný roh je právě ten roh z mřížky M, pro jehož délka od výchozí pozice satelitu (x, y) do tohoto rohu splňuje podmínku $d \leq D$. Pokud bychom do mřížky umístili kružnici k se středem výchozí pozice satelitu (x, y) a poloměrem D, zjistíme, že všechny rohy obdélníků v této kružnici budou využitelné.



Obrázek 5: Kružnice k v mřížce z obdélníků 2×1, $D = 1,4$

Pro zjištění vzdálenosti mezi dvěma body umístěnými v rovině můžeme využít tento vztah $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. V tomto případě souřadnice (x_1, y_1) jsou souřadnice využitelného rohu a souřadnice (x_2, y_2) jsou souřadnice výchozího bodu satelitu. V důsledku toho faktu, že toto souřadnicové odečítání jsme již řešili u minulých dvojic, lze nahradit $(x_1 - x_2)$ proměnnou Δx a $(y_1 - y_2)$ proměnnou Δy:

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \tag{4}$$

Pro výpočet úhlu počátečního pohybu α, mezi využitelných rohem a výchozí pozicí satelitu, můžeme využít stejnou stejný vztah, který jsme definovali již dříve.

Závěr

Pokud máme již vyřešené případy pohybu satelitu pro obě dvojice, včetně počátečního úhlu odrazu, můžeme na závěr sestavit množiny těchto dvojic, které nám umožní snadnější manipulaci s výsledky. Tímto způsobem budeme schopni lépe interpretovat získané údaje a případně aplikovat další postupy pro dosažené výsledky:

$$\begin{aligned} S_{(n,\alpha)} &= \{(n,\alpha) \mid n \leq N\} \\ S_{(d,\alpha)} &= \{(d,\alpha) \mid d \leq D\} \end{aligned} \tag{5}$$