Analiza 2 - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar

po predavanjih profesorja Drnovška in skripti profesorja Strleta

2020/21

Kazalo

1 NEDOLOČENI INTEGRAL IN POJEM DIFERENCIALNE ENAČBE

1.1 Primitivna funkcija in nedoločeni integral

Definicija 1.1 (Primitivna funkcija)**.** Naj bo f funkcija *ene spremenljivke.* Če obstaja *odvedljiva funkcija* $F : A \to \mathbb{R}$, za katero velja $F' = f$, imenujemo F *primitivna funkcija* funkcije f na A.

Lema 1. *Naj bosta F in G primitivni funkciji za funkcijo f na nekem intervalu J. Potem obstaja konstanta $C \in \mathbb{R}$, da velja*

$$G(x) \; = \; F(x) + C \quad \forall x \in J.$$

Definicija 1.2 (Nedoločeni integral)**.** *Nedoločeni integral* funkcije f je skupek vseh njenih primitivnih funkcij. Označimo ga z $\int f(x)\,dx$, funkcijo f pa imenujemo *integrand.*

Posledica. *Naj bo F neka primitivna funkcija za f na intervalu J. Potem je za $x \in J$*

$$\int f(x)\,dx \; = \; F(x) + C,$$

kjer je $C \in \mathbb{R}$ poljubna konstanta, ki jo imenujemo splošna ali integracijska konstanta.

Trditev 1.1 (Lastnosti nedoločenega integrala)**.** Za poljubni funkciji f in g, ki imata primitivni funkciji na intervalu J, ter skalar $a \in \mathbb{R}$ velja

$$\int (f(x) \pm g(x)) \; dx \; = \; \int f(x)\,dx \; \pm \; \int g(x)\,dx$$

$$\int af(x)\,dx \; = \; a\int f(x)\,dx$$

za $x \in J$; torej je nedoločeni integral *linearen*. Če je F odvedljiva na J, potem za $x \in J$ velja

$$\int F'(x)\,dx \;=\; F(x) + C,$$

kjer je $C \in \mathbb{R}$ poljubna konstanta.

1.2 Uvedba nove spremenljivke v nedoločeni integral

Trditev 1.2. Naj bo funkcija g *odvedljiva* na intervalu J in naj ima funkcija f primitivno funkcijo F na intervalu $g(J) = \{g(x);\ x \in J\}$. Potem je $F \circ g$ *primitivna* funkcija za $(f \circ g) \cdot g'$ na J, torej je

$$\int f\left(g(x)\right) g'\,dx \;=\; \int f(t)\,dt,$$

kjer smo s $t = g(x)$ označili novo spremenljivko.

1.3 Integracija po delih v nedoločenem integralu

Trditev 1.3. Naj bosta f in g *odvedljivi* funkciji na intervalu J. Potem velja

$$\int f(x)g'(x)\,dx \;=\; f(x)g(x) \;-\; \int g(x)f'(x)\,dx.$$

Če označimo $u = f(x)$ in $v = g(x)$, lahko zgornjo formulo krajše zapišemo kot

$$\int u\,dv \;=\; uv \;-\; \int v\,du.$$

1.4 Diferencialne enačbe 1. reda

Definicija 1.3. *Navadna diferencialna enačba* 1. reda je enačba za neznano funkcijo

$$y = g(x),$$

ki vsebuje tudi odvod y' funkcije y.

Splošna oblika diferencialne enačbe 1. reda je

$$F(x, y, y') = 0,$$

kjer je F funkcija treh spremenljivk, ki je res odvisna od zadnje spremenljivke.

Če iz diferencialne enačbe izrazimo odvod funkcije, dobimo *standardno obliko* diferencialne enačbe 1. reda

$$y' = f(x, y).$$

Začetni pogoj za diferencialno enačbo 1. reda v točki $x = a$ je podan z vrednostjo iskane funkcije y v točki a, torej $y(a) = b$, kjer je $b \in \mathbb{R}$. Diferencialna enačba in začetni pogoj skupaj sestavljata začetno nalogo.

Definicija 1.4. *Eksplicitna rešitev* diferencialne enačbe $F(x, y, y') = 0$ je takšna odvedljiva funkcija $g : J \to R$, definirana na intervalu J, da postane diferencialna enačba identiteta na J, le vanjo vstavimo $y = g(x)$, torej $\forall x \in J$ velja

$$F(x, g(x), g'(x)) = 0.$$

Implicitna rešitev diferencialne enačbe je dana z enačbo $G(x, y) = 0$, ki na nekem intervalu določa eksplicitno rešitev dane diferencialne enačbe.

Splošna rešitev diferencialne enačbe 1. reda je funkcija

$$y = g(x, C) \ ^1,$$

ki je odvisna od splošne konstante C in reši dano diferencialno enačbo za poljubno izbiro vrednosti konstante $C \in \mathbb{R}$, poleg tega pa za poljuben začetni

[1] Lahko podana implicitno.

pogoj obstaja vrednost konstante C, pri kateri rešitev zadošča izbranemu začetnemu pogoju. Rešitev, ki ne vsebuje splošnih konstant, imenujemo tudi *posebna* ali *partikularna* rešitev.

Definicija 1.5 (LDE 1. reda)**.** *Linearna diferencialna enačba* 1. reda ima obliko

$$r_1(x)y' \ + \ r_0(x)y \ = \ s(x),$$

kjer so $r_0, r_1, s : J \to \mathbb{R}$ funkcije, definirane na nekem intervalu J. Če je s ničelna funkcija, rečemo, da je enačba *homogena.* Če sta funkciji r_0, r_1 *konstantni*, pa rečemo, da ima enačba *konstante koeficiente.*

Standardna oblika linearne diferencialne enačbe 1. reda je

$$y' \ + \ p(x)y \ = \ q(x),$$

kjer sta $p, q : J \to \mathbb{R}$ funkciji, definirani na intervalu J.

Trditev 1.4. Naj bo dana *linearna* diferencialna enačba

$$y' \ + \ p(x)y \ = \ q(x),$$

kjer sta $p, q : J \to \mathbb{R}$ *zvezni* funkciji, definirani na intervalu J.

(i) Splošna rešitev pripadajoče homogene diferencialne enačbe $y' + p(x)y = 0$ je

$$y(x) \ = \ Ce^{-\int p(x)\,dx},$$

kjer je $C \in \mathbb{R}$ splošna konstanta, v kateri je zajeta integracijska konstanta.

(ii) Splošna rešitev dane diferencialne enačbe dobimo iz splošne rešitve pripadajoče homogene enačbe z variacijo konstante, torej z nastavkom

$$y(x) \ = \ C(x)e^{-\int p(x)\,dx},$$

kjer funkcija $C(x)$ zadošča

$$C'(x) \ = \ g(x)e^{\int p(x)\,dx}.$$

2 DOLOČENI INTEGRAL

2.1 Motivacija za določeni integral

Definicija 2.1. Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *nenegativna funkcija*, torej $f(x) \geq 0$ za vse $x \in [a, b]$. Rečemo, da graf funkicje f *določa območje* $A \subset \mathbb{R}^2$ nad intervalom $[a, b]$. Množica A je navzgor omejena z grafom funkcije f, na levi s premico $x = a$ in na desni s premico $x = b$.

2.2 Riemannova vsota in Riemannov integral

Definicija 2.2 (Riemannova vsota)**.** *Delitev* D intervala $[a, b]$ na podintervale je dana z izbiro *delilnih točk* x_i:

$$a \; = \; x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n \; = \; b,$$

kjer je $n \in \mathbb{N}$. Dolžino i-tega podintervala $[x_{i-1}, x_i]$ (za $i = 1, 2, ..., n$) označimo z $\delta_i := x_i - x_{i-1}$. *Velikost delitve* D je dolžina najdaljšega podintervala delitve D, torej

$$\delta(D) \; = \; \max \{\delta_i \mid i = 1, 2, ..., n\}.$$

Na vsakem od podintervalov, na katere delitev D razdeli interval $[a, b]$, izberemo *testno točko* $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ in s $T_D = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ označimo nabor teh točk; nabor testnih točk je *usklajen* z delitvijo D, ker smo na vsakem podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$, določenem z D, izbrali natanko eno testno točko t_i.

Riemannova vsota funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, pridružena delitvi D in usklajenemu naboru testnih točk T_D je

$$R(f, D, T_D) \; := \; \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\delta_i.$$

Definicija 2.3 (Riemannov integral)**.** *Riemannov integral* ali *določeni integral* funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je limita Riemannovih vsot $R(f, D, T_D)$, kjer limito vzamemo po vseh delitvah D intervala [a, b] in usklajenih naborih testnih točk T_D, ko pošljemo velikost delitev $\delta(D)$ proti 0, če ta limita obstaja (torej je končna in neodvisna od izbire delitev in testnih točk). Pišemo

$$\int_a^b f(x)dx \ := \lim_{\delta(D)\to 0} R(f, D, T_D).$$

Če zgornja limita obstaja, rečemo, da je funkcija f *integrabilna* na $[a, b]$.

Definicija 2.4.

$$\lim_{\delta(D)\to 0} R(f, D, T_D) \ = \ I,$$

če $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, da za poljubno delitev D z $\delta(D) < \delta$ in poljuben usklajen nabor testnih točk T_D velja

$$|R(f, D, T_D) - I| \ < \ \varepsilon.$$

Trditev 2.1 (Linearnost določenega integrala)**.** Naj bosta $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrabilni funkciji* in $c \in \mathbb{R}$. Potem so $f \pm g$ in cf *integrabilne* na $[a, b]$ in velja

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) \ dx \ = \ \int_a^b f(x) \ dx \ \pm \int_a^b g(x) \ dx$$
$$\int_a^b cf(x) \ dx \ = \ c\int_a^b f(x) \ dx$$

2.3 Integrabilne funkcije

Trditev 2.2. Naj bo f *integrabilna* na $[a, b]$. Potem je f omejena na $[a, b]$.

Definicija 2.5 (Zožitev)**.** Naj bo $f : A \to \mathbb{R}$ funkcija in $B \subset A$. Tedaj $f|_B : B \to \mathbb{R}$ označuje funkcijo z definicijskim območjem B, ki $\forall x \in B$ preslika v $f(x)$. Funkcijo $f|_B$ imenujemo *zožitev* funkcije f na B.

Trditev 2.3 (Aditivnost domene)**.** Naj bodo $a < b < c$ in $f : [a, c] \to \mathbb{R}$. Tedaj je f *integrabilna* na $[a, c]$ natanko tedaj, ko sta *integrabilni* zožitvi $f|_{[a,b]}$ in $f|_{[b,c]}$. V tem primeru velja

$$\int_a^c f(x)\,dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx \;+\; \int_b^x f(x)\,dx.$$

Trditev 2.4. Naj bosta $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkciji, ki se razlikujeta le v točki $c \in [a, b]$ [2]. Potem je f *integrabilna* natanko tedaj, ko je *integrabilna* g; če sta funkciji *integrabilni* velja

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_a^b g(x)\,dx.$$

Izrek 2.1. Naj bo f *zvezna* na $[a, b]$. Potem je f *integrabilna* na $[a, b]$.

Definicija 2.6 (Enakomerna zveznost)**.** Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ je *enakomerno zvezna* na A, če $\forall \varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta = \delta_\varepsilon > 0$, da za poljubna $x, y \in A$, ki zadoščata $|x - y| < \delta$, velja

$$|f(x) - f(y)| \;<\; \varepsilon.$$

Tukaj je za $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ dolžina $|x|$ definirana z

$$|x| \;=\; \sqrt{\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2} \;=\; \sqrt{{x_1}^2 + \ldots + {x_n}^2}.$$

Trditev 2.5. Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *kompaktna množica* in $f : A \to \mathbb{R}$ *zvezna* funkcija. Tedaj je f *enakomerno zvezna* na A.

[2] $f(x) = g(x)\ \forall x \in [a, b],\ x \neq c$

Definicija 2.7 (Odsekoma zvezna funkcija)**.** Funkcija $f : J \to \mathbb{R}$, definirana na omejenem intervalu J, je *odsekoma zvezna*, če je zvezna v vseh točkah intervala razen morda v končno mnogo točkah, kjer ima skoke.

Funkcija f ima *skok* v točki $c \in J$, če f ni zvezna v c, ima pa (končno) levo in desno limito c (če je c krajišče intervala, zahtevamo le obstoj limite na tisti strani c, ki leži v J).

Posledica. *Če je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ odsekoma zvezna, potem je integrabilna. Vrednosti funkcije f v skokih ne vplivajo niti na integrabilnost niti na integral funkcije f na $[a, b]$.*

Trditev 2.6.

(i) Naj bosta f in g *integrabilni* na $[a, b]$. Če je $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a, b]$, potem je

$$\int_a^b f(x)\,dx \;\leq\; \int_a^b g(x)\,dx \quad \text{(monotonost integrala).}$$

(ii) Če je f *integrabilna* na $[a, b]$, potem je tudi $|f|$ *integrabilna* na $[a, b]$ in velja

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \;\leq\; \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Dogovor.

- *Integral po izrojenemu intervalu $[a, a]$ je nič:*

$$\int_a^a f(x)\,dx \;=\; 0.$$

- *Če je $a < b$, je*

$$\int_b^a f(x)\,dx \;=\; -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Definicija 2.8 (Povprečna vrednost)**.** *Povprečna vrednost* integrabilne funkcije f na intervalu $[a, b]$ je

$$\mu \;:=\; \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Trditev 2.7. Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrabilna*, $m := \inf f$ in $M := \sup f$. Potem je za povprečno vrednost μ funkcije f velja $m \leq \mu \leq M$. Če je f *zvezna*, obstaja taka točka $c \in [a, b]$, da je $\mu = f(c)$.

2.4 Osnovni izrek analize

Definicija 2.9. Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrabilna* funkcija. Funkcijo $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, definirano s predpisom

$$F(x) \;=\; \int_a^x f(t)\,dt,$$

imenujemo *integral kot funkcija zgornje meje.*

Izrek 2.2 (Prvi del osnovnega izreka)**.** Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *zvezna.* Potem je funkcija $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ *odvedljiva* na $[a, b]$ in velja

$$F'(x) \;=\; f(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

Posledica. *Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna. Potem je $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ primitivna funkcija za f na $[a, b]$. Torej velja*

$$\int f(x)\,dx \;=\; \int_a^x f(t)\,dt \;+\; C,$$

kjer je $C \in \mathbb{R}$ poljubna konstanta.

Izrek 2.3 (Drugi del osnovnega izreka)**.** Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *zvezna* in G poljubna primitivna funkcija za f na $[a, b]$. Potem je

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; G(b) - G(a) \;=\; G(x)\Big|_a^b.$$

2.5 Pravila za integriranje in Leibnizova formula

Trditev 2.8.

(i) Naj bo $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *zvezno odvedljiva* in $f : Z_g \to \mathbb{R}$ *zvezna.* Potem ob uvedbi nove spremenljivke $t = g(x)$ velja:

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx \;=\; \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt.$$

(ii) Naj bosta $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *zvezno odvedljivi.* Potem je

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx \;=\; f(x)\,g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\,f'(x)\,dx.$$

Če označimo $u = f(x)$ in $v = g(x)$, zgornja formula postane

$$\int_a^b u\,dv \;=\; uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

2.6 Posplošeni integral na omejenem intervalu

Definicija 2.10 (Posplošeni integral)**.** Naj bo $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ funkcija, ki je integrabilna na intervalu $[t, b]$ $\forall t \in (a, b)$. Potem je *posplošeni integral* funkcije f na intervalu $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx \;:=\; \lim_{t \searrow a} \int_t^b f(x)\,dx,$$

če ta limita obstaja.

Če limita obstaja , rečemo, da je f *posplošeno integrabilna* na $[a, b]$ in da je $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *konvergenten*, sicer pa rečemo, da je integral *divergenten.*

Opomba.

- *Posplošeni integral imenujemo tudi izlimitirani integral ali nepravi integral.*
- *Če je f integrabilna na $[a, b]$, potem je njen posplošeni integral na $[a, b]$ enak Riemannovemu integralu.*

Trditev 2.9. Naj bo $p \in \mathbb{R}$. Posplošeni integral $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\,dx$ je *konvergenten* natanko tedaj, ko je $p < 1$.

Izrek 2.4 (Konvergenčni kriterij)**.** Naj bo $g : (a, b] \to \mathbb{R}$ *zvezna.*

(i) Če je g *omejena* na $(a, b]$ in je $p < 1$, potem je $\displaystyle\int_a^b \frac{g(x)}{(x-a)^p}\,dx$ *konvergenten.*

(ii) Če je g *omejena stran od nič*, torej obstaja neki $m > 0$, da velja $|g(x)| \geq m\ \forall x \in (a, b]$ in je $p \geq 1$, potem je $\int_a^b \frac{g(x)}{(x-a)^p}\,dx$ *divergenten.*

Opomba.

- *Funkcija g v izreku je lahko le odsekoma zvezna na $(a, b]$, saj je takšna g zvezna na nekem manjšem intervalu $(a, c]$. Ker je integrand potem odsekoma zvezna funkcija na $[c, b]$, moramo obravnavati le konvergenco na $(a, c]$.*
- *Podobno je v točki (ii) dovolj, da je g omejena stran od nič le na manjšem intervalu $(a, c] \subset (a, b]$.*
- *Pogoj v točki (i) je izpoljen, če ima g (končno) desno limito pri a. Podobno je pogoj v (ii) izpoljen, le ima g od nič različno desno limito v a.*

Lema 2. *Naj bo $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ monotona in omejena funkcija. Potem obstajata limiti*

$$\lim_{x \nearrow b} f(x) \quad \textit{in} \quad \lim_{x \searrow a} f(x);$$

ena od teh limit je enaka $\sup f$*, druga pa* $\inf f$*.*

Trditev 2.10 (Linearnost posplošenega integrala)**.** Naj bosta $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ *posplošeno integrabilni* in $c \in \mathbb{R}$. Potem so tudi $f \pm g : (a, b] \to \mathbb{R}$ in $cf : (a, b] \to \mathbb{R}$ *posplošeno integrabilne* in velja

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x) \pm g(x))\ dx &= \int_a^b f(x)\ dx \pm \int_a^b g(x)\ dx \\ \int_a^b cf(x)\ dx &= c\int_a^b f(x)\ dx.\end{aligned}$$

Opomba. *Pri oznakah v zgornji trditvi velja naslednje: če sta dve od funkcij f, g in $f \pm g$ posplošeno integrabilni na $[a, b]$, potem je tudi tretja. En primer je zajet v trditvi, iz integrabilnosti f in $f + g$ pa sledi integrabilnost g, saj jo lahko zapišemo kot linearno kombinacijo drugih dveh: $g = (f + g) - f$.*

Definicija 2.11.

(i) Naj bo $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ *integrabilna* na $[a, b]$ $\forall s \in (a, b)$. Potem je *posplošeni integral* funkcije f na intervalu $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{s \nearrow b} \int_a^s f(x)\, dx,$$

če ta limita obstaja. Če limita obstaja, rečemo, da je f *posplošeno integrabilna* na $[a, b]$ in da je posplošeni integral *konvergenten*, sicer pa imenujemo integral *divergenten*.

(ii) Naj bo $f : [a, c) \cup (c, b] \to \mathbb{R}$ *integrabilna* na $[a, s]$ $\forall s \in (a, c)$ in *integrabilna* na $[a, b]$ $\forall t \in (c, b)$. Potem je *posplošeni integral* f na $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{s \nearrow c} \int_a^s f(x)\, dx + \lim_{t \searrow c} \int_t^b f(x)\, dx,$$

če obe limiti obstajata.

2.7 Posplošeni integral na neomejenem intervalu

Definicija 2.12 (Posplošena integrabilnost)**.**

- Naj bo $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ integrabilna na $[a, s]$ $\forall s > a$. Potem je *posplošeni integral* funkcije f na $[a, \infty)$

$$\int_a^\infty f(x)\, dx \ := \ \lim_{s\to\infty} \int_a^s f(x)\, dx,$$

če ta limita obstaja. Če limita obstaja, rečemo, da je posplošeni integral *konvergenten*, sicer pa, da je *divergenten.*

- Naj bo $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ integrabilna na $[t, b]$ $\forall t < b$. Potem je *posplošeni integral* funkcije f na $(-\infty, b]$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\, dx \ := \ \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\, dx,$$

če ta limita obstaja. Če limita obstaja, rečemo, da je posplošeni integral *konvergenten*, sicer pa, da je *divergenten.*

- Funkcija $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ je *posplošeno integrabilna*, če sta posplošeno integrabilni zožitvi $f|_{(-\infty,a]}$ in $f|_{[a,\infty)}$ $\forall a \in \mathbb{R}$.

Izrek 2.5 (Konvergenčni kriterij)**.** Naj bo $g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *zvezna*, $a > 0$.

(i) Če je g *omejena* na $[a, \infty)$ in je $p > 1$, potem je $\int_a^\infty \frac{g(x)}{x^p}\, dx$ *konvergenten.*

(ii) Če je g *omejena stran od nič* na $[a, \infty)$ in je $p \leq 1$, potem je $\int_a^\infty \frac{g(x)}{x^p}\, dx$ *divergenten.*

3 KRIVULJE V RAVNINI

3.1 Podajanje krivulj

- Eksplicitno: Funkcija $f : J \to \mathbb{R}$ za $J \subseteq \mathbb{R}$ določa krivuljo Γ_f, ki je graf te funkcije, torej
$$\Gamma_f \; = \; \{(x, f(x)) \mid x \in J\}.$$
- Implicitno: Funkcija $g : A \to \mathbb{R}$ za $A \subseteq \mathbb{R}^2$ določa krivuljo K_g, ki je množica rešitev enačbe $g(x, y) = 0$, torej
$$K_g \; = \; \{(x, y) \in A \mid g(x, y) = 0\}.$$
- Parametrično: Funkciji $\alpha, \beta : J \to \mathbb{R}$ za $J \subseteq \mathbb{R}$ določata krivuljo K_F, ki je množica vseh točk (x, y), določenih z $x = \alpha(t)$ in $y = \beta(t)$, torej
$$K_F \; = \; \{(\alpha(t), \beta(t)) \mid J\}.$$
Preslikavo $F : J \to \mathbb{R}^2$, $F(t) := (\alpha(t), \beta(t))$ imenujemo *pot* ali *parametrizacija* krivulje K_F. Krivuljo K_F imenujemo tudi *tir* poti F.
- Polarno: Funkcija $h : J \to \mathbb{R}$ za $J \subseteq \mathbb{R}$ določa krivuljo K_h, ki je množica točk v ravnini s polarnima koordinatama (r, φ), kjer je $r = h(\varphi)$, torej
$$K_h \; = \; \{(h(\varphi)\cos\varphi, h(\varphi)\sin\varphi) \mid \varphi \in J\}.$$
Zveza med kartezičnima koordinatama (x, y) ter polarnima koordinatama (r, φ) točje v ravnini:
$$x \; = \; r\cos\varphi, \quad y \; = \; r\sin\varphi, \quad r \; = \; \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi \; = \; \frac{y}{x}.$$

3.2 Enačba tangente na krivuljo

Trditev 3.1. Naj bo $f : J \to \mathbb{R}$ *odvedljiva* v notranji točki c intervala $J \subseteq \mathbb{R}$. Potem ima krivulja Γ_f tangento v točki $(c, f(c))$, dano z enačbo:
$$y - f(c) \; = \; f'(c)(x - c).$$

Naj bo dana *zvezno odvedljiva* funkcija $g : A \to \mathbb{R}$ in notranja točka $(a,b) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$, ki zadošča $g(a,b) = 0$. Po izreku o *implicitni funkciji* enačba $g(x,y) = 0$ določa funkcijo $y = f(x)$ v okolici točke a, če je $\dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b) \neq 0$: za to funkcijo velja $f(a) = b$ in

$$f'(a) \;=\; -\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}.$$

Definicija 3.1 (Regularna in singularna točka)**.** Naj bo $g : A \to \mathbb{R}$ odvedljiva v točki $(a,b) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$. Če je

$$\nabla g(a,b) \;\neq\; (0,0),$$

rečemo, da je (a,b) *regularna točka* za g, sicer pa, da je (a,b) *singularna točka* za g.

Trditev 3.2. Naj bo $g : A \to \mathbb{R}$ *zvezno odvedljiva* v okolici točke $(a,b) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$, naj bo $g(a,b) = 0$ in naj bo (a,b) *regularna* točka za g. Potem ima krivulja K_g tangento v točki (a,b), dano z enačbo

$$g_x(a,b)(x-a) \;+\; g_y(a,b)(y-b) \;=\; 0$$

oziroma

$$\nabla g(a,b) \cdot (x-a, y-b) \;=\; 0.$$

Trditev 3.3. Naj bosta $\alpha, \beta : J \to \mathbb{R}$ *zvezno odvedljivi* funkciji, kjer je $J \subset \mathbb{R}$ interval, ter $F = (\alpha, \beta)$ pripadajoča *zvezno odvedljiva* pot. Če velja $\dot{\alpha}(t) \neq 0 \ \forall t \in J$, potem je K_F graf neke *zvezno odvedljive* funkcije f, za katero velja

$$f'(\alpha(t)) \;=\; \frac{\dot{\beta}(t)}{\dot{\alpha}(t)}.$$

Če označimo $x(t) := \alpha(t)$ in $y(t) := \beta(t)$, dobimo za odvod

$$f'(x(t)) \;=\; \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}.$$

Posledica. *Naj bosta $x = x(t)$ in $y = y(t)$ dvakrat odvedljivi na intervalu J in naj velja $\dot{x}(t) \neq 0 \ \forall t \in J$. Potem je pripadajoča funkcija f iz zgornje trditve dvakrat odvedljiva in velja*

$$f''(x(t)) \ = \ \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\dot{x}(t)^3}.$$

Definicija 3.2. Naj bosta $\alpha, \beta : J \to \mathbb{R}$ *odvedljivi*, kjer je $J \subseteq \mathbb{R}$ interval, ter $F = (\alpha, \beta)$ pripadajoča *odvedljiva* pot. *Odvod poti* F po t je hitrostni vektor $\dot{F}(t) = (\dot{\alpha}(t), \dot{\beta}(t))$. Če je

$$\dot{F}(t) \ \neq \ (0, 0)$$

za neki $t \in J$, imenujemo t *regularna točka* parametrizacije F. Če so vse točke intervala J regularne, imenujemo F *regularna parametrizacija.*
Naj bo $g : I \to J$ *odvedljiva surjektivna* funkcija, kjer je $I \subset \mathbb{R}$ interval. Pot

$$G \ := \ F \circ g$$

imenujemo *reparametrizacija* poti F.

Trditev 3.4. Naj bo s *regularna točka* parametrizacije $F(t) = (\alpha(t), \beta(t))$. Potem je tangenta na krivuljo K_F v točki $F(s)$ dana z enačbo

$$\dot{\alpha}(s)(y - \beta(s)) \ = \ \dot{\beta}(s)(x - \alpha(s)).$$

3.3 Dolžina loka krivulje

Definicija 3.3. Naj bo dana pot $F : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $F(t) = (\alpha(t), \beta(t))$, ki določa krivuljo K. Izberimo delitev

$$D \ = \ \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$$

intervala $[a, b]$. Pot $F(t)$ na i-tem podintervalu $[t_{i-1}, t_i]$ zamenjamo z daljico od $F(t_{i-1})$ do $F(t_i)$.
Dolžina tako nastale lomljene črte, ki aproksimira tir poti F, je

$$\ell(D) \ = \ \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}))^2 \ + \ (\beta(t_i) - \beta(t_{i-1}))^2}.$$

Če obstaja limita dolžin $\ell(D)$, ko pošljemo velikost delitve $\delta(D)$ proti nič (neodvisno od izbire delitev), jo imenujemo *dolžina poti* F in označimo $\ell(F)$:

$$\ell(F) \;=\; \lim_{D,\delta(D)\to 0} \ell(D).$$

Trditev 3.5. Naj bo pot $F : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $F(t) = (x(t), y(t))$ *zvezno odvedljiva*[3]. Potem je dolžina $\ell(F)$ poti F enaka

$$\ell(F) \;=\; \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 \;+\; \dot{y}(t)^2}\, dt.$$

Opomba.

1. *Dolžina tangentnega vektorja* $\dot{F}(t) \;=\; (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ *na pot* F *je* $|\dot{F}(t)| = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}$, *torej je*

$$\ell(F) \;=\; \int_a^b |\dot{F}(t)|\, dt.$$

2. *Iz zgornje formule za dolžino poti se zdi, da je ta odvisna od parametrizacije* F. *Na osnovi definicije pa pričakujemo, da je odvisna le od krivulje* K, *ki je tir poti. To je res, če je parametrizacija injektivna, torej vsako točko na krivulji obišče natanko enkrat; če pa parametrizacija večkrat opiše kak del krivulje, tega v dolžini upoštevamo večkrat.*

Trditev 3.6. Naj bo $F : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *zvezno odvedljiva* parametrizacija krivulje K in $g : [c,d] \to [a,b]$ *zvezno odvedljiva* funkcija, ki je *monotono naraščajoča* in velja $g(c) = a$ ter $g(d) = b$. Potem je $G := F \circ g : [c,d] \to \mathbb{R}^2$ tudi parametrizacija K in velja

$$\ell(G) \;=\; \ell(F).$$

Dolžino krivulje K torej izračunamo kot dolžino njene poljubne injektivne parametrizacije.

[3]Komponenti $x(t)$ in $y(t)$ sta *zvezno odvedljivi* funkciji

Posledica.

(i) Dolžina eksplicitno podane zvezno odvedljive krivulje $y = f(x)$ za $x \in [a, b]$ je

$$\ell(K_f)1 = \int_a^b \sqrt{1 \; + \; (f'(x))^2}\, dx \;\; = \;\; \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

(ii) Dolžina polarno podane zvezno odvedljive krivulje $r = r(\varphi)$ za $\varphi \in [a, b]$ je

$$\ell(K_r) \;\; = \;\; \int_a^b \sqrt{r(\varphi)^2 \; + \; \dot{r}(\varphi)^2}\, d\varphi.$$

Definicija 3.4 (Ločna dolžina)**.** Diferencial dolžina loka krivulje označimo z ds in ga imenujemo *ločna dolžina.* V vseh opisih krivulje velja

$$ds^2 \;\; = \;\; dx^2 + dy^2.$$

Uporaba 3.1 (Površina rotacijske ploskve)**.** *Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nenegativna zvezna funkcija. Ploskev, ki jo dobimo z vrtenjem grafa funkcije f nad intervalom $[a, b]$ okoli osi x, imenujemo rotacijska ploskev.*

Izberemo neko delitev

$$D \;\; = \;\; \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$$

intervala $[a, b]$. Nad intervalom $[x_{i-1}, x_i]$ graf funkcije f aproksimiramo z daljico od točke $(x_{i-1}, f(x_{i-1})$ do točke $(x_i, f(x_i))$. Ko daljico zavrtimo okoli x-osi, dobimo plašč prisekanega stožca s polmeroma leve in desne mejne krožnice $f(x_{i-1})$ in $f(x_i)$ ter višino $\delta_i \; = \; x_i - x_{i-1}$. To da približek za površino ploskve:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi(f(x_{i-1}) + f(x_i))\sqrt{{\delta_i}^2 \; + \; (f(x_{i-1}) - f(x_i))^2}.$$

Če je f zvezno odvedljiva, dobimo za površino v limiti, ko pošljemo velikost delitve $\delta(D)$ proti 0, formulo

$$P \;\; = \;\; 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 \; + \; (f'(x))^2}\, dx = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

3.4 Ploščina območja, določenega s krivuljo

Trditev 3.7.

1. Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *zvezna* in *nenegativna.* Ploščina območja, ki ga določa graf funkcije $y = f(x)$ nad intervalom $[a, b]$ na osi x, je
$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_a^b y\,dx.$$

2. Naj bo $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ *zvezna* in *nenegativna.* Ploščina območja, ki ga določa graf funkcije $x = g(y)$ na osi y, je
$$\int_c^d g(y)\,dy \;=\; \int_c^d x\,dy.$$

Trditev 3.8. Naj bo $F : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ *zvezno odvedljiva* pot, $F(t) = (x(t), y(t))$.

1. Če je $y(t) \geq 0\ \forall t$ in je $x(a) = \min x(t)$ ter $x(b) \max x(t)$, potem je ploščina med krivuljo in osjo x nad intervalom $[x(a), x(b)]$ enaka
$$\int_a^b y(t)\,\dot{x}(t)\,dt.$$

2. Če je $x(t) \geq 0\ \forall t$ in je $y(a) = \min y(t)$ ter $y(b) = \max y(t)$, potem je ploščina med krivuljo in osjo y nad intervalom $[y(a), y(b)]$ enaka
$$\int_a^b x(t)\,\dot{y}(t)\,dt.$$

Definicija 3.5. Naj bo $F : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ regularna parametrizacija krivulje K. Potem F določa *usmerjenost* K, določeno s smerjo, v kateri potuje točka $F(t)$ po K, ko potuje t od a do b.

Gladka enostavna sklenjena krivulja je krivulja K, ki ima regularno parametrizacijo $F : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, za katero velja $F(a) = F(b)$ in $\dot{F}(a) = \dot{F}(b)$, $F|_{[a,b)}$ pa je *injektivna.*

Naj bo A območje, ki ga omejuje *gladka enostavna sklenjena krivulja* K. Regularna parametrizacija F krivulje K določa *pozitivno usmerjenost* krivulje K, če je A na levi strani, ko se pomikamo vzdolž K v smeri usmerjenosti, ki jo določa F.

Trditev 3.9. Naj bo $F : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $F(t) = (x(t), y(t))$ *regularna* parametrizacija *enostavne sklenjene* krivulje K, ki določa pozitivno usmerjenost K. Potem je ploščina območja A znotraj K enaka

$$\int_a^b x(t)\,\dot{y}(t)\,dt \;=\; -\int_a^b y(t)\,\dot{x}(t)\,dt \;=\; \frac{1}{2}\int_a^b \left(x(t)\,\dot{y}(t) - y(t)\,\dot{x}(t)\right) dt.$$

Opomba. *Zgornja trditev velja tudi za odsekoma zvezno odvedljive poti F, torej za zvezne $F(t) = (x(t), y(t))$, kjer sta odvoda $\dot{x}(t)$ in $\dot{y}(t)$ odsekoma zvezni funkciji.*

Trditev 3.10. Naj bo $r = r(\varphi)$ za $\varphi \in [\alpha, \beta]$ *zvezno polarno* podana krivulja. Potem je ploščina območja, ki ga določa krivulja skupaj z daljicama

$$\varphi = \alpha, \quad 0 \le r \le r(a) \quad \text{in} \quad \varphi = \beta, \quad 0 \le r \le r(\beta),$$

enaka

$$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r(\varphi)^2\,d\varphi.$$

3.5 Krivinska krožnica in ukrivljenost krivulje

Definicija 3.6. Naj bo $K \subset \mathbb{R}^2$ krivulja, ki ima tangento v točki $(a, b) \in K$. *Krivinska krožnica* na K v točki (a, b) je limitna lega krožnic, ki so tangentne na K v (a, b) ter gredo skozi točko $(x, y) \in K$, ko pošljemo (x, y) proti (a, b), če ta limita obstaja. Polmer krivinske krožnice imenujemo *krivinski polmer*, njegovo obratno vrednost pa imenujemo *ukrivljenost* krivulje v točki (a, b).

Trditev 3.11.

(1) Naj bo f *dvakrat zvezno odvedljiva* funkcija. *Ukrivljenost* grafa f v točki x je

$$\kappa(x) \;=\; \frac{f''(x)}{(1+(f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(2) Naj bo F *dvakrat zvezno odvedljiva* pot. *Ukrivuljenost tira* poti F v točki t je

$$\kappa(t) \;=\; \frac{\ddot{y}(t)\dot{x}(t)-\dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{(\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(3) Naj bo r *dvakrat zvezno odvedljiva* funkcija, ki določa polarno podano krivuljo. *Ukrivljenost* krivulje v točki φ je

$$\kappa(\varphi) \;=\; \frac{r(\varphi)^2+2\dot{r}(\varphi)^2-r(\varphi)\ddot{r}(\varphi)}{(r(\varphi)^2+\dot{r}(\varphi)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

3.6 Diferencialne enačbe v obliki diferenciala

Definicija 3.7. *Diferencialna enačba v obliki diferenciala* je enačba oblike

$$P(x,y)\,dx \;+\; Q(x,y)\,dy \;=\; 0,$$

kjer sta $P,Q : A \to \mathbb{R}$ definirani na nekem območju $A \subset \mathbb{R}^2$.

Naj bosta $P,Q : A \to \mathbb{R}$ *odvedljivi.* Diferencialna enačba $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ je *eksaktna* na A, če velja

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \;=\; \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

$\forall x \in A$.

Trditev 3.12. Naj bo $A \subset \mathbb{R}^2$ *pravokotnik* in $P,Q : A \to \mathbb{R}$ *zvezno odvedljivi* funkciji. Če je enačba $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy = 0$ *eksaktna* na A, potem ima splošno rešitev oblike

$$g(x,y) \;=\; C,$$

kjer je $g : A \to \mathbb{R}$ *dvakrat zvezno odvedljiva* funkcija, ki zadošča

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \;=\; P(x,y) \quad \text{in} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \;=\; Q(x,y).$$

Definicija 3.8 (Integral s parametrom)**.** Naj bo $A = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ pravokotnik in naj bo $f : A \to \mathbb{R}$ *zvezna* funkcija. Funkcijo $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, definirano s predpisom

$$F(x) \;=\; \int_c^d f(x,y)\,dy,$$

imenujemo *integral s parametrom.*

Lema 3. *Pri oznakah kot v definiciji naj bo f zvezno odvedljiva funkcija dveh spremenljivk. Tedaj je integral s parametrom $x \mapsto F(x)$ zvezno odvedljiva funkcija na $[a,b]$ in velja*

$$F'(x) \;=\; \int_c^d \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,dy.$$

Definicija 3.9 (Integrirajoči množitelj)**.** Naj bo dana diferencialna enačba $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$, kjer sta $P, Q : A \to \mathbb{R}$ *zvezno odvedljivi* funkciji. Če je $\mu : A \to \mathbb{R}$ takšna *zvezno odvedljiva* funkcija, da je enačba

$$\mu(x,y)\,P(x,y)\,dx \;+\; \mu(x,y)\,Q(x,y)\,dy \;=\; 0$$

eksaktna, potem funkcijo μ imenujemo *integrirajoči množitelj* dane enačbe.

Trditev 3.13. Če je μ *integrirajoči množitelj* diferencialne enačbe $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \;=\; 0$, potem zadošča

$$\mu_y P - \mu_x Q \;=\; \mu(Q_x - P_y).$$

Dana enačba ima integrirajoči množitelj, ki je odvisen le od spremenljivke x, če ke izraz $\dfrac{Q_x - P_y}{Q}$ odvisen le od spremenljivke x (ne pa od od y); v tem primeru je $\mu = \mu(x)$ rešitev enačbe

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} \;=\; \frac{P_y - Q_x}{Q}.$$

Dana enačba ima integrirajoči množitelj, ki je odvisen le od spremenljivke y, če ke izraz $\dfrac{Q_x - P_y}{P}$ odvisen le od spremenljivke y (ne pa od od x); v tem primeru je $\mu = \mu(y)$ rešitev enačbe

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy} = \frac{Q_x - P_y}{P}.$$

4 ŠTEVILSKE VRSTE

4.1 Osnovni pojmi

Definicija 4.1 (Številska vrsta)**.** *Številska vrsta* je vsote (neskončnega) zaporedja realnih števil. Če je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje realnih števil, je pripadajoča številska vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots .$$

Za naravno število k je *k-ta delna vsota* vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ enak

$$s_k := \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je *konvergentna (divergentna)*, če je konvergentno (divergentno) zaporedje delnih vsot $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Če je vrsta konvergentna, za njeno vsoto vzamemo limito delnih vsot.

Lema 4 (Potrebni pogoj za kovergenco vrste)**.** *Če vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira, potem je*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \;=\; 0.$$

Opomba. *Prvih nekaj členov vrste ne vpliva na konvergenco.*

4.2 Vrste s pozitivnimi členi

Trditev 4.1 (Primerjalni kriterij)**.** Naj za zaporedji števil $(a_n)_n$ in $(b_n)_n$ velja $0 \leq a_n \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

(1) Če $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergira*, potem tudi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira.*

(2) Če $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergira*, potem tudi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *divergira.*

Rečemo, da je vrsta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *majoranta* za vrsto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ter da je vrsta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *minoranta* za vrsto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Trditev 4.2 (Kvocientni ali d'Alembertov kriterij)**.** Naj bo $(a_n)_n$ zaporedje *pozitivnih* števil, za katerega obstaja

$$d \ := \ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\begin{cases} \textit{konvergira}; & d < 1 \\ \textit{divergira}; & d > 1 \\ \textit{konvergira ali divergira}; & d = 1 \end{cases}$.

Trditev 4.3 (Korenski ali Cuchyjev kriterij)**.** Naj bo $(a_n)_n$ zaporedje *nenegativnih* števil, za katerega obstaja

$$c \ := \ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\begin{cases} \textit{konvergira}; & c < 1 \\ \textit{divergira}; & c > 1 \\ \textit{konvergira ali divergira}; & c = 1 \end{cases}$.

Trditev 4.4 (Integralski kriterij)**.** Naj bo $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ *zvezna, pozitivna* in *padajoča* funkcija. Potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *konvergira* natanko tedaj, ko *konvergira* posplošeni integral

$$\int_1^{\infty} f(x)\, dx.$$

Posledica. *Naj bo $p > 0$ realno število. Vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \textit{konvergira}; & p > 1 \\ \textit{divergira}; & p \leq 1 \end{cases}$.

Trditev 4.5 (Raabejev kriterij)**.** Naj bo $(a_n)_n$ zaporedje *pozitivnih* števil, za katerega obstaja

$$r \ := \ \lim_{n \to \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right).$$

Potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \begin{cases} \textit{konvergira}; & r > 1 \\ \textit{divergira}; & r < 1 \\ \textit{konvergira ali divergira}; & r = 1 \end{cases}$.

4.3 Alternirajoče vrste

Definicija 4.2 (Alternirajoča vrsta)**.** Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je *alternirajoča*, če je člen a_{n+1} nasprotno predznačen kot člen a_n $\forall n \in \mathbb{N}$.

Trditev 4.6 (Leibnizov kriterij)**.** Naj bo $\sum_{i=1}^{n} a_n$ *alternirajoča* vrsta. Če zaporedje $(|a_n|)_n$ *monotono* pada proti 0, potem je vrsta $\sum_{i=1}^{n} a_n$ *konvergentna.* Če v tem primeru s_k označuje k-to delno vsoto vrste in s vsoto vrste, potem velja

$$|s - s_k| \ \leq \ |a_{k+1}|.$$

4.4 Absolutna konvergenca

Definicija 4.3. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je *absolutno konvergentna*, če je *konvergentna* vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ iz absolutnih vrednosti členov vrste. Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentna*, ni pa absolutno konvergenta, rečemo, da je *pogojno konvergentna*.

Trditev 4.7. Če je vrsta *absolutno konvergentna*, potem je tudi *konvergentna*.

Trditev 4.8 (Konvergentne vrste tvorijo vektorski prostor)**.** Naj bosta vrsti $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *(absolutno) konvergentni* in naj bo $c \in \mathbb{R}$. Potem so *(absolutno) konvergentne* tudi vrste $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ in $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ ter velja

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{in} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Trditev 4.9. Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutno konvergentna* in $(b_n)_n$ *omejeno* zaporedje števil. Potem je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ tudi *absolutno konvergentna.*[4]

Izrek 4.1 (Zamenjava vrstnega reda členov)**.**

(1) Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutno konvergentna* vrsta. Potem je za poljubno *bijektivno* funkcijo $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *absolutno konvergentna* in ima isto vsoto kot začetna vrsta.

[4] Analogna trditev za *konvergentne* vrste ne velja.

(2) Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *pogojno konvergentna*. Potem $\forall s \in [-\infty, \infty]$ obstaja *bijektivna* funkcija $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, za katero je $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = s$.

5 FUNKCIJSKA ZAPOREDJA IN FUNKCIJSKE VRSTE

5.1 Konvergenca funkcijskih zaporedij

Definicija 5.1 (Funkcijsko zaporedje)**.** Naj bo $A \subset \mathbb{R}$ in naj bo $\forall n \in \mathbb{N}$ dana funkcija $f_n : A \to \mathbb{R}$. Tedaj funkcije f_n sestavljajo *funkcijsko zaporedje* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Če $\forall a \in A$ obstaja limita številskega zaporedja $(f_n(a))_n$, rečemo, da funkcijsko zaporedje *konvergira po točkah* na A. V tem primeru za $a \in A$ označimo

$$f(a) \;:=\; \lim_{n\to\infty} f_n(a).$$

Tako dobljeno funkcijo $f : A \to \mathbb{R}$ imenujemo *limitna funkcija* zaporedja $(f_n)_n$; pišemo

$$f \;=\; \lim_{n\to\infty} f_n$$

in rečemo, da zaporedje $(f_n)_n$ *konvergira k f po točkah.*

Opomba. *Funkcijsko zaporedje $(f_n : A \to \mathbb{R})_n$ v splošnem konvergira le v točkah iz neke podmnožice B definicijskega območja A; množico B imenujemo konvergenčno območje funkcijskega zaporedja.*

Definicija 5.2 (Enakomerna konvergenca funkcijskega zaporedja)**.** Naj funkcijsko zaporedje $(f_n : A \to \mathbb{R})_n$ konvergira po točkah proti limitni funkciji $f : A \to \mathbb{R}$, torej $\forall x \in A$ in $\forall \varepsilon > 0$ obstaja tak $n_{x,\varepsilon}$, da $\forall n \geq n_{x,\varepsilon}$ velja

$$|f_n(x) - f(x)| \;<\; \varepsilon.$$

Pravimo, da zaporedje $(f_n)_n$ *konvergira proti f enakomerno na A*, če $\forall\varepsilon > 0$ obstaja tak n_ε, da $\forall n \geq n_\varepsilon$ in $\forall x \in A$ velja

$$|f_n(x) - f(x)| \;<\; \varepsilon.$$

Izrek 5.1 (Zveznost limitne funkcije)**.** *Naj bo $(f_n : A \to \mathbb{R})_n$ zaporedje* *zveznih funkcij, ki konvergira proti $f : A \to \mathbb{R}$ enakomerno na A. Potem je f zvezna.*

Definicija 5.3 (Funkcijska vrsta)**.** Naj bo dano zaporedje funkcij $(f_n : A \to \mathbb{R})_n$. Vsoto $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ imenujemo *funkcijska vrsta.*

Funkcijska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konvergira po točkah na A*, če zaporedje delnih vsot $s_k = \sum_{n=1}^{k} f_n$ konvergira po točah na A; to pomeni, da $\forall a \in A$ konvergira številska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$.

Naj bo $s : A \to \mathbb{R}$ limitna funkcija zaporedja delnih vsot $(s_k)_k$. Funkcijska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konvergira k $s : A \to \mathbb{R}$ enakomerno na A*, če zaporedje delnih vsot $(s_k)_k$ konvergira k s enakomerno na A.

Posledica. *Če so funkcije $(f_n : A \to \mathbb{R})_n$ zvezne in funkcijska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergira k $s : A \to \mathbb{R}$ enakomerno na A, potem je s zvezna na A.*

5.2 Enakomerno konvergentne vrste

Trditev 5.1 (Weierstrassov kriterij)**.** Naj bo $(f_n : A \to \mathbb{R})_n$ zaporedje funkcij in naj obstaja tako zaporedje *pozitivnih* števil $(c_n)_n$, da $\forall n \in \mathbb{N}$ velja

$$|f_n(x)| \ \leq \ c_n \quad \forall x \in A.$$

Če je številska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *konvergentna*, potem funkcija vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konvergira enakomerno* in *absolutno* na A. Če so funkcije f_n *zvezne*, je tudi vsota vrste *zvezna* funkcija.

Izrek 5.2 (Integriranje po členih)**.** Naj bo $J \subset \mathbb{R}$ *omejen* interval, $a \in J$, in naj bo $(f_n : J \to \mathbb{R})_n$ zaporedje *zveznih* funkcij na J. Če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konvergira enakomerno* na J, potem tudi $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t)\,dt$ *konvergira enakomerno* za $x \in J$ in $\forall x \in J$ velja

$$\int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \right) dt \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t)\,dt.$$

Izrek 5.3 (Odvajanje po členih)**.** Naj bo $J \subset \mathbb{R}$ interval in naj bo $(f_n : J \to \mathbb{R})_n$ zaporedje *zvezno odvedljivih* funkcij na J. Če vrsta $\displaystyle\sum_{n=1}^{n} f_n$ *konvergira po točkah* na J in vrsta iz odvodov $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ *konvergira enakomerno* na J, potem je $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *odvedljiva* na J in $\forall x \in J$ velja

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

5.3 Potenčne vrste

Definicija 5.4 (Potenčna vrsta)**.** Naj bo $(a_n)_{n \geq 0}$ *realno zaporedje* in $c \in \mathbb{R}$. Funkcijsko zaporedje

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

imenujemo *potenčna vrsta s središčem v c.*

Opomba.

1. *Potenčna vrsta vedno konvergira v središču c.*
2. *Središče c lahko vedno prestavimo v* 0 *z uvedbo nove spremenljivke* $t = x - c$*:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Trditev 5.2. Naj bo dana potenčna vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ in naj bo $b > 0$.

(1) Če vrsta *absolutno konvergira* pri $x = b$ ali $x = -b$, potem *konvergira absolutno* in *enakomerno* za $x \in [-b, b]$.

(2) Če vrsta *konvergira* pri $x = b$ ali $x = -b$, potem *absolutno konvergira* $\forall x \in (-b, b)$.

(3) Če vrsta *divergira* pri $x = b$ ali $x = -b$, potem *divergira* $\forall x \in (-\infty, -b) \cup (b, \infty)$.

Definicija 5.5 (Konvergenčni polmer)**.** Naj bo dana potenčna vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
Število

$$R \ := \ \sup\{b \geq 0 \mid \text{vrsta konvergira pri } b\} \ \in \ [0, \infty)$$

imenujemo *konvergenčni polmer* potenčne vrste. Konvergenčno območje potenčne vrste označimo z D.

Posledica. *Naj bo $R > 0$ konvergenčni polmer potenčne vrste $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Potem vrsta absolutno konvergira za $|x| < R$. Vrsta enakomerno konvergira na vsakem manjšem intervalu $|x| \leq r < R$. Vsota potenčne vrste je zvezna funkcija na $(-R, R)$. Vrsta divergira $\forall x$, $|x| > R$; v krajiščih intervala lahko potenčna vrsta konvergira ali divergira. Torej je*

$$(-R, R) \ \subseteq \ D \ \subseteq \ [-R, R].$$

Trditev 5.3 (Konvergenčni polmer)**.** Naj bo dana *potenčna vrsta* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
Za konvergenčni polmer velja:

(1) $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, če ta limita obstaja;

(2) $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, če ta limita obstaja.

Definicija 5.6 (Limes superior)**.** Naj bo $(b_n)_n$ *zaporedje realnih števil.* Največje stekališče zaporedja $(b_n)_n$ označimo

$$\lim_{n\to\infty} \sup b_n \ \in \ [-\infty, \infty]$$

in ga imenujemo *limes superior.*

Izrek 5.4 (Cauchy-Hadamard)**.** Za konvergenčni polmer R potenčne vrste $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ velja

$$\frac{1}{R} \ = \ \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Izrek 5.5 (Abel)**.** Naj bo R konvergenčni polmer potenčne vrste $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Če vrsta *konvergira* za $x = R$ $(x = -R)$, potem je vsota vrste *zvezna* v R $(-R)$.

Izrek 5.6 (Odvajanje in integriranje potenčnih vrst)**.** Naj bo $R > 0$ konvergenčni polmer potenčne vrste $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Potem imata vrsti, ki ju dobimo s členim odvajanjem $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ in členim integriranjem $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ tudi konvergenči polmer R in $\forall x \in (-R, R)$ velja:

$$f'(x) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{in} \quad \int_0^x f(t)\,dt \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Posledica. *Vsota potenčne vrste je poljubno mnogokrat zvezno odvedljiva na $(-R, R)$, kjer je R konvergenčni polmer vrste.*

5.4 Taylorjeva vrsta in analitične funkcije

Definicija 5.7 (Taylorjeva vrsta)**.** Naj bo f *poljubno mnogokrat zvezno odvedljiva* v okolici točke $c \in \mathbb{R}$. *Taylorjeva vrsta funkcije* f *s središčem v* c je

$$T_c(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Naj bo $J \subset \mathbb{R}$ *odprt interval* in $f \in \mathcal{C}^{\infty}(J)$. Rečemo, da je f *analitična* na J, če je $\forall c \in J$ Taylorjeva vrsta T_c enaka funkciji f na neki okolici točke c.

5.5 Fourierove vrste

Definicija 5.8 (Fourierova vrsta)**.** *Fourierova vrsta* je funkcijska vrsta oblike

$$a_0 \;+\; \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

kjer sta $(a_n)_{n\geq 0}$ in $(b_n)_{n\geq 1}$ *realni* zaporedji.

Definicija 5.9 (Skalarni produkt)**.** Naj bosta $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ odsekoma zvezni funkciji. Izraz

$$\langle f, g\rangle \;:=\; \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

imenujemo *skalarni produkt* funkcij f in g. Če je $\langle f, g\rangle = 0$, rečemo, da sta f in g *ortogonalni*. Izraz $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$ imenujemo *norma* funkcije f.

Dogovor. *Za odsekoma zvezno funkcijo f v točkah nezveznosti vrednost funkcije v točki določimo kot*

$$f(x) \;=\; \frac{1}{2}\left(\lim_{t\nearrow x} f(t) + \lim_{t\searrow x} f(t)\right).$$

Definicija 5.10. Funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je *odsekoma zvezno odvedljiva*, če je *odsekoma zvezna* na $[a, b]$ in zvezno odvedljiva na $[a, b]$ razen morda v končno mnogo točkah, v katerih obstajata leva in desna limita odvoda.

Opomba. *Odsekoma zvezno odvedljiva funkcija ni odvedljiva v skokih in v točkah, kjer se graf f zlomi, torej ima različni levo in desno tangento v tej točki. V takšni točki namreč res obstajata levi in desni odvod, saj na primer*

$$f'(x^-) = \lim_{t \nearrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t \nearrow x} f'(t),$$

torej levi odvod obstaja, saj pbstaja leva limita odvodov; analogno velja za desni odvod.

Če torej v skoku spremenimo vrednost funkcije f tako, da je enaka levi (desni) limiti f v tej točki, potem obstaja levi (desni) odvod funckije f v tej točki.

Definicija 5.11. Ker lahko vsako *odsekoma zvezno odvedljivo* funkcijo na $[-\pi, \pi]$ razvijemo v Fourierovo vrsto, ki konvergira proti f (vsaj po točkah), rečemo, da funkcije

$$\{1, \cos(nx), \sin(nx) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

sestavljajo *poln sistem funkcij* na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Posledica (Fourierova sinusna in kosinusna vrsta)**.** *Naj bo $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ odsekoma zvezno odvedljiva. Potem lahko f na intervalu $[0, \pi]$ ravzijemo v sinusno Fourierovo vrsto*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx), \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

in v kosinusno Fourierovo vrsto

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx), \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, dx,$$
$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx.$$

Posledica (Kompleksna Fourierova vrsta)**.** *Naj bo $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ odsekoma zvezno odvedljiva. Potem lahko f razvijemo v kompleksno Fourierovo vrsto*

$$f(x) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{inx},$$

kjer je $i = \sqrt{-1}$ imaginarna enota, koeficienti A_n za $n \in \mathbb{Z}$ pa so dani z

$$A_n \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx.$$

Posledica (Razvoj v Fourierovo vrsto na drugih intervalih)**.** *Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ odsekoma zvezno odvedljiva. Potem f lahko razvijemo v Fourierovo vrsto po funkcijah*

$$\{1,\ \cos\left(\frac{2n\pi}{b-a}x\right),\ \sin\left(\frac{2n\pi}{b-a}x\right) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Tako dobimo

$$f(x) \;=\; a_0 \;+\; \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{b-a}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{b-a}x\right)\right),$$

kjer je

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx,\\
a_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{b-a}x\right)\, dx,\\
b_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{b-a}x\right)\, dx.
\end{aligned}$$

6 NAVADNE DIFERENCIALNE ENAČBE

6.1 Diferencialna enačba prvega reda

Definicija 6.1. Radi bi poiskali *enkrat odvedljivo* funkcijo, ki zadošča enačbi

$$y' = f(x, y).$$

Vsako tako funkcijo imenujemo *rešitev* dane diferencialne enačbe, njen graf $y = y(x)$ pa *rešitvena krivulja.*

Pravimo, da je z enačbo podano *polje smeri*, v vsaki točki je predpisana smer, v kateri mora potekati rešitvena krivulja. To polje smeri grafično predstavimo kot družino krivulj – *izoklin* – vzdolž katerih je smer *konstantna.*

Definicija 6.2 (Ortogonalne trajektorije)**.** *Ortogonalne trajektorije* dane družine krivulj so take krivulje, ki v vsaki svoji točki sekajo tisto od krivulj dane družine, ki poteka skozi točko, pod pravim kotom.

Tej ortogonalni družini pripada diferencialna enačba, ki je v preprosti zvezi z diferencialno enačbo prvotne družine krivulj. V enačbi prvotne družine le zamenjamo y' z $\frac{1}{y'}$ (kar določa pravokotno smer).

6.2 Linearna diferencialna enačba prvega reda

6.3 Diferencialna enačba drugega reda