Úloha č. 3 Tu kabel

Zpracoval Oskar Petr

Úloha 1

Nejprve začneme nastavením konstanty $c = 1$ a počtem zařízení $n = 3$. Předpokládejme, že algoritmus postupuje podle pořadí zařízení (p_1, p_2, p_3). Pro tuto instanci kabelového zapojení uvažujme následující situaci:

i	P_i	M	M^*
1	$\emptyset$	-	-
2	$\{p_1, p_3\}$	(p_2, p_1)	(p_2, p_3)
3	$\{p_1\}$	-	(p_3, p_1)

Pro mnou zvolenou instanci kabelového zapojení tedy platí $|M| = 1,\ |M^*| = 2$ a $c = 1$, což splňuje podmínky $1 \leq |M| \leq \frac{|M^*|}{c}$, a zároveň, $c \geq 1$.

Úloha 2

V této úloze je našim cílem dokázat, že existuje konstanta $c > \frac{3}{2}$, která platí pro libovolnou instanci kabelového zapojení. Tato konstanta zajistí, že $|M| \geq \frac{|M^*|}{c}$. Tento vztah hodnotí kvalitu algoritmu M ve srovnání s optimálním řešením M^*.

Jedním ze způsobů, jak ověřit efektivitu $|M|$ ve srovnání s $|M^*|$, je pomocí odhadu hranic počtu kabelů. Konkrétně určíme dolní hranici (d) pro algoritmus M a horní hranici (h) pro optimální algoritmus M^*. Tento postup je legitimní, protože umožňuje zohlednit nejhorší možný poměr mezi oběma algoritmy a zaručuje, že porovnání není závislé na konkrétní instanci, ale platí obecně pro všechny možné případy.

Nejprve určeme horní hranici optimálního algoritmu M^*, jelikož je tento výpočet jednodušší. Maximální počet zapojených kabelů bude vždy nanejvýše n, což odpovídá situaci, kdy pro každý výstupní port zařízení p_i existuje odpovídající vstupní port zařízení p_j:

$$|M^*| \leq n \implies h = n. \tag{1}$$

Stanovení dolní hranice algoritmu M je složitější, protože musíme zohlednit, jak algoritmus funguje u všech instancí kabelového zapojení. Klíčem k odhadu této hranice je představit si, že algoritmus postupně vytváří graf, kde hrany představují jednotlivá spojení mezi zařízeními.

Při zapojování můžeme uvážit, že pro každou hranu (u, v) v grafu optimálního řešení M^* algoritmus zvažuje alespoň jedno ze zařízení u nebo v. Pokud tento proces zopakujeme pro všechna zařízení, zapojíme minimálně polovinu z celkového počtu zařízení. Z tohoto předpokladu plyne dolní hranice algoritmu M:

$$|M| \geq \frac{n}{2} \implies d = \frac{n}{2}. \tag{2}$$

Pokud známe horní hranici h a dolní hranici d, můžeme odhadnout nejhorší možný poměr mezi kvalitou algoritmického řešení M a optimálním řešením M^*:

$$\begin{aligned}
\frac{|M^*|}{|M|} &\leq \frac{h}{d} \\
\frac{|M^*|}{|M|} &\leq \frac{n}{\frac{n}{2}} \\
\frac{|M^*|}{|M|} &\leq 2
\end{aligned} \tag{3}$$

Z tohoto výpočtu jasně vyplývá, že nejhorší možný poměr mezi $|M^*|$ a $|M|$ může být nanejvýše 2. Proto když zvolíme konstantu $c = 2$ bude to znamenat, že algoritmus M zapojí vždy alespoň polovinu kabelů oproti optimálnímu řešení M^* a splníme podmínku $c \geq 2 > \frac{3}{2}$.

Úloha 3

První část této úlohy vychází ze stejných pravidel jako úloha 2, a jelikož jsme již ověřili, že zvolená konstanta c splňuje požadované podmínky, nastavíme $c = 2$.

Abychom mohli jednodušeji ověřit splnění podmínky $1 \leq |M| \leq \frac{|M^*|}{c}$, vytvoříme pravidlo pro všechny kabelové instance $(K_1, \ldots, K_n)$, kde počet zařízení n bude vždy sudé číslo $n = 2k$, kde $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Dalším pravidlem je, že každá instance kabelového zapojení musí tvořit řetěz ze svých zařízení podle pořadí $(p_1, \ldots, p_n)$.

Nastavíme každé $P_i = \{p_{(i+1) \bmod n},\ p_{(i+2) \bmod n}\}$, kde indexace zařízení začíná od 1. Tento postup zajistí, že vytvoříme cyklický řetěz, protože pokud $i + 1 > n$ nebo $i + 2 > n$, přejdeme zpět na začátek seznamu P.

Touto konstrukcí docílíme zmíněného řetězu, ale nyní $|M| = |M^*| = n$, což nesplňuje podmínku $|M| \leq \frac{|M^*|}{c}$ pro $c > 1$. Proto upravíme konstrukci tak, že u každého druhého P_i obrátíme pořadí prvků. Algoritmus M postupuje tak, že pro každé zařízení p_i vybere první dostupný port podle definovaného pořadí P_i. Protože u každého druhého P_i obrátíme pořadí prvků, vznikne situace, kdy pro polovinu zařízení neexistuje odpovídající volný port. Ukázka pro konkrétní případ $n = 4$:

i	P_i	M	M^*
1	$\{p_2, p_3\}$	(p_1, p_2)	(p_1, p_2)
2	$\{p_4, p_3\}$	(p_2, p_4)	(p_2, p_3)
3	$\{p_4, p_1\}$	-	(p_3, p_4)
4	$\{p_2, p_1\}$	-	(p_4, p_1)

Pro každou takto vytvořenou instanci platí $|M| = \frac{n}{2}$ a $|M^*| = n$. Dosazením do podmínky $1 \leq |M| \leq \frac{|M^*|}{c}$ za $|M|$, $|M^*|$ a c získáme:

$$1 \leq \frac{n}{2} \leq \frac{n}{2}. \tag{4}$$

Podmínka uvedena výše bude vždy splněna, protože konstrukce funguje pro libovolné sudé $n \geq 4$. Definujme tedy množinu $\mathcal{G}$, která obsahuje všechny instance kabelových zapojení K_n podle uvedených pravidel:

$$\mathcal{G} = \{K_n \mid n = 2k,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}. \tag{5}$$