

Analiza 2 - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar

2020/21

Kazalo

1	NEDOLOČENI INTEGRAL IN POJEM DIFERENCIALNE ENAČBE	3
1.1	Primitivna funkcija in nedoločeni integral	3
1.2	Uvedba nove spremenljivke v nedoločeni integral	3
1.3	Integracija po delih v nedoločenem integralu	3
1.4	Diferencialne enačbe 1.reda	3
2	DOLOČENI INTEGRAL	5
2.1	Motivacija za določeni integral	5
2.2	Riemannova vsota in Riemannov integral	5
2.3	Integrabilne funkcije	6
2.4	Osnovni izrek analize	7
2.5	Pravila za integriranje in Leibnizova formula	8
2.6	Posplošeni integral na omejenem intervalu	8
2.7	Posplošeni integral na neomejenem intervalu	8
3	KRIVULJE V RAVNINI	9
3.1	Podajanje krivulj	9
3.2	Enačba tangente na krivuljo	9
3.3	Dolžina loka krivulje	10

1 NEDOLOČENI INTEGRAL IN POJEM DIFERENCIALNE ENAČBE

1.1 Primitivna funkcija in nedoločeni integral

Definicija 1.1 (Primitivna funkcija). Naj bo f funkcija ene spremenljivke. Če \exists odvedljiva funkcija $F : A \rightarrow \mathbb{R}$, za katero velja $F' = f$, imenujemo F primitivna funkcija funkcije f na A .

Definicija 1.2 (Nedoločeni integral). Nedoločeni integral funkcije f je skupsek vseh njenih primitivnih funkcij. Označimo ga z $\int f(x)dx$, funkcijo f pa imenujemo *integrand*.

Posledica. Naj bo F neka primitivna funkcija za f na intervalu J . Potem je za $x \in J$

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

kjer je $C \in \mathbb{R}$ poljubna konstanta, ki jo imenujemo *splošna* ali *integracijska konstanta*.

1.2 Uvedba nove spremenljivke v nedoločeni integral

1.3 Integracija po delih v nedoločenem integralu

1.4 Diferencialne enačbe 1.reda

Definicija 1.3. Navadna diferencialna enačba 1.reda je enačba za neznano funkcijo

$$y = g(x),$$

ki vsebuje tudi odvod y' funkcije y .

Splošna oblika diferencialne enačbe 1.reda je

$$F(x, y, y') = 0,$$

kjer je F funkcija treh spremenljivk, ki je res odvisna od zadnje spremenljivke.

Splošna rešitev diferencialne enačbe 1.reda je funkcija

$$y = g(x, C)$$

(lahko podana implicitno), ki je odvisna od *splošne konstante* C in reši dano diferencialno enačbo za poljubno izbiro vrednosti konstante $C \in \mathbb{R}$, poleg tega pa za poljuben začetni pogoj \exists vrednost konstante C , pri kateri rešitev zadošča izbranemu začetnemu pogoju.

Rešitev, ki ne vsebuje splošnih konstant, imenujemo tudi *posebna* ali *partikularna rešitev*.

Definicija 1.4 (LDE 1.reda). *Linearna diferencialna enačba* 1.reda ima obliko

$$r_1(x)y' + r_0(x)y = s(x),$$

kjer so $r_0, r_1, s : J \rightarrow \mathbb{R}$ funkcije, definirane na nekem intervalu J . Če je s ničelna funkcija, rečemo, da je enačba *homogena*. Če sta funkciji r_0, r_1 *konstantni*, pa rečemo, da ima enačba *konstante koeficiente*.

Standardna oblika linearne diferencialne enačbe 1.reda je

$$y' + p(x)y = q(x),$$

kjer sta $p, q : J \rightarrow \mathbb{R}$ funkciji, definirani na intervalu J .

2 DOLOČENI INTEGRAL

2.1 Motivacija za določeni integral

Definicija 2.1. Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nenegativna funkcija, torej $f(x) \geq 0$ za vse $x \in [a, b]$. Rečemo, da graf funkcije f določa območje $A \subset \mathbb{R}^2$ nad intervalom $[a, b]$. Množica A je navzgor omejena z grafom funkcije f , na levi s premico $x = a$ in na desni s premico $x = b$.

2.2 Riemannova vsota in Riemannov integral

Definicija 2.2 (Riemannova vsota). Delitev D intervala $[a, b]$ na podintervale je dana z izbiro delilnih točk x_i :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

kjer je $n \in \mathbb{N}$. Dolžino i -tega podintervala $[x_{i-1}, x_i]$ (za $i = 1, 2, \dots, n$) označimo z $\delta_i := x_i - x_{i-1}$. Velikost delitve D je dolžina najdaljšega podintervala delitve D , torej

$$\delta(D) = \max \{ \delta_i \mid i = 1, 2, \dots, n \}.$$

Na vsakem od podintervalov, na katere delitev D razdeli interval $[a, b]$, izberemo testno točko $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ in s $T_D = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ označimo nabor teh točk; nabor testnih točk je usklajen z delitvijo D , ker smo na vsakem podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$, določenem z D , izbrali natanko eno testno točko t_i .

Riemannova vsota funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, pridružena delitvi D in usklajenemu naboru testnih točk T_D je

$$R(f, D, T_D) := \sum_{i=1}^n f(t_i) \delta_i.$$

Definicija 2.3 (Riemannov integral). Riemannov integral ali določeni integral funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je limita Riemannovih vsot $R(f, D, T_D)$, kjer limito vzamemo po \forall delitvah D intervala $[a, b]$ in usklajenih naborih testnih

točk T_D , ko pošljemo velikost delitev $\delta(D)$ proti 0, če ta limita \exists (torej je končna in neodvisna od izbire delitev in testnih točk). Pišemo

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\delta(D) \rightarrow 0} R(f, D, T_D).$$

Če zgornja limita \exists , rečemo, da je funkcija f *integrabilna* na $[a, b]$.

Definicija 2.4.

$$\lim_{\delta(D) \rightarrow 0} R(f, D, T_D) = I,$$

če za $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$, da za poljubno delitev D z $\delta(D) < \delta$ in poljuben usklajen nabor testnih točk T_D velja

$$|R(f, D, T_D) - I| < \epsilon.$$

2.3 Integrabilne funkcije

Definicija 2.5 (Zožitev). Naj bo $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija in $B \subset A$. Tedaj $f|_B : B \rightarrow \mathbb{R}$ označuje funkcijo z definicijskim območjem B , ki $\forall x \in B$ preslika v $f(x)$. Funkcijo $f|_B$ imenujemo *zožitev* funkcije f na B .

Definicija 2.6 (Enakomerna zveznost). Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Funkcija $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je *enakomerno zvezna* na A , če za $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta_\epsilon > 0$, da za poljubna $x, y \in A$, ki zadoščata $|x - y| < \delta$, velja

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Definicija 2.7 (Odsekoma zvezna funkcija). Funkcija $f : J \rightarrow \mathbb{R}$, definirana na omejenem intervalu J , je *odsekoma zvezna*, če je zvezna v \forall točkah intervala razen morda v končno mnogo točkah, kjer ima skoke.

Funkcija f ima *skos* v točki $c \in J$, če f ni zvezna v c , ima pa (končno) levo in desno limito c (če je c krajišče intervala, zahtevamo le obstoj limite na tisti strani c , ki leži v J).

Posledica. Če je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ odsekoma zvezna, potem je *integrabilna*. Vrednosti funkcije f v skokih ne vplivajo niti na integrabilnost niti na integral funkcije f na $[a, b]$.

Dogovor. • Integral po izrojenemu intervalu $[a, a]$ je nič:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

• Če je $a < b$, je

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx.$$

Definicija 2.8 (Povprečna vrednost). *Povprečna vrednost* integrabilne funkcije f na intervalu $[a, b]$ je

$$\mu := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

2.4 Osnovni izrek analize

Definicija 2.9. Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ *integrabilna* funkcija. Funkcijo $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definirano s predpisom

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

imenujemo *integral kot funkcija zgornje meje*.

2.5 Pravila za integriranje in Leibnizova formula

2.6 Posplošeni integral na omejenem intervalu

Definicija 2.10 (Posplošeni integral). Naj bo $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija, ki je integrabilna na intervalu $[t, b]$ za $\forall t \in (a, b)$. Potem je *posplošeni integral* funkcije f na intervalu $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{t \searrow a} \int_t^b f(x)dx,$$

če ta limita \exists .

Če limita \exists , rečemo, da je f *posplošeno integrabilna* na $[a, b]$ in da je $\int_a^b f(x)dx$ *konvergenten*, sicer pa rečemo, da je integral *divergenten*.

2.7 Posplošeni integral na neomejenem intervalu

Definicija 2.11 (Posplošena integrabilnost). • Naj bo $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilna na $[a, s]$ za $\forall s > a$. Potem je *posplošeni integral* funkcije f na $[a, \infty)$

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{s \rightarrow \infty} \int_a^s f(x)dx,$$

če ta limita \exists . Če limita \exists , rečemo, da je posplošeni integral *konvergenten*, sicer pa, da je *divergenten*.

- Naj bo $f : (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilna na $[t, b]$ za $\forall t < b$. Potem je *posplošeni integral* funkcije f na $(-\infty, b]$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx,$$

če ta limita \exists . Če limita \exists , rečemo, da je posplošeni integral *konvergenten*, sicer pa, da je *divergenten*.

- Funkcija $f : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je *posplošeno integrabilna*, če sta posplošeno integrabilni zožitvi $f|_{(-\infty, a]}$ in $f|_{[a, \infty)}$ za $\forall a \in \mathbb{R}$.

3 KRIVULJE V RAVNINI

3.1 Podajanje krivulj

- EKSPPLICITNO: Funkcija $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ za $J \subseteq \mathbb{R}$ določa krivuljo Γ_f , ki je graf te funkcije, torej

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in J\}.$$

- IMPLICITNO: Funkcija $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ za $A \subseteq \mathbb{R}^2$ določa krivuljo K_g , ki je množica rešitev enačbe $g(x, y) = 0$, torej

$$K_g = \{(x, y) \in A \mid g(x, y) = 0\}.$$

- PARAMETRIČNO: Funkciji $\alpha, \beta : J \rightarrow \mathbb{R}$ za $J \subseteq \mathbb{R}$ določata krivuljo K_F , ki je množica vseh točk (x, y) , določenih z $x = \alpha(t)$ in $y = \beta(t)$, torej

$$K_F = \{(\alpha(t), \beta(t)) \mid t \in J\}.$$

Preslikavo $F : J \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(t) := (\alpha(t), \beta(t))$ imenujemo *pot* ali *parametrizacija* krivulje K_F . Krivuljo K_F imenujemo tudi *tir* poti F .

- POLARNO: Funkcija $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ za $J \subseteq \mathbb{R}$ določa krivuljo K_h , ki je množica točk v ravnini s polarnima koordinatama (r, θ) , kjer je $r = h(\theta)$, torej

$$K_h = \{(h(\theta) \cos \theta, h(\theta) \sin \theta) \mid \theta \in J\}.$$

3.2 Enačba tangente na krivuljo

Definicija 3.1 (Regularna točka). Naj bo $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva v točki $(a, b) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$. Če je

$$\nabla g(a, b) \neq (0, 0),$$

rečemo, da je (a, b) *regularna točka* za g , sicer pa, da je (a, b) *singularna točka* za g .

Definicija 3.2. Naj bosta $\alpha, \beta : J \rightarrow \mathbb{R}$ *odvedljivi*, kjer je $J \subseteq \mathbb{R}$ interval, ter $F = (\alpha, \beta)$ pripadajoča *odvedljiva* pot. *Odvod poti* F po t je hitrostni vektor $\dot{F}(t) = (\dot{\alpha}(t), \dot{\beta}(t))$.

Če je

$$\dot{F}(t) \neq (0, 0)$$

za neki $t \in J$, imenujemo t *regularna točka* parametrizacije F . Če so \forall točke intervala J regularne, imenujemo F *regularna parametrizacija*.

Naj bo $g : I \rightarrow J$ *odvedljiva surjektivna* funkcija, kjer je $I \subset \mathbb{R}$ interval. Pot

$$G := F \circ g$$

imenujemo *reparametrizacija* poti F .

3.3 Dolžina loka krivulje

Definicija 3.3. Naj bo dana pot $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(t) = (\alpha(t), \beta(t))$, ki določa krivuljo K . Izberimo delitev

$$D = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$$

intervala $[a, b]$. Pot $F(t)$ na i -tem podintervalu $[t_{i-1}, t_i]$ zamenjamo z daljico od $F(t_{i-1})$ do $F(t_i)$.

Dolžina tako nastale lomljene črte, ki aproksimira tir poti F , je

$$\ell(D) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}))^2 + (\beta(t_i) - \beta(t_{i-1}))^2}.$$

Če \exists limita dolžin $\ell(D)$, ko pošljemo velikost delitve $\delta(D)$ proti nič (neodvisno od izbire delitev), jo imenujemo *dolžina poti* F in označimo $\ell(F)$:

$$\ell(F) = \lim_{D, \delta(D) \rightarrow 0} \ell(D).$$