Analiza 2 - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar

2020/21

Kazalo

1 NEDOLOČENI INTEGRAL IN POJEM DIFERENCIALNE ENAČBE

1.1 Primitivna funkcija in nedoločeni integral

Definicija 1.1 (Primitivna funkcija)**.** Naj bo f funkcija *ene spremenljivke.* Če $\exists$ *odvedljiva funkcija* $F : A \to \mathbb{R}$, za katero velja $F' = f$, imenujemo F *primitivna funkcija* funkcije f na A.

Definicija 1.2 (Nedoločeni integral)**.** *Nedoločeni integral* funkcije f je skupek vseh njenih primitivnih funkcij. Označimo ga z $\int f(x)dx$, funkcijo f pa imenujemo *integrand.*

Posledica. *Naj bo F neka primitivna funkcija za f na intervalu J. Potem je za $x \in J$*

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

kjer je $C \in \mathbb{R}$ poljubna konstanta, ki jo imenujemo splošna ali integracijska konstanta.

1.2 Uvedba nove spremenljivke v nedoločeni integral

1.3 Integracija po delih v nedoločenem integralu

1.4 Diferencialne enačbe 1.reda

Definicija 1.3. *Navadna diferencialna enačba* 1.reda je enačba za neznano funkcijo

$$y = g(x),$$

ki vsebuje tudi odvod y' funkcije y.

Splošna oblika diferencialne enačbe 1.reda je

$$F(x, y, y') = 0,$$

kjer je F funkcija treh spremenljivk, ki je res odvisna od zadnje spremenljivke.

Splošna rešitev diferencialne enačbe 1.reda je funkcija

$$y = g(x, C)$$

(lahko podana implicitno),ki je odvisna od *splošne konstante* C in reši dano diferencialno enačbo za poljubno izbiro vrednosti konstante $C \in \mathbb{R}$, poleg tega pa za poljuben začetni pogoj $\exists$ vrednost konstante C, pri kateri rešitev zadošča izbranemu začetnemu pogoju.

Rešitev, ki ne vsebuje splošnih konstant, imenujemo tudi *posebna* ali *partikularna rešitev.*

Definicija 1.4 (LDE 1.reda)**.** *Linearna diferencialna enačba* 1.reda ima obliko

$$r_1(x)y' + r_0(x)y = s(x),$$

kjer so $r_0, r_1, s : J \to \mathbb{R}$ funkcije, definirane na nekem intervalu J. Če je s ničelna funkcija, rečemo, da je enačba *homogena.* Če sta funkciji r_0, r_1 *konstantni*, pa rečemo, da ima enačba *konstante koeficiente.*

Standardna oblika linearne diferencialne enačbe 1.reda je

$$y' + p(x)y = q(x),$$

kjer sta $p, q : J \to \mathbb{R}$ funkciji, definirani na intervalu J.

2 DOLOČENI INTEGRAL

2.1 Motivacija za določeni integral

Definicija 2.1. Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *nenegativna funkcija*, torej $f(x) \geq 0$ za vse $x \in [a, b]$. Rečemo, da graf funkicje f *določa območje* $A \subset \mathbb{R}^2$ nad intervalom $[a, b]$. Množica A je navzgor omejena z grafom funkcije f, na levi s premico $x = a$ in na desni s premico $x = b$.

2.2 Riemannova vsota in Riemannov integral

Definicija 2.2 (Riemannova vsota)**.** *Delitev* D intervala $[a, b]$ na podintervale je dana z izbiro *delilnih točk* x_i:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

kjer je $n \in \mathbb{N}$. Dolžino i-tega podintervala $[x_{i-1}, x_i]$ (za $i = 1, 2, ..., n$) označimo z $\delta_i := x_i - x_{i-1}$. *Velikost delitve* D je dolžina najdaljšega podintervala delitve D, torej

$$\delta(D) = \max \{\delta_i \mid i = 1, 2, ..., n\}.$$

Na vsakem od podintervalov, na katere delitev D razdeli interval $[a, b]$, izberemo *testno točko* $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ in s $T_D = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ označimo nabor teh točk; nabor testnih točk je *usklajen* z delitvijo D, ker smo na vsakem podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$, določenem z D, izbrali natanko eno testno točko t_i.

Riemannova vsota funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, pridružena delitvi D in usklajenemu naboru testnih točk T_D je

$$R(f, D, T_D) := \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\delta_i.$$

Definicija 2.3 (Riemannov integral)**.** *Riemannov integral* ali *določeni integral* funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je limita Riemannovih vsot $R(f, D, T_D)$, kjer limito vzamemo po $\forall$ delitvah D intervala [a, b] in usklajenih naborih testnih točk T_D, ko pošljemo velikost delitev $\delta(D)$ proti 0, če ta limita $\exists$ (torej je končna in neodvisna od izbire delitev in testnih točk). Pišemo

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\delta(D)\to 0} R(f, D, T_D).$$

Če zgornja limita $\exists$, rečemo, da je funkcija f *integrabilna* na $[a, b]$.

Definicija 2.4.

$$\lim_{\delta(D)\to 0} R(f, D, T_D) = I,$$

če za $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, da za poljubno delitev D z $\delta(D) < \delta$ in poljuben usklajen nabor testnih točk T_D velja

$$|R(f, D, T_D) - I| < \epsilon.$$

2.3 Integrabilne funkcije

Definicija 2.5 (Zožitev)**.** Naj bo $f : A \to \mathbb{R}$ funkcija in $B \subset A$. Tedaj $f|_B : B \to \mathbb{R}$ označuje funkcijo z definicijskim območjem B, ki $\forall x \in B$ preslika v $f(x)$. Funkcijo $f|_B$ imenujemo *zožitev* funkcije f na B.

Definicija 2.6 (Enakomerna zveznost)**.** Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ je *enakomerno zvezna* na A, če za $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta = \delta_\epsilon > 0$, da za poljubna $x, y \in A$, ki zadoščata $|x - y| < \delta$, velja

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Definicija 2.7 (Odsekoma zvezna funkcija)**.** Funkcija $f : J \to \mathbb{R}$, definirana na omejenem intervalu J, je *odsekoma zvezna*, če je zvezna v $\forall$ točkah intervala razen morda v končno mnogo točkah, kjer ima skoke.

Funkcija f ima *skos* v točki $c \in J$, če f ni zvezna v c, ima pa (končno) levo in desno limito c (če je c krajišče intervala, zahtevamo le obstoj limite na tisti strani c, ki leži v J).

Posledica. *Če je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ odsekoma zvezna, potem je integrabilna. Vrednosti funkcije f v skokih ne vplivajo niti na integrabilnost niti na integral funkcije f na $[a,b]$.*

Dogovor.

- *Integral po izrojenemu intervalu $[a,a]$ je nič:*

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

- *Če je $a < b$, je*

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Definicija 2.8 (Povprečna vrednost)**.** *Povprečna vrednost* integrabilne funkcije f na intervalu $[a,b]$ je

$$\mu := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

2.4 Osnovni izrek analize

Definicija 2.9. Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrabilna* funkcija. Funkcijo $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, definirano s predpisom

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

imenujemo *integral kot funkcija zgornje meje.*

2.5 Pravila za integriranje in Leibnizova formula

2.6 Posplošeni integral na omejenem intervalu

Definicija 2.10 (Posplošeni integral)**.** Naj bo $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ funkcija, ki je integrabilna na intervalu $[t, b]$ za $\forall t \in (a, b)$. Potem je *posplošeni integral* funkcije f na intervalu $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{t \searrow a} \int_t^b f(x)dx,$$

če ta limita $\exists$.

Če limita $\exists$, rečemo, da je f *posplošeno integrabilna* na $[a, b]$ in da je $\int_a^b f(x)dx$ *konvergenten*, sicer pa rečemo, da je integral *divergenten.*

2.7 Posplošeni integral na neomejenem intervalu

Definicija 2.11 (Posplošena integrabilnost)**.**

- Naj bo $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ integrabilna na $[a, s]$ za $\forall s > a$. Potem je *posplošeni integral* funkcije f na $[a, \infty)$

  $$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{s \to \infty} \int_a^s f(x)dx,$$

  če ta limita $\exists$. Če limita $\exists$, rečemo, da je posplošeni integral *konvergenten*, sicer pa, da je *divergenten.*

- Naj bo $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ integrabilna na $[t, b]$ za $\forall t < b$. Potem je *posplošeni integral* funkcije f na $(-\infty, b]$

  $$\int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)dx,$$

  če ta limita $\exists$. Če limita $\exists$, rečemo, da je posplošeni integral *konvergenten*, sicer pa, da je *divergenten.*

- Funkcija $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ je *posplošeno integrabilna*, če sta posplošeno integrabilni zožitvi $f|_{(-\infty,a]}$ in $f|_{[a,\infty)}$ za $\forall a \in \mathbb{R}$.

3 KRIVULJE V RAVNINI

3.1 Podajanje krivulj

- EKSPLICITNO: Funkcija $f : j \to \mathbb{R}$ za $J \subseteq \mathbb{R}$ določa krivuljo Γ_f, ki je graf te funkcije, torej
$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in J\}.$$
- IMPLICITNO: Funkcija $g : A \to \mathbb{R}$ za $A \subseteq \mathbb{R}^2$ določa krivuljo K_g, ki je množica rešitev enačbe $g(x, y) = 0$, torej
$$K_g = \{(x, y) \in A \mid g(x, y) = 0\}.$$
- PARAMETRIČNO: Funkciji $\alpha, \beta : J \to \mathbb{R}$ za $J \subseteq \mathbb{R}$ določata krivuljo K_F, ki je množica vseh točk (x, y), določenih z $x = \alpha(t)$ in $y = \beta(t)$, torej
$$K_F = \{(\alpha(t), \beta(t)) \mid J\}.$$
Preslikavo $F : J \to \mathbb{R}^2$, $F(t) := (\alpha(t), \beta(t))$ imenujemo *pot* ali *parametrizacija* krivulje K_F. Krivuljo K_F imenujemo tudi *tir* poti F.
- POLARNO: Funkcija $h : J \to \mathbb{R}$ za $J \subseteq \mathbb{R}$ določa krivuljo K_h, ki je množica točk v ravnini s polarnima koordinatama (r, θ), kjer je $r = h(\theta)$, torej
$$K_h = \{(h(\theta) \cos \theta, h(\theta) \sin \theta) \mid \theta \in J\}.$$

3.2 Enačba tangente na krivuljo

Definicija 3.1 (Regularna točka)**.** Naj bo $g : A \to \mathbb{R}$ odvedljiva v točki $(a, b) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$. Če je
$$\nabla g(a, b) \neq (0, 0),$$
rečemo, da je (a, b) *regularna točka* za g, sicer pa, da je (a, b) *singularna točka* za g.

Definicija 3.2. Naj bosta $\alpha, \beta : J \to \mathbb{R}$ *odvedljivi*, kjer je $J \subseteq \mathbb{R}$ interval, ter $F = (\alpha, \beta)$ pripadajoča *odvedljiva* pot. *Odvod poti* F po t je hitrostni vektor $\dot{F}(t) = (\dot{\alpha}(t), \dot{\beta}(t))$.
Če je

$$\dot{F}(t) \neq (0, 0)$$

za neki $t \in J$, imenujemo t *regularna točka* parametrizacije F. Če so $\forall$ točke intervala J regularne, imenujemo F *regularna parametrizacija.*
Naj bo $g : I \to J$ *odvedljiva surjektivna* funkcija, kjer je $I \subset \mathbb{R}$ interval. Pot

$$G := F \circ g$$

imenujemo *reparametrizacija* poti F.

3.3 Dolžina loka krivulje

Definicija 3.3. Naj bo dana pot $F : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $F(t) = (\alpha(t), \beta(t))$, ki določa krivuljo K. Izberimo delitev

$$D = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$$

intervala $[a, b]$. Pot $F(t)$ na i-tem podintervalu $[t_{i-1}, t_i]$ zamenjamo z daljico od $F(t_{i-1})$ do $F(t_i)$.
Dolžina tako nastale lomljene črte, ki aproksimira tir poti F, je

$$\ell(D) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}))^2 + (\beta(t_i) - \beta(t_{i-1}))^2}.$$

Če $\exists$ limita dolžin $\ell(D)$, ko pošljemo velikost delitve $\delta(D)$ proti nič (neodvisno od izbire delitev), jo imenujemo *dolžina poti* F in označimo $\ell(F)$:

$$\ell(F) = \lim_{D, \delta(D) \to 0} \ell(D).$$

Definicija 3.4 (Ločna dolžina)**.** Diferencial dolžina loka krivulje označimo z ds in ga imenujemo *ločna dolžina.* V vseh opisih krivulje velja

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Uporaba 3.1 (Površina rotacijske ploskve)**.** *Naj bo* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *nenegativna zvezna funkcija. Ploskev, ki jo dobimo z vrtenjem grafa funkcije* f *nad intervalom* $[a, b]$ *okoli osi* x*, imenujemo rotacijska ploskev.*

Izberemo neko delitev

$$D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$$

intervala $[a, b]$*. Nad intervalom* $[x_{i-1}, x_i]$ *graf funkcije* f *aproksimiramo z daljico od točke* $(x_{i-1}, f(x_{i-1})$ *do točke* $(x_i, f(x_i))$*. Ko daljico zavrtimo okoli* x*-osi, dobimo plašč prisekanega stožca s polmeroma leve in desne mejne krožnice* $f(x_{i-1})$ *in* $f(x_i)$ *ter višino* $\delta_i = x_i - x_{i-1}$*. To da približek za površino ploskve:*

$$\sum_{i=1}^{n} \pi(f(x_{i-1}) + f(x_i))\sqrt{{\delta_i}^2 + (f(x_{i-1}) - f(x_i))^2}.$$

Če je f *zvezno odvedljiva, dobimo za površino v limiti, ko pošljemo velikost delitve* $\delta(D)$ *proti* 0*, formulo*

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}dx.$$

3.4 Ploščina območja, določenega s krivuljo

Definicija 3.5. Naj bo $F : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ regularna parametrizacija krivulje K. Potem F določa *usmerjenost* K, določeno s smerjo, v kateri potuje točka $F(t)$ po K, ko potuje t od a do b.

Gladka enostavna sklenjena krivulja je krivulja K, ki ima regularno parametrizacijo $F : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, za katero velja $F(a) = F(b)$ in $\dot{F}(a) = \dot{F}(b)$, $F|_{[a,b)}$ pa je *injektivna*.

Naj bo A območje, ki ga omejuje *gladka enostavna sklenjena krivulja* K. Regularna parametrizacija F krivulje K določa *pozitivno usmerjenost* krivulje K, če je A na levi strani, ko se pomikamo vzdolž K v smeri usmerjenosti, ki jo določa F.

3.5 Diferencialne enačbe v obliki diferenciala

Definicija 3.6. *Diferencialna enačba v obliki diferenciala* je enačba oblike

$$P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy = 0,$$

kjer sta $P, Q : A \to \mathbb{R}$ definirani na nekem območju $A \subset \mathbb{R}^2$.

Naj bosta $P, Q : A \to \mathbb{R}$ *odvedljivi.* Diferencialna enačba $P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy = 0$ je *eksaktna* na A, če velja

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

za $\forall x \in A$.

Definicija 3.7 (Integral s parametrom)**.** Naj bo $A = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ pravokotnik in naj bo $f : A \to \mathbb{R}$ *zvezna* funkcija. Funkcijo $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, definirano s predpisom

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)dy,$$

imenujemo *integral s parametrom.*

Definicija 3.8 (Integrirajoči množitelj)**.** Naj bo dana diferencialna enačba $P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy = 0$, kjer sta $P, Q : A \to \mathbb{R}$ *zvezno odvedljivi* funkciji. Če je $\mu : A \to \mathbb{R}$ takšna *zvezno odvedljiva* funkcija, da je enačba

$$\mu(x,y)P(x,y)\ dx + \mu(x,y)Q(x,y)\ dy = 0$$

eksaktna, potem funkcijo μ imenujemo *integrirajoči množitelj* dane enačbe.