

# Analiza 3 - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar

2020/21

## Kazalo

<b>1</b>	<b>PARAMETRIČNO PODANE KRIVULJE</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>PLOSKVE</b>	<b>4</b>
2.1	Ploskve v $\mathbb{R}^3$ . . . . .	4
<b>3</b>	<b>INTEGRALI S PARAMETROM</b>	<b>6</b>
3.1	Izlimitirani integrali s parametrom . . . . .	6
3.2	Dvojni in dvakratni integrali . . . . .	7

## 1 PARAMETRIČNO PODANE KRIVULJE

**Trditev 1.1.** Če je  $\vec{r}$  odvedljiva vektorska funkcija (njene komponente  $x$ ,  $y$  in  $z$  so odvedljive funkcije spremenljivke  $t$ ), potem je

$$\dot{\vec{r}}(t_0) = (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0))$$

tangentni vektor na krivuljo  $t \mapsto \vec{r}(t)$  v točki  $\vec{r}(t_0)$ , če velja  $\dot{\vec{r}}(t_0) \neq 0$ .

**Trditev 1.2.** Če je  $\vec{r}$  zvezno odvedljiva vektorska funkcija na intervalu  $[a, b]$  (za  $a < b$ ), je potem dolžina krivulje, ki jo določa, enaka

$$s = \int_a^b \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt.$$

To velja tudi za funkcijo, ki so le odsekoma zvezne. Opazimo tudi, da je zgornja dolžina neodvisna od parametrizacije krivulje.

**Trditev 1.3.** Naj bo  $\vec{r}$  zvezno odvedljiva vektorska funkcija, definirana na intervalu  $[a, b]$  (za  $a < b$ ) in naj bo  $\psi : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$  zvezno odvedljiva bijekcija, tako da  $t = \psi(\tau)$  preteče interval  $[a, b]$ , ko  $\tau$  preteče interval  $[\alpha, \beta]$  (za  $\alpha < \beta$ ). Potem je

$$\int_a^b \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt = \int_\alpha^\beta \left\| \frac{d}{d\tau} \vec{r}(\psi(\tau)) \right\| d\tau.$$

## 2 PLOSKVE

### 2.1 Ploskve v $\mathbb{R}^3$

**Definicija 2.1** (Ploskev). Podmnožica  $P \subseteq \mathbb{R}^3$  je *ploskev*, če za vsako točko  $\vec{r} \in P$  obstaja taka okolica  $H \subseteq \mathbb{R}^3$ , da je  $P \cap H$  graf kake zvezno odvedljive funkcije  $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ , definirane na kaki *odprti* podmnožici  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ .

To pomeni, da se na  $P \cap H$  ena od koordinat  $x, y, z$  da *enolično* izraziti kot funkcija preostalih, torej da je  $P \cap H$  ene od oblik:

$$P \cap H = \{(x, y, \phi(x, y)) \mid (x, y) \in D\},$$

$$P \cap H = \{(x, \phi(x, z), y) \mid (x, z) \in D\},$$

$$P \cap H = \{(\phi(y, z), y, z) \mid (y, z) \in D\}.$$

**Trditev 2.1** (Izrek o implicitni funkciji). Naj bo  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  *zvezno odvedljiva* funkcija in privzemimo, da je množica  $P = g^{-1}(0)$  *neprazna*. Če je

$$\nabla g(\vec{r}) \neq 0$$

za  $\forall \vec{r} \in P$  je  $P$  *ploskev*.

Enačba oblike  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  ( $t \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ) predstavlja krivuljo v  $\mathbb{R}^3$ . Privzeli bomo, da je pri tem  $\vec{r}$  *zvezno odvedljiva* funkcija spremenljivke  $t$ . Taka krivulja leži na ploskvi  $P = g^{-1}(0)$  natanko tedaj, ko je  $g(\vec{r}(t)) = 0$  za  $\forall t \in [a, b]$ . Ko to enakost odvajamo po  $t$ , dobimo

$$\nabla g(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = 0.$$

Ta enakost pomeni, da je vektor  $\nabla g(\vec{r}(t))$  pravokoten na tangentni vektor  $\dot{\vec{r}}(t)$  krivulje v točki  $\vec{r}(t)$ .

Če sedaj izberemo poljubno točko  $\vec{r}_0$  na ploskvi  $P$  in opazujemo vse krivulje na ploskvi  $P$ , ki gredo skozi točko  $\vec{r}_0$  (vsaka taka krivulja  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  zadošča pogoju  $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$  za kak  $t_0$ ), vidimo, da je vektor  $\nabla g(\vec{r}_0)$  pravokoten na tangentni vektor  $\dot{\vec{r}}(t_0)$  vsake take krivulje.

To pomeni, da mora biti vektor  $\nabla g(\vec{r}_0)$  pravokoten na ploskev  $P$ . To velja za vsako točko  $\vec{r}_0 \in P$ .

**Definicija 2.2** (Normalni vektor). Vektor  $\nabla g(\vec{r})$  imenujemo *normalni vektor* na ploskev  $P = g^{-1}(0)$  v točki  $\vec{r} \in P$ . Ravnino  $T_{\vec{r}}P$  z normalnim vektorjem  $\nabla g(\vec{r})$  skozi točko  $\vec{r}$  na ploskvi  $P$  pa imenujemo *tangentna ravnina* na ploskev  $P$  v točki  $\vec{r}$ .

Tangentna ravnina na  $P$  skozi točko  $\vec{r}$  je torej vzporedna vsem tangen-tnim vektorjem v točki  $\vec{r}$  na krivulje skozi  $\vec{r}$  na ploskvi  $P$ .

### 3 INTEGRALI S PARAMETROM

**Definicija 3.1** (Integral s parametrom). Naj bo  $f$  zvezna funkcija dveh spremenljivk, definirana na pravokotniku  $P = [a, b] \times [c, d]$  ( $a < b$ ,  $c < d$ ). Integral

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad (1)$$

je funkcija spremenljivke  $y$ . Tak integral imenujemo *integral s parametrom*  $y$ .

**Trditev 3.1.** Če je  $f$  zvezna funkcija na pravokotniku  $P = [a, b] \times [c, d]$ , je funkcija  $F$  (definirana z (1)) zvezna na intervalu  $P$ .

**Izrek 3.1.** Naj bo  $f$  zvezna na pravokotniku  $P = [a, b] \times [c, d]$  in privzemimo, da obstaja parcialni odvod  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , ki naj bo zvezen na  $P$ . Potem je funkcija  $F$  (podana z (1)) odvedljiva in velja

$$F'(y) = \frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx. \quad (2)$$

#### 3.1 Izlimitirani integrali s parametrom

**Definicija 3.2.** Integral  $F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$  je *enakomerno konvergenten* za  $y \in S \subseteq \mathbb{R}$ , če za  $\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{R}$ , da za  $\forall b \geq M$  in  $\forall y \in S$  velja

$$\left| \int_b^\infty f(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

Za razliko od navadne konvergence mora tukaj obstajati tak  $M$ , ki je istočasno ustrezen za  $\forall y \in S$ , torej je  $M = M_\varepsilon$  odvisen le od  $\varepsilon$ , ne pa tudi od  $y$ . Pri navadni konvergenci bi bil veljalo  $M = M_{\varepsilon, y}$ .

**Trditev 3.2.** Če je  $f$  zvezna funkcija na pasu  $P = [a, \infty) \times [c, d]$  in integral

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$$

enakomerno konvergenten za  $y \in [c, d]$ , je  $F$  zvezna funkcija na  $[c, d]$ .

## 3.2 Dvojni in dvakratni integrali

**Definicija 3.3.** Naj bo  $P = [a, b] \times [c, d]$  in  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija. Delitev  $D_{[a,b]}$  intervala  $[a, b]$  je določena z zaporedjem točk

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b.$$

Delitev  $D_{[a,b]}$  skupaj s poljubno delitvijo  $D_{[c,d]}$  intervala  $[c, d]$ , določeno z

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d,$$

določa neko delitev pravokotnika  $P$  na manjše pravokotnike

$$P_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad (i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n).$$

Naj bo

$$m_{i,j} = \inf_{(x,y) \in P_{i,j}} f(x, y),$$

$$M_{i,j} = \sup_{(x,y) \in P_{i,j}} f(x, y).$$

Z  $\Delta_{i,j}p = \Delta_i x \cdot \Delta_j y = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$  označimo ploščino pravokotnika  $P_{i,j}$ . Vsoto

$$\underline{S}_D = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n m_{i,j} \Delta_{i,j} p$$

imenujemo *spodnja*, vsoto

$$\overline{S}_D = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{i,j} \Delta_{i,j} p$$

pa *zgornja Riemannova vsota* funkcije  $f$  pri delitvi  $D$ .

**Lema 3.1.** Če je  $N$  nadaljevanje delitve  $D$  pravokotnika  $P$ , za spodnje in zgornje Riemannove vsote poljubne omejene funkcije  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  velja

$$\underline{S}_N \geq \underline{S}_D \text{ in } \overline{S}_N \leq \overline{S}_D.$$

**Definicija 3.4.** Omejena funkcija  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  je na pravokotniku  $P$  *integrabilna v Riemannovem smislu*, če velja

$$\underline{S} = \overline{S},$$

kjer je  $\underline{S}$  supremum njenih *spodnjih*,  $\overline{S}$  pa infimum njenih *zgornjih* Riemannovih vsot. Tedaj skupno vrednost  $\underline{S} = \overline{S}$  označimo kot

$$\iint_P f(x, y) dp,$$

kjer pomeni  $dp = dxdy$  *ploščinski element*, in jo imenujemo *dvojni integral funkcije  $f$  po pravokotniku  $P$* .

**Izrek 3.2.** Zvezna funkcija  $f$  na pravokotniku  $P = [a, b] \times [c, d]$  je *integrabilna* in velja

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \iint_P f(x, y) dp = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy. \quad (3)$$

Enak zaključek velja tudi za funkcijo  $f$ , ki ni nujno zvezna, če je  $N$  množica njenih točk nezveznosti taka, da jo za  $\forall \varepsilon > 0$  lahko pokrijemo s kakim zaporedjem pravokotnikov, katerih vsota ploščin je pod  $\varepsilon$ . Tedaj pravimo, da ima  $N$  mero 0.