



Analiza 2 - definicije, trditve in izreki



Oskar Vavtar
po predavanjih profesorja Drnovška in skripti profesorja Strleta

2020/21

Kazalo

1	NEDOLOČENI INTEGRAL IN POJEM DIFERENCIALNE ENAČBE	4
1.1	Primitivna funkcija in nedoločeni integral	4
1.2	Uvedba nove spremenljivke v nedoločeni integral	5
1.3	Integracija po delih v nedoločenem integralu	5
1.4	Diferencialne enačbe 1. reda	6
2	DOLOČENI INTEGRAL	8
2.1	Motivacija za določeni integral	8
2.2	Riemannova vsota in Riemannov integral	8
2.3	Integrabilne funkcije	9
2.4	Osnovni izrek analize	12
2.5	Pravila za integriranje in Leibnizova formula	13
2.6	Posplošeni integral na omejenem intervalu	13
2.7	Posplošeni integral na neomejenem intervalu	16
3	KRIVULJE V RAVNINI	17
3.1	Podajanje krivulj	17
3.2	Enačba tangente na krivuljo	17
3.3	Dolžina loka krivulje	19
3.4	Ploščina območja, določenega s krivuljo	22
3.5	Krivinska krožnica in ukrivljenost krivulje	23
3.6	Diferencialne enačbe v obliki diferenciala	24
4	ŠTEVILSKÉ VRSTE	27
4.1	Osnovni pojmi	27
4.2	Vrste s pozitivnimi členi	28
4.3	Alternirajoče vrste	29
4.4	Absolutna konvergenca	30
5	FUNKCIJSKA ZAPOREDJA IN FUNKCIJSKE VRSTE	32
5.1	Konvergenca funkcijskih zaporedij	32
5.2	Enakomerno konvergentne vrste	33
5.3	Potenčne vrste	34
5.4	Taylorjeva vrsta in analitične funkcije	37
5.5	Fourierove vrste	37

6	NAVADNE DIFERENCIALNE ENAČBE	40
6.1	Diferencialna enačba prvega reda	40
6.2	Linearna diferencialna enačba prvega reda	40
6.3	Diferencialna enačba drugega reda	40

1 NEDOLOČENI INTEGRAL IN POJEM DIFERENCIALNE ENAČBE

1.1 Primitivna funkcija in nedoločeni integral

Definicija 1.1 (Primitivna funkcija). Naj bo f funkcija ene spremenljivke. Če obstaja odvedljiva funkcija $F : A \rightarrow \mathbb{R}$, za katero velja $F' = f$, imenujemo F primitivna funkcija funkcije f na A .

Lema 1. Naj bosta F in G primitivni funkciji za funkcijo f na nekem intervalu J . Potem obstaja konstanta $C \in \mathbb{R}$, da velja

$$G(x) = F(x) + C \quad \forall x \in J.$$

Definicija 1.2 (Nedoločeni integral). Nedoločeni integral funkcije f je skupek vseh njenih primitivnih funkcij. Označimo ga z $\int f(x) dx$, funkcijo f pa imenujemo *integrand*.

Posledica. Naj bo F neka primitivna funkcija za f na intervalu J . Potem je za $x \in J$

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

kjer je $C \in \mathbb{R}$ poljubna konstanta, ki jo imenujemo splošna ali integracijska konstanta.

Trditev 1.1 (Lastnosti nedoločenega integrala). Za poljubni funkciji f in g , ki imata primitivni funkciji na intervalu J , ter skalar $a \in \mathbb{R}$ velja

$$\begin{aligned} \int (f(x) \pm g(x)) dx &= \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \\ \int af(x) dx &= a \int f(x) dx \end{aligned}$$

za $x \in J$; torej je nedoločeni integral *linearen*. Če je F odvedljiva na J , potem za $x \in J$ velja

$$\int F'(x) dx = F(x) + C,$$

kjer je $C \in \mathbb{R}$ poljubna konstanta.

1.2 Uvedba nove spremenljivke v nedoločeni integral

Trditev 1.2. Naj bo funkcija g *odvedljiva* na intervalu J in naj ima funkcija f primitivno funkcijo F na intervalu $g(J) = \{g(x); x \in J\}$. Potem je $F \circ g$ *primitivna* funkcija za $(f \circ g) \cdot g'$ na J , torej je

$$\int f(g(x)) g' dx = \int f(t) dt,$$

kjer smo s $t = g(x)$ označili novo spremenljivko.

1.3 Integracija po delih v nedoločenem integralu

Trditev 1.3. Naj bosta f in g *odvedljivi* funkciji na intervalu J . Potem velja

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx.$$

Če označimo $u = f(x)$ in $v = g(x)$, lahko zgornjo formulo krajše zapišemo kot

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

1.4 Diferencialne enačbe 1. reda

Definicija 1.3. *Navadna diferencialna enačba 1. reda* je enačba za neznano funkcijo

$$y = g(x),$$

ki vsebuje tudi odvod y' funkcije y .

Splošna oblika diferencialne enačbe 1. reda je

$$F(x, y, y') = 0,$$

kjer je F funkcija treh spremenljivk, ki je res odvisna od zadnje spremenljivke.

Če iz diferencialne enačbe izrazimo odvod funkcije, dobimo *standardno obliko* diferencialne enačbe 1. reda

$$y' = f(x, y).$$

Začetni pogoj za diferencialno enačbo 1. reda v točki $x = a$ je podan z vrednostjo iskane funkcije y v točki a , torej $y(a) = b$, kjer je $b \in \mathbb{R}$. Diferencialna enačba in začetni pogoj skupaj sestavljata začetno nalogo.

Definicija 1.4. *Eksplisitna rešitev* diferencialne enačbe $F(x, y, y') = 0$ je takšna odvedljiva funkcija $g : J \rightarrow \mathbb{R}$, definirana na intervalu J , da postane diferencialna enačba identiteta na J , le vanjo vstavimo $y = g(x)$, torej $\forall x \in J$ velja

$$F(x, g(x), g'(x)) = 0.$$

Implicitna rešitev diferencialne enačbe je dana z enačbo $G(x, y) = 0$, ki na nekem intervalu določa eksplisitno rešitev dane diferencialne enačbe.

Splošna rešitev diferencialne enačbe 1. reda je funkcija

$$y = g(x, C)^1,$$

ki je odvisna od splošne konstante C in reši dano diferencialno enačbo za poljubno izbiro vrednosti konstante $C \in \mathbb{R}$, poleg tega pa za poljuben začetni

¹Lahko podana implicitno.

pogoj obstaja vrednost konstante C , pri kateri rešitev zadošča izbranemu začetnemu pogoju. Rešitev, ki ne vsebuje splošnih konstant, imenujemo tudi *posebna* ali *partikularna* rešitev.

Definicija 1.5 (LDE 1. reda). *Linearna diferencialna enačba* 1. reda ima obliko

$$r_1(x)y' + r_0(x)y = s(x),$$

kjer so $r_0, r_1, s : J \rightarrow \mathbb{R}$ funkcije, definirane na nekem intervalu J . Če je s ničelna funkcija, rečemo, da je enačba *homogena*. Če sta funkciji r_0, r_1 *konstantni*, pa rečemo, da ima enačba *konstante koeficiente*.

Standardna oblika linearne diferencialne enačbe 1. reda je

$$y' + p(x)y = q(x),$$

kjer sta $p, q : J \rightarrow \mathbb{R}$ funkciji, definirani na intervalu J .

Trditev 1.4. Naj bo dana *linearna* diferencialna enačba

$$y' + p(x)y = q(x),$$

kjer sta $p, q : J \rightarrow \mathbb{R}$ *zvezni* funkciji, definirani na intervalu J .

- (i) Splošna rešitev pripadajoče homogene diferencialne enačbe $y' + p(x)y = 0$ je

$$y(x) = Ce^{-\int p(x) dx},$$

kjer je $C \in \mathbb{R}$ splošna konstanta, v kateri je zajeta integracijska konstanta.

- (ii) Splošna rešitev dane diferencialne enačbe dobimo iz splošne rešitve pripadajoče homogene enačbe z variacijo konstante, torej z nastavkom

$$y(x) = C(x)e^{-\int p(x) dx},$$

kjer funkcija $C(x)$ zadošča

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x) dx}.$$

2 DOLOČENI INTEGRAL

2.1 Motivacija za določeni integral

Definicija 2.1. Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ *nenegativna funkcija*, torej $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$. Rečemo, da graf funkcije f *določa območje* $A \subset \mathbb{R}^2$ nad intervalom $[a, b]$. Množica A je navzgor omejena z grafom funkcije f , na levi s premico $x = a$ in na desni s premico $x = b$.

2.2 Riemannova vsota in Riemannov integral

Definicija 2.2 (Riemannova vsota). *Delitev* D intervala $[a, b]$ na podintervale je dana z izbiro *delilnih točk* x_i :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

kjer je $n \in \mathbb{N}$. Dolžino i -tega podintervala $[x_{i-1}, x_i]$ (za $i = 1, 2, \dots, n$) označimo z $\delta_i := x_i - x_{i-1}$. *Velikost delitve* D je dolžina najdaljšega podintervala delitve D , torej

$$\delta(D) = \max \{ \delta_i \mid i = 1, 2, \dots, n \}.$$

Na vsakem od podintervalov, na katere delitev D razdeli interval $[a, b]$, izberemo *testno točko* $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ in s $T_D = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ označimo nabor teh točk; nabor testnih točk je *usklajen* z delitvijo D , ker smo na vsakem podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$, določenem z D , izbrali natanko eno testno točko t_i .

Riemannova vsota funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, pridružena delitvi D in usklajenemu naboru testnih točk T_D je

$$R(f, D, T_D) := \sum_{i=1}^n f(t_i) \delta_i.$$

Definicija 2.3 (Riemannov integral). *Riemannov integral* ali *določeni integral* funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je limita Riemannovih vsot $R(f, D, T_D)$, kjer limito vzamemo po vseh delitvah D intervala $[a, b]$ in usklajenih naborih testnih točk T_D , ko pošljemo velikost delitev $\delta(D)$ proti 0, če ta limita obstaja (torej je končna in neodvisna od izbire delitev in testnih točk). Pišemo

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\delta(D) \rightarrow 0} R(f, D, T_D).$$

Če zgornja limita obstaja, rečemo, da je funkcija f *integrabilna* na $[a, b]$.

Definicija 2.4.

$$\lim_{\delta(D) \rightarrow 0} R(f, D, T_D) = I,$$

če $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, da za poljubno delitev D z $\delta(D) < \delta$ in poljuben usklajen nabor testnih točk T_D velja

$$|R(f, D, T_D) - I| < \varepsilon.$$

Trditev 2.1 (Linearnost določenega integrala). Naj bosta $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ *integrabilni funkciji* in $c \in \mathbb{R}$. Potem so $f \pm g$ in cf *integrabilne* na $[a, b]$ in velja

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx &= \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \\ \int_a^b cf(x) dx &= c \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

2.3 Integrabilne funkcije

Trditev 2.2. Naj bo f *integrabilna* na $[a, b]$. Potem je f omejena na $[a, b]$.

Definicija 2.5 (Zožitev). Naj bo $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija in $B \subset A$. Tedaj $f|_B : B \rightarrow \mathbb{R}$ označuje funkcijo z definicijskim območjem B , ki $\forall x \in B$ preslika v $f(x)$. Funkcijo $f|_B$ imenujemo *zožitev* funkcije f na B .

Trditev 2.3 (Aditivnost domene). Naj bodo $a < b < c$ in $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$. Tedaj je f integrabilna na $[a, c]$ natanko tedaj, ko sta integrabilni zožitvi $f|_{[a, b]}$ in $f|_{[b, c]}$. V tem primeru velja

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

Trditev 2.4. Naj bosta $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funkciji, ki se razlikujeta le v točki $c \in [a, b]$ ². Potem je f integrabilna natanko tedaj, ko je integrabilna g ; če sta funkciji integrabilni velja

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

Izrek 2.1. Naj bo f zvezna na $[a, b]$. Potem je f integrabilna na $[a, b]$.

Definicija 2.6 (Enakomerna zveznost). Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Funkcija $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je enakomerno zvezna na A , če $\forall \varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta = \delta_\varepsilon > 0$, da za poljubna $x, y \in A$, ki zadoščata $|x - y| < \delta$, velja

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Tukaj je za $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ dolžina $|x|$ definirana z

$$|x| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Trditev 2.5. Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompaktna množica in $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Tedaj je f enakomerno zvezna na A .

² $f(x) = g(x) \ \forall x \in [a, b], x \neq c$

Definicija 2.7 (Odsekoma zvezna funkcija). Funkcija $f : J \rightarrow \mathbb{R}$, definirana na omejenem intervalu J , je *odsekoma zvezna*, če je zvezna v vseh točkah intervala razen morda v končno mnogo točkah, kjer ima skoke.

Funkcija f ima *skok* v točki $c \in J$, če f ni zvezna v c , ima pa (končno) levo in desno limito c (če je c krajišče intervala, zahtevamo le obstoj limite na tisti strani c , ki leži v J).

Posledica. Če je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ odsekoma zvezna, potem je integrabilna. Vrednosti funkcije f v skokih ne vplivajo niti na integrabilnost niti na integral funkcije f na $[a, b]$.

Trditev 2.6.

- (i) Naj bosta f in g integrabilni na $[a, b]$. Če je $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$, potem je

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad (\text{monotonost integrala}).$$

- (ii) Če je f integrabilna na $[a, b]$, potem je tudi $|f|$ integrabilna na $[a, b]$ in velja

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Dogovor.

- Integral po izrojenemu intervalu $[a, a]$ je nič:

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

- Če je $a < b$, je

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

Definicija 2.8 (Povprečna vrednost). *Povprečna vrednost* integrabilne funkcije f na intervalu $[a, b]$ je

$$\mu := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Trditev 2.7. Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilna, $m := \inf f$ in $M := \sup f$. Potem je za povprečno vrednost μ funkcije f velja $m \leq \mu \leq M$. Če je f zvezna, obstaja taka točka $c \in [a, b]$, da je $\mu = f(c)$.

2.4 Osnovni izrek analize

Definicija 2.9. Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Funkcijo $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definirano s predpisom

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

imenujemo *integral kot funkcija zgornje meje*.

Izrek 2.2 (Prvi del osnovnega izreka). Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna. Potem je funkcija $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ odvedljiva na $[a, b]$ in velja

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

Posledica. Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna. Potem je $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ primitivna funkcija za f na $[a, b]$. Torej velja

$$\int f(x) dx = \int_a^x f(t) dt + C,$$

kjer je $C \in \mathbb{R}$ poljubna konstanta.

Izrek 2.3 (Drugi del osnovnega izreka). Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna in G poljubna primitivna funkcija za f na $[a, b]$. Potem je

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) = G(x) \Big|_a^b.$$

2.5 Pravila za integriranje in Leibnizova formula

Trditev 2.8.

- (i) Naj bo $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva in $f : Z_g \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna. Potem ob uvedbi nove spremenljivke $t = g(x)$ velja:

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt.$$

- (ii) Naj bosta $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezno odvedljivi. Potem je

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x) f'(x) dx.$$

Če označimo $u = f(x)$ in $v = g(x)$, zgornja formula postane

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

2.6 Posplošeni integral na omejenem intervalu

Definicija 2.10 (Posplošeni integral). Naj bo $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija, ki je integrabilna na intervalu $[t, b] \forall t \in (a, b)$. Potem je *posplošeni integral* funkcije f na intervalu $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{t \searrow a} \int_t^b f(x) dx,$$

če ta limita obstaja.

Če limita obstaja, rečemo, da je f *posplošeno integrabilna* na $[a, b]$ in da je $\int_a^b f(x) dx$ *konvergenten*, sicer pa rečemo, da je integral *divergenten*.

Opomba.

- Posplošeni integral imenujemo tudi izlimitirani integral ali nepravi integral.
- Če je f integrabilna na $[a, b]$, potem je njen posplošeni integral na $[a, b]$ enak Riemannovemu integralu.

Trditev 2.9. Naj bo $p \in \mathbb{R}$. Posplošeni integral $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx$ je konvergenten natanko tedaj, ko je $p < 1$.

Izrek 2.4 (Konvergenčni kriterij). Naj bo $g : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna.

- (i) Če je g omejena na $(a, b]$ in je $p < 1$, potem je $\int_a^b \frac{g(x)}{(x-a)^p} dx$ konvergenten.
- (ii) Če je g omejena stran od nič, torej obstaja neki $m > 0$, da velja $|g(x)| \geq m \forall x \in (a, b]$ in je $p \geq 1$, potem je $\int_a^b \frac{g(x)}{(x-a)^p} dx$ divergenten.

Opomba.

- Funkcija g v izreku je lahko le odsekoma zvezna na $(a, b]$, saj je takšna g zvezna na nekem manjšem intervalu $(a, c]$. Ker je integrand potem odsekoma zvezna funkcija na $[c, b]$, moramo obravnavati le konvergenco na $(a, c]$.
- Podobno je v točki (ii) dovolj, da je g omejena stran od nič le na manjšem intervalu $(a, c] \subset (a, b]$.
- Pogoj v točki (i) je izpoljen, če ima g (končno) desno limito pri a . Podobno je pogoj v (ii) izpoljen, le ima g od nič različno desno limito v a .

Lema 2. Naj bo $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ monotona in omejena funkcija. Potem obstajata limiti

$$\lim_{x \nearrow b} f(x) \quad \text{in} \quad \lim_{x \searrow a} f(x);$$

ena od teh limit je enaka $\sup f$, druga pa $\inf f$.

Trditev 2.10 (Linearnost posplošenega integrala). Naj bosta $f, g : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ posplošeno integrabilni in $c \in \mathbb{R}$. Potem so tudi $f \pm g : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in $cf : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ posplošeno integrabilne in velja

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x) \pm g(x)) \, dx &= \int_a^b f(x) \, dx \pm \int_a^b g(x) \, dx \\ \int_a^b cf(x) \, dx &= c \int_a^b f(x) \, dx.\end{aligned}$$

Opomba. Pri oznakah v zgornji trditvi velja naslednje: če sta dve od funkcij f , g in $f \pm g$ posplošeno integrabilni na $[a, b]$, potem je tudi tretja. En primer je zajet v trditvi, iz integrabilnosti f in $f + g$ pa sledi integrabilnost g , saj jo lahko zapišemo kot linearno kombinacijo drugih dveh: $g = (f + g) - f$.

Definicija 2.11.

- (i) Naj bo $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilna na $[a, s]$ $\forall s \in (a, b)$. Potem je posplošeni integral funkcije f na intervalu $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) \, dx := \lim_{s \nearrow b} \int_a^s f(x) \, dx,$$

če ta limita obstaja. Če limita obstaja, rečemo, da je f posplošeno integrabilna na $[a, b]$ in da je posplošeni integral *konvergenten*, sicer pa imenujemo integral *divergenten*.

- (ii) Naj bo $f : [a, c) \cup (c, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilna na $[a, s]$ $\forall s \in (a, c)$ in integrabilna na $[t, b]$ $\forall t \in (c, b)$. Potem je posplošeni integral f na $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) \, dx := \lim_{s \nearrow c} \int_a^s f(x) \, dx + \lim_{t \searrow c} \int_t^b f(x) \, dx,$$

če obe limiti obstajata.

2.7 Posplošeni integral na neomejenem intervalu

Definicija 2.12 (Posplošena integrabilnost).

- Naj bo $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilna na $[a, s]$ $\forall s > a$. Potem je *posplošeni integral* funkcije f na $[a, \infty)$

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{s \rightarrow \infty} \int_a^s f(x) dx,$$

če ta limita obstaja. Če limita obstaja, rečemo, da je posplošeni integral *konvergenten*, sicer pa, da je *divergenten*.

- Naj bo $f : (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilna na $[t, b]$ $\forall t < b$. Potem je *posplošeni integral* funkcije f na $(-\infty, b]$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx := \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx,$$

če ta limita obstaja. Če limita obstaja, rečemo, da je posplošeni integral *konvergenten*, sicer pa, da je *divergenten*.

- Funkcija $f : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je *posplošeno integrabilna*, če sta posplošeno integrabilni zožitvi $f|_{(-\infty, a]}$ in $f|_{[a, \infty)}$ $\forall a \in \mathbb{R}$.

Izrek 2.5 (Konvergenčni kriterij). Naj bo $g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna, $a > 0$.

- (i) Če je g omejena na $[a, \infty)$ in je $p > 1$, potem je $\int_a^\infty \frac{g(x)}{x^p} dx$ konvergenten.
- (ii) Če je g omejena stran od nič na $[a, \infty)$ in je $p \leq 1$, potem je $\int_a^\infty \frac{g(x)}{x^p} dx$ divergenten.

3 KRIVULJE V RAVNINI

3.1 Podajanje krivulj

- EKSPPLICITNO: Funkcija $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ za $J \subseteq \mathbb{R}$ določa krivuljo Γ_f , ki je graf te funkcije, torej

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in J\}.$$

- IMPLICITNO: Funkcija $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ za $A \subseteq \mathbb{R}^2$ določa krivuljo K_g , ki je množica rešitev enačbe $g(x, y) = 0$, torej

$$K_g = \{(x, y) \in A \mid g(x, y) = 0\}.$$

- PARAMETRIČNO: Funkciji $\alpha, \beta : J \rightarrow \mathbb{R}$ za $J \subseteq \mathbb{R}$ določata krivuljo K_F , ki je množica vseh točk (x, y) , določenih z $x = \alpha(t)$ in $y = \beta(t)$, torej

$$K_F = \{(\alpha(t), \beta(t)) \mid t \in J\}.$$

Preslikavo $F : J \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(t) := (\alpha(t), \beta(t))$ imenujemo *pot* ali *parametrizacija* krivulje K_F . Krivuljo K_F imenujemo tudi *tir* poti F .

- POLARNO: Funkcija $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ za $J \subseteq \mathbb{R}$ določa krivuljo K_h , ki je množica točk v ravnini s polarnima koordinatama (r, φ) , kjer je $r = h(\varphi)$, torej

$$K_h = \{(h(\varphi) \cos \varphi, h(\varphi) \sin \varphi) \mid \varphi \in J\}.$$

Zveza med kartezičnima koordinatama (x, y) ter polarnima koordinatama (r, φ) točje v ravnini:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

3.2 Enačba tangente na krivuljo

Trditev 3.1. Naj bo $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva v notranji točki c intervala $J \subseteq \mathbb{R}$. Potem ima krivulja Γ_f tangento v točki $(c, f(c))$, dano z enačbo:

$$y - f(c) = f'(c)(x - c).$$

Naj bo dana *zvezno odvedljiva* funkcija $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ in notranja točka $(a, b) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$, ki zadošča $g(a, b) = 0$. Po izreku o *implicitni funkciji* enačba $g(x, y) = 0$ določa funkcijo $y = f(x)$ v okolici točke a , če je $\frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \neq 0$: za to funkcijo velja $f(a) = b$ in

$$f'(a) = -\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}.$$

Definicija 3.1 (Regularna in singularna točka). Naj bo $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva v točki $(a, b) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$. Če je

$$\nabla g(a, b) \neq (0, 0),$$

rečemo, da je (a, b) *regularna točka* za g , sicer pa, da je (a, b) *singularna točka* za g .

Trditev 3.2. Naj bo $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ *zvezno odvedljiva* v okolici točke $(a, b) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$, naj bo $g(a, b) = 0$ in naj bo (a, b) *regularna točka* za g . Potem ima krivulja K_g tangento v točki (a, b) , dano z enačbo

$$g_x(a, b)(x - a) + g_y(a, b)(y - b) = 0$$

oziroma

$$\nabla g(a, b) \cdot (x - a, y - b) = 0.$$

Trditev 3.3. Naj bosta $\alpha, \beta : J \rightarrow \mathbb{R}$ *zvezno odvedljivi* funkciji, kjer je $J \subset \mathbb{R}$ interval, ter $F = (\alpha, \beta)$ pripadajoča *zvezno odvedljiva* pot. Če velja $\dot{\alpha}(t) \neq 0 \ \forall t \in J$, potem je K_F graf neke *zvezno odvedljive* funkcije f , za katero velja

$$f'(\alpha(t)) = \frac{\dot{\beta}(t)}{\dot{\alpha}(t)}.$$

Če označimo $x(t) := \alpha(t)$ in $y(t) := \beta(t)$, dobimo za odvod

$$f'(x(t)) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}.$$

Posledica. Naj bosta $x = x(t)$ in $y = y(t)$ dvakrat odvedljivi na intervalu J in naj velja $\dot{x}(t) \neq 0 \ \forall t \in J$. Potem je pripadajoča funkcija f iz zgornje trditve dvakrat odvedljiva in velja

$$f''(x(t)) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\dot{x}(t)^3}.$$

Definicija 3.2. Naj bosta $\alpha, \beta : J \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljivi, kjer je $J \subseteq \mathbb{R}$ interval, ter $F = (\alpha, \beta)$ pripadajoča odvedljiva pot. Odvod poti F po t je hitrostni vektor $\dot{F}(t) = (\dot{\alpha}(t), \dot{\beta}(t))$. Če je

$$\dot{F}(t) \neq (0, 0)$$

za neki $t \in J$, imenujemo t *regularna točka* parametrizacije F . Če so vse točke intervala J regularne, imenujemo F *regularna parametrizacija*.

Naj bo $g : I \rightarrow J$ odvedljiva surjektivna funkcija, kjer je $I \subset \mathbb{R}$ interval. Pot

$$G := F \circ g$$

imenujemo *reparametrizacija* poti F .

Trditev 3.4. Naj bo s *regularna točka* parametrizacije $F(t) = (\alpha(t), \beta(t))$. Potem je tangenta na krivuljo K_F v točki $F(s)$ dana z enačbo

$$\dot{\alpha}(s)(y - \beta(s)) = \dot{\beta}(s)(x - \alpha(s)).$$

3.3 Dolžina loka krivulje

Definicija 3.3. Naj bo dana pot $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(t) = (\alpha(t), \beta(t))$, ki določa krivuljo K . Izberimo delitev

$$D = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$$

intervala $[a, b]$. Pot $F(t)$ na i -tem podintervalu $[t_{i-1}, t_i]$ zamenjamo z daljico od $F(t_{i-1})$ do $F(t_i)$.

Dolžina tako nastale lomljene črte, ki aproksimira tir poti F , je

$$\ell(D) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}))^2 + (\beta(t_i) - \beta(t_{i-1}))^2}.$$

Če obstaja limita dolžin $\ell(D)$, ko pošljemo velikost delitve $\delta(D)$ proti nič (neodvisno od izbire delitev), jo imenujemo *dolžina poti* F in označimo $\ell(F)$:

$$\ell(F) = \lim_{D, \delta(D) \rightarrow 0} \ell(D).$$

Trditev 3.5. Naj bo pot $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(t) = (x(t), y(t))$ zvezno odvedljiva³. Potem je dolžina $\ell(F)$ poti F enaka

$$\ell(F) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt.$$

Opomba.

1. Dolžina tangentnega vektorja $\dot{F}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ na pot F je $|\dot{F}(t)| = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}$, torej je

$$\ell(F) = \int_a^b |\dot{F}(t)| dt.$$

2. Iz zgornje formule za dolžino poti se zdi, da je ta odvisna od parametrizacije F . Na osnovi definicije pa pričakujemo, da je odvisna le od krivulje K , ki je tir poti. To je res, če je parametrizacija injektivna, torej vsako točko na krivulji obiše natanko enkrat; če pa parametrizacija večkrat opiše kak del krivulje, tega v dolžini upoštevamo večkrat.

Trditev 3.6. Naj bo $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ zvezno odvedljiva parametrizacija krivulje K in $g : [c, d] \rightarrow [a, b]$ zvezno odvedljiva funkcija, ki je *monotono naraščajoča* in velja $g(c) = a$ ter $g(d) = b$. Potem je $G := F \circ g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tudi parametrizacija K in velja

$$\ell(G) = \ell(F).$$

Dolžino krivulje K torej izračunamo kot dolžino njene poljubne injektivne parametrizacije.

³Komponenti $x(t)$ in $y(t)$ sta zvezno odvedljivi funkciji

Posledica.

- (i) Dolžina eksplicitno podane zvezno odvedljive krivulje $y = f(x)$ za $x \in [a, b]$ je

$$\ell(K_f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

- (ii) Dolžina polarno podane zvezno odvedljive krivulje $r = r(\varphi)$ za $\varphi \in [a, b]$ je

$$\ell(K_r) = \int_a^b \sqrt{r(\varphi)^2 + \dot{r}(\varphi)^2} d\varphi.$$

Definicija 3.4 (Ločna dolžina). Diferencial dolžina loka krivulje označimo z ds in ga imenujemo *ločna dolžina*. V vseh opisih krivulje velja

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Uporaba 3.1 (Površina rotacijske ploskve). Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nenegativna zvezna funkcija. Ploskev, ki jo dobimo z vrtenjem grafa funkcije f nad intervalom $[a, b]$ okoli osi x , imenujemo *rotacijska ploskev*.

Izberemo neko delitev

$$D = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

intervala $[a, b]$. Nad intervalom $[x_{i-1}, x_i]$ graf funkcije f aproksimiramo z daljico od točke $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ do točke $(x_i, f(x_i))$. Ko daljico zavrtimo okoli x -osi, dobimo plašč prisekanega stožca s polmeroma leve in desne mejne krožnice $f(x_{i-1})$ in $f(x_i)$ ter višino $\delta_i = x_i - x_{i-1}$. To da približek za površino ploskve:

$$\sum_{i=1}^n \pi(f(x_{i-1}) + f(x_i)) \sqrt{\delta_i^2 + (f(x_{i-1}) - f(x_i))^2}.$$

Če je f zvezno odvedljiva, dobimo za površino v limiti, ko pošljemo velikost delitve $\delta(D)$ proti 0, formulo

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

3.4 Ploščina območja, določenega s krivuljo

Trditev 3.7.

1. Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna in nenegativna. Ploščina območja, ki ga določa graf funkcije $y = f(x)$ nad intervalom $[a, b]$ na osi x , je

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b y dx.$$

2. Naj bo $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna in nenegativna. Ploščina območja, ki ga določa graf funkcije $x = g(y)$ na osi y , je

$$\int_c^d g(y) dy = \int_c^d x dy.$$

Trditev 3.8. Naj bo $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ zvezno odvedljiva pot, $F(t) = (x(t), y(t))$.

1. Če je $y(t) \geq 0 \ \forall t$ in je $x(a) = \min x(t)$ ter $x(b) = \max x(t)$, potem je ploščina med krivuljo in osjo x nad intervalom $[x(a), x(b)]$ enaka

$$\int_a^b y(t) \dot{x}(t) dt.$$

2. Če je $x(t) \geq 0 \ \forall t$ in je $y(a) = \min y(t)$ ter $y(b) = \max y(t)$, potem je ploščina med krivuljo in osjo y nad intervalom $[y(a), y(b)]$ enaka

$$\int_a^b x(t) \dot{y}(t) dt.$$

Definicija 3.5. Naj bo $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ regularna parametrizacija krivulje K . Potem F določa usmerjenost K , določeno s smerjo, v kateri potuje točka $F(t)$ po K , ko potuje t od a do b .

Gladka enostavna sklenjena krivulja je krivulja K , ki ima regularno parametrizacijo $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, za katero velja $F(a) = F(b)$ in $\dot{F}(a) = \dot{F}(b)$, $F|_{[a,b)}$ pa je injektivna.

Naj bo A območje, ki ga omejuje *gladka enostavna sklenjena krivulja* K . Regularna parametrizacija F krivulje K določa *pozitivno usmerjenost* krivulje K , če je A na levi strani, ko se pomikamo vzdolž K v smeri usmerjenosti, ki jo določa F .

Trditev 3.9. Naj bo $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(t) = (x(t), y(t))$ regularna parametrizacija *enostavne sklenjene* krivulje K , ki določa pozitivno usmerjenost K . Potem je ploščina območja A znotraj K enaka

$$\int_a^b x(t) \dot{y}(t) dt = - \int_a^b y(t) \dot{x}(t) dt = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t) \dot{y}(t) - y(t) \dot{x}(t)) dt.$$

Opomba. Zgornja trditev velja tudi za odsekoma zvezno odvedljive poti F , torej za zvezne $F(t) = (x(t), y(t))$, kjer sta odvoda $\dot{x}(t)$ in $\dot{y}(t)$ odsekoma zvezni funkciji.

Trditev 3.10. Naj bo $r = r(\varphi)$ za $\varphi \in [\alpha, \beta]$ zvezno polarno podana krivulja. Potem je ploščina območja, ki ga določa krivulja skupaj z daljicama

$$\varphi = \alpha, \quad 0 \leq r \leq r(\alpha) \quad \text{in} \quad \varphi = \beta, \quad 0 \leq r \leq r(\beta),$$

enaka

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)^2 d\varphi.$$

3.5 Krivinska krožnica in ukrivljenost krivulje

Definicija 3.6. Naj bo $K \subset \mathbb{R}^2$ krivulja, ki ima tangento v točki $(a, b) \in K$. *Krivinska krožnica* na K v točki (a, b) je limitna lega krožnic, ki so tangentne na K v (a, b) ter gredo skozi točko $(x, y) \in K$, ko pošljemo (x, y) proti (a, b) , če ta limita obstaja. Polmer krivinske krožnice imenujemo *krivinski polmer*, njegovo obratno vrednost pa imenujemo *ukrivljenost* krivulje v točki (a, b) .

Trditev 3.11.

- (1) Naj bo f dvakrat zvezno odvedljiva funkcija. Ukrivljenost grafa f v točki x je

$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

- (2) Naj bo F dvakrat zvezno odvedljiva pot. Ukrivljenost tira poti F v točki t je

$$\kappa(t) = \frac{\ddot{y}(t)\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

- (3) Naj bo r dvakrat zvezno odvedljiva funkcija, ki določa polarno podano krivuljo. Ukrivljenost krivulje v točki φ je

$$\kappa(\varphi) = \frac{r(\varphi)^2 + 2\dot{r}(\varphi)^2 - r(\varphi)\ddot{r}(\varphi)}{(r(\varphi)^2 + \dot{r}(\varphi)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

3.6 Diferencialne enačbe v obliki diferenciala

Definicija 3.7. Diferencialna enačba v obliki diferenciala je enačba oblike

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0,$$

kjer sta $P, Q : A \rightarrow \mathbb{R}$ definirani na nekem območju $A \subset \mathbb{R}^2$.

Naj bosta $P, Q : A \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljivi. Diferencialna enačba $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ je *eksaktna* na A , če velja

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

$\forall x \in A$.

Trditev 3.12. Naj bo $A \subset \mathbb{R}^2$ pravokotnik in $P, Q : A \rightarrow \mathbb{R}$ zvezno odvedljivi funkciji. Če je enačba $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ eksaktna na A , potem ima splošno rešitev oblike

$$g(x, y) = C,$$

kjer je $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija, ki zadošča

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = P(x, y) \quad \text{in} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = Q(x, y).$$

Definicija 3.8 (Integral s parametrom). Naj bo $A = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ pravokotnik in naj bo $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Funkcijo $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definirano s predpisom

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy,$$

imenujemo *integral s parametrom*.

Lema 3. Pri oznakah kot v definiciji naj bo f zvezno odvedljiva funkcija dveh spremenljivk. Tedaj je integral s parametrom $x \mapsto F(x)$ zvezno odvedljiva funkcija na $[a, b]$ in velja

$$F'(x) = \int_c^d \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy.$$

Definicija 3.9 (Integrirajoči množitelj). Naj bo dana diferencialna enačba $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$, kjer sta $P, Q : A \rightarrow \mathbb{R}$ zvezno odvedljivi funkciji. Če je $\mu : A \rightarrow \mathbb{R}$ takšna zvezno odvedljiva funkcija, da je enačba

$$\mu(x, y) P(x, y) dx + \mu(x, y) Q(x, y) dy = 0$$

eksaktna, potem funkcijo μ imenujemo *integrirajoči množitelj* dane enačbe.

Trditev 3.13. Če je μ integrirajoči množitelj diferencialne enačbe $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$, potem zadošča

$$\mu_y P - \mu_x Q = \mu(Q_x - P_y).$$

Dana enačba ima integrirajoči množitelj, ki je odvisen le od spremenljivke x , če ke izraz $\frac{Q_x - P_y}{Q}$ odvisen le od spremenljivke x (ne pa od y); v tem primeru je $\mu = \mu(x)$ rešitev enačbe

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dx} = \frac{P_y - Q_x}{Q}.$$

Dana enačba ima integrirajoči množitelj, ki je odvisen le od spremenljivke y , če ke izraz $\frac{Q_x - P_y}{P}$ odvisen le od spremenljivke y (ne pa od x); v tem primeru je $\mu = \mu(y)$ rešitev enačbe

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dy} = \frac{Q_x - P_y}{P}.$$

4 ŠTEVILSKÉ VRSTE

4.1 Osnovni pojmi

Definicija 4.1 (Številská vrsta). *Številská vrsta* je vsota (neskončnega) zaporedja realnih števil. Če je $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje realnih števil, je pripadajoča številská vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Za naravno število k je k -ta delna vsota vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ enak

$$s_k := \sum_{n=1}^k a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_k.$$

Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je *konvergentna* (*divergentna*), če je konvergentno (divergentno) zaporedje delnih vsot $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Če je vrsta konvergentna, za njeno vsoto vzamemo limitu delnih vsot.

Lema 4 (Potrebni pogoj za konvergenco vrste). Če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, potem je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Opomba. Prvih nekaj členov vrste ne vpliva na konvergenco.

4.2 Vrste s pozitivnimi členi

Trditev 4.1 (Primerjalni kriterij). Naj za zaporedji števil $(a_n)_n$ in $(b_n)_n$ velja $0 \leq a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$.

(1) Če $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, potem tudi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

(2) Če $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, potem tudi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira.

Rečemo, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *majoranta* za vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ter da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *minoranta* za vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Trditev 4.2 (Kvocietni ali d'Alembertov kriterij). Naj bo $(a_n)_n$ zaporedje *pozitivnih* števil, za katerega obstaja

$$d := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\begin{cases} \text{konvergira;} & d < 1 \\ \text{divergira;} & d > 1. \\ \text{konvergira ali divergira;} & d = 1 \end{cases}$

Trditev 4.3 (Korenski ali Cuchyjev kriterij). Naj bo $(a_n)_n$ zaporedje *ne-negativnih* števil, za katerega obstaja

$$c := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\begin{cases} \text{konvergira;} & c < 1 \\ \text{divergira;} & c > 1. \\ \text{konvergira ali divergira;} & c = 1 \end{cases}$

Trditev 4.4 (Integralski kriterij). Naj bo $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna, pozitivna in padajoča funkcija. Potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergira natanko tedaj, ko konvergira posplošeni integral

$$\int_1^{\infty} f(x) dx.$$

Posledica. Naj bo $p > 0$ realno število. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $\begin{cases} \text{konvergira;} & p > 1 \\ \text{divergira;} & p \leq 1 \end{cases}$.

Trditev 4.5 (Raabejev kriterij). Naj bo $(a_n)_n$ zaporedje pozitivnih števil, za katerega obstaja

$$r := \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right).$$

Potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\begin{cases} \text{konvergira;} & r > 1 \\ \text{divergira;} & r < 1 \\ \text{konvergira ali divergira;} & r = 1 \end{cases}$.

4.3 Alternirajoče vrste

Definicija 4.2 (Alternirajoča vrsta). Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je *alternirajoča*, če je člen a_{n+1} nasprotno predznačen kot člen $a_n \forall n \in \mathbb{N}$.

Trditev 4.6 (Leibnizov kriterij). Naj bo $\sum_{i=1}^n a_n$ *alternirajoča* vrsta. Če zaporedje $(|a_n|)_n$ *monotono* pada proti 0, potem je vrsta $\sum_{i=1}^n a_n$ *konvergentna*. Če v tem primeru s_k označuje k -to delno vsoto vrste in s vsoto vrste, potem velja

$$|s - s_k| \leq |a_{k+1}|.$$

4.4 Absolutna konvergenca

Definicija 4.3. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je *absolutno konvergentna*, če je *konvergentna*

vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ iz absolutnih vrednosti členov vrste. Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentna*, ni pa absolutno konvergenta, rečemo, da je *pogojno konvergentna*.

Trditev 4.7. Če je vrsta *absolutno konvergentna*, potem je tudi *konvergentna*.

Trditev 4.8 (Konvergentne vrste tvorijo vektorski prostor). Naj bosta vrsti $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (*absolutno*) *konvergentni* in naj bo $c \in \mathbb{R}$. Potem so (*absolutno*) *konvergentne* tudi vrste $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ in $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ ter velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{in} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Trditev 4.9. Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutno konvergentna* in $(b_n)_n$ *omejeno* zaporedje števil. Potem je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ tudi *absolutno konvergentna*.⁴

Izrek 4.1 (Zamenjava vrstnega reda členov).

(1) Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutno konvergentna* vrsta. Potem je za poljubno

bijektivno funkcijo $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *absolutno konvergentna*

in ima isto vsoto kot začetna vrsta.

⁴Analogno trditev za *konvergentne* vrste ne velja.

- (2) Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *pogojno konvergentna*. Potem $\forall s \in [-\infty, \infty]$ obstaja *bijektivna* funkcija $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, za katero je $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = s$.

5 FUNKCIJSKA ZAPOREDJA IN FUNKCIJSKE VRSTE

5.1 Konvergenca funkcijskih zaporedij

Definicija 5.1 (Funkcijsko zaporedje). Naj bo $A \subset \mathbb{R}$ in naj bo $\forall n \in \mathbb{N}$ dana funkcija $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$. Tedaj funkcije f_n sestavljajo *funkcijsko zaporedje* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Če $\forall a \in A$ obstaja limita številskega zaporedja $(f_n(a))_n$, rečemo, da funkcijsko zaporedje *konvergira po točkah* na A . V tem primeru za $a \in A$ označimo

$$f(a) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a).$$

Tako dobljeno funkcijo $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ imenujemo *limitna funkcija* zaporedja $(f_n)_n$; pišemo

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

in rečemo, da zaporedje $(f_n)_n$ *konvergira k f po točkah*.

Opomba. Funkcijsko zaporedje $(f_n : A \rightarrow \mathbb{R})_n$ v splošnem konvergira le v točkah iz neke podmnožice B definicijskega območja A ; množico B imenujemo *konvergenčno območje* funkcijskega zaporedja.

Definicija 5.2 (Enakomerna konvergenca funkcijskega zaporedja). Naj funkcijsko zaporedje $(f_n : A \rightarrow \mathbb{R})_n$ konvergira po točkah proti limitni funkciji $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, torej $\forall x \in A$ in $\forall \varepsilon > 0$ obstaja tak $n_{x,\varepsilon}$, da $\forall n \geq n_{x,\varepsilon}$ velja

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Pravimo, da zaporedje $(f_n)_n$ *konvergira proti f enakomerno na A* , če $\forall \varepsilon > 0$ obstaja tak n_ε , da $\forall n \geq n_\varepsilon$ in $\forall x \in A$ velja

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Izrek 5.1 (Zveznost limitne funkcije). Naj bo $(f_n : A \rightarrow \mathbb{R})_n$ zaporedje zveznih funkcij, ki konvergira proti $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ enakomerno na A . Potem je f zvezna.

Definicija 5.3 (Funkcijska vrsta). Naj bo dano zaporedje funkcij $(f_n : A \rightarrow \mathbb{R})_n$.

Vsoto $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ imenujemo *funkcijska vrsta*.

Funkcijska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergira po točkah na A , če zaporedje delnih

vsot $s_k = \sum_{n=1}^k f_n$ konvergira po točkah na A ; to pomeni, da $\forall a \in A$ konvergira

številka vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$.

Naj bo $s : A \rightarrow \mathbb{R}$ limitna funkcija zaporedja delnih vsot $(s_k)_k$. Funkcijska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergira k $s : A \rightarrow \mathbb{R}$ enakomerno na A , če zaporedje delnih vsot $(s_k)_k$ konvergira k s enakomerno na A .

Posledica. Če so funkcije $(f_n : A \rightarrow \mathbb{R})_n$ zvezne in funkcijska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergira k $s : A \rightarrow \mathbb{R}$ enakomerno na A , potem je s zvezna na A .

5.2 Enakomerno konvergentne vrste

Trditev 5.1 (Weierstrassov kriterij). Naj bo $(f_n : A \rightarrow \mathbb{R})_n$ zaporedje funkcij in naj obstaja tako zaporedje pozitivnih števil $(c_n)_n$, da $\forall n \in \mathbb{N}$ velja

$$|f_n(x)| \leq c_n \quad \forall x \in A.$$

Če je številka vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergentna, potem funkcija vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergira enakomerno in absolutno na A . Če so funkcije f_n zvezne, je tudi vsota vrste zvezna funkcija.

Izrek 5.2 (Integriranje po členih). Naj bo $J \subset \mathbb{R}$ omejen interval, $a \in J$, in naj bo $(f_n : J \rightarrow \mathbb{R})_n$ zaporedje zveznih funkcij na J . Če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergira enakomerno na J , potem tudi $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t) dt$ konvergira enakomerno za $x \in J$ in $\forall x \in J$ velja

$$\int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t) dt.$$

Izrek 5.3 (Odvajanje po členih). Naj bo $J \subset \mathbb{R}$ interval in naj bo $(f_n : J \rightarrow \mathbb{R})_n$ zaporedje zvezno odvedljivih funkcij na J . Če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergira po

točkah na J in vrsta iz odvodov $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ konvergira enakomerno na J , potem

je $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ odvedljiva na J in $\forall x \in J$ velja

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

5.3 Potenčne vrste

Definicija 5.4 (Potenčna vrsta). Naj bo $(a_n)_{n \geq 0}$ realno zaporedje in $c \in \mathbb{R}$. Funkcijsko zaporedje

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$$

imenujemo *potenčna vrsta s središčem v c* .

Opomba.

1. Potenčna vrsta vedno konvergira v središču c .
2. Središče c lahko vedno prestavimo v 0 z uvedbo nove spremenljivke $t = x - c$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Trditev 5.2. Naj bo dana potenčna vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ in naj bo $b > 0$.

- (1) Če vrsta *absolutno konvergira* pri $x = b$ ali $x = -b$, potem *konvergira absolutno in enakomerno* za $x \in [-b, b]$.
- (2) Če vrsta *konvergira* pri $x = b$ ali $x = -b$, potem *absolutno konvergira* $\forall x \in (-b, b)$.
- (3) Če vrsta *divergira* pri $x = b$ ali $x = -b$, potem *divergira* $\forall x \in (-\infty, -b) \cup (b, \infty)$.

Definicija 5.5 (Konvergenčni polmer). Naj bo dana potenčna vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Število

$$R := \sup\{b \geq 0 \mid \text{vrsta konvergira pri } b\} \in [0, \infty)$$

imenujemo *konvergenčni polmer* potenčne vrste. Konvergenčno območje potenčne vrste označimo z D .

Posledica. Naj bo $R > 0$ konvergenčni polmer potenčne vrste $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Potem vrsta *absolutno konvergira* za $|x| < R$. Vrsta *enakomerno konvergira* na vsakem manjšem intervalu $|x| \leq r < R$. Vsota potenčne vrste je zvezna funkcija na $(-R, R)$. Vrsta *divergira* $\forall x, |x| > R$; v krajiščih intervala lahko potenčna vrsta *konvergira ali divergira*. Torej je

$$(-R, R) \subseteq D \subseteq [-R, R].$$

Trditev 5.3 (Konvergenčni polmer). Naj bo dana *potenčna vrsta* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Za konvergenčni polmer velja:

- (1) $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, če ta limita obstaja;
- (2) $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, če ta limita obstaja.

Definicija 5.6 (Limes superior). Naj bo $(b_n)_n$ zaporedje realnih števil. Največje stekališče zaporedja $(b_n)_n$ označimo

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \in [-\infty, \infty]$$

in ga imenujemo *limes superior*.

Izrek 5.4 (Cauchy-Hadamard). Za konvergenčni polmer R potenčne vrste $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ velja

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Izrek 5.5 (Abel). Naj bo R konvergenčni polmer potenčne vrste $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Če vrsta *konvergira* za $x = R$ ($x = -R$), potem je vsota vrste *zvezna* v R ($-R$).

Izrek 5.6 (Odvajanje in integriranje potenčnih vrst). Naj bo $R > 0$ konvergenčni polmer potenčne vrste $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Potem imata vrsti, ki ju do-

bimo s členim odvajanjem $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ in členim integriranjem $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ tudi konvergenči polmer R in $\forall x \in (-R, R)$ velja:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{in} \quad \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Posledica. Vsota potenčne vrste je poljubno mnogokrat zvezno odvedljiva na $(-R, R)$, kjer je R konvergenčni polmer vrste.

5.4 Taylorjeva vrsta in analitične funkcije

Definicija 5.7 (Taylorjeva vrsta). Naj bo f poljubno mnogokrat zvezno odvedljiva v okolici točke $c \in \mathbb{R}$. Taylorjeva vrsta funkcije f s središčem v c je

$$T_c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n.$$

Naj bo $J \subset \mathbb{R}$ odprt interval in $f \in \mathcal{C}^\infty(J)$. Rečemo, da je f analitična na J , če je $\forall c \in J$ Taylorjeva vrsta T_c enaka funkciji f na neki okolici točke c .

5.5 Fourierove vrste

Definicija 5.8 (Fourierova vrsta). Fourierova vrsta je funkcijska vrsta oblike

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

kjer sta $(a_n)_{n \geq 0}$ in $(b_n)_{n \geq 1}$ realni zaporedji.

Definicija 5.9 (Skalarni produkt). Naj bosta $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ odsekoma zvezni funkciji. Izraz

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x) dx$$

imenujemo *skalarni produkt* funkcij f in g . Če je $\langle f, g \rangle = 0$, rečemo, da sta f in g *ortogonalni*. Izraz $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ imenujemo *norma* funkcije f .

Dogovor. Za odsekoma zvezno funkcijo f v točkah nezveznosti vrednost funkcije v točki določimo kot

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(\lim_{t \nearrow x} f(t) + \lim_{t \searrow x} f(t) \right).$$

Definicija 5.10. Funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je *odsekoma zvezno odvedljiva*, če je *odsekoma zvezna* na $[a, b]$ in zvezno odvedljiva na $[a, b]$ razen morda v končno mnogo točkah, v katerih obstajata leva in desna limita odvoda.

Opomba. *Odsekoma zvezno odvedljiva funkcija ni odvedljiva v skokih in v točkah, kjer se graf f zlomi, torej ima različni levo in desno tangento v tej točki. V takšni točki namreč res obstajata levi in desni odvod, saj na primer*

$$f'(x^-) = \lim_{t \nearrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t \nearrow x} f'(t),$$

torej levi odvod obstaja, saj obstaja leva limita odvodov; analogno velja za desni odvod.

Če torej v skoku spremenimo vrednost funkcije f tako, da je enaka levi (desni) limiti f v tej točki, potem obstaja levi (desni) odvod funkcije f v tej točki.

Definicija 5.11. Ker lahko vsako *odsekoma zvezno odvedljivo* funkcijo na $[-\pi, \pi]$ razvijemo v Fourierovo vrsto, ki konvergira proti f (vsaj po točkah), rečemo, da funkcije

$$\{1, \cos(nx), \sin(nx) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

sestavljajo *poln sistem funkcij* na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Posledica (Fourierova sinusna in kosinusna vrsta). *Naj bo $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ odsekoma zvezno odvedljiva. Potem lahko f na intervalu $[0, \pi]$ razvijemo v sinusno Fourierovo vrsto*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx), \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

in v kosinusno Fourierovo vrsto

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx), \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx.$$

Posledica (Kompleksna Fourierova vrsta). Naj bo $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ odsekoma zvezno odvedljiva. Potem lahko f razvijemo v kompleksno Fourierovo vrsto

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{inx},$$

kjer je $i = \sqrt{-1}$ imaginarna enota, koeficienti A_n za $n \in \mathbb{Z}$ pa so dani z

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Posledica (Razvoj v Fourierovo vrsto na drugih intervalih). Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ odsekoma zvezno odvedljiva. Potem f lahko razvijemo v Fourierovo vrsto po funkcijah

$$\left\{ 1, \cos\left(\frac{2n\pi}{b-a}x\right), \sin\left(\frac{2n\pi}{b-a}x\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Tako dobimo

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{b-a}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{b-a}x\right) \right),$$

kjer je

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx, \\ a_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{b-a}x\right) dx, \\ b_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{b-a}x\right) dx. \end{aligned}$$

6 NAVADNE DIFERENCIALNE ENAČBE

6.1 Diferencialna enačba prvega reda

Definicija 6.1. Radi bi poiskali *enkrat odvedljivo* funkcijo, ki zadošča enačbi

$$y' = f(x, y).$$

Vsako tako funkcijo imenujemo *rešitev* dane diferencialne enačbe, njen graf $y = y(x)$ pa *rešitvena krivulja*.

Pravimo, da je z enačbo podano *polje smeri*, v vsaki točki je predpisana smer, v kateri mora potekati rešitvena krivulja. To polje smeri grafično predstavimo kot družino krivulj – *izoklin* – vzdolž katerih je smer *konstantna*.

Definicija 6.2 (Ortogonalne trajektorije). *Ortogonalne trajektorije* dane družine krivulj so take krivulje, ki v vsaki svoji točki sekajo tisto od krivulj dane družine, ki poteka skozi točko, pod pravim kotom.

Tej ortogonalni družini pripada diferencialna enačba, ki je v preprosti zvezi z diferencialno enačbo prvotne družine krivulj. V enačbi prvotne družine le zamenjamo y' z $\frac{1}{y'}$ (kar določa pravokotno smer).

6.2 Linearna diferencialna enačba prvega reda

6.3 Diferencialna enačba drugega reda