UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika

Oskar Težak, Sara Šega

Laplacian integral graphs

Skupinski projekt

Poročilo

Mentorja: doc. dr. Janoš Vidali,
prof. dr. Riste Škrekovski

Ljubljana, december 2024

1 Opis problema

Poiskati želimo čim več enocikličnih in dvocikličnih grafov, katerih Laplaceove lastne vrednosti so cela števila. Za grafe nižjega reda to storimo z izčrpno metodo, za grafe višjega reda moramo uporabiti stohastično metodo. Najti želimo metodo oz. vzorec za generiranje Laplaceovih celoštevilskih grafov.
Naj bo $G(V, E)$ graf z množico vozlišč $V, |V| = n$ in množico povezav $E, |E| = m$. Definiramo Laplaceovo matriko $L = D - A$, kjer je D $n \times n$ diagonalna matrika, katere diagonalni členi so stopnje vozlišč grafa G, A pa je $n \times n$ matrika sosednosti. Lastne vrednosti matrike L so $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Če so vse lastne vrednosti pozitivne, pravimo, da je graf G z matriko L Laplaceov celoštevilski.

2 Potek

Najprej sva napisala kodo za generiranje enocikličnih grafov, ki imajo relativno malo vozlišč. Uporabila sva dejstvo, da imajo povezani enociklični grafi enako število povezav in vozlišč. Implementirala sva funkcijo, ki za vsak graf potem preveri, če je Laplaceov in Laplaceove tudi izriše. Funkcijo sva testirala na grafih s 6, 7, 8, 9, 10 vozlišči. Za iskanje dvocikličnih grafov sva uporabila isto kodo, le da sva tokrat nastavila, da generirava grafe z n vozlišči in $n+1$ povezavami.

$$\det(L - \lambda I) = \begin{vmatrix} n-k-\lambda & -1 & -1 & & \dots & & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & & & & \\ -1 & -1 & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & 2-\lambda & & & \\ \vdots & & & & 1-\lambda & & \\ & & & & & \ddots & \\ -1 & & & & & & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

3 Generiranje enocikličnih Laplaceovih celoštevilskih grafov

Za generiranje povezanih enocikličnih grafov sva uporabila funkcijo *nauty geng* in dejstvo, da za povezane enociklične grafe velja, da je njihovo število vozlišč enako številu povezav. S funkcijo $is\_laplacian\_integer\_graph(G)$ sva potem preverjala, kateri izmed enocikličnih grafov imajo celoštevilske Laplaceove lastne vrednosti. To sva uporabila na manjših grafih (do 10 vozlišč) in opazila, da so Laplaceovi tisti, ki imajo eno vozlišče povezano z vsemi ostalimi, ena povezava pa je še med poljubnima dvema vozliščema. V splošnem bi njihova Laplaceova matrika bila $L = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & & \dots & -1 \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ -1 & -1 & 2 & & & \\ & & & 1 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ -1 & & & & & 1 \\ . & & & & & \end{bmatrix}$

Izjema sta bila le grafa: