Analiza 2 - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar

2020/21

Kazalo

1 NEDOLOČENI INTEGRAL IN POJEM DIFERENCIALNE ENAČBE

1.1 Primitivna funkcija in nedoločeni integral

Definicija 1.1 (Primitivna funkcija)**.** Naj bo f funkcija *ene spremenljivke.* Če $\exists$ *odvedljiva funkcija* $F : A \to \mathbb{R}$, za katero velja $F' = f$, imenujemo F *primitivna funkcija* funkcije f na A.

Definicija 1.2 (Nedoločeni integral)**.** *Nedoločeni integral* funkcije f je skupek vseh njenih primitivnih funkcij. Označimo ga z $\int f(x)dx$, funkcijo f pa imenujemo *integrand.*

Posledica. *Naj bo F neka primitivna funkcija za f na intervalu J. Potem je za $x \in J$*

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

kjer je $C \in \mathbb{R}$ poljubna konstanta, ki jo imenujemo splošna ali integracijska konstanta.

1.2 Uvedba nove spremenljivke v nedoločeni integral

1.3 Integracija po delih v nedoločenem integralu

1.4 Diferencialne enačbe 1. reda

Definicija 1.3. *Navadna diferencialna enačba* 1. reda je enačba za neznano funkcijo

$$y = g(x),$$

ki vsebuje tudi odvod y' funkcije y.

Splošna oblika diferencialne enačbe 1. reda je

$$F(x, y, y') = 0,$$

kjer je F funkcija treh spremenljivk, ki je res odvisna od zadnje spremenljivke.

Splošna rešitev diferencialne enačbe 1. reda je funkcija

$$y = g(x, C)$$

(lahko podana implicitno),ki je odvisna od *splošne konstante* C in reši dano diferencialno enačbo za poljubno izbiro vrednosti konstante $C \in \mathbb{R}$, poleg tega pa za poljuben začetni pogoj obstaja vrednost konstante C, pri kateri rešitev zadošča izbranemu začetnemu pogoju.

Rešitev, ki ne vsebuje splošnih konstant, imenujemo tudi *posebna* ali *partikularna rešitev.*

Definicija 1.4 (LDE 1. reda)**.** *Linearna diferencialna enačba* 1. reda ima obliko

$$r_1(x)y' + r_0(x)y = s(x),$$

kjer so $r_0, r_1, s : J \to \mathbb{R}$ funkcije, definirane na nekem intervalu J. Če je s ničelna funkcija, rečemo, da je enačba *homogena.* Če sta funkciji r_0, r_1 *konstantni*, pa rečemo, da ima enačba *konstante koeficiente.*

Standardna oblika linearne diferencialne enačbe 1. reda je

$$y' + p(x)y = q(x),$$

kjer sta $p, q : J \to \mathbb{R}$ funkciji, definirani na intervalu J.

2 DOLOČENI INTEGRAL

2.1 Motivacija za določeni integral

Definicija 2.1. Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *nenegativna funkcija*, torej $f(x) \geq 0$ za vse $x \in [a, b]$. Rečemo, da graf funkicje f *določa območje* $A \subset \mathbb{R}^2$ nad intervalom $[a, b]$. Množica A je navzgor omejena z grafom funkcije f, na levi s premico $x = a$ in na desni s premico $x = b$.

2.2 Riemannova vsota in Riemannov integral

Definicija 2.2 (Riemannova vsota)**.** *Delitev* D intervala $[a, b]$ na podintervale je dana z izbiro *delilnih točk* x_i:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

kjer je $n \in \mathbb{N}$. Dolžino i-tega podintervala $[x_{i-1}, x_i]$ (za $i = 1, 2, ..., n$) označimo z $\delta_i := x_i - x_{i-1}$. *Velikost delitve* D je dolžina najdaljšega podintervala delitve D, torej

$$\delta(D) = \max\{\delta_i \mid i = 1, 2, ..., n\}.$$

Na vsakem od podintervalov, na katere delitev D razdeli interval $[a, b]$, izberemo *testno točko* $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ in s $T_D = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ označimo nabor teh točk; nabor testnih točk je *usklajen* z delitvijo D, ker smo na vsakem podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$, določenem z D, izbrali natanko eno testno točko t_i.

Riemannova vsota funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, pridružena delitvi D in usklajenemu naboru testnih točk T_D je

$$R(f, D, T_D) := \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\delta_i.$$

Definicija 2.3 (Riemannov integral)**.** *Riemannov integral* ali *določeni integral* funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je limita Riemannovih vsot $R(f, D, T_D)$, kjer limito vzamemo po vseh delitvah D intervala [a, b] in usklajenih naborih testnih točk T_D, ko pošljemo velikost delitev $\delta(D)$ proti 0, če ta limita obstaja (torej je končna in neodvisna od izbire delitev in testnih točk). Pišemo

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\delta(D)\to 0} R(f, D, T_D).$$

Če zgornja limita obstaja, rečemo, da je funkcija f *integrabilna* na $[a, b]$.

Definicija 2.4.

$$\lim_{\delta(D)\to 0} R(f, D, T_D) = I,$$

če za $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, da za poljubno delitev D z $\delta(D) < \delta$ in poljuben usklajen nabor testnih točk T_D velja

$$|R(f, D, T_D) - I| < \varepsilon.$$

2.3 Integrabilne funkcije

Definicija 2.5 (Zožitev)**.** Naj bo $f : A \to \mathbb{R}$ funkcija in $B \subset A$. Tedaj $f|_B : B \to \mathbb{R}$ označuje funkcijo z definicijskim območjem B, ki $\forall x \in B$ preslika v $f(x)$. Funkcijo $f|_B$ imenujemo *zožitev* funkcije f na B.

Definicija 2.6 (Enakomerna zveznost)**.** Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ je *enakomerno zvezna* na A, če za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta_\varepsilon > 0$, da za poljubna $x, y \in A$, ki zadoščata $|x - y| < \delta$, velja

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Definicija 2.7 (Odsekoma zvezna funkcija)**.** Funkcija $f : J \to \mathbb{R}$, definirana na omejenem intervalu J, je *odsekoma zvezna*, če je zvezna v vseh točkah intervala razen morda v končno mnogo točkah, kjer ima skoke.

Funkcija f ima *skos* v točki $c \in J$, če f ni zvezna v c, ima pa (končno) levo in desno limito c (če je c krajišče intervala, zahtevamo le obstoj limite na tisti strani c, ki leži v J).

Posledica. *Če je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ odsekoma zvezna, potem je integrabilna. Vrednosti funkcije f v skokih ne vplivajo niti na integrabilnost niti na integral funkcije f na $[a, b]$.*

Dogovor.

- *Integral po izrojenemu intervalu $[a, a]$ je nič:*

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

- *Če je $a < b$, je*

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Definicija 2.8 (Povprečna vrednost)**.** *Povprečna vrednost* integrabilne funkcije f na intervalu $[a, b]$ je

$$\mu := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

2.4 Osnovni izrek analize

Definicija 2.9. Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrabilna* funkcija. Funkcijo $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, definirano s predpisom

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

imenujemo *integral kot funkcija zgornje meje.*

2.5 Pravila za integriranje in Leibnizova formula

2.6 Posplošeni integral na omejenem intervalu

Definicija 2.10 (Posplošeni integral)**.** Naj bo $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ funkcija, ki je integrabilna na intervalu $[t, b]$ za $\forall t \in (a, b)$. Potem je *posplošeni integral* funkcije f na intervalu $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{t \searrow a} \int_t^b f(x)dx,$$

če ta limita obstaja.

Če limita obstaja , rečemo, da je f *posplošeno integrabilna* na $[a, b]$ in da je $\int_a^b f(x)dx$ *konvergenten*, sicer pa rečemo, da je integral *divergenten*.

2.7 Posplošeni integral na neomejenem intervalu

Definicija 2.11 (Posplošena integrabilnost)**.**

- Naj bo $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ integrabilna na $[a, s]$ za $\forall s > a$. Potem je *posplošeni integral* funkcije f na $[a, \infty)$

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{s \to \infty} \int_a^s f(x)dx,$$

  če ta limita obstaja. Če limita obstaja, rečemo, da je posplošeni integral *konvergenten*, sicer pa, da je *divergenten*.

- Naj bo $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ integrabilna na $[t, b]$ za $\forall t < b$. Potem je *posplošeni integral* funkcije f na $(-\infty, b]$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)dx,$$

  če ta limita obstaja. Če limita obstaja, rečemo, da je posplošeni integral *konvergenten*, sicer pa, da je *divergenten*.

- Funkcija $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ je *posplošeno integrabilna*, če sta posplošeno integrabilni zožitvi $f|_{(-\infty,a]}$ in $f|_{[a,\infty)}$ za $\forall a \in \mathbb{R}$.

3 KRIVULJE V RAVNINI

3.1 Podajanje krivulj

- EKSPLICITNO: Funkcija $f : j \to \mathbb{R}$ za $J \subseteq \mathbb{R}$ določa krivuljo Γ_f, ki je graf te funkcije, torej
$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in J\}.$$
- IMPLICITNO: Funkcija $g : A \to \mathbb{R}$ za $A \subseteq \mathbb{R}^2$ določa krivuljo K_g, ki je množica rešitev enačbe $g(x, y) = 0$, torej
$$K_g = \{(x, y) \in A \mid g(x, y) = 0\}.$$
- PARAMETRIČNO: Funkciji $\alpha, \beta : J \to \mathbb{R}$ za $J \subseteq \mathbb{R}$ določata krivuljo K_F, ki je množica vseh točk (x, y), določenih z $x = \alpha(t)$ in $y = \beta(t)$, torej
$$K_F = \{(\alpha(t), \beta(t)) \mid J\}.$$
Preslikavo $F : J \to \mathbb{R}^2$, $F(t) := (\alpha(t), \beta(t))$ imenujemo *pot* ali *parametrizacija* krivulje K_F. Krivuljo K_F imenujemo tudi *tir* poti F.
- POLARNO: Funkcija $h : J \to \mathbb{R}$ za $J \subseteq \mathbb{R}$ določa krivuljo K_h, ki je množica točk v ravnini s polarnima koordinatama (r, θ), kjer je $r = h(\theta)$, torej
$$K_h = \{(h(\theta)\cos\theta, h(\theta)\sin\theta) \mid \theta \in J\}.$$

3.2 Enačba tangente na krivuljo

Definicija 3.1 (Regularna točka)**.** Naj bo $g : A \to \mathbb{R}$ odvedljiva v točki $(a, b) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$. Če je
$$\nabla g(a, b) \neq (0, 0),$$
rečemo, da je (a, b) *regularna točka* za g, sicer pa, da je (a, b) *singularna točka* za g.

Definicija 3.2. Naj bosta $\alpha, \beta : J \to \mathbb{R}$ *odvedljivi*, kjer je $J \subseteq \mathbb{R}$ interval, ter $F = (\alpha, \beta)$ pripadajoča *odvedljiva* pot. *Odvod poti* F po t je hitrostni vektor $\dot{F}(t) = (\dot{\alpha}(t), \dot{\beta}(t))$.
Če je
$$\dot{F}(t) \neq (0, 0)$$
za neki $t \in J$, imenujemo t *regularna točka* parametrizacije F. Če so vse točke intervala J regularne, imenujemo F *regularna parametrizacija.*
Naj bo $g : I \to J$ *odvedljiva surjektivna* funkcija, kjer je $I \subset \mathbb{R}$ interval. Pot
$$G := F \circ g$$
imenujemo *reparametrizacija* poti F.

3.3 Dolžina loka krivulje

Definicija 3.3. Naj bo dana pot $F : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $F(t) = (\alpha(t), \beta(t))$, ki določa krivuljo K. Izberimo delitev

$$D = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$$

intervala $[a, b]$. Pot $F(t)$ na i-tem podintervalu $[t_{i-1}, t_i]$ zamenjamo z daljico od $F(t_{i-1})$ do $F(t_i)$. Dolžina tako nastale lomljene črte, ki aproksimira tir poti F, je

$$\ell(D) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}))^2 + (\beta(t_i) - \beta(t_{i-1}))^2}.$$

Če $\exists$ limita dolžin $\ell(D)$, ko pošljemo velikost delitve $\delta(D)$ proti nič (neodvisno od izbire delitev), jo imenujemo *dolžina poti* F in označimo $\ell(F)$:

$$\ell(F) = \lim_{D, \delta(D) \to 0} \ell(D).$$

Definicija 3.4 (Ločna dolžina)**.** Diferencial dolžina loka krivulje označimo z ds in ga imenujemo *ločna dolžina.* V vseh opisih krivulje velja

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Uporaba 3.1 (Površina rotacijske ploskve)**.** *Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nenegativna zvezna funkcija. Ploskev, ki jo dobimo z vrtenjem grafa funkcije f nad intervalom $[a, b]$ okoli osi x, imenujemo rotacijska ploskev.*

Izberemo neko delitev

$$D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$$

intervala $[a, b]$. Nad intervalom $[x_{i-1}, x_i]$ graf funkcije f aproksimiramo z daljico od točke $(x_{i-1}, f(x_{i-1})$ do točke $(x_i, f(x_i))$. Ko daljico zavrtimo okoli x-osi, dobimo plašč prisekanega stožca s polmeroma leve in desne mejne krožnice $f(x_{i-1})$ in $f(x_i)$ ter višino $\delta_i = x_i - x_{i-1}$. To da približek za površino ploskve:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi(f(x_{i-1}) + f(x_i)) \sqrt{{\delta_i}^2 + (f(x_{i-1}) - f(x_i))^2}.$$

Če je f zvezno odvedljiva, dobimo za površino v limiti, ko pošljemo velikost delitve $\delta(D)$ proti 0*, formulo*

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2} dx.$$

3.4 Ploščina območja, določenega s krivuljo

Definicija 3.5. Naj bo $F : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ regularna parametrizacija krivulje K. Potem F določa *usmerjenost* K, določeno s smerjo, v kateri potuje točka $F(t)$ po K, ko potuje t od a do b.

Gladka enostavna sklenjena krivulja je krivulja K, ki ima regularno parametrizacijo $F : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, za katero velja $F(a) = F(b)$ in $\dot{F}(a) = \dot{F}(b)$, $F|_{[a,b)}$ pa je *injektivna.*

Naj bo A območje, ki ga omejuje *gladka enostavna sklenjena krivulja* K. Regularna parametrizacija F krivulje K določa *pozitivno usmerjenost* krivulje K, če je A na levi strani, ko se pomikamo vzdolž K v smeri usmerjenosti, ki jo določa F.

3.5 Diferencialne enačbe v obliki diferenciala

Definicija 3.6. *Diferencialna enačba v obliki diferenciala* je enačba oblike

$$P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy = 0,$$

kjer sta $P, Q : A \to \mathbb{R}$ definirani na nekem območju $A \subset \mathbb{R}^2$.

Naj bosta $P, Q : A \to \mathbb{R}$ *odvedljivi.* Diferencialna enačba $P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy = 0$ je *eksaktna* na A, če velja

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

za $\forall x \in A$.

Definicija 3.7 (Integral s parametrom)**.** Naj bo $A = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ pravokotnik in naj bo $f : A \to \mathbb{R}$ *zvezna* funkcija. Funkcijo $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, definirano s predpisom

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)dy,$$

imenujemo *integral s parametrom.*

Definicija 3.8 (Integrirajoči množitelj)**.** Naj bo dana diferencialna enačba $P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy = 0$, kjer sta $P, Q : A \to \mathbb{R}$ *zvezno odvedljivi* funkciji. Če je $\mu : A \to \mathbb{R}$ takšna *zvezno odvedljiva* funkcija, da je enačba

$$\mu(x,y)P(x,y)\ dx + \mu(x,y)Q(x,y)\ dy = 0$$

eksaktna, potem funkcijo μ imenujemo *integrirajoči množitelj* dane enačbe.

4 ŠTEVILSKE VRSTE

4.1 Osnovni pojmi

Definicija 4.1 (Številska vrsta)**.** *Številska vrsta* je vsote (neskončnega) zaporedja realnih števil. Če je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje realnih števil, je pripadajoča številska vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots.$$

Za naravno število k je *k-ta delna vsota* vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ enak

$$s_k := \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je *konvergentna (divergentna)*, če je konvergentno (divergentno) zaporedje delnih vsot $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Če je vrsta konvergentna, za njeno vsoto vzamemo limito delnih vsot.

4.2 Vrste s pozitivnimi členi

4.3 Alternirajoče vrste

Definicija 4.2 (Alternirajoča vrsta)**.** Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je *alternirajoča*, če je člen a_{n+1} nasprotno predznačen kot člen a_n za $\forall n \in \mathbb{N}$.

4.4 Absolutna konvergenca

Definicija 4.3. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je *absolutno konvergentna*, če je konvergentna vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ iz absolutnih vrednosti členov vrste.
Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna, ni pa absolutno konvergenta, rečemo, da je *pogojno konvergentna.*

5 FUNKCIJSKA ZAPOREDJA IN FUNKCIJSKE VRSTE

5.1 Konvergenca funkcijskih zaporedij

Definicija 5.1 (Funkcijsko zaporedje)**.** Naj bo $A \subset \mathbb{R}$ in naj bo za $\forall n \in \mathbb{N}$ dana funkcija $f_n : A \to \mathbb{R}$. Tedaj funkcije f_n sestavljajo *funkcijsko zaporedje* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Če za $\forall a \in A$ obstaja limita številskega zaporedja $(f_n(a))_n$, rečemo, da funkcijsko zaporedje *konvergira po točkah* na A. V tem primeru za $a \in A$ označimo

$$f(a) := \lim_{n\to\infty} f_n(a).$$

Tako dobljeno funkcijo $f : A \to \mathbb{R}$ imenujemo *limitna funkcija* zaporedja $(f_n)_n$; pišemo

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n$$

in rečemo, da zaporedje $(f_n)_n$ *konvergira k f po točkah.*

Opomba. *Funkcijsko zaporedje $(f_n : A \to \mathbb{R})_n$ v splošnem konvergira le v točkah iz neke podmnožice B definicijskega območja A; množico B imenujemo konvergenčno območje funkcijskega zaporedja.*

Definicija 5.2 (Enakomerna konvergenca funkcijskega zaporedja)**.** Naj funkcijsko zaporedje $(f_n : A \to \mathbb{R})_n$ konvergira po točkah proti limitni funkciji $f : A \to \mathbb{R}$, torej za $\forall x \in A$ in za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_{x,\varepsilon}$, da za $\forall n \geq n_{x,\varepsilon}$ velja

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Pravimo, da zaporedje $(f_n)_n$ *konvergira proti f enakomerno na A*, če za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon$, da za $\forall n \geq n_\varepsilon$ in za $\forall x \in A$ velja

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Definicija 5.3 (Funkcijska vrsta)**.** Naj bo dano zaporedje funkcij $(f_n : A \to \mathbb{R})_n$. Vsoto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ imenujemo *funkcijska vrsta.*

Funkcijska vrsta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konvergira po točkah na A*, če zaporedje delnih vsot $s_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} f_n$ konvergira po točah na A; to pomeni, da za $\forall a \in A$ konvergira številska vrsta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$.

Naj bo $s : A \to \mathbb{R}$ limitna funkcija zaporedja delnih vsot $(s_k)_k$.
Funkcijska vrsta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konvergira k $s : A \to \mathbb{R}$ enakomerno na A*, če zaporedje delnih vsot $(s_k)_k$ konvergira k s enakomerno na A.

Posledica. *Če so funkcije $(f_n : A \to \mathbb{R})_n$ zvezne in funkcijska vrsta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergira k $s : A \to \mathbb{R}$ enakomerno na A, potem je s zvezna na A.*

5.2 Enakomerno konvergentne vrste

5.3 Potenčne vrste

Definicija 5.4 (Potenčna vrsta)**.** Naj bo $(a_n)_{n\geq 0}$ *realno zaporedje* in $c \in \mathbb{R}$. Funkcijsko zaporedje

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

imenujemo *potenčna vrsta s središčem v c.*

Opomba.

1. *Potenčna vrsta vedno konvergira v središču c.*
2. *Središče c lahko vedno prestavimo v 0 z uvedbo nove spremenljivke $t = x - c$:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Definicija 5.5 (Konvergenčni polmer)**.** Naj bo dana potenčna vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Število

$$R := \sup\{b \geq 0 \mid \text{vrsta konvergira pri } b\} \in [0, \infty)$$

imenujemo *konvergenčni polmer* potenčne vrste.
Konvergenčno območje potenčne vrste označimo z D.

Posledica. *Naj bo $R > 0$ konvergenčni polmer potenčne vrste $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Potem vrsta absolutno konvergira za $|x| < R$. Vrsta enakomerno konvergira na vsakem manjšem intervalu $|x| \leq r < R$. Vsota potenčne vrste je zvezna funkcija na $(-R, R)$. Vrsta divergira za $\forall x$, $|x| > R$; v krajiščih intervala lahko potenčna vrsta konvergira ali divergira. Torej je*

$$(-R, R) \subseteq D \subseteq [-R, R].$$

Definicija 5.6 (Limes superior)**.** Naj bo $(b_n)_n$ *zaporedje realnih števil.* Največje stekališče zaporedja $(b_n)_n$ označimo

$$\lim_{n\to\infty} \sup b_n \in [-\infty, \infty]$$

in ga imenujemo *limes superior.*

5.4 Taylorjeva vrsta in analitične funkcije

Definicija 5.7 (Taylorjeva vrsta)**.** Naj bo f *poljubno mnogokrat zvezno odvedljiva* v okolici točke $c \in \mathbb{R}$. *Taylorjeva vrsta funkcije f s središčem v c* je

$$T_c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Naj bo $J \subset \mathbb{R}$ *odprt interval* in $f \in \mathcal{C}^\infty(J)$. Rečemo, da je f *analitična* na J, če je za $\forall c \in J$ Taylorjeva vrsta T_e enaka funkciji f na neki okolici točke c.

5.5 Fourierove vrste

Definicija 5.8 (Fourierova vrsta)**.** *Fourierova vrsta* je funkcijska vrsta oblike

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

kjer sta $(a_n)_{n\geq 0}$ in $(b_n)_{n\geq 1}$ *realni* zaporedji.

Definicija 5.9 (Skalarni produkt)**.** Naj bosta $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ odekoma zvezni funkciji.
Izraz

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx$$

imenujemo *skalarni produkt* funkcij f in g. Če je $\langle f, g\rangle = 0$, rečemo, da sta f in g *ortogonalni.* Izraz $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$ imenujemo *norma* funkcije f.

Dogovor. *Za odsekoma zvezno funkcijo f v točkah nezveznosti vrednost funkcije v točki določimo kot*

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\lim_{t\nearrow x} f(t) + \lim_{t\searrow x} f(t)\right).$$

Definicija 5.10. Funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je *odsekoma zvezno odvedljiva*, če je *odsekoma zvezna* na $[a,b]$ in zvezno odvedljiva na $[a,b]$ razen morda v končno mnogo točkah, v katerih obstajata leva in desna limita odvoda.

Opomba. *Odsekoma zvezno odvedljiva funkcija ni odvedljiva v skokih in v točkah, kjer se graf f zlomi, torej ima različni levo in desno tangento v tej točki. V takšni točki namreč res obstajata levi in desni odvod, saj na primer*

$$f'(x^-) = \lim_{t\nearrow x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{t\nearrow x} f'(t),$$

torej levi odvod obstaja, saj pbstaja leva limita odvodov; analogno velja za desni odvod.

Če torej v skoku spremenimo vrednost funkcije f tako, da je enaka levi (desni) limiti f v tej točki, potem obstaja levi (desni) odvod funckije f v tej točki.

Definicija 5.11. Ker lahko vsako *odsekoma zvezno odvedljivo* funkcijo na $[-\pi, \pi]$ razvijemo v Fourierovo vrsto, ki konvergira proti f (vsaj po točkah), rečemo, da funkcije

$$\{1, \cos(nx), \sin(nx) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

sestavljajo *poln sistem funkcij* na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Posledica (Fourierova sinusna in kosinusna vrsta)**.** *Naj bo $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ odsekoma zvezno odvedljiva. Potem lahko f na intervalu $[0, \pi]$ ravzijemo v sinusno Fourierovo vrsto*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx), \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

in v kosinusno Fourierovo vrsto

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx), \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx.$$

Posledica (Kompleksna Fourierova vrsta)**.** *Naj bo $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ odsekoma zvezno odvedljiva. Potem lahko f razvijemo v kompleksno Fourierovo vrsto*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{inx},$$

kjer je $i = \sqrt{-1}$ imaginarna enota, koeficienti A_n za $n \in \mathbb{Z}$ pa so dani z

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Posledica (Razvoj v Fourierovo vrsto na drugih intervalih)**.** *Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ odsekoma zvezno odvedljiva. Potem f lahko razvijemo v Fourierovo vrsto po funkcijah*

$$\{1, \cos(\frac{2n\pi}{b-a}x), \sin(\frac{2n\pi}{b-a}x) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Tako dobimo

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\frac{2n\pi}{b-a}x) + b_n \sin(\frac{2n\pi}{b-a}x) \right),$$

kjer je

$$a_0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos(\frac{2n\pi}{b-a}x) dx,$$

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin(\frac{2n\pi}{b-a}x) dx.$$

6 NAVADNE DIFERENCIALNE ENAČBE

6.1 Diferencialna enačba prvega reda

Definicija 6.1. Radi bi poiskali *enkrat odvedljivo* funkcijo, ki zadošča enačbi

$$y' = f(x, y).$$

Vsako tako funkcijo imenujemo *rešitev* dane diferencialne enačbe, njen graf $y = y(x)$ pa *rešitvena krivulja.*

Pravimo, da je z enačbo podano *polje smeri*, v vsaki točki je predpisana smer, v kateri mora potekati rešitvena krivulja. To polje smeri grafično predstavimo kot družino krivulj – *izoklin* – vzdolž katerih je smer *konstantna.*

Definicija 6.2 (Ortogonalne trajektorije)**.** *Ortogonalne trajektorije* dane družine krivulj so take krivulje, ki v vsaki svoji točki sekajo tisto od krivulj dane družine, ki poteka skozi točko, pod pravim kotom.

Tej ortogonalni družini pripada diferencialna enačba, ki je v preprosti zvezi z diferencialno enačbo prvotne družine krivulj. V enačbi prvotne družine le zamenjamo y' z $\frac{1}{y'}$ (kar določa pravokotno smer).

6.2 Linearna diferencialna enačba prvega reda

6.3 Diferencialna enačba drugega reda