



Politechnika
Wrocławska

Matematyczna psychologia: czyli Syndrom sztokholmski, a równania różniczkowe

Hanna Ciszewska Joanna Rudnicka

Politechnika Wrocławska

Abstrakt

Co wspólnego może mieć psychologia z matematyką? Jak można opisać relację ludzi za pomocą równania? Na te pytania w 1988 roku chciał odpowiedzieć Steven H. Strogatz [7] proponując podstawowy model opisujący relacje między ludźmi za pomocą równań różniczkowych, znany pod nazwą modelu Romea i Julii. Zapoczątkował on coraz to bardziej skomplikowane próby matematyków do opisu relacji równaniami. W naszym posterze przedstawimy wybrane modele opisujące relacje dwóch aktorów w zależności od różnych zmiennych. Pokażemy także jak można za ich pomocą wytłumaczyć skomplikowane zagadnienia psychologiczne takie jak Syndrom Sztokholmski, czy relacje rodzica z dzieckiem.

Podstawy

MODEL ROMEA I JULII

Podstawowy model opisujący relacje między ludźmi za pomocą równań różniczkowych, został oryginalnie zaproponowany przez Stevena H. Strogatza [7] w 1988 roku. Model opisuje ewolucję relacji romantycznej między dwoma ludźmi, których nazywamy odpowiednio Romeo $r(t)$ i Julia $j(t)$. Zakładamy tutaj, że miłość Romea wzrasta, wraz z maleniem zainteresowania Julii, oraz maleje im bardziej się nim interesuje. W przypadku Julii, jej miłość do Romea rośnie wraz z jego zainteresowaniem do niej. Prosty model opisujący tę relację wygląda następująco:

$$\begin{aligned} dr/dt &= -aj, \\ dj/dt &= br, \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie $r(t)$ — nastawienie Romea do Julii w czasie t , $j(t)$ — nastawienie Julii do Romea w czasie t . Parametry a, b są dodatnie, aby odpowiadały historii.

Wartości dodatnie r, j oznaczają miłość, a ujemne nienawiść.

Możemy też rozważyć ogólniejszy model relacji romantycznej Romea i Julii:

$$\begin{aligned} dr/dt &= a_{11}r + a_{12}j, \\ dj/dt &= a_{21}r + a_{22}j, \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie parametry a_{ij} , ($i, j = 1, 2$) mogą być dodatnie — pozytywne nastawienie do odczuć drugiej osoby, bądź ujemne — negatywne.

MODEL "RINALDI-GRAGNANI"

W 1996 roku Sergio Rinaldi i Alessandra Gragnani [5] zaproponowali nowy, "minimalny" model relacji romantycznej dwóch aktorów. Bierze on pod uwagę trzy podstawowe czynniki wpływające na uczucia do drugiej osoby: zapomnienie O_i , odwzajemnienie R_i oraz instynkt I_i .

$$dx_i/dt = O_i + R_i + I_i, \quad (3)$$

gdzie $x_i(t)$ oznacza miarę miłość aktora i do aktora j . Dodatnie wartości oznaczają pozytywne uczucia, a ujemne — negatywne.

Za czynnik zapomnienia przyjmujemy $O_i = -\alpha_i x_i(t)$. Możemy to interpretować jako zanikanie uczuć z czasem w sytuacji śmierci drugiego aktora. W tym wypadku x_i znika z tempem α_i .

Czynnik odwzajemnienia R_i oznacza reakcje aktora i na uczucia aktora j . W swojej pracy [5] Rinaldi i Gragnani zakładają, że aktorzy są pewni swoich uczuć, więc reagują pozytywnie na miłość swoich partnerów. Stąd nasz czynnik R_i jest funkcją zależną od x_j rosnącą dla dodatnich wartości x_j i malejącą dla ujemnych.

Ostatni czynnik — instynkt I_i opisuje reakcję aktora i na ustalony urok A_j partnera.

Model zaproponowany przez Rinaldiego i Gragnani wygląda następująco:

$$\begin{aligned} dx_1(t)/dt &= -\alpha_1 x_1(t) + R_1(x_2(t)) + I_1(A_2), \\ dx_2(t)/dt &= -\alpha_2 x_2(t) + R_2(x_1(t)) + I_2(A_1), \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie każdą osobę i możemy opisać dwoma parametrami i dwoma funkcjami (A_i, α_i, R_i, I_i).



Rysunek 1. Kłócące się kotki obrazujące syndrom sztokholmski.

Model "Foryś-Górecka-Piotrowska"

My jednak nie skupiamy się na ewolucji romantycznej relacji dwóch aktorów, która z założenia rozwija się przez długi czas. Interesuje nas model, który opisuje stan emocjonalny dwóch aktorów w trakcie pojedynczego spotkania. Dodatkowo, w przeciwieństwie do modelu zaproponowanego przez Rinaldiego i Gragnani [5], musimy wziąć pod uwagę, że uczestnicy spotkania mogą mieć do siebie zarówno negatywne jak i pozytywne nastawienie. Taki model, oparty na modelu Liebovitcha [3], został zaproponowany przez Monikę Piotrowską, Joannę Górecką oraz Urszulę Foryś [4].

Niech $x(t), y(t)$ wyrażają stan emocjonalny odpowiedniego aktora w czasie t . Proponujemy następujący układ równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} dx/dt &= -m_1 x(t) + b_1 + c_1 f_1(y(t)), \\ dy/dt &= -m_2 y(t) + b_2 + c_2 f_2(x(t)). \end{aligned} \quad (5)$$

Można zauważyć, że współczynniki m_i odpowiadają parametrowi zapomnienia O_i w modelu "Rinaldi-Gragnani". Jednak na potrzeby rozważanej przez nas sytuacji oznacza on **tempo zmiany nastroju aktora i "w samotności"**. Dodatkowo zakładamy, że $m_i > 0$.

Podobnie parametr odwzajemnienia R_i jest **funkcją wpływu f_i nastroju aktora j na aktora i** , przy której współczynnik c_i **oznacza natężenie i kierunek tej funkcji**. Jeśli c_i jest dodatnie, to aktor ma pozytywne nastawienie do rozmówcy, a jeśli ujemne, to negatywne.

Podczas badania wpływu optymistycznej i pesymistycznej postawy na przebieg spotkania, będziemy zwracać szczególną uwagę na wartość współczynnika b_i . Opisuje on **ogólną postawę aktora**, dla wartości dodatnich — optymistyczną, a dla ujemnych — pesymistyczną. Odpowiednio będziemy nazywali tych aktorów optymistami i pesymistami.

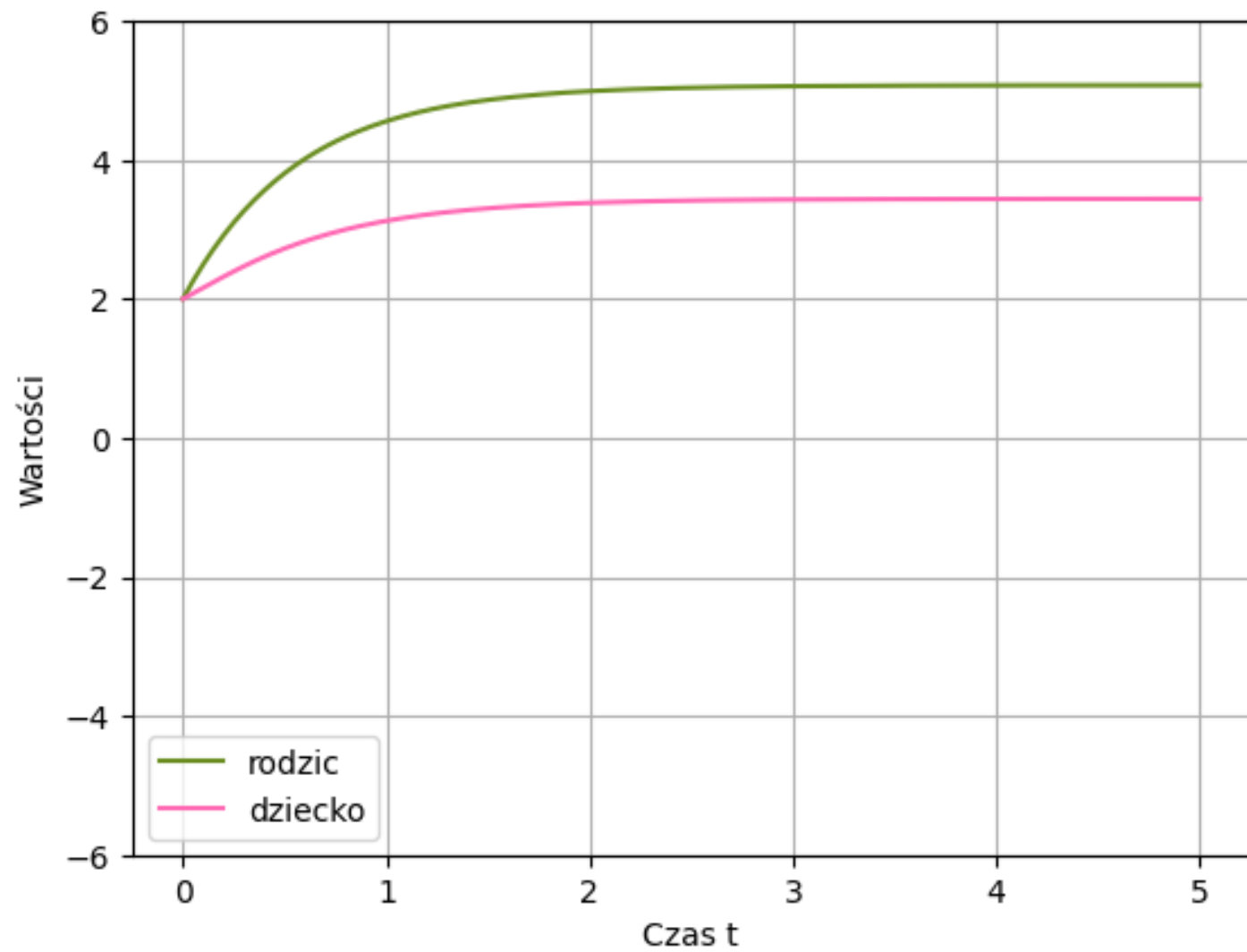
Założenia Funkcji Wpływu

W pracy „Prospect theory: An analysis of decision under risk.” [2] Kahneman i Tversky opisują postawę ludzi w stosunku do ryzyka. Foryś, Piotrowska i Górecka, opierając się na tej pracy, wykorzystują poniżej przedstawione zasady do opisu zachowania funkcji wpływu.

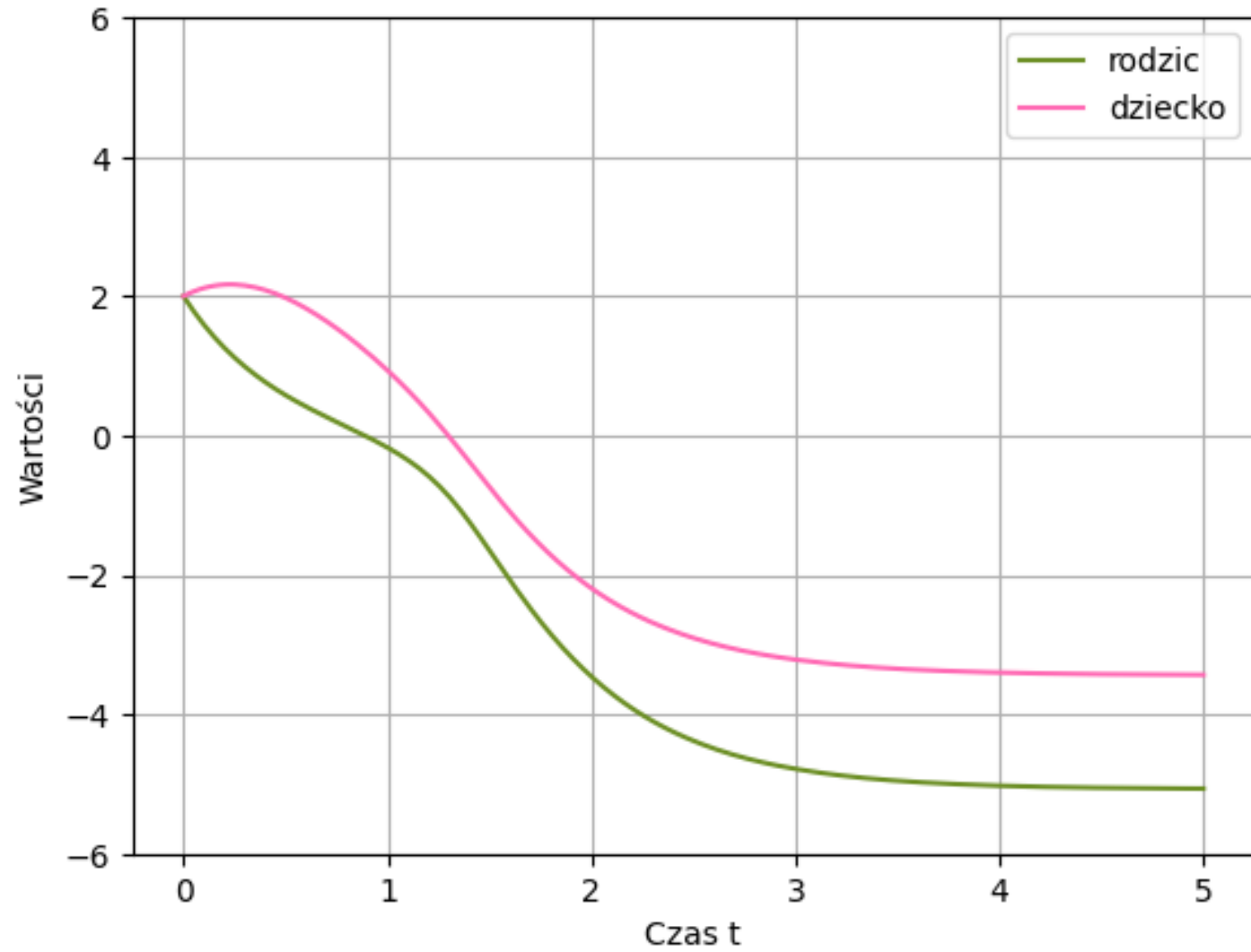
- Pozytywne emocje osoby, którą lubimy udzielają nam się i zyskujemy na tym spotkaniu — **funkcja wpływu musi być rosnąca**;
- Z czasem każda pozytywna interakcja przynosi nam coraz mniej zysku — funkcji wpływu jest **nieliniowa**;
- Straty odczuwamy mocniej niż zyski, czyjeś negatywne emocje jesteśmy w stanie wyczuć szybciej i silniej niż te pozytywne — **pierwsza pochodna funkcji wpływu powinna maleć dla dodatnich wartości** i rosnąć dla ujemnych;
- Z czasem trwania spotkania stan emocjonalny obu aktorów stabilizuje się — w $\pm\infty$ nasza **funkcja powinna dążyć do zera**

Relacja Rodzic-Dziecko

Richard B. Slatcher i Christopher J. Tentacosta w swojej pracy [6] opisują wpływ negatywnej "emocjonalności" rodzica na zachowania dziecka w codziennym życiu. Z ich badań wynika, że negatywna emocjonalność rodzica ma wpływ na złe zachowanie i samopoczucie dziecka. Przykładem jest to jak niska emocjonalność ojców wpływała na trzykrotnie częstszy płacz i narzekania u dzieci, niż u ojców z wyższą emocjonalnością.



Rysunek 2. Zmiana nastroju aktorów przy pozytywnej "emocjonalności" rodzica.

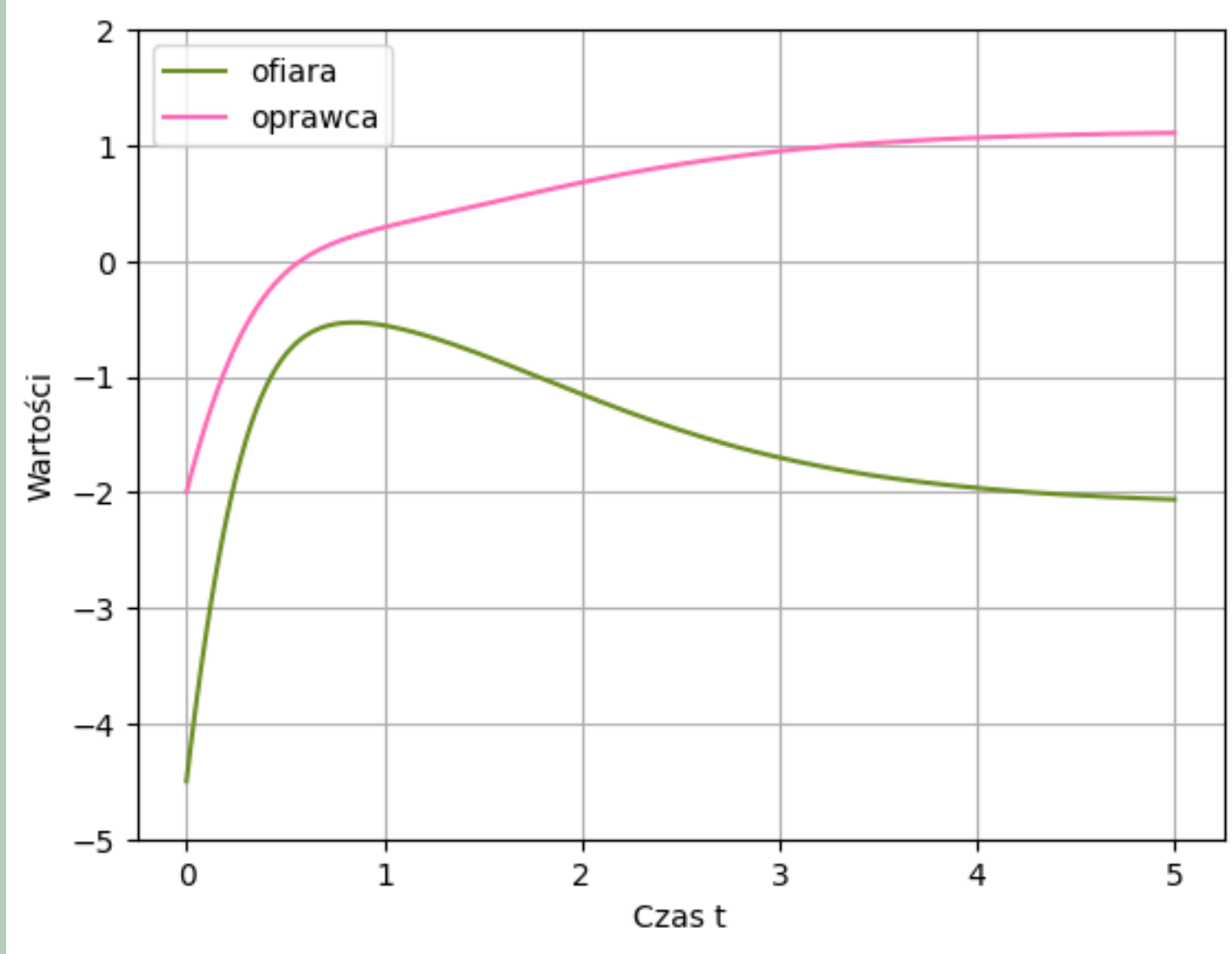


Rysunek 3. Zmiana nastroju aktorów przy negatywnej "emocjonalności" rodzica.

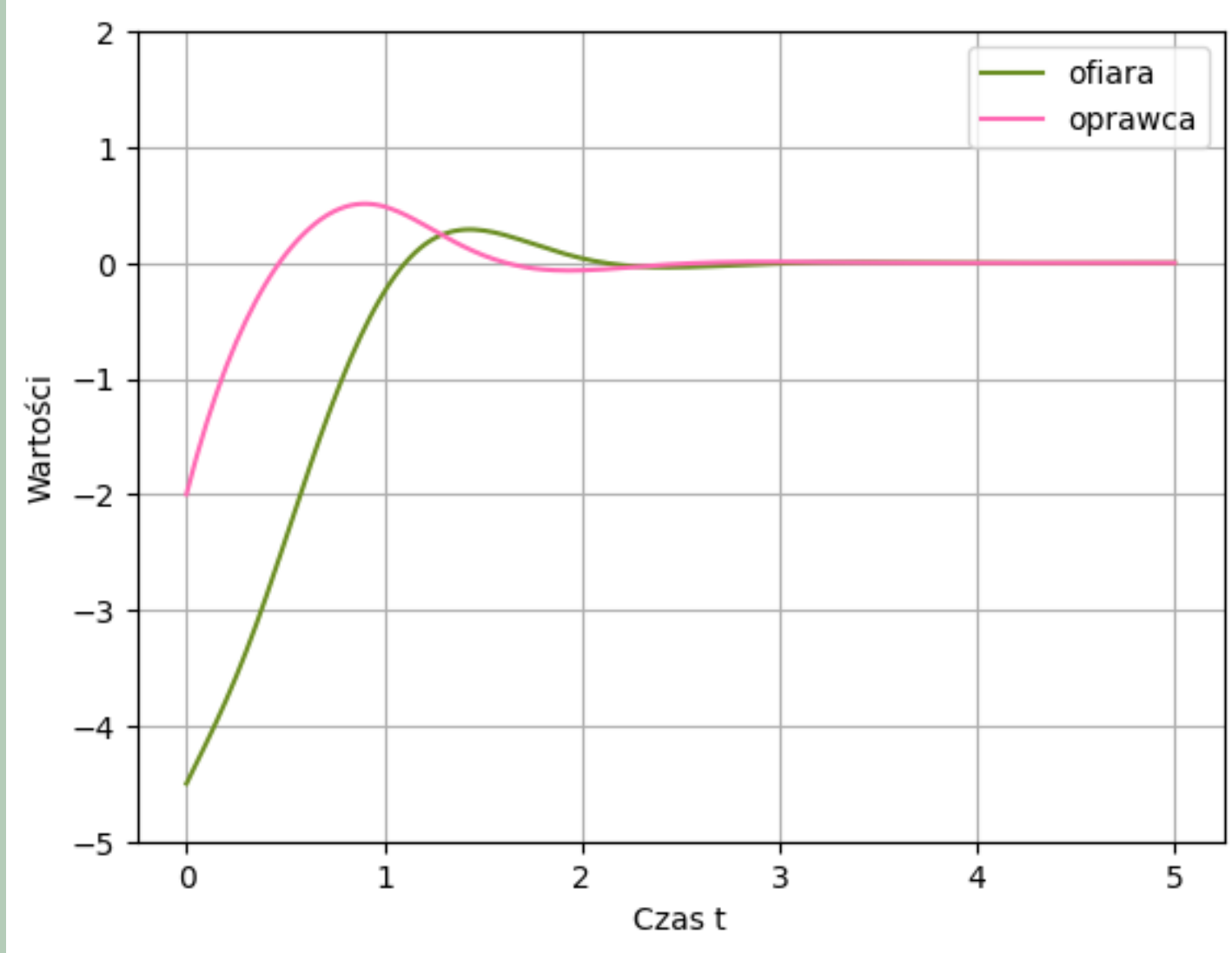
Z użyciem naszego modelu możemy zobrazować wyniki badań autorów. Emocjonalność rodzica jest równoważna ich postawie, tzn. negatywna emocjonalność — pesymizm. Faktycznie, widzimy jak zmiana postawy rodzica z wysoko optymistycznej [Rys 2] na wysoko pesymistyczną [Rys 3], wpłynęła na silne obniżenie się stanu emocjonalnego dziecka z wartości ok. 3 do ok. -4. Tak intensywna zmiana humoru może skutkować płaczem i narzekaniami u dziecka, co zgadza się z wyżej wymienionymi badaniami.

Syndrom sztokholmski

Syndrom sztokholmski jest stanem psychicznym pojawiającym się u zakładników lub ofiar porwania. Jest on skutkiem psychologicznych reakcji na silny stres oraz rezultatem prób wywołania współczucia przez prześladowców. Objawia się u ofiary odczuwaniem sympatii i solidarności z oprawcami. Próby wyjaśnienia tego zjawiska zwykle nawiązują do nurtu psychoanalitycznego i nieświadomych mechanizmów obronnych ego jak tłumaczy w swojej pracy Anna Czerniak [1]. Ofiara w takiej sytuacji jest bezbronna, znajduje się jakby w sytuacji dziecka. Jest całkowicie zależna od swojego "opiekuna" - opresora. Trudne jest utrzymanie negatywnych emocji (strachu, złości) wobec kogoś, w kim ofiara musi pokładać nadzieje na zachowanie życia czy otrzymywanie pokarmu.



Rysunek 4. Zmiana nastroju aktorów przy negatywnym nastawieniu ofiary.



Rysunek 5. Zmiana nastroju aktorów przy pozytywnym nastawieniu ofiary.

Zbadamy teraz jak nasz model opisuje działanie syndromu sztokholmskiego. Niech aktor x będzie ofiarą, a y oprawcą w danej sytuacji. Zobaczmy co się dzieje, jeśli ofiara zmienia swoje nastawienie do oprawcy, czyli z negatywnego $c_1 = -5$, przechodzimy do $c_1 = 5$. Na wykresach [Rys 4, 5] możemy zaobserwować, że wyższy współczynnik c_1 skutkuje lepszym stanem emocjonalny aktora x . Dodatkowo jego oprawca y dąży do stanu apatii. Ta sytuacja stwarza większe poczucie bezpieczeństwa, co pokrywa się z teorią przedstawioną powyżej.



Zapraszamy na naszego githuba! Udostępniliśmy tam dodatkowe interaktywne materiały, które pomogą jeszcze lepiej zobrazować przedstawione przez nas sytuacje.

Literatura

- A Czerniak. Psychospołeczne paradoksy przemocy. *Państwo i Społeczeństwo*, 2:49–64, 2014.
- D Kahneman and A Tversky. Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica*, 47:263–291, 1979.
- L Liebovitch, V Naudot, R Vallacher, A Nowak, L Biu-Wrzosinska, and P Coleman. Dynamics of two-actor cooperation-competition conflict models. *Physica A*, 387:6360–6378, 2008.
- M J Piotrowska, J Górecka, and U Foryś. The role of optimism and pessimism in the dynamics of emotional states. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B*, 23:401–423, 2018.
- S Rinaldi and A Gragnani. Love dynamics between secure individuals: A modeling approach. *Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences*, 2:238–301, 1998.
- R B Slatcher and C J Trentacosta. Influences of parent and child negative emotionality on young children's everyday behaviors. *Emotion*, 12:932–942, 2012.
- S Strogatz. Love affairs and differential equations. *Math. Magazine*, 65:35, 1988.