

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika

Oskar Težak, Sara Šega

**Laplacian integral graphs**

Skupinski projekt

Poročilo

Mentorja: doc. dr. Janoš Vidali,  
prof. dr. Riste Škrekovski

Ljubljana, december 2024

# 1 Opis problema

Poiskati želimo čim več enocikličnih in dvocikličnih grafov, katerih Laplaceove lastne vrednosti so cela števila. Za grafe nižjega reda to storimo z izčrpnno metodo, za grafe višjega reda moramo uporabiti stohastično metodo. Najti želimo metodo oz. vzorec za generiranje Laplaceovih celoštevilskih grafov.

Naj bo  $G(V, E)$  graf z množico vozlišč  $V$ ,  $|V| = n$  in množico povezav  $E$ ,  $|E| = m$ .

Definiramo Laplaceovo matriko  $L = D - A$ , kjer je  $D$   $n \times n$  diagonalna matrika, katere diagonalni členi so stopnje vozlišč grafa  $G$ ,  $A$  pa je  $n \times n$  matrika sosednosti. Elementi Laplaceove matrike  $L$  so torej

$$l_{i,j} = \begin{cases} \deg(v_i), & \text{če } i = j, \\ -1, & \text{če } i \neq j \text{ in } v_i \text{ je sosedn z } v_j, \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Lastne vrednosti matrike  $L$  so  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ . Če so vse lastne vrednosti pozitivne, pravimo, da je graf  $G$  z matriko  $L$  Laplaceov celoštevilski.

# 2 Generiranje enocikličnih Laplaceovih celoštevilskih grafov

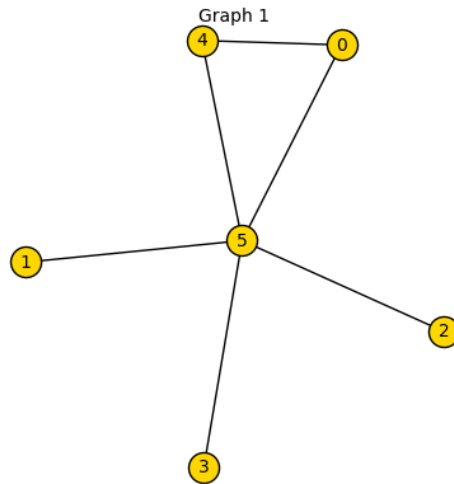
Za generiranje povezanih enocikličnih grafov sva uporabila funkcijo *nauty geng* in dejstvo, da za povezane enociklične grafe velja, da je njihovo število vozlišč enako številu povezav. S funkcijo *is\_laplacian\_integer\_graph(G)* sva potem preverjala, kateri izmed enocikličnih grafov imajo celoštevilске Laplaceove lastne vrednosti. To sva uporabila na manjših grafih (do 10 vozlišč) in opazila, da so Laplaceovi tisti, ki imajo eno centralno vozlišče, ki je del cikla, vsa vozlišča, ki niso del cikla, pa so tudi povezana s tem centralnim vozliščem. V splošnem bi

njihova Laplaceova matrika bila  $L =$

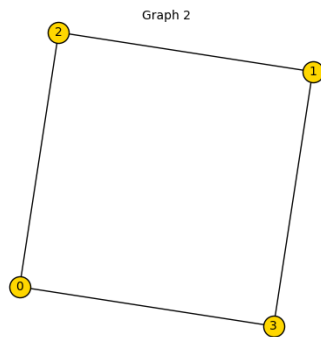
$$\begin{bmatrix} n-k & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ -1 & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 & \\ \vdots & & & & 1 \\ -1 & & & & \ddots & 1 \end{bmatrix},$$

njihov graf pa bi izgledal takole:

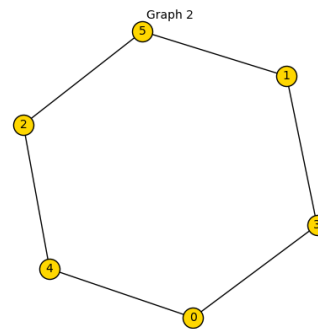
Izjema sta bila le grafa, ki sta imela vsa vozlišča vključena v cikel:



Slika 1: Celoštevilski Laplaceov graf s 6 vozlišči



Slika 2: Graf s 4 vozlišči

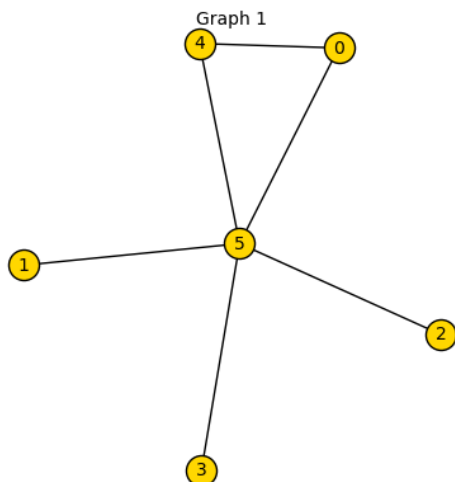


Slika 3: Graf s 6 vozlišči

Opazko glede oblike sva želela preveriti v datoteki *shape\_hypotesis.ipynb*. Generirala sva enociklične grafe s centralnim vozliščem, in sicer tako, da sva v poljubnem ciklu izbrala centralno vozlišče, nato pa dodajala vozlišča, ki so bila vsa povezana s centralnim vozliščem. Za generirane grafe sva preverila celoštevilskost lastnih vrednosti in na podlagi najinih testiranj ugotovila, da hipoteza o takšni obliki velja le za enociklične grafe, ki imajo cikel dolžine 3. Za iskanje enocikličnih Laplaceovih celoštevilskih grafov z večjim številom vozlišč sva uporabila stohastično metodo. Najprej sva napisala funkcijo, ki generira enociklične grafe, nato pa sva s funkcijo *unicyclic\_laplacian\_integer\_graph\_stochastic* preverila, kateri izmed njih so Laplaceovi celoštevilski. Funkcijo sva testirala tako, da sva za grafe z 10 do 100 vozlišči generirala največ 10000 enocikličnih grafov in za te preverila, koliko je celoštevilskih Laplaceovih. Izkazalo se je, da ni bil nobeden.

### 3 Generiranje dvocikličnih Laplaceovih celoštevilskih grafov

Podobno kot pri enocikličnih grafih, sva tudi v tem primeru najprej ustvarila funkcijo, ki generira dvociklične grafe in jih potem testirala, če so celoštevilski Laplaceovi. To funkcijo sva uporabila na grafih z majhnim številom vozlišč.



Za večje grafe sva uporabila stohastično metodo, in sicer sva najprej generirala dvociklične grafe (ustvarimo 2 poljubna cikla in ju potem povežemo), potem pa preverjamo, ali imajo celoštevilске lastne vrednosti. Zopet se je po testiranju izkazalo, da so celoštevilski Laplaceovi grafi redki, saj med dvocikličnimi grafi z 10 do 100 vozlišči, ni bilo nobenega.

### 4 Generiranje grafov s čim več celoštevilskih lastnih vrednosti