Laboratorul 5

1. Realizaţi un program care generează N numere pseudo-aleatoare pentru variabila aleatoare discretă X, care are distribuţia de probabilitate

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix},$$

folosind funcţia `rand`.

Aplicaţie: Conform statisticilor medicale, 46% din oameni au grupa sanguină **0**, 40% au grupa sanguină **A**, 10% au grupa sanguină **B** şi 4% au grupa sanguină **AB**. Simulaţi de N ori observarea grupei sanguine a unei persoane alese aleator şi afişaţi frecvenţa relativă de apariţie a fiecărei grupe sanguine. Afişaţi histograma datelor obţinute.

2. Realizaţi un program care generează N numere pseudo-aleatoare pentru variabila aleatoare $X \sim Exp(\lambda)$, unde $\lambda > 0$, folosind funcţia `rand`.

Aplicaţie: Timpul T necesar ca o imprimantă să printeze un afiş are distribuţia exponenţială cu valoarea medie 12 secunde (adică parametrul este $\frac{1}{12}$). Simulaţi de N ori printarea unui afiş. Estimaţi valorea medie şi deviaţia standard pentru T.

Observaţie: $X \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0 \implies E(X) = \frac{1}{\lambda}, Std(X) = \frac{1}{\lambda}$.

3. Realizaţi un program care generează N perechi de numere pseudo-aleatoare pentru variabilele aleatoare independente $X, Y \sim N(0, 1)$, folosind funcţia `rand`.

Aplicaţie: Un jucător de *darts* aruncă la o ţintă centrată în originea sistemului cartezian astfel încât coordonatele punctului nimerit de jucător la o aruncare sunt variabile aleatoare independente care au distribuţia normală standard. Simulaţi de N ori aruncarea la ţintă şi afişaţi frecvenţa relativă a punctelor din interiorul cercului centrat în origine şi de rază 0,5. Comparaţi rezultatul obţinut cu cel teoretic.

Temă: Realizaţi un program care generează N numere pseudo-aleatoare pentru variabila aleatoare $X \sim Geo(p)$, unde $p \in (0, 1)$, folosind funcţia `rand`.

Aplicaţie: Considerăm două monede. La o aruncare, prima indică stema cu probabilitate 0.5, iar a doua indică stema cu probabilitate 0.3. Folosind programul realizat, estimaţi valoarea medie a numărului de aruncări succesive ale celor două monede până la apariţia a două steme.

I. Generarea de numere pseudo-aleatoare pentru o distribuţie discretă (metoda inversei)

• Input: valorile $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, probabilităţile corespunzătoare $[p_1, p_2, \ldots, p_n]$ şi numărul N. Fie $p_0 = 0$.
• Se generează N numere aleatoare pentru distribuţia uniformă $Unif[0,1]$: $U(i)$, $i = \overline{1, N}$.
• Pentru fiecare $i = \overline{1, N}$: $X(i) = x_k$ dacă şi numai dacă

$$p_0 + p_1 + \cdots + p_{k-1} < U(i) \leq p_0 + p_1 + \cdots + p_k, \text{ unde } \ k \in \{1, \ldots, n\}.$$

• Output: $X(i), i = \overline{1, N}$.

Verificarea procedeului: Pentru fiecare $i = \overline{1, N}$ şi $k = \overline{1, n}$:
$P(X(i) = x_k) = P(\text{“se generează } \ x_k\text{”}) = P(p_0+p_1+\cdots+p_{k-1} < U(i) \leq p_0+p_1+\cdots+p_k) = p_k$.

II. Generarea de numere pseudo-aleatoare pentru o distribuţie continuă (metoda inversei)

Fie X o variabilă aleatoare continuă care are funcţia de repartiţie F astfel încât există F^{-1} pe $(0,1)$: pentru orice $y \in (0,1)$ există un unic $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $F(x) = y$ ($\Leftrightarrow F^{-1}(y) = x$).
• Input: funcţia F^{-1} şi numărul N.
• Se generează N numere aleatoare pentru distribuţia uniformă $Unif[0,1]$: $U(i)$, $i = \overline{1, N}$.
• Pentru fiecare $i = \overline{1, N}$: $X(i) = F^{-1}(U(i))$.
• Output: $X(i), i = \overline{1, N}$.

Verificarea procedeului pentru $X \sim Exp(\lambda)$, unde $\lambda > 0$:
Avem funcţia de densitate pentru X: $f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} \implies$ funcţia de repartiţie a lui X este $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$.
Observăm că pentru orice $y \in (0,1)$:
$F(x) = y \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda x} = y \Leftrightarrow 1 - y = e^{-\lambda x} \Leftrightarrow \ln(1-y) = -\lambda x \Leftrightarrow -\frac{1}{\lambda}\log(1-y) = x$, deci $F^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda}\log(1-y)$. Pentru fiecare $i = \overline{1, N}$, arătăm că $X(i)$ are funcţia de repartiţie a lui X: $\forall x \in \mathbb{R}, P(X(i) \leq x) = P(F^{-1}(U(i)) \leq x) = P(U(i) \leq F(x)) = F(x)$, deci $X(i)$ are aceeaşi distribuţie ca X.

III. Generarea de perechi de numere pseudo-aleatoare independente pentru distribuţia normală standard (algoritmul Box-Muller)

• Input: numărul N.
• Se generează N perechi de numere aleatoare independente şi uniform distribuite pe [0,1]: $(U_1(i), U_2(i))$, $i = \overline{1, N}$.
• Pentru fiecare $i = \overline{1, N}$: $\begin{cases} X(i) = R(i)\cos V(i) \\ Y(i) = R(i)\sin V(i) \end{cases}$, unde $\begin{cases} R(i) = \sqrt{-2\log U_1(i)} \\ V(i) = 2\pi U_2(i). \end{cases}$
• Output: $(X(i), Y(i)), i = \overline{1, N}$.