Algebra 1 - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar
po predavanjih profesorja Primoža Moravca

2019/20

Kazalo

1 Vektorji v ravnini in prostoru

Definicija 1.1 (Vektor - neformalno)**.** *Vektor* je usmerjena daljica. *Ničelni vektor* $\mathbf{0}$ je točka ter kaže v vse smeri.

Trditev 1.1. Za vektorje $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ in skalarja $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ velja:

- $\mathbf{a} + \mathbf{b} \ = \ \mathbf{b} + \mathbf{a}$
- $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} \ = \ \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
- $\mathbf{a} + \mathbf{0} \ = \ \mathbf{a}$
- $\mathbf{a} + -\mathbf{a} \ = \ \mathbf{0}$
- $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \ = \ \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$
- $(\lambda + \mu)\mathbf{a} \ = \ \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$
- $(\lambda\mu)\mathbf{a} \ = \ \lambda(\mu\mathbf{a})$
- $1 \cdot \mathbf{a} \ = \ \mathbf{a}$

Definicija 1.2 (Skalarni produkt)**.** Naj bosta $\mathbf{a} = (x_1, \ldots, x_n)^\mathsf{T}$ in $\mathbf{b} = (y_1, \ldots, y_n)^\mathsf{T}$ vektorja v $\mathbb{R}^n$. *Skalarni produkt* $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ je število

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \ = \ x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

Trditev 1.2. Naj bodo $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ in $\lambda \in \mathbb{R}$. Potem velja:

1. $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \ \geq \ 0$
2. $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \ = \ 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0}$
3. $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \ = \ \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$
4. $\langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \ = \ \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$
5. $\langle \lambda\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \ = \ \lambda\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$

Definicija 1.3 (Dolžina vektorja)**.** *Dolžina* vektorja $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ je

$$|\mathbf{a}| \;=\; \sqrt{\langle a, a\rangle}.$$

Izrek 1.1 (Kosinusni izrek)**.** $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{R}$:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle \;=\; |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi$$

Izrek 1.2 (Cauchy-Schwarzova neenakost)**.** Naj bosta $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Potem velja:

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle| \;\leq\; |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|.$$

Enačaj velja $\iff$ $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Izrek 1.3. Naj bosta $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ in recimo, da je $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = 0$. Potem je

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 \;=\; |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2.$$

Definicija 1.4 (Pravokotna projekcija)**.** Naj bosta $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. *Pravokotna projekcija* $\mathbf{b}$ na $\mathbf{a}$ je vektor

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} \;=\; \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle}{|\mathbf{a}|^2} \cdot \mathbf{a}.$$

Trditev 1.3. Naj bosta $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Potem je $(\mathbf{b} - \mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b})$ pravokoten na $\mathbf{a}$.

Definicija 1.5 (Vektorski produkt)**.** Naj bosta $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)^\mathsf{T}, \mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^3$. *Vektorski produkt* vektorjev $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ je vektor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \;=\; \begin{bmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ z_1 x_2 - z_2 x_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix}.$$

Definicija 1.6. Naj bodo $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$. *Mešani produkt* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ je število

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \;=\; (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

Trditev 1.4. Naj bodo $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \;=\; -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$ (antikomutativnost)
2. $\mathbf{a} \times \mathbf{a} \;=\; \mathbf{0}$
3. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \;=\; \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
4. $(\alpha \mathbf{a}) \times \mathbf{b} \;=\; \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$
5. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \;=\; (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$

Trditev 1.5. Naj bodo $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$. Potem

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \;=\; -[\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}] \;=\; -[\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}] \;=\; -[\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}].$$

Če v $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ zamenjamo poljubna vektorja se spremeni le predznak.

Trditev 1.6 (Lagrange)**.** Naj bosta $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$. Potem velja

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \;=\; |\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2.$$

Posledica. Naj bosta $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$. Potem je $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ enaka ploščini *paralelograma*, ki ga oklepata $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$.

Trditev 1.7. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ je pravokoten na $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$.

2 Matrike

2.1 Uvod

Definicija 2.1 (Matrika)**.** *Matrika* je pravokotna tabela (realnih ali kompleksnih) številk.

Trditev 2.1. Naj bodo $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potem velja

1. $A + B \;=\; B + A$ (komutativnost)
2. $(A + B) + C \;=\; A + (B + C)$ (asociativnost)
3. $A + 0 \;=\; 0 + A \;=\; A$
4. $A + (-A) \;=\; (-A) + A \;=\; 0$
5. $\alpha(A + B) \;=\; \alpha A + \alpha B$
6. $(\alpha + \beta)A \;=\; \alpha A + \beta A$
7. $\alpha(BA) \;=\; (\alpha B)A$
8. $1 \cdot A \;=\; A$

Definicija 2.2. Matrikam v $R^{n\times n}$ pravimo *kvadratne matrike.*

Definicija 2.3 (Transponirana matrika)**.** Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrika. *Transponiranka* matrike A je matrika $A^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, za katero velja:

$$(i, j)\text{-ti element } A^\mathsf{T} \;=\; (j, i)\text{-ti element } A.$$

Trditev 2.2. Naj bosta $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. $(A^\mathsf{T})^\mathsf{T} \;=\; A$
2. $(A + B)^\mathsf{T} \;=\; A^\mathsf{T} + B^\mathsf{T}$

3. $(\alpha A)^\mathsf{T} \;=\; \alpha A^\mathsf{T}$

Definicija 2.4. Naj bo $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Potem je $A \cdot B \in \mathbb{R}^{m\times p}$ matrika, ki ima na (i,j)-tem mestu element

$$c_{ij} \;=\; a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{in}b_{nj} \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Trditev 2.3.

1. Naj bodo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ in $C \in \mathbb{R}^{p\times s}$. Potem velja
$$A(BC) \;=\; (AB)C.$$
2. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $B, C \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Potem velja
$$A(B+C) \;=\; AB + AC.$$
3. Naj bosta $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $C \times \mathbb{R}^{n\times p}$. Potem velja
$$(A+B)C = AC + BC.$$
4. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Potem velja
$$(AB)^\mathsf{T} \;=\; B^\mathsf{T} A^\mathsf{T}.$$

2.2 Kvadratne matrike

Definicija 2.5 (Kvadratne matrike)**.** Naj bo $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Pravimo je, da je A

1. *diagonalna*, če je oblike
$$A \;=\; \begin{bmatrix} * & & & & \\ & * & & & \\ & & * & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & * \end{bmatrix}$$
oziroma $a_{ij} = 0 \; \forall i \neq j$.

2. *zgornjetrikotna*, če je oblike

$$A = \begin{bmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ & * & * & \cdots & * \\ & & * & \cdots & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & * \end{bmatrix}$$

oziroma $a_{ij} = 0 \ \forall i > j$.

3. *spodnjetrikotna*, če je oblike

$$A = \begin{bmatrix} * & & & & \\ * & * & & & \\ * & * & * & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

oziroma $a_{ij} = 0 \ \forall i < j$, oziroma A^T mora biti *zgornjetrikotna.*

Definicija 2.6 (Identična matrika)**.** Kvadratni matriki oblike

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

pravimo *identična matrika.*

Trditev 2.4. Naj bo A *kvadratna* matrika. Potem je

$$A \cdot I = I \cdot A = A.$$

Trditev 2.5. $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

1. Če sta A in B *diagonalni*, sta tudi $A + B$ in AB *diagonalni.*

2. Če sta A in B *zgornjetrikotni*, sta tudi $A+B$ in AB *zgornjetrikotni*.
3. Če sta A in B *spodnjetrikotni*, sta tudi $A+B$ in AB *spodnjetrikotni*.

Definicija 2.7. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Pravimo, da je A *obrnljiva*, če obstaja $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, da je

$$AB = BA = I.$$

Trditev 2.6. Naj bo A *obrnljiva* matrika in B ter C taki matriki, da velja

$$\begin{aligned} AB &= BA = I, \\ AC &= CA = I. \end{aligned}$$

Potem je $B = C$.

Definicija 2.8 (Inverz matrike)**.** Naj bo A *obrnljiva* matrika. Matriki B, za katero velja $AB = BA = I$, pravimo *inverz* matrike A;

$$B = A^{-1}.$$

Velja:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Trditev 2.7. Naj bosta $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *obrnljivi* matriki. Potem je AB *obrnljiva* matrika, velja

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Opomba. Če sta A in B *obrnljivi*, $A+B$ ni nujno *obrnljiva*.

Definicija 2.9 (Simetrična matrika)**.** Naj bo A *kvadratna* matrika. Pravimo, da je A *simetrična*, je če

$$A^{\mathsf{T}} = A.$$

Trditev 2.8. Naj bosta $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *simetrični* matriki, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potem je tudi $\alpha A + \beta B$ *simetrična* matrika.

Definicija 2.10 (Pozitivno definitna matrika)**.** Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *simetrična*. Pravimo, da je A *pozitivno definitna*, če $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq 0$, velja

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \ > \ 0.$$

Trditev 2.9. Naj bo $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$. A je *pozitivno definitna* $\iff$ $a > 0$ in $ac - b^2 > 0$.

2.3 Vrstična kanonična forma matrike

Definicija 2.11. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Na A bomo izvajali *elementarne transformacije* treh tipov:

- Tip I: neki vrstici matrike prištejemo večkratnik neke druge vrstice.
- Tip II: neko vrstico matrike pomnožimo z neničelnim številom.
- Tip III: menjava dveh vrstic.

Definicija 2.12 (Rang matrike)**.** Naj bo A matrika. Številu pivotov v vrstični kanonični formi matrike A pravimo *rang* matrike A.

Definicija 2.13.

1. Naj bo $E_{ij}(\alpha)$, $i \neq j$, *kvadratna* matrika, ki ima po diagonali 1, na (i, j)-tem mestu je α, drugje so 0. Tem matrikam pravimo *elementarne matrike tipa* I.

2. Naj bo $\alpha \neq 0$. Naj bo $E_i(\alpha)$ *kvadratna* matrika, ki ima na i-tem mestu na diagonali α, drugje na diagonali 1, povsod drugod pa 0. Tem matrikam pravimo *elementarne matrike tipa* II.

3. P_{ij} naj bo *kvadratna* matrika, ki jo dobimo, če v I zamenjamo i-to in j-to vrstico. Tem matrikam pravimo *elementarne matrike tipa* III.

Trditev 2.10. Elementarne matrike tipov I-III so vse *obrnljive.*

2.4 Sistemi linearnih enačb

Trditev 2.11. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$ naj bo *obrnljiva* matrika. Potem imata sistema

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{in} \quad (PA)\mathbf{y} = P\mathbf{b}$$

enako množico rešitev.

Izrek 2.1. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Potem je A *obrnljiva* $\iff$ $\operatorname{rang} A = n$.

2.5 Permutacije

Definicija 2.14 (Permutacija)**.** *Permutacija* je *bijektivna* preslikava, ki slika

$$\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Oznaka:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Definicija 2.15. Naj bosta σ, τ permutaciji množice $\{1, 2, \ldots, n\}$. *Produkt* $\sigma\tau$ je kompozitum $\sigma \circ \tau$.

Opomba. Produkt permutacij ni nujno *komunikativen*, je pa *asociativen.*

Definicija 2.16. Množico vseh permutacij množice $\{1, 2, \ldots, n\}$ označimo z S_n.

Opomba.

$$\begin{aligned} |S_n| &= \text{število bijekcij } \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}. \\ &= n! \end{aligned}$$

Definicija 2.17. Naj bo $\sigma \in S_n$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pravimo, da je par (i, j) *inverzija* za σ, če velja $i < j$ in $\sigma(i) > \sigma(j)$. Številu vseh inverzij permutacije σ pravimo *indeks* permutacije σ:

$$\mathrm{ind}(\sigma).$$

Številu

$$\mathrm{sign}(\sigma) \;=\; (-1)^{\mathrm{ind}(\sigma)}$$

pravimo *signatura* permutacije σ.

Trditev 2.12. Naj bo $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \end{pmatrix}$.

1. Če v σ zamenjamo poljubna s_i in s_j in s tem dobimo permutacijo $\tilde{\sigma}$, potem je
$$\mathrm{sign}(\tilde{\sigma}) \;=\; -\mathrm{sign}(\sigma).$$
2. $\mathrm{sign}(\sigma^{-1}) \;=\; \mathrm{sign}(\sigma)$

2.6 Determinatne

Definicija 2.18. Naj bo $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Determinanta* matrike A je

$$\det A \ = \ \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)}.$$

Trditev 2.13. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Potem je

$$\det A^{\mathsf{T}} \ = \ \det A.$$

Trditev 2.14. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $\tilde{A}$ matrika, ki jo dobimo, če v A zamenjamo dve vrstici. Potem je

$$\det \tilde{A} \ = \ -\det A.$$

Opomba. Elementarna transformacija tipa II na matriki spremeni le predznak determinante.

Posledica. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $\tilde{A}$ matrika, ki jo dobimo, če v A zamenjamo dva stolpca. Potem je

$$\det \tilde{A} \ = \ -\det A.$$

Opomba. Če se neka lastnost determinante nanaša na vrstice matrike, enaka lastnost velja tudi za stolpce matrike.

Trditev 2.15. Če sta v *kvadratni* matriki A dve vrstici enaki, potem je

$$\det A \ = \ 0.$$

Trditev 2.16.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Trditev 2.17.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Opomba. Elementarna transformacija tipa II na matriki (množenje vrstice s k) determinanto spremeni za faktor k.

Trditev 2.18. Če v matriki A večkratnik kake vrstice prištejemo k neki drugi vrstici je determinanta tako dobljene matrike enaka $\det A$.

Definicija 2.19. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Determinanti matrike, ki jo dobimo, če odstranimo i-to vrstico in j-ti stolpec, pravimo (i,j)-ti *minor* matrike A, oznaka m_{ij}. Številu

$$k_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$$

pravimo (i,j)-ti *kofaktor* matrike A.

Izrek 2.2 (Razvoj determinante po vrstici)**.** Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $i \in \{1,2,\ldots,n\}$. Potem je

$$\det A = a_{i1}k_{i1} + \ldots + a_{in}k_{in}.$$

Trditev 2.19. Determinanta *zgornjetrikotne/spodnjetrikotne* matrike je enaka produktu njenih diagonalnih elementov.

Izrek 2.3. Naj bosta $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Potem je

$$\det AB = \det A + \det B.$$

Definicija 2.20. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Matriki

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

kjer je k_{ij} (i,j)-ti kofaktor, pravimo *prirejena matrika* matriki A.

Izrek 2.4. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Potem je A *obrnljiva* $\iff$ $\det A \neq 0$. V slednjem primeru velja

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}^{\mathsf{T}}.$$

Izrek 2.5 (Cramerjevo pravilo)**.** Dan je sistem n linearnih enačb z n neznankimi

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Recimo, da je A *obrnljiva*. Potem je

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

pri čemer je A_i matrika, ki jo dobimo, če v A i-ti stolpec nadomestimo s stolpec $\mathbf{b}$.

3 Algebrajske strukture

3.1 Uvod

Definicija 3.1 (Operacija)**.** Naj bo M *neprazna* množica. *Operacija* na množici M je preslikava
$$\circ M \times M \longrightarrow M.$$

Opomba. Imamo operacijo

$$\begin{aligned} \circ M \times M &\to M \\ (a,b) &\mapsto a \circ b; \end{aligned}$$

vpeljemo oznako
$$a \circ b \ = \ \circ(a,b).$$

Definicija 3.2. Naj bo M množica z operacijo $\circ$.

1. Operacija $\circ$ je *asociativna*, če velja
$$(a \circ b) \circ c \ = \ a \circ (b \circ c), \quad \forall a,b,c \in M.$$

2. Operacija $\circ$ je *komutativna*, če velja
$$a \circ b \ = \ b \circ a, \quad \forall a,b \in M.$$

3. Element $e \in M$ je *enota* za operacijo $\circ$, če velja
$$e \circ a \ = \ a \circ e \ = \ a, \quad \forall a \in M.$$

4. Recimo, da je e *enota* za operacijo $\circ$ na množici M. Izberemo $a \in M$. Element $b \in M$ je *inverz* elementa a, če velja
$$a \circ b \ = \ b \circ a \ = \ e.$$

Definicija 3.3 (Polgrupa, monoid, grupa)**.** Naj bo M množica z operacijo M.

1. $(M, \circ)$ je *polgrupa*, če je operacija $\circ$ *asociativna.*
2. $(M, \circ)$ je *monoid*, če je *polgrupa* in ima *enoto.*
3. $(M, \circ)$ je *grupa*, če je *monoid* in ima $\forall a \in M$ *inverz.*

Če je operacija *komutativna*, govorimo o *komutativni polgrupi*, *komutativnem monoidu* ter *komutativni* (oz. *abelovi*) *grupi.*

Definicija 3.4. Množico vseh *obrnljivih* $n \times n$ matrik z realnimi koeficienti definiramo kot

$$GL_n(\mathbb{R}) \ = \ \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}.$$

Definicija 3.5. Specialno linearno grupo $n \times n$ matrik definiramo kot

$$SL_n(\mathbb{R}) \ = \ \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}.$$

Definicija 3.6. Naj bo M množica z operacijo $\circ$ in $N \subseteq M$. Pravimo, da je N *zaprta* za operacijo $\circ$, če

$$\forall a, b \in N : \ a \circ b \in N.$$

Definicija 3.7 (Podpolgrupa)**.** Naj bo $(M, \circ)$ *polgrupa*, $N \subseteq M$. Pravimo, da je N *podpolgrupa* v M, če je N *zaprta* za operacijo.

Opomba. Če je N *podpolgrupa* v $(M, \circ)$, se *asociativnost* avtomatično podeduje in je $(N, \circ)$ tudi *polgrupa.*

Definicija 3.8 (Podgrupa)**.** Naj bo $(M, \circ)$ *grupa* in $N \subseteq M$. Pravimo, da je N *podgrupa* v M, če je

1. N *zaprta* za operacijo $\circ$,
2. $e \in N$,
3. v primeru ko je $a \in N$, tudi njegov inverz v N.

Trditev 3.1.

1. Naj bo $(M, \circ)$ *monoid*. Potem je *enota* v M enolično določena.
2. Naj bo $(M, \circ)$ *grupa*. Potem ima $\forall a \in M$ enolično določen inverz $a^{-1} \in M$.

Trditev 3.2. Naj bo $(M, \circ)$ *grupa* in $N \subseteq M$, $N \neq \emptyset$. Potem je N *podgrupa* v M natanko tedaj, ko velja:

$$\forall a, b \in N : \; a \circ b^{-1} \in N.$$

Definicija 3.9 (Homomorfizem)**.** Naj bosta $(M, \circ)$ in $(N, *)$ *(pol)grupi*. Preslikava $f : M \to N$ je *homomorfizem* (pol)grup, če

$$f(a \circ b) \;=\; f(a) * f(b), \quad \forall a, b \in M.$$

- *Injektivnim* homomorfizmom pravimo *monomorfizmi.*
- *Surjektivnim* homomorfizmom pravimo *epimorfizmi.*
- *Bijektivnim* homomorfizmom pravimo *izomorfizmi.*

Definicija 3.10. Naj bosta $(M, \circ)$ in $(N, *)$ *(pol)grupi*. Pravimo, da sta M in N *izomorfni*, če obstaja izomorfizem $f : M \to N$. Oznaka:

$$M \cong N.$$

Definicija 3.11 (Jedro, slika)**.** Naj bo $f : (M, \circ) \to (N, *)$ *homomorfizem grup*.

- Jedro homomorfizma:

$$\ker f \;=\; \{a \in M \mid f(a) = e_N\}$$

- Slika homomorfizma:

$$\operatorname{im} f \;=\; \{f(a) \mid a \in M\}$$

Izrek 3.1. Naj bo $f : M \to N$ *homomorfizem grup.*

1. $f(e_M) \;=\; e_N$
2. $f(a^{-1}) \;=\; f(b)^{-1}\ \forall a \in M$
3. $\ker f$ je *polgrupa* v M
4. $\operatorname{im} f$ je *polgrupa* v M
5. f je *monomorfizem* $\iff$ $\ker f = \{e_M\}$
6. f je *epimorfizem* $\iff$ $\operatorname{im} f = N$

3.2 Kolobarji in obsegi (polja)

Definicija 3.12 (Kolobar)**.** Naj bo K *neprazna* množica, opremljena z dvema operacijama:

$$+ : K \times K \to K$$
$$\cdot : K \times K \to K$$

$(K, +, \cdot)$ je *kolobar*, če velja:

1. $(K, +)$ je *abelova grupa*; enoto označimo z 0, inverz elementa $a \in K$ za $+$ označimo z $-a$.
2. $(K, \cdot)$ je *polgrupa.*

3. Leva in desna distributivnost:

$$\begin{aligned} a \cdot (b+c) &= a \cdot b + a \cdot c \\ (b+c) \cdot a &= b \cdot a + c \cdot a \\ \forall a, b, c &\in K \end{aligned}$$

Če je množenje *komutativna* operacija, pravimo, da je $(K, +, \cdot)$ *komutativen kolobar*. Če je $(K, \cdot)$ *monoid*, pravimo, da je $(K, +, \cdot)$ *kolobar z enico*; enoto za množnje označimo z 1.

Definicija 3.13. Naj bo $(K, +, \cdot)$ *komutativen kolobar* z enico. Pravimo, da je K *obseg* (*polje*), če je $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ *grupa*. Vsak neničelen element polja K ima torej inverz za množenje.

Definicija 3.14. Naj bo $(K, +, \cdot)$ *kolobar* in $L \subseteq K$, $L \neq \emptyset$. Pravimo, da je L *podkolobar* v K, če je L tudi *kolobar* za isti operaciji.

Definicija 3.15. Naj bosta $(K, +_1, \cdot_1)$ in $(L, +_2, \cdot_2)$ *kolobarja*. $f : K \to L$ je *homomorfizem kolobarjev*, če

$$\begin{aligned} f(x +_1 y) &= f(x) +_2 f(y) \\ f(x \cdot_1 y) &= f(x) \cdot_2 f(y) \\ \forall x, y &\in K \\ \ker f &= \{x \in K \mid f(x) = 0_L\} \\ \operatorname{im} f &= \{f(x) \mid x \in K\} \end{aligned}$$

3.3 Vektorski prostori

Definicija 3.16 (Vektorski prostor)**.** Naj bo $V \neq \emptyset$ neprazna množica in O obseg. V je *vektorski prostor* nad obsegom O, če imamo operacijo

$$\begin{aligned} + : V \times V &\to V \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\mapsto \mathbf{u} + \mathbf{v} \end{aligned}$$

in preslikavo

$$\begin{aligned} \cdot : O \times V &\to V \\ (\lambda, \mathbf{v}) &\mapsto \lambda \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

za kateri veljajo:

1. $(V, +)$ je *abelova grupa*; enota za $+$ je O, inverz elementa $\mathbf{v} \in V$ za seštevanje označimo z $-\mathbf{v}$.
2. $\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \;=\; \alpha\mathbf{u}+\alpha\mathbf{v}, \quad \alpha \in O,\, \mathbf{u},\mathbf{v} \in V$
3. $(\alpha+\beta)\mathbf{u} \;=\; \alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{u}, \quad \alpha,\beta \in O,\, \mathbf{u} \in V$
4. $(\alpha\cdot\beta)\mathbf{u} \;=\; \alpha(\beta\mathbf{u}), \quad \alpha,\beta \in O,\, \mathbf{u} \in V$
5. $1\cdot\mathbf{u} \;=\; \mathbf{u}$

Elementi V so *vektorji*, elementi O pa *skalarji*.

Definicija 3.17 (Podprostor)**.** Naj bo V *vektorski prostor* nad O, naj bo $U \subseteq V$, $U \neq \emptyset$. Potem je U *podprostor* v V, če velja:

1. U je *podgrupa* za $+$ v V:

$$\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U : \; \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \in U$$

2.
$$\forall \mathbf{u} \in U \; \forall \alpha \in O : \; \lambda\mathbf{u} \in U$$

Oznaka:

$$U \leq V$$

Definicija 3.18. Naj bo V *vektorski prostor* nad O, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in O$. Izrazu

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n$$

pravimo *linearna kombinacija* vektorjev $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$.

Trditev 3.3. Naj bo V *vektorski prostor* nad O, $U \subseteq V$, $U \neq \emptyset$. Potem je $U \leq V \iff \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U,\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in O:\ \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 \in U$.

Definicija 3.19 (Linearna ogrinjača)**.** Naj bo V *vektorski prostor* nad O in $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$. Množici

$$\mathcal{L}in\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \ := \ \{\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in O\}$$

pravimo *linearna ogrinjača* (*lupina*) vektorjev $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$.

Trditev 3.4. Naj bo V *vektorski prostor* nad O in $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$:

1. $\mathcal{L}in\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ je *podprostor* v V
2. $\mathcal{L}in\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ je najmanjši *podprostor* v V, ki vsebuje $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$

Če je $U \leq V$, ki vsebuje $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, potem

$$\mathcal{L}in\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subseteq U.$$

3.4 Baza vektorskega prostora

Definicija 3.20 (Linearna neodvisnost)**.** Naj bo V *vektorski prostor* nad obsegom O. Recimo, da so vektorji $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ *linearno neodvisni*, če velja

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n \ = \ 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Definicija 3.21 (Baza)**.** Naj bo V *vektorski prostor* nad O in $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$. Množica $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ je *baza* prostora V, če

1. $\mathcal{L}in\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} = V$; vsak vektor $\mathbf{v} \in V$ je linearna kombinacija vektorjev $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$
2. $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ so linearno neodvisni

Trditev 3.5. Naj bo V *vektorski prostor*. Potem $\forall \mathbf{v} \in V$ lahko razvijemo po dani bazi na en sam način.

Izrek 3.2. Naj bo V *vektorski prostor*. Potem imajo vse baze prostora V isto moč.

Definicija 3.22 (Dimenzija)**.** Naj bo V *vektorski prostor*. Števılu baznih vektorjev prostora V pravimo *dimenzija* prostora V. Oznaka:

$$\dim V.$$

Trditev 3.6. Naj bo V *vektorski prostor* in $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ naj bodo linearno neodvisni vektorji v V. Potem lahko množico teh vektorjev dopolnimo do baze prostora V.

Posledica. Naj bo V *vektorski prostor* in U *podprostor* v V. Potem velja $\dim U \leq \dim V$. Če velja $\dim U = \dim V$, potem je $U = V$.

Definicija 3.23 (Vsota podprostorov)**.** Naj bo V *vektorski prostor* in U, W *podprostora* v V. Definiramo:

$$U + W \;=\; \{\mathbf{u} + \mathbf{w} \mid \mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W\}.$$

Trditev 3.7. Naj bosta U in W *podprostora* v V. Potem sta $U + W$ in $U \cap W$ tudi *podprostora* v V.

Izrek 3.3. Naj bosta U in W *podprostora* prostora V. Naj bo $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ baza $U \cap W$. To bazo dopolnimo do baz U in W:

$$\begin{aligned}
&\text{baza } U : \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\} \\
&\text{baza } V : \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}.
\end{aligned}$$

Potem je

$$\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$$

baza $U + W$. V posebnem primeru velja:

$$\dim(U + W) \;=\; \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Definicija 3.24 (Direktna vsota)**.** Naj bo V *vektorski prostor* in U, W *podprostora* v V. Če velja

1. $V = U + W$
2. $U \cap W = \{0\}$

pravimo, da je V *direktna vsota* podprostorov U in W. Oznaka:

$$V \;=\; U \oplus W.$$

Opomba. Če je $V = U \oplus W$ in je $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ baza U, $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ baza W, je $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ baza V.

Trditev 3.8. Naj bosta U, W *podprostora* v V. Potem je $V = U \oplus W \iff$ vsak vektor $\mathbf{v} \in V$ lahko zapišemo na enoličen način kot

$$\mathbf{v} \;=\; \mathbf{u} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{u} \in U,\ \mathbf{w} \in W.$$

4 Linearne preslikave (homomorfizmi vektorskih prostorov)

4.1 Uvod

Definicija 4.1 (Linearna preslikava)**.** Naj bosta U in V *vektorska prostora* nad istim obsegom O. Preslikava $A : U \to V$ je *linearna*, če velja

1. *Aditivnost*:

$$A(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \;=\; A(\mathbf{u}_1) + A(\mathbf{u}_2), \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$$

2. *Homogenost*:

$$A(\alpha \mathbf{u}) \;=\; \alpha A(U), \quad \forall \alpha \in O,\ \forall \mathbf{u} \in U$$

Če je $A : U \to V$ linearna preslikava in $\mathbf{u} \in U$, potem namesto $A(U)$ pišemo kar $A\mathbf{u}$.

Trditev 4.1. Naj bo $A : U \to V$ linearna preslikava.

1. $A\mathbf{0}_U = \mathbf{0}_V$
2. $\ker A \;=\; \{\mathbf{u} \in U \mid A\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$ je *podprostor* v U - *jedro* linearne preslikave.
3. $\operatorname{im} A \;=\; \{A\mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in U\}$ je *podprostor* v V - *slika* linearne preslikave
4. Naj bo $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ baza podprostora U. Slika poljubnega vektorja $\mathbf{u} \in U$ s preslikavo A je natanko določena z $A\mathbf{u}_1, \ldots, A\mathbf{u}_n$.

Trditev 4.2.

1. Naj bosta $A : U \to V$ in $B : U \to V$ dve linearni preslikavi. Potem je tudi preslikava $A + B : U \to V$ tudi linearna preslikava. Velja

$$(A + B)\mathbf{u} \;=\; A\mathbf{u} + B\mathbf{u}.$$

2. Naj bosta $A : U \to V$ in $B : V \to W$ linearni preslikavi. Potem je tudi $BA := B \circ A : U \to W$ linearna preslikava.

3. Naj bo $A : U \to V$ linearna *bijektivna* preslikava. Potem je $A^{-1} : V \to U$ tudi linearna.

Trditev 4.3. Naj bo $A : U \to V$ linearna preslikava:

1. $\ker A = \{\mathbf{0}\} \iff A$ je *injektivna*

2. $\operatorname{im} A = V \iff A$ je *surjektivna*

4.2 Matrika, prirejena linearni preslikavi

Trditev 4.4. $A : U \to V$ je linearna preslikava. Naj bo $\mathscr{B} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ baza U, $\mathscr{C} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ pa baza V. Potem lahko vektorje $A\mathbf{u}_1, \ldots, A\mathbf{u}_n$ razvijemo po bazi $\mathscr{C}$.

Izrek 4.1.

1. Naj bosta $A : U \to V$ in $B : V \to W$ linearni preslikavi. Naj bo $\mathscr{B}$ baza U, $\mathscr{C}$ baza V in $\mathscr{D}$ baza W. Potem velja
$$(B \circ A)_{\mathscr{D}\mathscr{B}} \;=\; B_{\mathscr{D}\mathscr{C}} \cdot A_{\mathscr{C}\mathscr{B}}.$$

2. Naj bo $A : U \to V$ *bijektivna* linearna preslikava. Naj bo $\mathscr{B}$ baza U in $\mathscr{C}$ baza V. Potem velja
$$\left(A^{-1}\right)_{\mathscr{B}\mathscr{C}} \;=\; \left(A_{\mathscr{C}\mathscr{B}}\right)^{-1}.$$

Izrek 4.2. Naj bo $A : U \to V$ linearna preslikava. Potem je
$$\dim(\ker A) + \dim(\operatorname{im} A) \;=\; \dim U.$$

4.3 Prehod med bazami

Metoda 4.1 (Razvoj vektorja po različnih bazah)**.** Naj bo V vektorski prostor in $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ baza V. $\mathbf{v} \in V$ razvijemo po bazi $\mathscr{B}$:

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n, \quad \mathbf{v}_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Izberimo še eno baza vektorskega prostora V: $\mathscr{C} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$. $\mathbf{v} \in V$ lahko razvijemo tudi po bazi $\mathscr{C}$:

$$\mathbf{v} = \beta_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + \beta_n \mathbf{u}_n, \quad \mathbf{v}_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}.$$

Vektorje iz $\mathscr{B}$ lahko razvijemo po bazi $\mathscr{C}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \alpha_{11} \mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_{n1} \mathbf{u}_n \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_n &= \alpha_{1n} \mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_{nn} \mathbf{u}_n. \end{aligned}$$

Koeficiente zložimo v *prehodno* matriko:

$$P_{\mathscr{C}\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix},$$

kjer i-ti stolpec predstavlje koeficiente $\mathbf{v}_i$.

Izrek 4.3. Ob prejšnjih oznakah velja

$$\mathbf{v}_C = P_{\mathscr{C}\mathscr{B}} \cdot \mathbf{v}_{\mathscr{B}}.$$

Metoda 4.2. Naj bo $A : U \to V$ linearna. Izberemo bazo $\mathscr{B}$ za U in bazo $\mathscr{C}$ za V ter preslikavi A priredimo matriko $A_{\mathscr{C}\mathscr{B}}$. Za U in V lahko izberemo neki drugi bazi $\mathscr{B}_1$ in $\mathscr{C}_1$ in preslikavi A priredimo matriko $A_{\mathscr{C}_1\mathscr{B}_1}$.

Izrek 4.4.

$$A_{\mathscr{C}_1\mathscr{B}_1} \;=\; P_{\mathscr{C}_1\mathscr{C}} \cdot A_{\mathscr{C}\mathscr{B}} \cdot P_{\mathscr{B}\mathscr{B}_1}$$

Trditev 4.5. Naj bo V vektorski prostor in $\mathscr{B}, \mathscr{C}, \mathscr{D}$ baze V.

1. $P_{\mathscr{C}\mathscr{B}}$ je *obrnljiva*:

$$(P_{\mathscr{C}\mathscr{B}})^{-1} \;=\; P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$$

2. $P_{\mathscr{D}\mathscr{B}} \;=\; P_{\mathscr{D}\mathscr{C}} \cdot P_{\mathscr{C}\mathscr{B}}$

4.4 Rang linearne preslikave

Definicija 4.2. Naj bo $A : U \to V$ linearna preslikava. Rang preslikave A je rang matrike, ki pripada A v vektorskih bazah U in V.

Opomba. Rang je neodvisen od izbire baz U in V.

Izrek 4.5. Naj bo $A : U \to V$ linearna. Potem velja

$$\operatorname{rang} A \;=\; \dim(\operatorname{im} A).$$

5 Lastni vektorji in lastne vrednosti linearnih preslikav in matrik

5.1 Uvod

Definicija 5.1. Naj bo V vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ (ali $\mathbb{C}$) in $A : V \to V$ linearna preslikava. Neničelen vektor $\mathbf{v} \in V$ je *lasten vektor* preslikave A, če obstaja skalar λ, da velja

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

λ je potem *lastna vrednost* preslikave A.

Definicija 5.2. Naj bo A *kvadratna* matrika nad $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$. Neničelen stolpec $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ (ali $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$) je *lasten vektor* matrike A, če obstaja skalar λ, da velja

$$A \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}.$$

λ je potem *lastna vrednost* matrike A.

Izrek 5.1. Naj bo $A : V \to V$ linearna preslikava in λ nek skalar. Potem so lastni vektorji preslikave A za lastno vrednost λ natanko neničelni elementi

$$\ker(A - \lambda I).$$

Če je jedro $\ker(A - \lambda I) = \{\mathbf{0}\}$, potem λ ni lastna vrednost preslikave A.

Izrek 5.2. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrika. Lastne vrednosti matrike A so natanko rešitve enačbe

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Definicija 5.3. Naj bo A *kvadratna* matrika.

- Enačbi $\det(A - \lambda I)$ pravimo *karakteristična enačba*.

- Če je λ lastna vrednost, potem temu podprostoru $\ker(A-\lambda I)$ pravimo *lasten podprostor* matrike A za lastno vrednost λ.

Definicija 5.4. Naj bo A *kvadratna matrika.* Polinomu

$$p_A(\lambda) \; := \; \det(A - \lambda I)$$

pravimo *karakteristični polinom* matrike A. Če je $p(\lambda)$ kompleksen nekonstanten polinom stopnje n, potem ima natanko n ničel (osnovni izrek algebre).

Definicija 5.5. Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrika in

$$p_A(\lambda) \; = \; (-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\ldots(\lambda-\lambda_k)^{n_k} \; = \; (-1)^n\prod_{i=1}^{k}(\lambda-\lambda_i)^{n_i}.$$

Številu n_i pravimo *aritmetična večkratnost* lastne vrednosti λ_i. Številu $\dim(\ker(A-\lambda_i I))$ pravimo *geometrijska večkratnost* lastne vrednosti λ_i.

Dogovor. Če iščemo lastne vektorje matrike A za lastno vrednost λ, v resnici iščemo bazo jedra $\ker(A-\lambda I)$.

5.2 Diagonalizacija matrik

Definicija 5.6. Preslikava $A : V \to V$ se da *diagonalizirati*, če obstaja baza prostora V, sestavljena iz lastnih vektorjev preslikave A.

Definicija 5.7. Matrika $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se da *diagonalizirati*, če obstaja *obrnljiva* matrika P in *diagonalna* matrika D, da je

$$A \; = \; PDP^{-1}.$$

Trditev 5.1. *Naj bo $A : V \to V$ linearna in $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ lastni vektorji preslikave A za* različne *lastne vrednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Potem so $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$* linearno neodvisni.

Posledica. Naj bo $A : V \to V$ in recimo, da ima A n različnih lastnih vrednosti, kjer $n = \dim V$. Potem se da A diagonalizirati.

Definicija 5.8. Naj bosta $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ in $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matriki. Pravimo, da sta A in B *podobni*, če obstaja *obrnljiva* matrika P, da

$$A = PBP^{-1}.$$

A se torej da diagonalizirati $\iff$ A je podobna neki diagonalni matriki.

Izrek 5.3 (Schurov izrek)**.** Vsaka matrika $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je podobna neki *zgornjetrikotni* matriki. Obstaja neka obrnljiva matrika P in zgornjetrikotna matrika U, da velja

$$A = PUP^{-1}.$$

6 Vektorski prostori s skalarnim produktom

6.1 Uvod

Definicija 6.1 (Skalarni produkt)**.** Naj bo V vektorski prostor nad $\mathbb{C}$. *Skalarni produkt* je preslikava

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V &\to \mathbb{C}\\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle,\end{aligned}$$

ki zadošča lastnostim:

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \geq 0,\ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$
2. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{0}$
3. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$
4. $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
5. $\langle \alpha \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle,\ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,\ \alpha \in \mathbb{C}$

Definicija 6.2. Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom.

1. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ sta *pravokotna*, če je $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$
2. *Dolžina* vektorja (*norma*) $\mathbf{v} \in V$ je
$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$$
3. *Pravokotna projekcija* vektorja $\mathbf{v}$ na vektor $\mathbf{u}$ je vektor
$$\mathrm{proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{u}\|^2} \cdot \mathbf{u}$$

Trditev 6.1. Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom in $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Potem je $\mathbf{v} - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$ pravokoten na $\mathbf{u}$.

Trditev 6.2. Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom in $\mathbf{v} \in V$. Recimo, da je $\mathbf{v}$ pravokoten na vse vektorje iz V. Potem je $\mathbf{v} = 0$.

Izrek 6.1 (Pitagorov izrek)**.** Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom in $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Če sta $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ *pravokotna*, velja

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 \;=\; \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2.$$

Izrek 6.2 (Cauchy-Schwarzova neenakost)**.** Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom in $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Potem velja

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \;\leq\; \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|.$$

Enačaj velja $\iff$ $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ sta linearno odvisna.

Izrek 6.3. Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom.

1. $\|\mathbf{v}\| \;\geq\; 0$
2. $\|\mathbf{v}\| = 0 \iff \mathbf{v} = 0$
3. $\|\alpha \mathbf{u}\| \;=\; |\alpha| \cdot \|\mathbf{u}\|$
4. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \;\leq\; \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

Opomba (Posledica Cauchy-Schwarzove neenakosti)**.** Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom nad $\mathbb{R}$. Naj bosta $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \setminus \{0\}$. Potem velja

$$\left| \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} \right| \;\leq\; 1.$$

Definicija 6.3. Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom nad $\mathbb{R}$ in $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \setminus \{0\}$. Kot med $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ izračunamo s pomočjo zveze

$$\cos \varphi \;=\; \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|}.$$

6.2 Ortogonalne in ortonormirane množice vektorjev

Definicija 6.4. Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom in $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$. Pravimo, da je množica $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$

- *ortogonalna*, če $\forall i \neq j$: $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_j \rangle = 0$
- *ortonormirana*, če je *ortogonalna* in $\|\mathbf{v}_i\| = 1$, $i = 1, \ldots, n$

Opomba. Naj bo $\|\mathbf{v}\| \in V$, $\mathbf{v} \neq 0$. Če vzamemo $u = \frac{v}{\|v\|}$, je

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}\| &= \left\| \frac{v}{\|\mathbf{v}\|} \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \cdot \mathbf{v} \right\| \\
&= \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \cdot \|\mathbf{v}\| \;=\; 1
\end{aligned}$$

Torej lahko vsako *ortogonalno* množico neničelnih vektorjev spremenimo v *ortonormirano* tako, da vektorje delimo z njihovo normo.

Trditev 6.3. Naj bo $\{\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n\}$ ortogonalna množica neničelnih vektorjev. Potem so vektorji $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ linearno neodvisni.

Metoda 6.1 (Gramm-Schmidtova ortogonalizacija)**.** Izberemo poljubno bazo prostora V: $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Za primer $n = 3$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 \\
\mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 \\
\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle}{\|u_2\|^2}\mathbf{u}_2
\end{aligned}$$

V splošnem:

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{v}_k - \frac{\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 - \ldots - \frac{\langle \mathbf{v}_l, \mathbf{u}_{k-1} \rangle}{\|\mathbf{u}_{k-1}\|^2}\mathbf{u}_{k-1}$$

Tako dobimo *ortogonalno bazo* $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$. *Ortonormirano* bazo dobimo tako, da bazo normiramo:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_n &= \frac{\mathbf{u}_n}{\|\mathbf{u}_n\|}\end{aligned}$$

Baza $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ je *ortonormirana* baza prostora V.

Trditev 6.4. Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom in $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ *ortonormirana* baza prostora V. Potem za $\mathbf{v} \in V$ velja

$$\mathbf{v} \;=\; \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_1\rangle \mathbf{e}_1 + \ldots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_n\rangle \mathbf{e}_n.$$

Definicija 6.5. Naj bo $U \leq V$, $\mathbf{v} \in V$. Izberemo *ortonormirano* bazo prostora U: $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$. *Pravokotna projekcija* vektorja $\mathbf{v}$ na podprostor U je vektor

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} \;=\; \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_1\rangle \mathbf{e}_1 + \ldots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_k\rangle \mathbf{e}_k.$$

Definicija 6.6 (Ortogonalni komplement)**.** Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom in $U \leq V$.

$$U^{\perp} \;=\; \mathbf{v} \in V \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle = 0 \; \forall \mathbf{u} \in U\}$$

je *ortogonalni komplement* prostora U.

Trditev 6.5. Naj bo $U \leq V$.

1. $\{\mathbf{0}\}^{\perp} = V$, $V^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$
2. $U^{\perp}$ je podprostor v V
3. $(U^{\perp})^{\perp} = U$

Izrek 6.4. Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom in U podprostor v V. Potem velja

$$V \;=\; U \oplus U^{\mathsf{T}}.$$

6.3 Rieszov izrek

Definicija 6.7 (Linearen funkcional)**.** Naj bo V vektorski prostor nad kompleksnimi števili. *Linearen funkcional* je linearna preslikava

$$f : V \to \mathbb{C}.$$

Namesto $\mathbb{C}$ lahko vzamemo poljuben obseg.

Izrek 6.5 (Rieszov izrek)**.** Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom in $f : V \to \mathbb{C}$ linearen funkcional. Potem obstaja *enolično* določen $\mathbf{a} \in V$, da velja

$$f(\mathbf{v}) \;=\; \langle \mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle, \quad \mathbf{v} \in V.$$

Vektorju $\mathbf{a}$ pravimo *Rieszov vektor*, ki pripada funkcionalu f.

7 Sebiadjungirane, ortogonalne in normalne preslikave

7.1 Adjungirane preslikave

Definicija 7.1 (Adjungirana preslikava)**.** Naj bosta U in V vektorska prostora nad $\mathbb{C}$, opremljena s skalarnima produktoma $\langle \cdot, \cdot \rangle_U$ in $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$. Recimo, da je $A : U \to V$ linearna preslikava. Po Rieszovem izreku obstaja natanko določen vektor $\mathbf{a} \in U$, da je

$$f(\mathbf{u}) \ = \ \langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle_U, \ \forall \mathbf{u} \in U.$$

Definirajmo preslikavo $A^* : V \to U$, $A^*\mathbf{v} = \mathbf{a}$. A^* je *adjungirana preslikava* linearne preslikave A. Velja torej

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_V \ = \ \langle \mathbf{u}, A^*\mathbf{v} \rangle_U, \quad \forall \mathbf{u} \in U, \ \forall \mathbf{v} \in V.$$

Trditev 7.1. A^* je linearna preslikava.

Izrek 7.1. Naj bo $A : U \to V$ linearna in $\mathscr{B}$ ter $\mathscr{C}$ *ortogonalni* bazi U in V. Potem

$$A^*_{\mathscr{B}\mathscr{C}} \ = \ \overline{A^{\mathsf{T}}_{\mathscr{C}\mathscr{B}}}.$$

Definicija 7.2 (Hermitska matrika)**.** Naj bo $A \in \mathscr{C}^{m \times n}$. A *hermitsko* definiramo kot

$$A^{\mathsf{H}} \ = \ \overline{A^{\mathsf{T}}}.$$

Opomba. $A : U \to V$, $A^* : V \to U$. $\mathscr{B}$ baza U, $\mathscr{C}$ baza V. Preko Gramm-Schmidtovega postopka dobimo *ortonormirani* bazi $\mathscr{B}_1$ in $\mathscr{C}_1$. Po trditvi velja $A^*_{\mathscr{B}_1\mathscr{C}_1} = A^{\mathsf{H}}_{\mathscr{C}_1\mathscr{B}_1}$. Potem velja

$$A^*_{\mathscr{B}\mathscr{C}} \ = \ P_{\mathscr{B}\mathscr{B}_1} A^*_{\mathscr{B}_1\mathscr{C}_1} P_{\mathscr{C}_1\mathscr{C}} \ = \ P_{\mathscr{B}\mathscr{B}_1} A^{\mathsf{H}}_{\mathscr{C}_1\mathscr{B}_1} P_{\mathscr{C}_1\mathscr{C}},$$

kjer upoštevamo $A_{\mathscr{C}_1\mathscr{B}_1} = P_{\mathscr{C}_1\mathscr{C}} A_{\mathscr{C}\mathscr{B}} P_{\mathscr{B}\mathscr{B}_1}$.

Trditev 7.2. Naj bosta $A : U \to V$, $B : U \to V$ in $C : V \to W$ linearne preslikave.

1. $(A^*)^* \;=\; A$
2. $(A+B)^* \;=\; A^* + B^*$
3. $(\alpha A)^* \;=\; \overline{\alpha} A^*$
4. $(CA)^* \;=\; A^* C^*$

Trditev 7.3. Naj bo $A : U \to V$ linearna, A^* adjungirana preslikava. Potem velja

1. $\ker A^* \;=\; (\operatorname{im} A)^\perp$
2. $\operatorname{im} A^* \;=\; (\ker A)^\perp$

Trditev 7.4. Naj bo $A : V \to V$ linearna. Če je λ lastna vrednost A, potem je $\overline{\lambda}$ lastna vrednost A^*. Zapišemo

$$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \quad \Longleftrightarrow \quad A^*\mathbf{v} = \overline{\lambda}\mathbf{v}.$$

7.2 Normalne linearne preslikave in normalne matrike

Definicija 7.3.

1. Naj bo $A : V \to V$ linearna. Pravimo, da je A *normalna*, če velja
$$AA^* \;=\; A^*A.$$
2. Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Pravimo, da je A *normalna*, če velja
$$AA^{\mathsf{H}} \;=\; A^{\mathsf{H}}A.$$
3. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. A je *normalna*, če velja
$$AA^{\mathsf{T}} \;=\; A^{\mathsf{T}}A.$$

Izrek 7.2. Naj bo $A : V \to V$ normalna linearna preslikava. Potem velja

$$\ker(A - \lambda I) = \ker(A^* - \overline{\lambda} I).$$

Trditev 7.5. Naj bo $A : V \to V$ normalna preslikava in naj bosta $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ lastna vektorja preslikave A za različni lastni vrednosti λ_1, λ_2. Potem sta $\mathbf{v}_1$ in $\mathbf{v}_2$ *pravokotna* ($\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$).

Izrek 7.3 (Izrek normalne preslikave)**.** Naj bo $A : V \to V$ normalna preslikava. Naj bodo $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ različne lastne vrednosti preslikave A. Potem je

$$V = \ker(A - \lambda_1 I) \oplus \ldots \oplus \ker(A - \lambda_k I),$$

pri čemer so za vsak i vektorji iz $\ker(A - \lambda_i I)$ *pravokotni* na vse vektorje iz $\ker(A - \lambda_j I)$, $j \neq i$. Z drugimi besedami: obstaja *ortonormirana* baza prostora V, sestavljena iz lastnih vektorjev preslikave A. Torej se da A vedno diagonalizirati.

Opomba. Naj bo A normalna matrika. Obstaja *ortonormirana* baza prostora $\mathbb{C}^n$, sestavljena iz lastnih vektorjev matrike A.

$$A = PDP^{-1},$$

kjer je D *diagonalna.* Stolpci matrike P so *ortonormirani* vektorji v običajnem skalarnem produktu prostora $\mathbb{C}^n$.

7.3 Unitarne linearne preslikave, unitarne matrike, ortogonalne preslikave

Definicija 7.4.

1. Naj bo $A : V \to V$ linearna. A je *unitarna*, če

$$AA^* = A^*A = I.$$

2. Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. A je *unitarna*, če

$$AA^{\mathsf{H}} = A^{\mathsf{H}}A = I.$$

3. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. A je *ortogonalna*, če

$$AA^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}}A = I.$$

Opomba. A je normalna.

$$A = PDP^{-1},$$

stolpci P so *ortonormirani* vektorji, torej je P *unitarna.* Zato

$$P^{-1} = P^{\mathsf{H}}.$$

Torej, če je A normalna, potem

$$A = PDP^{\mathsf{H}},$$

kjer je P unitarna.

Opomba. Vsaka unitarna preslikava (matrika) je tudi normalna.

Izrek 7.4. Naj bo A unitarna preslikava in λ lastna vrednost oreskujave A. Potem je

$$|\lambda| = 1.$$

Opomba. Naj bo $A : V \to V$ unitarna. Za $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ velja

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle A^* A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle A\mathbf{u}, A\mathbf{v} \rangle.$$

A torej ohranja skalarni produkt. V posebnem primeru, $\forall \mathbf{v} \in V$:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle &= \langle A\mathbf{v}, A\mathbf{v} \rangle \\ \|\mathbf{v}\|^2 &= \|A\mathbf{v}\|^2 \\ \|A\mathbf{v}\| &= \|\mathbf{v}\| \end{aligned}$$

A torej ohranja dolžine vektorjev.

Definicija 7.5 (Izometrija)**.** Linearna preslikava $A : V \to V$ je *izometrija*, če

$$\|A\mathbf{x}\| \ = \ \|\mathbf{x}\|, \quad \forall \mathbf{x} \in V.$$

Trditev 7.6 (Polarizacijska identiteta)**.**

1. Naj bo V vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ s skalarnim produktom. Potem za $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ velja

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \ = \ \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2\right).$$

2. Če je V vektorski prostor nad $\mathbb{C}$ s skalarnim produktom. Potem za $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ velja

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \ = \ \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 + i\|x - i\mathbf{y}\|^2 - i\|\mathbf{x}+i\mathbf{y}\|^2\right).$$

Izrek 7.5. Naj bo $A : V \to V$ linearna. Potem je A unitarna natanko tedaj, ko je izometrija.

7.4 Sebiadjungirane preslikave, hermitske matrike, pozitivno definitne preslikave in matrike

Definicija 7.6.

1. Linearna preslikava $A : V \to V$ je *sebiadjungirana*, če

$$A^* \ = \ A.$$

2. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je *hermitska* matrika, če

$$A^{\mathsf{H}} \ = \ A.$$

3. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je *simetrična* matrika, če

$$A^{\mathsf{T}} \ = \ A.$$

Opomba. Če je $A : V \to V$ sebiadjungirana, je tudi normalna:

$$A^* A \;=\; AA = AA^*.$$

Torej med drugim obstaja ortonormirana baza V, sestavljena iz lastnih vektorjev A. Z matrike to pomeni

$$A \;=\; PDP^{\mathsf{H}},$$

kjer je D diagonalna in P unitarna.

Izrek 7.6. Naj bo $A : V \to V$ sebiadjungirana linearna preslikava. Potem so vse njene lastne vrednosti realne.

Definicija 7.7 (Pozitivna definitnost)**.** Naj bo $A : V \to V$ sebiadjungirana. Pravimo, da je A *pozitivno definitna*, če

$$\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \;>\; 0, \quad \forall \mathbf{v} \in V \setminus \{0\}.$$

A je *pozitivno semidefinitna*, če

$$\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \;\geq\; 0, \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Podobno za matrike.

Izrek 7.7. Naj bo $A : V \to V$ sebiadjungirana. Potem je A *pozitivno definitna* $\iff$ vse lastne vrednosti A so pozitivne.

8 Kvadratne forme

8.1 Uvod

Definicija 8.1 (Kvadratna forma)**.** Naj bo $\mathbb{R}^n$ opremljen s standardnim skalarnim produktom. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična matrika. *Kvadratna forma*, ki pripada matriki A je preslikava $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definirana s predpisom

$$q(\mathbf{v}) \;=\; \langle A\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Definicija 8.2. Naj bosta q in r kvadratni formi z matrikama A in B. Pravimo, da sta q in r ekvivalentni, če obstaja obrnljiva matrika P, da je

$$A \;=\; PBP^{\mathsf{T}}.$$

Definicija 8.3. Vsaka kvadratna forma je ekvivalentna kvadratni formi, ki ji pripada diagonalna matrika.

Izrek 8.1 (Sylvestrov izrek o vztrajnosti)**.** Naj bo $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kvadratna forma, ki ji pripada simetrična matrika A. Potme je q ekvivalentna kvadratni formi, ki ji pripada matrika

$$\begin{bmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{bmatrix}$$

s r pozitivnimi diagonalnimi elementi in lastnimi vrednostmi ter s negativnimi diagonalnimi elementi in lastnimi vrednostmi. Paru (r, s) pravimo *signatura* kvadratne forme.

Definicija 8.4. Naj bo q kvadratna forma, ki ji pripada simetrična matrika

$$A = PDP^{\mathsf{T}},$$

kjer sta D diagonalna in P ortogonalna. Stolpci matrike P so *glavne osi* kvadratne forme q.

8.2 Krivulje in ploskve 2. reda

Definicija 8.5. *Krivulja 2. reda* je množica točk $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ za katere velja

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + cy + f = 0.$$

Definicija 8.6. *Ploskev 2. reda* je množica točk $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ za katere velja

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + jz + k = 0.$$

9 Cayley-Hamiltonov izrek in minimalni polinom kvadratne matrike

9.1 Uvod

Definicija 9.1 (Minimalni polinom matrike glede na vektor)**.** Naj bo

$$p(x) \;=\; a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

polinom s kompleksnimi koeficienti. Naj bo $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ matrika. Potem definiramo *matrični polinom*

$$p(A) \;=\; a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0.$$

Recimo, da je $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ in $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{v} \neq 0$. Naj bo k najmanjše tako število, da je $A^k\mathbf{v}$ linearno odvisen od

$$\mathbf{v}, A\mathbf{v}, A^2\mathbf{v}, \ldots, A^{k-1}\mathbf{v}, \quad k \leq m.$$

$A^k\mathbf{v}$ lahko torej zapišemo kot

$$A^k\mathbf{v} \;=\; \alpha_0\mathbf{v} + \alpha_1 A\mathbf{v} + \ldots + \alpha_{k-1}A^{k-1}\mathbf{v},$$

kar lahko preoblikujemo v

$$(A^k - \alpha_{k-1}A^{k-1} - \ldots - \alpha_1 A\mathbf{v} - \alpha_0 I)\mathbf{v} \;=\; 0.$$

Označimo:

$$p_{A,\mathbf{v}} \;=\; x^k - \alpha_{k-1}x^{k-1} - \ldots - \alpha_1 x - \alpha_0$$

$p_{A,\mathbf{v}}$ je polinom z vodilnim koeficientom 1, najnižje stopnje med vsemi, ki "uničijo" $\mathbf{v}$:

$$p_{A,\mathbf{v}}(A)\cdot\mathbf{v} \;=\; 0.$$

$p_{A,\mathbf{v}}$ je *minimalni polinom* matrike A glede na vektor $\mathbf{v}$.

Definicija 9.2 (Pridružena matrika)**.** Naj bo

$$p(x) \;=\; x^l - \alpha_{k-1}x^{k-1} - \ldots - \alpha_1 x - \alpha_0.$$

Matriki

$$C(p) = \begin{bmatrix} 0 & & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & & \alpha_1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \alpha_{k-1} \end{bmatrix}$$

pravimo *pridružena matrika* polinomu p.

Trditev 9.1. Naj bo $p(x) = x^k - \alpha_{k-1}x^{k-1} - \ldots - \alpha_1 x - \alpha_0$ polinom. Potem je karakteristični polinom matrike $C(p)$ enak

$$(-1)^k \cdot p(\lambda).$$

Posledica. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrika in $\mathbf{v}$ neničelen vektor. Potem polinom $p_{A,\mathbf{v}}$ deli karakteristični polinom matrike A.

Izrek 9.1 (Cayley-Hamiltonov izrek)**.** Naj bo $p_A(\lambda)$ karakteristični polinom matrike A. Potem

$$p_A(A) = 0.$$

Definicija 9.3 (Minimalni polinom)**.** Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Polinom $m_A(\lambda) = \alpha^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$ je *minimalni polinom*, če

1. $m_A(A) = 0$
2. je $q(\lambda)$ katerikoli polinom, za katerega velja,da je

   $$q(A) = 0,$$

   potem $m_A(\lambda)$ deli $q(\lambda)$.

Posledica. Minimalni polinom matrike A deli karakteristični polinom matrike A.

Opomba. Če imamo polinoma $p(x)$ in $q(x)$, potem $p(x)$ deli $q(x)$ natanko tedaj, ko velja:

$$q(x) = A(x - x_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x - x_k)^{n_k} \Rightarrow p(x) = B(x - x_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x - x_k)^{m_k},$$

$$0 \leq m_i \leq n_i \ \forall i = 1, \ldots, k$$

Trditev 9.2. Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrika in $\mathbf{v}$ neničelen vektor. Potem $p_{A,\mathbf{v}}(x)$ deli $m_A(x)$.

Posledica. Vsaka lastna vrednost matrike A je *ničla* minimalnega polinoma. Z drugimi besedami:

$$p_A(\lambda) = \pm(\lambda - \lambda)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda)^{n_k} \Rightarrow m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda)^{m_k},$$

$$0 < m_i \leq n_i \ \forall i = 1, \ldots, k$$

Izrek 9.2. Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ in recimo, da je $m_A(\lambda) = q_1(\lambda) \cdot q_2(\lambda)$, pri čemer $q_1(\lambda)$ in $q_2(\lambda)$ nimata skupnih ničel[1] - polinoma sta *tuja.* Označimo:

$$\begin{aligned} V_1 &= \ker q_1(A) \subseteq \mathbb{C}^n \\ V_2 &= \ker q_2(A) \subseteq \mathbb{C}^n \end{aligned}$$

Potem je

$$\mathbb{C}^n = V_1 \oplus V_2.$$

Če izberemo bazo $\mathscr{B}$ glede na ta razcep (unija baz V_1 in V_2), ima A glede na to bazo matriko oblike

$$A_{\mathscr{B}\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}.$$

[1] Nimata skupnega delitelja.

Izrek 9.3 (Izrek o spektralnem razcepu)**.** Naj bo $\mathbb{C}^{n\times n}$ matrika z minimalnim polinomom

$$m_A(\lambda) \;=\; (\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_r)^{m_r},$$

kjer so $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ paroma različne lastne vrednosti. Označimo

$$V_i \;=\; \ker(A-\lambda I)^{m_i}, \quad i=1,\ldots,r.$$

Potem je

$$\mathbb{C}^n \;=\; V_1\oplus\ldots\oplus V_r.$$

Glede na ta razcep ima A matriko oblike

$$A_{\mathscr{B}\mathscr{B}} \;=\; \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_r \end{bmatrix}.$$

Pri tem je λ_i edina lastna vrednost matrike A_i.

Definicija 9.4 (Korenski podprostor)**.** Glede na zgornje oznake podprostoru

$$V_i \;=\; \ker(A-\lambda_i I)^{m_i}$$

pravimo *korenski podprostor* matrike A za lastno vrednost λ_i.

9.2 Jordanova kanonična forma

Definicija 9.5. Naj bo $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ matirke in $m_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_r)^{m_r}$ njen minimalni polinom. Naj bodo

$$V_i \;=\; \ker(A-\lambda_i)^{m_i}, \quad i=1,\ldots,r$$

korenski podprostori. Če je $\mathscr{B}$ unija baz podprostorov $V_1,\ldots,V_r$, je

$$A_{\mathscr{B}\mathscr{B}} \;=\; \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_r \end{bmatrix}.$$

Pri tem je λ_i edina lastna vrednost matrike A_i. Brez škode za splošnost predpostavimo, da ima A eno samo lastno vrednost - označimo jo z ρ.

- Karakteristični polinom:

$$p_A(\lambda) \;=\; (-1)^n(\lambda-\rho)^n$$

- Minimalni polinom:

$$m_A(\lambda) \;=\; (\lambda-\rho)^m, \quad 1 \leq m \leq n.$$

Označimo:

$$B \;=\; A-\rho I$$

Potem je

- $p_B(\lambda) \;=\; (-1)^n\lambda^n$.
- $m_B(\lambda) \;=\; \lambda^m$.

Brez škode za splošnost si lahko ogledamo matriko B. 0 je edina lastna vrednost matrike B. Poleg tega po definiciji minimalnega polinoma velja

- $B^m \;=\; 0$,
- $B^k \;\neq\; 0 \;\forall k < m$.

Definirajmo

$$W_i \;=\; \ker B^i, \quad i = 0, \ldots, m.$$

Potem imamo

$$\{0\} \;=\; W_0 \;\subseteq\; W_1 \;\subseteq\; \ldots \;\subseteq\; W_m \;=\; \mathbb{C}^n,$$

kjer upoštevamo

- $W_0 \;=\; \ker B^0 \;=\; \ker I \;=\; \{0\}$
- $W_m \;=\; \ker B^m \;=\; \ker 0 \;=\; \mathbb{C}^n$

Trditev 9.3. Glede na zgornje oznake velja

1. $W_i \subsetneqq W_{i+1}$ (W_i strogo vsebovan v W_{i+1})
2. $\mathbf{x} \in W_i \iff B\mathbf{x} \in W_{i-1}$

Definicija 9.6 (i-linearna neodvisnost)**.** Naj bo V neprazna množica vektorjev v $\mathbb{C}^n$. Pravimo, da je V *i-linearno neodvisna*, če

1. $V \subseteq W_i$
2. vektorji V so linearno neodvisni
3. $\mathcal{L}in V \cap W_{i-1} \ = \ \{0\}$

Trditev 9.4. Naj bo $V \subseteq W_i$ i-linearno neodvisna množica vektorjev. Potem je množica

$$BV \ = \ \{B\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in V\}$$

$(i-1)$-linearno neodvisna.

Posledica. A se da diagonalizirati $\iff$ $m_A(\lambda)$ ima same enojne ničle.

10 Psevdoinverz matrike

10.1 Uvod

Definicija 10.1 (Psevdoinverz)**.** Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrika. Za matriko $A^+ \in \mathbb{R}^{n\times m}$ pravimo, da je *psevdoinverz* matrike A, če velja:

1. $AA^+A \ = \ A$
2. $A^+AA^+ \ = \ A^+$
3. AA^+ in A^+A sta simetrični matriki

Trditev 10.1. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Potem je psevdoinverz matrike A, če obstaja, enolično določen.

Lema 1. Naj bosta $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ matriki. Potem velja

$$\operatorname{rang} AB \le \operatorname{rang} A \quad \text{in} \quad \operatorname{rang} AB \le \operatorname{rang} B.$$

Lema 2. A naj ima psevdoinverz A^+.

1. A^+ ima tudi psevdoinverz:
$$(A^+)^+ \ = \ A$$
2. A^T ima tudi psevdoinverz:
$$(A^\mathsf{T})^+ \ = \ (A^+)^\mathsf{T}$$
3. $\operatorname{rang} A^+ \ = \ \operatorname{rang} A$
4. $A^\mathsf{T}AA^+ \ = \ A^\mathsf{T}$

Izrek 10.1. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $\operatorname{rang} A = n$. Potem je $A^\mathsf{T}A$ obrnljiva in velja
$$A^+ \ = \ (A^\mathsf{T}A)^{-1}A^\mathsf{T}.$$

Posledica. Če je $\operatorname{rang} A$ enak številu stolpcev ali številu vrstic A, pteom A^+ obstaja.

Lema 3. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\operatorname{rang} A = r$. Potem obstajata $F \in \mathbb{R}^{m\times r}$, $G \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $\operatorname{rang} F = \operatorname{rang} G = r$, da velja

$$A = FG.$$

Izrek 10.2. $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, F \in \mathbb{R}^{m\times r}, G \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $A = FG$. Potem je

$$A^+ = G^\mathsf{T}(GG^\mathsf{T})^{-1}(F^\mathsf{T}F)^{-1}F^\mathsf{T}.$$

Posledica. Vsaka matrika ima psevdoinverz.

10.2 Metoda najmanjših momentov

Definicija 10.2. Vektor $\mathbf{x}$ reši sistem $A\mathbf{x} = b$ po principu *najmanjših kvadratov*, če je $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ *minimalna*:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(y) = \|A\mathbf{y} - \mathbf{b}\|.$$

$\mathbf{x}$ reši sistem po principu *najmanjših kvadratov*, če f zavzame globalni minimum pri $\mathbf{y} = \mathbf{x}$.

Trditev 10.2. U naj bo podprostor v $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ vektor, $\mathbf{v} \notin U$. Potem $\forall \mathbf{u} \in U$, $\mathbf{u} \neq \operatorname{proj}_U \mathbf{v}$:

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| > \|\mathbf{v} - \operatorname{proj}_U \mathbf{v}\|,$$

oziroma $\forall \mathbf{u} \in U$:

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| \geq \|\mathbf{v} - \operatorname{proj}_U \mathbf{v}\|.$$

Posledica. Recimo, da je U podprostor v $\mathbb{R}^m$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$. Potem $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$$f(U) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

zavzame globalni minimum pri $\mathbf{u} = \mathrm{proj}_U \mathbf{v}$.

Metoda 10.1.

$$f(x) = \|A\mathbf{x} - b\|, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

$A\mathbf{x}$ so elementi podprostora $\operatorname{im} A$. $\mathbf{x}$ mora biti torej tak, da

$$A\mathbf{x} = \mathrm{proj}_{\operatorname{im} A} \mathbf{b}.$$

Izrek 10.3. Množica vseh rešitev sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ po metodi najmanjših kvadratov je

$$\mathscr{R} = \{A^+\mathbf{b} + (I - A^+A)\mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n\}.$$

Sklep. Vektor $\mathbf{x}$ je natanko rešitev sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ po metodi najmanjših kvadratov, če velja

$$\operatorname{rang} A = n \iff \mathbf{x} = (A^\mathsf{T} A)^{-1} A^\mathsf{T} \mathbf{b}.$$

11 Nenegativne matrike

11.1 Uvod

Definicija 11.1. Naj bosta $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriki.

- $A \geq 0$, A je *nenegativna*, če je $a_{ij} \geq 0 \ \forall i, j$
- $A > 0$, A je *pozitivna*, če je $a_{ij} > 0 \ \forall i, j$
- $A \geq B$, če je $A - B \geq 0$
- $A > B$, če je $A - B > 0$
- $\mathbf{v} \geq 0$, če so vse komponente $\mathbf{v} \geq 0$
- $\mathbf{v} > 0$, če so vse komponente $\mathbf{v} > 0$

Trditev 11.1. $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ so matrike. Naj bo $A \geq B$:

1. $A + B \ \geq \ B + C$
2. $C \geq 0 \implies AC \geq BC$ in $CA \geq CB$
3. $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \geq 0 \implies A\mathbf{v} \geq B\mathbf{v}$

Definicija 11.2 (Permutacijska matrika)**.** Naj bo $\sigma \in S_n$ permutacija. *Permutacijska matrika*, ki pripada σ, je matrika $P \in \mathbb{R}^{m\times}$, ki ima na mestih $(i, \sigma(i))$ enke, druge pa ničle.

Definicija 11.3. $A \in \mathbb{R}^{n\times}$ je *reducibilna* (*razcepna*), če obstaja permutacijska matrika P, da je

$$P^{\mathsf{T}}AP \ = \ \begin{bmatrix} \text{kvadraten blok} & * \\ 0 & \text{kvadraten blok} \end{bmatrix}.$$

A je *ireducibilna*, če ni reducibilna.

Lema 4. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A \geq 0$ naj bo ireducibilna. Naj bo $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \geq 0$. Naj ima $\mathbf{y}$ natanko k pozitivnih komponent, $1 \leq k < n$. Potem ima

$$(I + A)\mathbf{y}$$

strogo več kot k pozitivnih komponent.

Posledica. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A \geq 0$ naj bo ireducibilna. Naj bo $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \neq 0$, $\mathbf{y} \geq 0$. Potem

$$(I + A)^{n-1}\mathbf{y} \ > \ 0.$$

Izrek 11.1. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A \geq 0$. A je ireducibilna $\iff$ $(I + A)^{n-1} > 0$.

Izrek 11.2. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A \geq 0$. Potem je A ireducibilna $\iff$ za vsak par indeksov (i, j) obstaja $k \in \mathbb{N}$, da je (i, j)-ti element matrike A^k strogo pozitiven.

Posledica. $A \geq 0$ je ireducibilna natanko tedaj, ko med poljubnima vozliščema v grafu, ki smo ga priredili tej matriki, obstaja pot.

11.2 Perron-Frobeniusov izrek

Izrek 11.3. Naj bo $A \geq 0$ ireducibilna. Potem obstaja lastna vrednost ρ matrike A. da velja

$$\rho \ \geq \ |\lambda|,$$

za vsako lastno vrednost λ matrike A.

1. Za ρ obstaja lasten vektor, ki ima vse komponente strogo pozitivne.
2. $\dim(\ker(A - \rho I)) \ = \ 1$

Definicija 11.4. ρ se imenuje *Perron-Frobeniusova lastna vrednost* matrike A. Lasten vektor za ρ, ki ima vse komponente strogo pozitivne in je dolg 1, se imenuje *Perron-Frobeniusov lastni vektor* matrike A.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0,\ \forall i\} \\ \mathbb{E}^n &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 1\} \end{aligned}$$

Definicija 11.5 (Collatz-Wielandtova funkcija)**.** Naj bo $A \geq 0$, ireducibilna. *Collatz-Wielandtova funkcija* matrike A je

$$f_A : \mathbb{P}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f_A(\mathbf{x}) \ = \ \min_{x_i \neq 0} \frac{(A\mathbf{x})_i}{x_i}.$$

Opomba. Cilj je dokazati: če je A ireducibilna, potem f_A na $\mathbb{E}^n$ zavzame globalni maksimum.

Trditev 11.2. $A \geq 0$ je ireducibilna, $\mathbf{x} \in \mathbb{P}^n \setminus \{0\}$.

1. $\forall t > 0$:
$$f_A(t\mathbf{x}) \ = \ f_A(\mathbf{x})$$

2. $f_A(x)$ je največje realno število ρ, za katerega velja
$$A\mathbf{x} - \rho\mathbf{x} \ \geq \ 0$$

Trditev 11.3. Naj bo $A \geq 0$ ireducibilna. Potem je f_A na $\mathbb{E}^n$ omejena:

$$0 \ \leq \ f_A(\mathbf{x}) \ \leq \ \|A\|_1, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n,$$

pri čemer je $\|A\|_1$ največja vsota stolpca v A.

Izrek 11.4. Naj bo $A \geq 0$ ireducibilna. Potem f_A na $\mathbb{E}^n$ zavzame globalni maksimum.

Izrek 11.5 (Perron-Frobeniusov izrek)**.** $A \leq 0$ ireducibilna. Potem obstaja lastna vrednost ρ matrike A, da je

$$\rho \;\geq\; |\lambda|$$

za vsako lastno vrednost λ matrike A. Obstaja tudi lasten vektor matrike A za ρ, ki ima vse komponente nenegativne.

Opomba. Če je ρ Perron-Frobeniusova lastna vrednost ireducibilne matrike, je

$$\dim(\ker(A - \rho I)) \;=\; 1.$$