Analiza 2 - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar

2020/21

Kazalo

1 NEDOLOČENI INTEGRAL IN POJEM DIFERENCIALNE ENAČBE

1.1 Primitivna funkcija in nedoločeni integral

Definicija 1.1 (Primitivna funkcija)**.** Naj bo f funkcija *ene spremenljivke.* Če $\exists$ *odvedljiva funkcija* $F : A \to \mathbb{R}$, za katero velja $F' = f$, imenujemo F *primitivna funkcija* funkcije f na A.

Definicija 1.2 (Nedoločeni integral)**.** *Nedoločeni integral* funkcije f je skupek vseh njenih primitivnih funkcij. Označimo ga z $\int f(x)dx$, funkcijo f pa imenujemo *integrand.*

Posledica. Naj bo F neka *primitivna* funkcija za f na intervalu J. Potem je za $x \in J$

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

kjer je $C \in \mathbb{R}$ poljubna konstanta, ki jo imenujemo *splošna* ali *integracijska konstanta.*

1.2 Uvedba nove spremenljivke v nedoločeni integral

1.3 Integracija po delih v nedoločenem integralu

1.4 Diferencialne enačbe 1.reda

Definicija 1.3. *Navadna diferencialna enačba* 1.reda je enačba za neznano funkcijo

$$y = g(x),$$

ki vsebuje tudi odvod y' funkcije y.

Splošna oblika diferencialne enačbe 1.reda je

$$F(x, y, y') = 0,$$

kjer je F funkcija treh spremenljivk, ki je res odvisna od zadnje spremenljivke.

Splošna rešitev diferencialne enačbe 1.reda je funkcija

$$y = g(x, C)$$

(lahko podana implicitno),ki je odvisna od *splošne konstante* C in reši dano diferencialno enačbo za poljubno izbiro vrednosti konstante $C \in \mathbb{R}$, poleg tega pa za poljuben začetni pogoj $\exists$ vrednost konstante C, pri kateri rešitev zadošča izbranemu začetnemu pogoju.

Rešitev, ki ne vsebuje splošnih konstant, imenujemo tudi *posebna* ali *partikularna rešitev.*

Definicija 1.4 (LDE 1.reda)**.** *Linearna diferencialna enačba* 1.reda ima obliko

$$r_1(x)y' + r_0(x)y = s(x),$$

kjer so $r_0, r_1, s : J \to \mathbb{R}$ funkcije, definirane na nekem intervalu J. Če je s ničelna funkcija, rečemo, da je enačba *homogena.* Če sta funkciji r_0, r_1 *konstantni*, pa rečemo, da ima enačba *konstante koeficiente.*

Standardna oblika linearne diferencialne enačbe 1.reda je

$$y' + p(x)y = q(x),$$

kjer sta $p, q : J \to \mathbb{R}$ funkciji, definirani na intervalu J.

2 DOLOČENI INTEGRAL

2.1 Motivacija za določeni integral

Definicija 2.1. Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *nenegativna funkcija*, torej $f(x) \geq 0$ za vse $x \in [a, b]$. Rečemo, da graf funkicje f *določa območje* $A \subset \mathbb{R}^2$ nad intervalom $[a, b]$. Množica A je navzgor omejena z grafom funkcije f, na levi s premico $x = a$ in na desni s premico $x = b$.

2.2 Riemannova vsota in Riemannov integral

Definicija 2.2 (Riemannova vsota)**.** *Delitev* D intervala $[a, b]$ na podintervale je dana z izbiro *delilnih točk* x_i:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

kjer je $n \in \mathbb{N}$. Dolžino i-tega podintervala $[x_{i-1}, x_i]$ (za $i = 1, 2, ..., n$) označimo z $\delta_i := x_i - x_{i-1}$. *Velikost delitve* D je dolžina najdaljšega podintervala delitve D, torej

$$\delta(D) = \max \{\delta_i \mid i = 1, 2, ..., n\}.$$

Na vsakem od podintervalov, na katere delitev D razdeli interval $[a, b]$, izberemo *testno točko* $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ in s $T_D = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ označimo nabor teh točk; nabor testnih točk je *usklajen* z delitvijo D, ker smo na vsakem podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$, določenem z D, izbrali natanko eno testno točko t_i.

Riemannova vsota funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, pridružena delitvi D in usklajenemu naboru testnih točk T_D je

$$R(f, D, T_D) := \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\delta_i.$$

Definicija 2.3 (Riemannov integral)**.** *Riemannov integral* ali *določeni integral* funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je limita Riemannovih vsot $R(f, D, T_D)$, kjer limito vzamemo po $\forall$ delitvah D intervala [a, b] in usklajenih naborih testnih točk T_D, ko pošljemo velikost delitev $\delta(D)$ proti 0, če ta limita $\exists$ (torej je končna in neodvisna od izbire delitev in testnih točk). Pišemo

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\delta(D)\to 0} R(f, D, T_D).$$

Če zgornja limita $\exists$, rečemo, da je funkcija f *integrabilna* na $[a, b]$.

Definicija 2.4.

$$\lim_{\delta(D)\to 0} R(f, D, T_D) = I,$$

če za $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$, da za poljubno delitev D z $\delta(D) < \delta$ in poljuben usklajen nabor testnih točk T_D velja

$$|R(f, D, T_D) - I| < \epsilon.$$

2.3 Integrabilne funkcije

Definicija 2.5 (Zožitev)**.** Naj bo $f : A \to \mathbb{R}$ funkcija in $B \subset A$. Tedaj $f|_B : B \to \mathbb{R}$ označuje funkcijo z definicijskim območjem B, ki $\forall x \in B$ preslika v $f(x)$. Funkcijo $f|_B$ imenujemo *zožitev* funkcije f na B.

Definicija 2.6 (Enakomerna zveznost)**.** Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ je *enakomerno zvezna* na A, če za $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta = \delta_\epsilon > 0$, da za poljubna $x, y \in A$, ki zadoščata $|x - y| < \delta$, velja

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Definicija 2.7 (Odsekoma zvezna funkcija)**.** Funkcija $f : J \to \mathbb{R}$, definirana na omejenem intervalu J, je *odsekoma zvezna*, če je zvezna v $\forall$ točkah intervala razen morda v končno mnogo točkah, kjer ima skoke.

Funkcija f ima *skos* v točki $c \in J$, če f ni zvezna v c, ima pa (končno) levo in desno limito c (če je c krajišče intervala, zahtevamo le obstoj limite na tisti strani c, ki leži v J).

Posledica. Če je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *odsekoma zvezna*, potem je *integrabilna*. Vrednosti funkcije f v skokih ne vplivajo niti na integrabilnost niti na integral funkcije f na $[a,b]$.

Dogovor.

- Integral po izrojenemu intervalu $[a,a]$ je nič:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

- Če je $a < b$, je

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Definicija 2.8 (Povprečna vrednost)**.** *Povprečna vrednost* integrabilne funkcije f na intervalu $[a,b]$ je

$$\mu := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

2.4 Osnovni izrek analize

Definicija 2.9. Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrabilna* funkcija. Funkcijo $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, definirano s predpisom

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

imenujemo *integral kot funkcija zgornje meje.*

2.5 Pravila za integriranje in Leibnizova formula

2.6 Posplošeni integral na omejenem intervalu

Definicija 2.10 (Posplošeni integral)**.** Naj bo $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ funkcija, ki je integrabilna na intervalu $[t, b]$ za $\forall t \in (a, b)$. Potem je *posplošeni integral* funkcije f na intervalu $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{t \searrow a} \int_t^b f(x)dx,$$

če ta limita $\exists$.

Če limita $\exists$, rečemo, da je f *posplošeno integrabilna* na $[a, b]$ in da je $\int_a^b f(x)dx$ *konvergenten*, sicer pa rečemo, da je integral *divergenten.*

2.7 Posplošeni integral na neomejenem intervalu

Definicija 2.11 (Posplošena integrabilnost)**.**

- Naj bo $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ integrabilna na $[a, s]$ za $\forall s > a$. Potem je *posplošeni integral* funkcije f na $[a, \infty)$

  $$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{s \to \infty} \int_a^s f(x)dx,$$

  če ta limita $\exists$. Če limita $\exists$, rečemo, da je posplošeni integral *konvergenten*, sicer pa, da je *divergenten.*

- Naj bo $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ integrabilna na $[t, b]$ za $\forall t < b$. Potem je *posplošeni integral* funkcije f na $(-\infty, b]$

  $$\int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)dx,$$

  če ta limita $\exists$. Če limita $\exists$, rečemo, da je posplošeni integral *konvergenten*, sicer pa, da je *divergenten.*

- Funkcija $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ je *posplošeno integrabilna*, če sta posplošeno integrabilni zožitvi $f|_{(-\infty,a]}$ in $f|_{[a,\infty)}$ za $\forall a \in \mathbb{R}$.