Analiza 3 - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar
po predavanjih profesorja Bojana Magajne

2020/21

Kazalo

1 PARAMETRIČNO PODANE KRIVULJE

Trditev 1.1. Če je $\vec{r}$ *odvedljiva* vektorska funkcija (njene komponente x, y in z so odvedljive funkcije spremenljivke t), potem je

$$\dot{\vec{r}}(t_0) \; = \; (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0))$$

tangentni vektor na krivuljo $t \mapsto \vec{r}(t)$ v točki $\vec{r}(t_0)$, če velja $\dot{\vec{r}}(t_0) \neq 0$.

Trditev 1.2. Če je $\vec{r}$ *zvezno odvedljiva* vektorska funkcija na intervalu $[a, b]$ (za $a < b$), je potem *dolžina* krivulje, ki jo določa, enaka

$$s \; = \; \int_a^b \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt.$$

To velja tudi za funkcijo, ki so le *odsekoma zvezne.* Opazimo tudi, da je zgornja dolžina neodvisna od parametrizacije krivulje.

Trditev 1.3. Naj bo $\vec{r}$ *zvezno odvedljiva* vektorska funkcija, definirana na intervalu $[a, b]$ (za $a < b$) in naj bo $\psi : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ *zvezno odvedljiva bijekcija*, tako da $t = \psi(\tau)$ preteče interval $[a, b]$, ko τ preteče interval $[\alpha, \beta]$ (za $\alpha < \beta$). Potem je

$$\int_a^b \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt \; = \; \int_\alpha^\beta \|\frac{d}{d\tau}\vec{r}(\psi(\tau))\| d\tau.$$

2 PLOSKVE V $\mathbb{R}^3$

Definicija 2.1 (Ploskev)**.** Podmnožica $P \subseteq \mathbb{R}^3$ je *ploskev*, če za vsako točko $\vec{r} \in P$ obstaja taka okolica $H \subseteq \mathbb{R}^3$, da je $P \cap H$ graf kake zvezno odvedljive funkcije $\phi : D \to \mathbb{R}$, definirane na kaki *odprti* podmnožici $D \subseteq \mathbb{R}^2$.
To pomeni, da se na $P \cap H$ ena od koordinat x, y, z da *enolično* izraziti kot funkcija preostalih, torej da je $P \cap H$ ene od oblik:

$$\begin{aligned} P \cap H &= \{(x, y, \phi(x, y)) \mid (x, y) \in D\}, \\ P \cap H &= \{(x, \phi(x, z), y) \mid (x, z) \in D\}, \\ P \cap H &= \{(\phi(y, z), y, z) \mid (y, z) \in D\}. \end{aligned}$$

Trditev 2.1 (Izrek o implicitni funkciji)**.** Naj bo $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *zvezno odvedljiva* funkcija in privzemimo, da je množica $P = g^{-1}(0)$ *neprazna.* Če je

$$\nabla g(\vec{r}) \neq 0$$

za $\forall \vec{r} \in P$ je P *ploskev.*

Enačba oblike $\vec{r} = \vec{r}(t)$ $(t \in [a, b] \subseteq \mathbb{R},\ a < b)$ predstavlja krivuljo v $\mathbb{R}^3$. Privzeli bomo, da je pri tem $\vec{r}$ *zvezno odvedljiva* funkcija spremenljivke t. Taka krivulja leži na ploskvi $P = g^{-1}(0)$ natanko tedaj, ko je $g(\vec{r}(t)) = 0$ za $\forall t \in [a, b]$. Ko to enakost odvajamo po t, dobimo

$$\nabla g(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = 0.$$

Ta enakost pomeni, da je vektor $\nabla g(\vec{r}(t))$ pravokoten na tangentni vektor $\dot{\vec{r}}(t)$ krivulje v točki $\vec{r}(t)$.

Če sedaj izberemo poljubno točko $\vec{r}_0$ na ploskvi P in opazujemo vse krivulje na ploskvi P, ki gredo skozi točko $\vec{r}_0$ (vsaka taka krivulja $\vec{r} = \vec{r}(t)$ zadošča pogoju $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ za kak t_0), vidimo, da je vektor $\nabla g(\vec{r}_0)$ pravokoten na tangentni vektor $\dot{\vec{r}}(t_0)$ vsake take krivulje.

To pomeni, da mora biti vektor $\nabla g(\vec{r}_0)$ pravokoten na ploskev P. To velja za vsako točko $\vec{r}_0 \in P$.

Definicija 2.2 (Normalni vektor)**.** Vektor $\nabla g(\vec{r})$ imenujemo *normalni vektor* na ploskev $P = g^{-1}(0)$ v točki $\vec{r} \in P$. Ravnino $T_{\vec{r}}P$ z normalnim vektorjem $\nabla g(\vec{r})$ skozi točko $\vec{r}$ na ploskvi P pa imenujemo *tangentna ravnina* na ploskev P v točki $\vec{r}$.

Tangentna ravnina na P skozi točko $\vec{r}$ je torej vzporedna vsem tangentnim vektorjem v točki $\vec{r}$ na krivulje skozi $\vec{r}$ na ploskvi P.

3 INTEGRALI S PARAMETROM

Definicija 3.1 (Integral s parametrom)**.** Naj bo f *zvezna funkcija* dveh spremenljivk, definirana na pravokotniku $P = [a, b] \times [c, d]$ ($a < b$, $c < d$). Integral

$$F(y) \;=\; \int_a^b f(x, y)\; dx \tag{1}$$

je funkcija spremenljivke y. Tak integral imenujemo *integral s parametrom y.*

Trditev 3.1. Če je f *zvezna funkcija* na pravokotniku $P = [a, b] \times [c, d]$, je funkcija F (definirana z (1)) *zvezna* na intervalu P.

Izrek 3.1. Naj bo f *zvezna* na pravokotniku $P = [a, b] \times [c, d]$ in privzemimo, da obstaja parcialni odvod $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, ki naj bo *zvezen* na P. Potem je funkcija F (podana z (1)) *odvedljiva* in velja

$$F'(y) \;=\; \frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y)\; dx \;=\; \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\; dx. \tag{2}$$

3.1 Izlimitirani integrali s parametrom

Definicija 3.2. Integral $F(y) = \displaystyle\int_a^\infty f(x, y)\; dx$ je *enakomerno konvergenten* za $y \in S \subseteq \mathbb{R}$, če za $\forall \varepsilon > 0\ \exists M \in \mathbb{R}$, da za $\forall b \geq M$ in $\forall y \in S$ velja

$$\left| \int_b^\infty f(x, y) dx \right| \;<\; \varepsilon.$$

Za razliko od navadne konvergence mora tukaj obstajati tak M, ki je istočasno ustrezen za $\forall y \in S$, torej je $M = M_\varepsilon$ odvisen le od ε, ne pa tudi od y. Pri navadni konvergenci bi bil veljalo $M = M_{\varepsilon, y}$.

Trditev 3.2. Če je f *zvezna* funkcija na pasu $P = [a, \infty) \times [c, d]$ in integral

$$F(y) \;=\; \int_a^\infty f(x, y)\; dx$$

enakomerno konvergenten za $y \in [c, d]$, je F *zvezna funkcija* na $[c, d]$.

3.2 Dvojni in dvakratni integrali

Definicija 3.3. Naj bo $P = [a, b] \times [c, d]$ in $f : P \to \mathbb{R}$ funkcija. Delitev $D_{[a,b]}$ intervala $[a, b]$ je določena z zaporedjem točk

$$a \;=\; x_0 < x_1 < \ldots < x_m \;=\; b.$$

Delitev $D_{[a,b]}$ skupaj s poljubno delitvijo $D_{[c,d]}$ intervala $[c, d]$, določeno z

$$c \;=\; y_0 < y_1 < \ldots < y_n \;=\; d,$$

določa neko delitev pravokotnika P na manjpe pravokotnike

$$P_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{i-1}, y_i],\; (i = 1, \ldots, m;\; j = 1, \ldots, n).$$

Naj bo

$$m_{i,j} \;=\; \inf_{(x,y)\in P_{i,j}} f(x, y),$$
$$M_{i,j} \;=\; \sup_{(x,y)\in P_{i,j}} f(x, y).$$

Z $\Delta_{i,j}p = \Delta_i x \cdot \Delta_j y = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ označimo ploščino pravokotnika $P_{i,j}$. Vsoto

$$\underline{S}_D \;=\; \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}\Delta_{i,j}p$$

imenujemo *spodnja*, vsoto

$$\overline{S}_D \;=\; \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}\Delta_{i,j}p$$

pa *zgornja Riemannova vsota* funkcije f pri delitvi D.

Lema 1. Če je N nadaljevanje delitve D pravokotnika P, za spodnje in zgornje Riemannove vsote poljubne omejene funkcije $f : P \to \mathbb{R}$ velja

$$\underline{S}_N \;\geq\; \underline{S}_D \quad \text{in} \quad \overline{S}_N \;\leq\; \overline{S}_D.$$

Definicija 3.4. Omejena funkcija $f : P \to \mathbb{R}$ je na pravokotniku P *integrabilna v Riemannovem smislu*, če velja

$$\underline{S} \;=\; \overline{S},$$

kjer je $\underline{S}$ supermum njenih *spodnjih*, $\overline{S}$ pa infimum njenih *zgornjih* Riemannovih vsot. Tedaj skupno vrednost $\underline{S} = \overline{S}$ označimo kot

$$\iint_P f(x,y)\; dp,$$

kjer pomeni $dp = dxdy$ *ploščinski element*, in jo imenujemo *dvojni integral funkcije f po pravokotniku P.*

Izrek 3.2. *Zvezna funkcija f* na pravokotniku $P = [a,b] \times [c,d]$ je *integrabilna* in velja

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx \;=\; \iint_P f(x,y)\; dp \;=\; \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy. \quad (3)$$

Enak zaključek velja tudi za funkcijo f, ki ni nujno zvezna, če je N množica njenih točk nezveznosti taka, da jo za $\forall\varepsilon > 0$ lahko pokrijemo s kakim zaporedjem pravokotnikov, katerih vsota ploščin je pod ε. Tedaj pravimo, da ima N mero 0.

Posledica. Za funkcijo f, ki je na pravokotniku P *integrabilna* v Riemannovem smislu, konvergirajo Riemannove vsote S proti $\iint_P f(x,y)\; dp$, ko gredo velikosti delilnih pravokotnikov (njihove diagonale) proti 0.

Natančneje: za $\forall\varepsilon > 0\; \exists\delta > 0$, da je

$$\left| S - \iint_P f(x,y)\; dp \right| \;<\; \varepsilon$$

za vsako Riemannovo vsoto funkcije f pri vsaki delitvi pravokotnika P, kjer si dolžine diagonal pod δ.

3.3 Integriranje in odvajanje integralov s parametrom

Izrek 3.3. Naj bo f *zvezna* na pasu $[a,\infty)\times[c,d]$. Če je integral $\displaystyle\int_a^\infty f(x,y)\ dx$ *enakomerno konvergenten* za $y \in [c,d]$, potem je

$$\int_c^d \int_a^\infty f(x,y)\ dx\ dy \ = \ \int_a^\infty \int_c^d f(x,y)\ dy\ dx.$$

Izrek 3.4. Naj bosta f in $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *zvezni* na pasu $[a,\infty)\times[c,d]$, naj bo integral

$$F(y) \ = \ \int_a^\infty f(x,y)\ dx$$

konvergenten za $y \in [c,d]$ in naj bo integral

$$\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\ dx$$

enakomerno konvergenten na $[c,d]$. Potem je F *odvedljiva* funkcija in velja

$$F'(y) \ = \ \frac{d}{dy}\int_a^\infty f(x,y)\ dx \ = \ \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\ dx.$$

Izrek 3.5 (Kriterij za ugotavljanje enakomerne konvergence)**.**
Integral $\displaystyle\int_a^\infty f(x,y)\ dx = F(y)$ je *enakomerno konvergenten* na S natanko tedaj, ko za $\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{R}$, da za poljubna $d > b \geq N$ in za $\forall y \in S$ velja

$$\left|\int_b^d f(x,y)\ dx\right| \ < \ \varepsilon.$$

Posledica. Če je $|f(x,y)| \leq g(x,y)$ za $\forall(x,y) \in [a,\infty)\times[c,d]$ in je integral $\displaystyle\int_a^b g(x,y)\ dx$ *enakomerno konvergenten* na $[c,d]$, je *enakomerno konvergenten* tudi integral $\displaystyle\int_a^b f(x,y)\ dx$.

Izrek 3.6 (2. izrek o povprečju)**.** Naj bo f *integrabilna*, g pa *nenegativna padajoča (odvedljiva)* funkcija na intervalu $[a, b]$. Potem $\exists \xi \in [a, b]$, da je

$$\int_a^b f(x)g(x)\ dx \ = \ g(a)\int_a^\xi f(x)\ dx.$$

3.4 Eulerjevi funkciji Γ in B

Definicija 3.5 (Funkcija Γ)**.** Na poltraku $x > 0$ je funkcija Γ definirana z

$$\Gamma(x) \ = \ \int_0^\infty t^{t-1}e^{-t}dt. \tag{4}$$

Trditev 3.3 (Rekurzivna formula)**.** Za $\forall x > 0$ velja

$$\Gamma(x+1) \ = \ x\Gamma(x).$$

Posledica. $\Gamma(n+1) = n!$ za $\forall n \in \mathbb{N}$

To nam namiguje, naj definiramo

$$x! \ := \ \Gamma(x+1) \quad \text{za } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Rekurzivna formula nam omogoča, da razširimo definicijsko območje funkcije Γ. Če je namreč $x \in (-1, 0)$, je $x + 1 \in (0, 1)$, zato je vrednost $\Gamma(x+1)$ že definiramo in lahko postavimo

$$\Gamma \ := \ \frac{\Gamma(x+1)}{x}.$$

S ponavljanjem rekurzivne formule dobimo

$$\Gamma(x) \ = \ \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\dots(x+n-1)}. \tag{5}$$

Za $\forall x \in \mathbb{R}$, ki ni negativno celo število ali 0, lahko izberemo tak najmanjši $n \in \mathbb{N}$, da je $(x+n) > 0$; tedaj je vrednost $\Gamma(x+n)$ že definirana in lahko $\Gamma(x)$ definiramo s formulo (5).

Definicija 3.6. Funkcija beta je definirana kot

$$B(x,y) \;=\; \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad (x>0, y>0). \tag{6}$$

Lahko se je prepričati, da je integral v (6) konvergenten, če je $x > 0$ in $y > 0$.

Z vpeljavo nove integracijske spremenljivke $t = \sin^2\varphi$ lahko definicijo funkcije B zapišemo tudi kot

$$B(x,y) \;=\; 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\varphi \cos^{2y-1}\varphi d\varphi. \tag{7}$$

Trditev 3.4. Za poljubna pozitivna x, y je

$$B(x,y) \;=\; \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{8}$$

Izrek 3.7 (Stirlingova formula)**.**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{n}(\frac{n}{e})^n} \;=\; \sqrt{2\pi}$$

Trditev 3.5 (Wallisova formula)**.**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{2j}{2j-1}\right)^2 \;=\; \frac{\pi}{2}$$

4 VEČKRATNI INTEGRALI

Definicija 4.1. Naj bo $f : K \to \mathbb{R}$ *omejena* funkcija, definirana na kvadru $K = [a, b] \times [c, d] \times [e, g]$ v $\mathbb{R}^3$. Vse tri intervale $[a, b]$, $[c, d]$ in $[e, g]$ razdelimo na podintervale z delilnimi točkami:

$$a = x_0 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_m = b,$$

$$c = y_0 < \ldots < y_{j-1} < y_j < \ldots < y_n = d,$$

$$e = z_0 < \ldots < z_{k-1} < z_k < \ldots < z_p = g.$$

S tem razdelimo kvader K na manjše podkvadre

$$K_{i,j,k} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k];$$

to delitev imenujemo D. Označimo

$$m_{i,j,k} = \inf_{(x,y,z)\in K_{i,j,k}} f(x, y, z),$$

$$M_{i,j,k} = \sup_{(x,y,z)\in K_{i,j,k}} f(x, y, z)$$

ter tvorimo *spodnjo* in *zgornjo* Riemannovo vsoto pri tej delitvi:

$$\underline{S}_D = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} m_{i,j,k} \Delta_{i,j,k} V,$$

$$\overline{S}_D = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} M_{i,j,k} \Delta_{i,j,k} V,$$

kjer je

$$\Delta_{i,j,k} V = \Delta_i x \Delta_j y \Delta_k z = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$$

prostornina kvadra $K_{i,j,k}$. Končno naj bo

$$\underline{S} = \sup_D \underline{S}_D \quad \text{in} \quad \overline{S} = \inf_D \overline{S}_D,$$

kjer teče D po vseh takih delitvah kvadra K. Če je $\underline{S} = \overline{S}$ pravimo, da je funkcija f *integrabilna* na kvadru K in skupno vrednost $\underline{S} = \overline{S}$ označimo kot

$$\iiint_K f(x, y, z)\, dV$$

ter jo imenujemo *trojni* (Riemannov) integral funkcije f.

Definicija 4.2. Naj bo Ω poljubna omejena podmnožica v $\mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ pa omejena funkcija. Izberimo kvader K oblike $K = [a, b] \times [c, d] \times \ldots$, ki naj vsebuje Ω, definirajmo funkcijo $f_K : K \to \mathbb{R}$ kot

$$f(x) = \begin{cases} f(x, y, \ldots) & ; \ (x, y, \ldots) \in \Omega \\ 0 & ; \ (x, y, \ldots) \in K \setminus \Omega \end{cases}$$

ter večkratni integral $\int \cdots \int_\Omega f(x, y, \ldots) \, dV$ kot

$$\int \cdots \int_\Omega f(x, y, \ldots) \, dV = \int \cdots \int_K f_K(x, y, \ldots) \, dV.$$

Trditev 4.1. Če ima presek *omejenih* množic Ω_1 in Ω_2 v $\mathbb{R}^2$ (ali v $\mathbb{R}^n$) mero 0, potem je

$$\int \cdots \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(x_1, \ldots, x_n) \, dV = \int \cdots \int_{\Omega_1} f(x_1, \ldots, x_n) \, dV + \int \cdots \int_{\Omega_2} f(x_1, \ldots, x_n) \, dV$$

Trditev 4.2. Naj bosta f_1 in f_2 *zvezni* funkciji na Ω ter c_1 in c_2 poljubni konstanti. Potem velja

$$\int \cdots \int_\Omega (c_1 f_1 + c_2 f_2) \, dV = c_1 \int \cdots \int_\Omega f_1 \, dV + c_2 \int \cdots \int_\Omega f_2 \, dV.$$

Trditev 4.3. Če je $f \leq g$, potem je $\iint_\Omega f \, dp \leq \iint_\Omega g \, dp$ in podobno za večkratne integrale. Če je torej funkcija f *omejena* na mnoćici Ω navzgor s konstanto M, navzdol pa s konstanto m, potem velja

$$m p_\Omega \leq \iint_\Omega f dp \leq M p_\Omega,$$

kjer je p_Ω ploščina množice Ω.

Trditev 4.4.

$$\left| \iint_\Omega f \, dp \right| \leq \iint_\Omega |f| \, dp$$

Trditev 4.5. Naj bo Ω *kompaktna* množica v $\mathbb{R}^2$, katere rob sestoji iz končno mnogo krivulj oblike $\vec{\,}{:}[a,b] \to \mathbb{R}^2$ za kake *zvezno odvedljive* funkcije $\vec{r}$ in kake intervale $[a,b]$. Izberimo pravokotnik P, ki vsebuje Ω, in naj bo D poljubna delitev tega pravokotnika s premicami, vzporednimi koordinatnima osema. V vsakem od tistih delilnih pravokotnikov P_k delitve D, ki sekajo Ω, izberemo točko $\vec{r}_k \in P_k \cap \Omega$, označimo z $\Delta_k p$ ploščino pravokotnika P_k in tvorimo Riemannovo vsoto

$$S_D(f) = \sum_k f(\vec{r}_k)\Delta_k p,$$

kjer teče indeks le po tistih delilnih pravokotnikih P_k, ki sekajo Ω. Za vsako zvezno funkcijo f na Ω je integral $\iint_\Omega f(\vec{r})\ dp$ enak limiti vsot $S_D(f)$, ko gredo velikosti vseh delilnih pravokotnikov (torej največja diagonala vseh delilnih pravokotnikov) proti 0. Natančneje, za $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$, da je

$$\left| S_D(f) - \iint_\Omega f(\vec{r})\ dp \right| < \varepsilon,$$

če je maksimalna diagonalna delilnih pravokotnikov P_k manjša od δ.

Posledica. Naj bo Ω podana kot

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g_1(x) \le y \le g_2(x),\ a \le x \le b\}, \tag{9}$$

kjer sta g_1 in g_2 *zvezni* funkciji na intervalu $[a,b]$ in $g_1(x) \le g_2(x)$ za $\forall x \in [a,b]$. Naj bosta M_1 in M_2 taki števili, da pravokotnik $P = [a,b] \times [M_1, M_2]$ vsebuje množico Δ (torej $M_1 \le g_1(x) \le g_2(x) \le M_2$ za $\forall x \in [a,b]$). Po definiciji imamo potem za vsako *zvezno* funkcijo $f : \Omega \to \mathbb{R}$:

$$\iint_\Omega f(x,y)\ dp = \iint_P f_P(x,y)\ dp,$$

kjer je f_P funkcija na P, definirana z

$$f_P(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & ;\ (x,y) \in \Omega \\ 0 & ;\ (x,y) \in P \setminus \Omega. \end{cases}$$

Po zgornjem izreku pa je

$$\iint_P f_P(x,y)\ dp = \int_a^b \left(\int_{M_1}^{M_2} f(x,y)\ dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\ dy \right) dx,$$

kjer smo upoštevali, da je funkcija f_P enaka 0 izven Ω in zato $\int_{M_1}^{M_2} f_P(x,y)\ dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)}\ dy.$
Torej velja naslednja trditev:

Trditev 4.6. Za vsako *zvezno* funkcijo f na množici Ω, definirani kot (9), velja

$$\iint_\Omega f(x,y)\ dp = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\ dy \right) dx.$$

Trditev 4.7. Za območja Ω, podana kot
$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g_1(x,y) \leq z \leq g_2(x,y),\ (x,y) \in \Lambda\}$, in (skoraj povsod) *zvezne* funkcije f na njih velja

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\ dV = \iint_\Lambda \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y,z)\ dz \right) dp.$$

4.1 Cilindrične ali valjne koordinate

Definicija 4.3. Lega točke (x,y,z) v prostoru $\mathbb{R}$ je določena s koordinato z in polarnima koordinatama r, φ njene projekcije $(x,y,0)$ na ravnino x,y. Trojko φ, r, z imenujemo *cilindrične* ali *valjne* koordinatne točke. S kartezičnimi koordinatami so povezane prek enakosti

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z.$$

Pri tem lahko r zavzame vse nenegativne vrednosti, z vse realne vrednosti, φ pa na intervalu $[0, 2\pi)$. Za dano točko T pomeni r njeno razdaljo od osi z, ki je enaka razdalji projekcije točke T na ravnino x,y od koordinatnega izhodišča.

Posledica (Koordinatne ploskve)**.**

- Ploskve $z =$ konstanta so ravnine, vzporedne z ravnino x,y

- Ploskve $r =$ konstanta so neskončni valji, katerih os je os z
- Ploskve $\varphi =$ konstanta pa so polravnine

4.2 Sferične koordinate

Definicija 4.4. *Sferične* ali *krogelne koordinate* točke $T(x, y, z)$ so:

- $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ razdalja od izhodišča
- θ kot, ki ga vektor $\vec{0T}$ oklepa s pozitivnim poltrakom osi z
- φ kot, ki ga pravokotna projekcija vektorja $\vec{0T}$ na ravnino x, y oklepa s pozitivnim poltrakom osi x

Naj bo kot doslej r, razdalja T od osi z. Potem je $r = R \sin\theta$ in

$$x = R\sin\theta\cos\varphi, \quad y = R\sin\theta\sin\varphi, \quad z = R\cos\theta.$$

Tukaj lahko zavzame kot θ vrednosti na intervalu $[0, \pi]$ (0 je na pozitivnem, π pa na negativnem poltraku osi z), kot φ pa vrednosti na intervalu $[0, 2\pi)$.

Volumni element v sferičnih koordinatah je

$$dV = R^2 \sin\theta \; dR \; d\theta \; d\varphi.$$

Od tod sledi, da lahko trojni integral po telesu Ω, ki je opisano kot

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; g_1(\varphi, \theta) \le R \le g_2(\varphi, \theta), \; (\varphi, \theta) \in \Lambda\},$$

kjer sta $g_1 \le g_2$ *zvezni* funkciji na množici $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$, izrazimo kot

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\, dV = \iint_\Lambda \left(\int_{g_1(\varphi,\theta)}^{g_2(\varphi,\theta)} f(R\sin\theta\cos\varphi, \; R\sin\theta\sin\varphi, \; R\cos\theta) R^2 \sin\theta \; dR \right) d\theta \; d\varphi.$$

Posledica (Koordinatne ploskve)**.**

- Ploskve $R =$ konstanta so sfere
- Ploskve $\theta =$ konstanta so stožci
- Plosvke $\varphi =$ konstanta so polravnine

4.3 Splošne koordinate

Definicija 4.5. Naj bo V *odprta* podmožica v ravnini. Vlogo splošnih koordinat na V lahko igra vsak tak par funkcij

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

na V, da iz $(x, y) \neq (x_1, y_2)$ sledi $(u(x, y), v(x, y)) \neq (u(x_1, y_1), v(x_1, y_1))$, kar pomeni, da je točka (x, y) enolično določena s parom $(u(x, y), v(x, y))$. Drugače povedano, vektorska funkcija

$$F : V \to \mathbb{R}^2, \ F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

mora biti *injektivna.* Zavoljo diferencialnega računa predpostavimo, da sta funkciji u in v *zvezno odvedljivi.* Iz *izreka o inverzni preslikavi* vemo, da potem obrnljivost Jacobijeve matrike $F'(x, y)$ preslikave F zagotavlja *injektivnost* preslikave F v okolici točke (x, y), ne pa na celem definicijskem območju V, zato jo je treba posebej privzeti. Tedaj je pri pogoju, da je $F'(x, y)$ *obrnljiva* matrika za $\forall(x, y) \in V$, preslikava F dejansko *bijekcija* na odprto množico $U := F(V)$, inverzna preslikava

$$G := F^{-1} : U \to V$$

pa je tudi *zvezno odvedljiva* in

$$G'(\vec{q}) = (F'(G(\vec{q})))^{-1} \text{ za } \forall \vec{q} \in U.$$

Pri fiksnih u_0 in v_0 imenujemo krivulje $u = (x, y)$ in $v = (x, y)$ *koordinatne* krivulje.

Izrek 4.1. Naj bo $G : U \to V$ taka *zvezno odvedljiva bijekcija*, kjer sta U in V *odprti* podmnožici v $\mathbb{R}$, da je $\det G'(\vec{r}) \neq 0$ za $\forall \vec{r} \in U$. Označimo $\vec{r} = (u, v)$ in $G(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$. Naj bo Ω *kompaktna* podmnožica v V, katere rob naj sestoji iz končno mnogo *zvezno odvedljivih* krivulj (oz. naj ima mero 0), f pa naj bo *zvezna* funkcija na V (razen morda na množici z mero 0). Potem je

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\ dx\ dy \ = \ \iint_{G^{-1}(\Omega)} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u, v) \right| du\ dv,$$

kjer je

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u, v) \ = \ \det G'(u, v) \ = \ \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{bmatrix}.$$

Lema 2. Naj bo $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *obrnljiva linearna* preslikava in Λ paralelogram. Potem med ploščinama paralelograma Λ in $L(\Lambda)$ velja zveza

$$p_{L(\Lambda)} = |\det L| p_{\Lambda}. \tag{10}$$

Enaka povezava velja tudi za vsako *kompaktno* podmnožico Λ v $\mathbb{R}^2$ oziroma za vsako *ravninsko* podmnožico, za katero je ploščina definirana.

Lema 3. Naj bo $G : U \to \mathbb{R}^2$ *zvezno odvedljiva injektivna* preslikava s *povsod obrbljivim* odvodom $G'(u,v)$, definirana na *odprti* množici U, K *kompaktna* podmnožica v U, $\Lambda = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2;\ |u-a| \leq h,\ |v-b| \leq h\}$ pa kvadrat s središčem (a,b) in stranico dolžine $2h$, vsebovan v K. Označimo

$$L \ = \ \det G'(a,b) \ = \ \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(a,b) & \frac{\partial x}{\partial v}(a,b) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(a,b) & \frac{\partial y}{\partial v}(a,b) \end{bmatrix}$$

in naj bo A preslikava, definirana z $A(u,v) = G(a,b) + L(u-a, v-b)$. Potem za $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0$ (neodvisen od izbire kvadrata), da za ploščini likov $G(\Lambda)$ in $A(\Lambda)$, ko je $h < \delta$, velja

$$|p_{G(\Lambda)} - p_{A(\Lambda)}| < \varepsilon p_{\Lambda}.$$

Ker se preslikavi A in L razlikujeta le za translacijo, lahko v tej oceni nadomestimo A z L.

5 PLOSKOVNI IN KRIVULJNI INTEGRAL

5.1 Površina ploskve in ploskovni integral skalarne funkcije

Definicija 5.1. Naj bo Λ pravokotnik s središčem $(u,v) \in \Omega$ in stranicama du, dv, ki naj bosta vzporedni koordinatnima osema in je L Jacobijeva matrika preslikave $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, torej

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u}\vec{r}(u,v) & \frac{\partial}{\partial v}\vec{r}(u,v) \end{bmatrix}.$$

Ploščina paralelograma $L(\Lambda)$ je tako

$$p_{L(\Lambda)} \;=\; \|duL(1,0) \times dvL(0,1)\| \;=\; du\; dv\; \|\frac{\partial}{\partial u}\vec{r}(u,v) \times \frac{\partial}{\partial v}\vec{r}(u,v)\|.$$

Celotno površino ploskve lahko izračunamo tako, da seštejemo ploščine takih paralelogramov in limitiramo njihove velikosti proti 0, s čimer preide vsota v integral

$$p \;=\; \iint_\Omega \|\frac{\partial}{\partial u}\vec{r}(u,v) \times \frac{\partial}{\partial v}\vec{r}(u,v)||\; du\; dv.$$

Z upoštevanjem Lagranjeove identitete $\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \sqrt{\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$, lahko nekoliko poenostavimo formulo:

$$E(u,v) = \|\frac{\partial}{\partial u}\vec{r}\|^2, \quad F(u,v) = \frac{\partial}{\partial u}\vec{r}\cdot\frac{\partial}{\partial v}\vec{r}, \quad G(u,v) = \|\frac{\partial}{\partial v}\vec{r}\|^2$$

$$p \;=\; \iint_\Omega \sqrt{EG - F^2}\; du\; dv.$$

Označimo $\vec{q} = (u,v)$. Jacobijeva matrika $\dot{\vec{r}}(\vec{q})$ je

$$[\dot{\vec{r}}(\vec{q})]^T[\dot{\vec{r}}(\vec{q})] \;=\; \begin{bmatrix} E(u,v) & F(u,v) \\ F(u,v) & G(u,v) \end{bmatrix},$$

od kjer dobimo determinanto

$$\det[\dot{\vec{r}}(\vec{q})]^T[\dot{\vec{r}}(\vec{q})] \;=\; E(u,v)G(u,v) - F(u,v)^2.$$

Zamenjava spremenljivk:

$$\begin{aligned}\iint_\Lambda \sqrt{E(s,t)G(s,t) - F(s,t)^2}\; ds\; dt \;&=\; \iint_\Lambda \sqrt{E(s,t)G(s,t) - F(s,t)^2}\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,v)}\right|\; ds\; dt \\ &=\; \iint_\Omega \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F(u,v)^2}\; du\; dv.\end{aligned}$$

Trditev 5.1. Definicija površine ploskve je neodvisna od parametrizacije.

Definicija 5.2. Naj bo f funkcija, definirana na ploskvi $\mathcal{P}$ z enačbo $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. *Ploskovni integral* te funkcije po ploskvi $\mathcal{P}$ je definirana kot

$$\iint_{\mathcal{P}} f \; dp \;=\; \iint_{\Omega} f(\vec{r}(u, v))\sqrt{E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2} \; du \; dv.$$

Lahko bi pokazali, da je ploskovni integral neodvisen od parametrizacije ploskve.

5.2 Krivuljni integral

5.2.1 Krivuljni integral skalarne funkcije

Definicija 5.3. Naj bo f (*zvezna*) funkcija na krivulji γ z enačbo $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $a \le t \le b$. *Krivuljni integral* funkcije f po krivulji γ, je definiran kot

$$\int_{\gamma} f(\vec{r}) \; ds \;=\; \int_a^b f(\vec{r}(t))\|\dot{\vec{r}}(t)\| \; dt.$$

5.2.2 Krivuljni integral vektorske funkcije

Definicija 5.4. *Krivuljni integral* je definiran kot

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \;=\; \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) \; dt.$$

Trditev 5.2. Če je $t = t(\tau)$ $(\alpha \le \tau \le \beta)$ *naraščajoča zvezno odvedljiva* funkcija novega parametra τ in t preteče interval $[a, b]$, ko τ preteče interval $[\alpha, \beta]$, potem je

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d}{dt}\vec{r}(t)dt \;=\; \int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(\vec{r}(t(\tau))) \cdot \frac{d}{dt}\vec{r}(t(\tau))d\tau,$$

kar pomeni, da je krivuljni integral enak za vse parametrizacije dane krivulje z enako orientacijo.
Če je pa $t = t(\tau)$ *padajoča* funkcija in t preteče interval $[a, b]$, ko τ teče od β do α, potem je

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d}{dt}\vec{r}(t)dt \;=\; -\int_\alpha^\beta \vec{F}(\vec{r}(t(\tau))) \cdot \frac{d}{dt}\vec{r}(t(\tau))d\tau,$$

kar pomeni, da pri spremembi orientacije krivulje, krivuljni integral spremeni predznak.

Trditev 5.3.

(i)

$$\int_{\gamma \dotplus \lambda} \vec{F} \cdot d\vec{r} \;=\; \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_\lambda \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

kjer je $\vec{F}$ *vektorsko polje* na $\gamma \dotplus \lambda$

(ii)

$$\int_{\gamma^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} \;=\; -\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Krivuljo γ, katere končna točka se ujema z začetno, imenujemo *sklenjena*.

Trditev 5.4. Naj bo $\vec{F}$ *vektorsko polje* na U. Velja

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} \;=\; 0$$

za vsako sklenjeno krivuljo γ v U natanko tedaj, ko je

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \;=\; \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

za vsaki krivulji γ_1 in γ_2 v U, ki imata isto začetno in isto končno točko.

5.2.3 Krivuljni integral potencialnega polja

Definicija 5.5. Vektorsko polje $\vec{F} : U \to \mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^2$) je *potencialno*, če obstaja taka funkcija $u : U \to \mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^2$), imenovana *potencial polja* $\vec{F}$, da je

$$\vec{F} \;=\; \vec{\nabla} u,$$

kjer je $\vec{\nabla} u$ gradient funkcije u.

Trditev 5.5. *Zvezno odvedljivo* vektorsko polje $\vec{F} = (M, N)$ je potencialno le, če velja

$$\frac{\partial M}{\partial y} \;=\; \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Trditev 5.6. Krivuljni integral *potencialnega* vektorskega polja $\vec{\nabla} u$ po katerikoli krivulji γ v definicijskem območju polja je

$$\int_\gamma \vec{\nabla} u \cdot d\vec{r} \;=\; u(\vec{r}(b)) - u(\vec{r}(a)),$$

kjer sta $\vec{r}(a)$ in $\vec{r}(b)$ začetna in končna točka krivulje γ. Torej je krivuljni integral danega potencialnega polja neodvisen od poteka krivulje, odvisen je le od njene začetne in končne točke.

Trditev 5.7. Vektorsko polje $\vec{F}$ na območju U je potencialno natanko tedaj, ko je za vsaki dve točki $\vec{r}_0$ in $\vec{r}$ iz U krivuljni integral $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ enak za vse krivulje γ v U z začetno točko $\vec{r}_0$ in končno točko $\vec{r}$.

Posledica. Vektorsko polje $\vec{F}$ na U je potencialno natanko tedaj, ko je

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} \;=\; 0$$

za vsako sklenjeno krivuljo γ v U.

5.2.4 Povezava med krivuljnim in dvojnim integralom

Izrek 5.1. Naj bo Ω kompaktna ravninska množica, katere rob $\partial\Omega$ sestoji iz končno mnogo sklenjenih zvezno odvedljivih krivulj, parametriziranih na kompaktnih interavlih in usmerjenih tako, da je Ω na njihovi levi. Za vsako *zvezno odvedljivo* vektorsko polje $\vec{F} = (M, N)$, definirano na kaki okolici množice Ω, velja Greenova formula

$$\int_{\partial\Omega} (M\ dx + N\ dy) \ = \ \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)\ dp.$$

Ravninsko območje U brez lukenj imenujemo *enostavno povezano.* Natančneje: U je enostavno povezano, če je njegov komplement v razširjeni ravnini (torej v $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ povezana množica, se pravi je iz enega kosa).

Posledica. Na *enostavnem povezanem* območju U je pogoj

$$\frac{\partial M}{\partial y} \ = \ \frac{\partial N}{\partial x}$$

potreben in zadosten za potencialnost vektorskega polja $\vec{F} = (M, N)$.

6 DIFERENCIALNE ENAČBE

Definicija 6.1. *Splošna diferencialna enačba* reda n je enačba oblike

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

kjer je F dana funkcija $n+2$ spremenljivk definirana na kakem območju v $\mathbb{R}^{n+1}$, y neznana funkcija spremenljivke x, $y^{(k)}$ $(k = 1, \ldots, n)$ pa njeni odvodi. *Red enačbe* je red najvišjega odvoda, ki nastopa v enačbi.

6.1 Enačbe 1. reda

Definicija 6.2 (Enačba z ločljivima spremenljivkama)**.** To je enačba oblike

$$g(y)y' = f(x),$$

kjer sta f in g *zvezni* funkciji. V tem primeru obe strani lahko integriramo in dobimo

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx \quad \Rightarrow \quad G(y) = F(x) + C,$$

kjer sta F in G *primitivni funkciji* f in g ter je C *integracijska konstanta.* Če se da izraziti $y = y(x)$ smo dobili rešitev, sicer rečemo, da zgornja enačba predstavlja rešitev v *implicitni* obliki.

Definicija 6.3 (Enačba oblike $y' = f(\frac{y}{x})$)**.** Naj bo f zvezna funkcija. Z novo neznanko $v = \dfrac{y}{x}$, torej $y = xv$ in $y' = xv'$, kar enačbo preoblikuje v

$$xv' = f(v) - v,$$

kjer sta spremenljivki x in v ločljivi.

Definicija 6.4 (Linearna enačba 1. reda)**.** To je vsaka enačba, ki se jo da preoblikovati v

$$y' = py + q,$$

kjer sta p in q *zvezni* funkciji na kakem intervalu I (lahko tudi poltrak ali cela realna os). Če je $q \equiv 0$ imenujemo enačbo *homogena*. Tedaj sta spremenljivki ločljivi. Ko $q \not\equiv 0$, najprej enačbo rešimo homogeno enačbo in nato rešitev vstavimo v enačbo (*variacija konstante*). Dobimo

$$y' = C'e^P + Ce^P P,$$

kjer je $P' = p$. Originalno enačbo tako preoblikujemo v

$$C'e^P = q.$$

Od tod izračunamo $C = \displaystyle\int_a^x e^{-P(t)}q(t)dt + K$, kjer je K konstanta in sledi

$$y(x) \;=\; Ce^{P(x)} \;=\; e^{P(x)}\int_a^x e^{-P(x)}q(t)dt + Ke^{P(x)}.$$

Definicija 6.5 (Bernoullijeva enačba)**.** To je enačba oblike

$$y' = py + qy^n,$$

kjer sta p in q *zvezni* funkciji in $n \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ *realna* konstanta. Za $n > 0$ je ena rešitev te enačbe $y \equiv 0$. Pri deljenju enačbe z y^n vidimo, da jo vpeljava nove neznanke $v = y^{1-n}$ spremeni v *linearno*. Tedaj $y = v^{\frac{1}{1-n}}$ in $y' = \frac{1}{1-n}v^{\frac{1}{1-n}-1}v'$, enačba pa se preoblikuje v

$$\frac{1}{1-n}v' = pv + q,$$

ki je linearna. Pri deljenju z $v^{\frac{1}{1-n}}$ izgubimo rešitve v, ki so za $n > 0$ enake 0. V vsaki ničli x_0 funkcije v je tudi $y(x_0) = 0$ in $y'(x_0) = 0$, če je $n \in (0,1)$, zato lahko v točki $(x_0, 0)$ združimo rešitvi $y \equiv 0$ in $y = v^{\frac{1}{1-n}}$.

Definicija 6.6 (Eksaktna enačba)**.** Diferencialno enačbo $y' = f(x,y)$ lahko zapišemo tudi kot $f(x,y)dx - dy = 0$. Splošnejšo enačbo take oblike

$$\omega := f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0,$$

znamo rešiti, če je izraz ω *totalni diferencial* kake funkcije u, torej

$$\omega = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Tedaj $\omega = du = 0$ pomeni (na povezanem območju v ravnini), da je funkcija u konstantna, torej $u(x,y) = C$, kar imamo lahko za *implicitno* podano rešitev.

Pogoj, da je ω totalni diferencialn oz. da je $f = \frac{\partial u}{\partial x}$ in $g = \frac{\partial u}{\partial y}$ za kako funkcijo u, je enakost

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Na splošno ω ni totalni diferencial, lahko pa morda najdemo tako funkcijo μ brez ničel, da je $\mu\omega$ totalni diferencial funkcije u. Tak μ imenujemo *integrirajoči množitelj*. Ker je $\omega = 0$ ekvivalentna enačbi $du = \mu\omega = 0$, je $u(x,y) = C$ spet implicitno podana rešitev.

Pogoj, da je $\mu\omega$ totalni diferencial kake funkcije je

$$\frac{\partial(\mu f)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu g)}{\partial x} \quad \text{oz.} \quad \frac{1}{\mu}\left(g\frac{\partial \mu}{\partial x} - f\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Če $\exists \mu = \mu(x)$, torej $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$, se enakost poenostavi ter dobimo (kjer g ni 0)

$$\frac{d(\ln \mu)}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}}{g}.$$

Če je izraz na desni odvisen le od x, potem je

$$\mu = e^{\int \frac{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}}{g} dx}.$$

integrirajoči množitelj. Podobno lahko izpeljemo, če $\exists \mu = \mu(y)$

6.2 Homogene linearne diferencialne enačbe 2. reda

Definicija 6.7. *Splošna linearna diferencialna* enačba 2. reda je enačba oblike

$$f(x)y'' + g(x)y' + h(x)y = d(x),$$

kjer so f, g, h in d *zvezne* funkcije na kakem intervalu I, y pa neznana, *dvakrat zvezno odvedljiva* funkcija. Če je desna stran $d \equiv 0$, imenujemo enačbo *homogena.* Kadar f nima ničel, dobimo po deljenju z f ekvivalentno enačbo oblike

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x),$$

kjer so p, q in r *zvezne* funkcije. Vse funkcije tukaj imajo lahko vrednosti v $\mathbb{C}$. Zgornje enačbe ne moremo vedno rešiti *eksplicitno* z znanimi funkcijami, rešitve pa vedno obstajajo in so določene enolično pri začetnih pogojih.

Izrek 6.1. Če so p, q in r *zvezne* funkcije na intervalu I, potem za $\forall x_0 \in I$ in poljubni konstanti $y_0, \tilde{y}_0 \in \mathbb{C}$ obstaja natanko ena *dvakrat zvezno odvedljiva* funkcija $y : I \to \mathbb{C}$, ki zadošča enačbi $y''+p(x)y'+q(x)y = r(x)$ in začetnima pogojema

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = \tilde{y}_0.$$

Če so pri tem p, q, r *realne* funkcije in $y_0, \tilde{y}_0 \in \mathbb{R}$, potem je tudi rešitev y *realna* funkcija.

Definicija 6.8 (Linearna neodvisnost)**.** Funkciji y_1 in y_2 sta *linearno neodvisni*, če nobena njuna *netrivialna linearna* kombinacija $c_1y_1+c_2y_2$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ sta konstanti, $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$) ni identično enaka 0. To pomeni, da nobena od obeh funkcij ni konstanten večkratnik druge.

Definicija 6.9. *Determinanta Wronskega* funkcij y_1, y_2 je funkcija, definirana kot

$$W_{y_1,y_2}(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x).$$

Trditev 6.1 (Liouvillova formula)**.** Za determinanto Wronskega $W = W_{y_1,y_2}$ dveh rešitev y_1, y_2 enačbe $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ velja *Liouvillova formula*

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$$

za $\forall x \in I$, kjer je x_0 poljubna točka iz intervala I, nad katerim opazujemo enačbo. Torej je W bodisi enaka 0 bodisi nima nobene ničle na I.

Trditev 6.2. Rešitvi y_1, y_2 enačbe $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ sta na intervalu I *linearno neodvisni* natanko tedaj, ko njuna determinanta Wronskega W ni identično enaka 0 na I, kar je natanko takrat, ko W nima nobene ničle na I.

Izrek 6.2. Množica vseh rešitev enačbe $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, je *dvorazsežen vektorski prostor.* Če sta torej y_1 in y_2 linearno neodvisni rešitvi, potem lahko vsako rešitev y izrazimo kot njuno *linearno kombinacijo*, $y = c_1y_1 + c_2y_2$, kjer sta c_1, c_2 primerni konstanti (v splošnem kompleksni, sicer pa realni, če nas zanimajo le realne rešitve in sta y_1 in y_2 realni funkciji).

Trditev 6.3. Naj bo y_p *partikularna* rešitev enačbe $y'' + py' + qy = r$ (torej neka konkretna rešitev), y pa poljubna nadaljna rešitev. Potem je funkcija

$$y_h := y - y_p$$

rešitev ustrezne *homogene* enačbe $y'' + py' + qy = 0$.
Velja tudi obratno: za vsako rešitev y_h *homogene* enačbe $y'' + py + +gy = 0$ je vsota

$$y = y_p + y_h$$

rešitev enačbe $y'' + py' + qy = r$.

6.3 Enačbe s konstantnimi koeficienti in Eulerjeva enačba

Definicija 6.10. Enačbo oblike

$$x^2y'' + pxy' + qy \;=\; 0, \quad (x > 0),$$

kjer ta p in q konstanti, imenujemo (homogena) *Eulerjeva enačba.* To enačbo rešujemo z vplejavo nove neodvisne spremenljivke prek zveze $x = e^t$, kjer dobimo zvezi $y' = e^{-t}\dot{y}$ in $y'' = e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y})$, kjer je $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$ in dobimo

$$\ddot{y} + (p-1)\dot{y} + qy \;=\; 0.$$

6.4 Sistemi linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti

Definicija 6.11. *Sistem linearnih diferencialnih enačb prvega reda*

$$\dot{x}_i \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(t)x_j + f_i(t), \quad i = 1, \ldots, n,$$

kjer so $a_{i,j}$ in f_i dane zvezne spremenljivke t, x_i pa neznanke, lahko zapišemo kot

$$\frac{d}{dt}\vec{x} \;=\; A(t)\vec{x} + \vec{f}(t),$$

kjer smo vpeljali matrično funkcijo $A(t) := [a_{i,j}(t)]$ ter vektoski funkciji $\vec{f}(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))^T$ in $\vec{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$. Vse te funkcije so definirane na kakem intervali (a, b), ki je lahko tudi poltrak ali pa cela realna os $\mathbb{R}$.

Kadar je $\vec{f} \equiv 0$, imenujemo sistem *homogen*. V primerih, ko je matrika A konstantna, lahko homogen sistem $\frac{d}{dt}\vec{x} = A\vec{x}$ rešimo elementarno. Tedaj namreč za matrično funkcijo $e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$ (vrsta konvergira za $\forall t \in \mathbb{R}$) velja enakost

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) \;=\; Ae^{tA}.$$

Zato za njen inverz e^{-tA} velja

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-tA}\vec{x}\right) \;=\; \vec{0},$$

kar pove, da je vektorska funkcija $t \mapsto e^{-tA}\vec{x}$ konstantna, recimo enaka $\vec{c}$, torej

$$\vec{x} \;=\; e^{tA}\vec{c}.$$

Trditev 6.4. Naj bo A matrika reda 2×2. Če se da A diagonalizirati in sta λ_1, λ_2 njeni lastni vrednosti, je splošna rešitev sistema $\frac{d}{dt}\vec{x} = A\vec{x}$ oblike

$$\vec{x} \;=\; e^{\lambda_1 t}\vec{a} + e^{\lambda_2 t}\vec{b},$$

kjer sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ lastna vektorja matrike A, ki pripadata lastnima vrednostma λ_1 in λ_2 (zaporedoma). Če pa se A ne da diagonalizirati, potem je splošna rešitev že omenjenega sistema oblike

$$\vec{x} = e^{\lambda t}(\vec{a} + t\vec{b}),$$

kjer je λ lastna vrednost matrike A, $\vec{b}$ pripadajoči vektor, $\vec{a}$ pa tak vektor, da je $(A - \lambda I)\vec{a} = \vec{b}$.

7 METRIČNI PROSTORI

7.1 Metrika, krogla, odprt in zaprte množice

7.1.1 Metrika

Definicija 7.1. *Metrični prostor* je *neprazna* množica M, opremljena s preslikavo

$$d : M \times M \to [0, \infty),$$

ki ima naslednja lastnosti za $\forall x, y, z \in M$:

1. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (trikotniška neenakost)
2. $d(y, x) = d(x, y)$
3. $d(x, y) = 0 \iff x = y$

Preslikavi d pravimo *razdalja* ali *matrika*, elemente množice M pa imenujemo tudi *točke*. Pogosto bomo rekli, da je metrični prostor kar par (M, d).

Definicija 7.2. Naj bo M metrični prostor z metriko d. Za $\forall a \in M$ in za $\forall r \in [0, \infty)$ imenujemo množico $B(a, r) = x \in M : d(x, a) < r$ *odprta krogla* s središčem a in polmerom r. Množico $\overline{B}(a, r) = x \in M : d(x, a) \leq r$ pa imenujemo *zaprta krogla* s središčem a in polmerom r.

Očitno je $B(a, r) \subseteq \overline{B}(a, r) \subseteq B(a, r + \varepsilon)$ za $\forall \varepsilon > 0$.

7.1.2 Odprte in zaprte množice

Definicija 7.3. Podmnožica G metričnega prostora M je *odprta*, če za $\forall a \in G$ obstaja tako realno število $r > 0$, da je $B(a, r) \subseteq G$. Podmnožica F je *zaprta* v M, če je njen komplement F^C *odprta* množica. Intuitivno: v ravnini (ali pa prostoru) so odprte tiste podmnožice, ki ne vsebujejo svojega roba, zaprte pa tiste, ki svoj rob vsebujejo.

Posledica. Množici M in $\emptyset$ sta hratki odrti in zaprti množici. V splošnem obstajajo tudi podmnožice, ki niso niti odprte, niti zaprte.

Trditev 7.1. *Odprta* krogla je odprta množica, *zaprta* krogla je zaprta množica v vsakem metričnem prostoru M.

Trditev 7.2.

1. Unija poljubne družine *odprtih* podmnožic metričnega prostora je odprta podmnožica.
2. Presek končno mnogo *odprtih* podmnožic metričnega prostora je odprta podmnožica.

Posledica.

1. Presek poljubne družine *zaprtih* podmnožic metričnega prostora je zaprta podmnožic je zaprta podmnožica.
2. Unija končno mnogo *zaprtih* podmnožic je zaprta podmnožica.

Posledica. Podmnožica v metričnem prostoru je *odprta* natanko tedaj, ko se da izraziti kot unija odprtih krogel.

7.1.3 Rob, notranjost in zaprtje

Definicija 7.4.

1. Točka $a \in S$ je *notranja točka* množice S, če je $B(a,r) \subseteq S$ za kak $r > 0$. Množica $\mathring{S}$ vseh notranjih točk množice S imenujemo *notranjost* množice S.
2. Točka $a \in M$ je *robna točka* za S, če vsaka odprta krogla $B(a,r)$ seka takò množico S kot njen komplement:
$$B(a,r) \cap S \neq \emptyset \;\text{ in }\; B(a,r) \cap S^C \neq \emptyset \;\text{ za } \forall r > 0.$$
Množico ∂S vseh robnih točk imenujemo *rob* množice S.

3. Točka $a \in M$ je *zunanja* za S, če je $B(a, r) \subseteq S^C$ za kak $r > 0$.

4. *Zaprtje* $\overline{S}$ množice S je
$$\overline{S} \;=\; S \cup \partial S.$$

Posledica.

- Množica je odprta $\iff$ vse njene točke so notranje
- Notranjost vsake množice je odprta množica.
- Točka $a \in M$ je v zaprtju podmnožice S $\iff$ $B(a, r) \cap S \neq \emptyset$ za $\forall r > 0$.
- $\overline{S} = \mathring{S} \cup \partial S$

Trditev 7.3. Zaprtje podmnožice S v metričnem prostoru M je enako preseku vseh zaprtih podmnožic v M, ki vsebujejo S. Torej je podmnožica S zaprta natanko tedaj, ko je $\overline{S} = S$.

Definicija 7.5. Podmnožico S v metričnem prostoru M imenujemo *povsod gosta podmnožica*, če je $\overline{S} = M$.

Definicija 7.6. *Okolica* točke a v metričnem prostoru M je podmnožica $G \subseteq M$, ki vsebuje kako odprto kroglo $B(a, r)$ s pozitivnim polmerom r.

7.2 Polnost

Definicija 7.7. Zaporedje (a_n) v metričnem prostoru (M, d) je *konvergentno*, če obstaja taka točka $a \in M$, da za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da je
$$d(a_n, a) < \varepsilon \quad \text{za} \quad \forall n \geq n_0.$$

Tedaj imenujemo točko a *limita zaporedja* (a_n) in zapišemo $a = \lim_{n \to \infty} a_n$. Zaporedje, ki ni konvergentno, imenujemo *divergentno*.

Definicija 7.8. Zaporedje (a_n) v metričnem prostoru (M, d) je *Cauchyjevo*, če za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da je

$$d(a_n, a_m) < \varepsilon \quad \text{za} \quad \forall n, m \geq n_0.$$

Definicija 7.9. Metrični prostor (M, d) je *poln*, če je vsako Cauchyjevo zaporedje v njem konvergentno (z limito v M).

Trditev 7.4. *Neprazna* podmnožica F *polnega* metričnega prostora (M, d) je poln metrični prostor (za razdaljo d) natanko tedaj, ko je *zaprta*.

Izrek 7.1. Za $\forall m = 1, 2, \ldots$ je $\mathbb{R}^m$ (z običajno evklidsko normo) poln prostor. Prav tako je poln tudi prostor $\mathbb{C}^m$.

Definicija 7.10. *Diameter* ali *premer* podmnožice S metričnega prostora (M, d) je

$$d(S) \; := \; \sup \{d(x, y) : \; x, y \in S\}.$$

Izrek 7.2 (Cantorjev izrek o preseku)**.** Naj bo (M, d) *poln* metrični prostor, $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \ldots$ pa *padajoče* zaporedje *nepraznih zaprtih* podmnožic v M, katerih diametri $d(F_n)$ konvergirajo proti 0. Potem presek

$$F \; := \; \cap_{n=1}^{\infty} F_n$$

vsebuje natanko eno točko.

7.3 Kompaktnost

Definicija 7.11. Točka $s \in M$ je stekališče zaporedja (a_n) v metričnem prostoru (M, d), če je za $\forall r > 0$ v krogli $B(s, r)$ neskončno mnogo členov zaporedja. Pri tem štejemo vsak člen tolikokrat, kolikokrat nastopa v zaporedju.

Definicija 7.12. Metrični prostor M je *kompakten*, če ima vsako zaporedje iz M stekališče v M. Podmnožica metričnega prostora M je *kompaktna*, če je kompaktna kot metrični prostor za metriko, ki jo podeduje iz M.

Trditev 7.5. *Zaprta* podmnožica *kompaktnega* metričnega prostora je kompaktna.

Lema 4. Vsak *kompakten* metrični prostor je poln.

Definicija 7.13. Podmnožica S metričnega prostora (M, d) je *omejena*, če je vsebovana v kaki krogli, torej če obstaja kako tako realno število $r > 0$, da je $S \subseteq B(a, r)$ za kako točko $a \in M$.

Izrek 7.3 (Heine-Borel)**.** Podmnožica v $\mathbb{R}^n$ je *kompaktna* natanko tedaj, ko je *zaprta* in *omejena*.

7.4 Zvezne preslikave

7.4.1 Zveznost

Definicija 7.14. Naj bosta (M_1, d_1) in (M_2, d_2) metrična prostora. Preslikava $f : M_1 \to M_2$ je *zvezna* v točki $a \in M_1$, če za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za $\forall x \in M_1$ iz $d_1(x, a) < \delta$ sledi

$$d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Z drugimi besedami, f je zvezna v točki a, če za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$f(B(a, \delta)) \ \subseteq \ B(f(a), \varepsilon).$$

Preslikava f je *zvezna*, če je zvezna v vsaki točki $a \in M_1$.

Trditev 7.6. Preslikava $f : M_1 \to M_2$ je *zvezna* v točki $a \in M_1$ natanko tedaj, ko za vsako zaporedje $(a_n)_n$ v M_1, ki konvergira proti a, konvergira zaporedje $(f(a_n))_n$ proti $f(a)$.

Trditev 7.7. Preslikava $f : M_1 \to M_2$ je *zvezna* natanko tedaj, ko je $f^{-1}(G)$ *odprta* množica v M_1 za vsako *odprto* podmnožico $G \subseteq M_2$.

Posledica. Preslikava $f : M_1 \to M_2$ je *zvezna* natanko tedaj, ko je $f^{-1}(F)$ *zaprta* množica v M_1 za vsako *zaprto* množico $F \subseteq M_2$.

Trditev 7.8. Če je $f : M_1 \to M_2$ *zvezna* preslikava, je $f(K)$ *kompaktna* podmnožica v M_2 za vsako *kompaktno* podmnožico $K \subseteq M_1$.

Definicija 7.15. Preslikava $f : M_1 \to M_2$ je *omejena*, če je $f(M_1)$ *omejena* podmnožica v M_2.

Posledica. Naj bo $f : M_1 \to M_2$ *zvezna* preslikava med metričnima prostoroma. Slika $f(K)$ vsake *kompaktne* podmnožice $K \subseteq M_1$ je *omejena* v M_2.

Trditev 7.9. Kompozitum *zveznih* preslikav je *zvezna* preslikava.

Definicija 7.16. *Bijektivno zvezno* preslikavo, katere inverz je *zvezen*, imenujemo *homeomorfizem.* Metrična prostora M_1 in M_2 sta *homeomorfna*, če obstaja kak homeomorfizem $f : M_1 \to M_2$.

7.4.2 Enakomerna zveznost

Definicija 7.17. Preslikavo $f : M_1 \to M_2$ med metričnima prostoroma (M_1, d_1) in (M_2, d_2) je *enakomerno zvezna*, če za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsaki točki $x, y \in M_1$ iz $d_1(x, y) < \delta$ sledi

$$d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Trditev 7.10. Če je (M_1, d_1) *kompakten* metrični prostor, je vsaka *zvezna* preslikava $f : M_1 \to M_2$ *enakomerno zvezna* za vsak metrični prostor (M_2, d_2).

7.4.3 Bonus meme: Negibne točke kontrakcij

Definicija 7.18. Preslikava $f : M \to M$ metričnega prostora (M, d) vase je *skrčitev* ali *kontrakcija*, če obstaja kako število $q \in [0, 1)$, da je

$$d(f(x), f(y)) \;\leq\; q \cdot d(x, y)$$

za vsaka $x, y \in M$. Očiteno je vsaka kontrakcija (enakomerno) zvezna.

Definicija 7.19. Točka $x \in M$ je *negibna* ali *fiksna* za preslikavo $f : M \to M$, če $f(x) = x$.

Izrek 7.4 (Banachov izrek o skrčitev)**.** Za vsako kontrakcijo $f : M \to M$ *polnega* metričnega prostora (M, d) obstaja natanko ena negibna točka $a \in M$.

8 KOMPLEKSNA ANALIZA

8.1 Poti in območja v kompleksni ravnini

Definicija 8.1. Naj bo D *odprta* podmnožica kompleksne ravnine $\mathbb{C}$. *Pot* v D je *odsekoma zvezno odvedljiva* preslikava $\gamma : [a,b] \to D$, kjer je $[a,b]$ *zaprt* interval v $\mathbb{R}$. Množico D imenujemo *s potmi povezano*, če za vsaki točki $z, w \in D$ obstaja taka pot γ v D, da je

$$\gamma(a) \;=\; z \quad \text{in} \quad \gamma(b) \;=\; w.$$

Opomba.

1. Običajno pojem povezanosti s potmi definiramo brez zahteve, da mora biti preslikava γ *odsekoma odvedljiva*, zadošča le *zveznost*, vendar se je lahko prepričati, da sta za *odprte* množice D v ravnini definiciji ekvivalentno. [1]

2. Vsaka s potmi povezana množica D je *povezana* [2] v naslednjem smislu: edini razcep množice D na unijo $D = D_1 \cup D_2$ dveh *disjunktnih odprtih (relativno v D)* podmnožic je, ko je ena od množic D_i *prazna*, druga pa enaka D. Za *odprte* množice v ravnini sta pojma *povezanosti* in *povezanosti s potmi* ekvivalentna, torej D je *povzana* natanko takrat, ko je *s potmi povezana.*

Definicija 8.2. *Odprto povezano* množico v kompleksni ravnini $\mathbb{C}$ bomo imenovali *območje.*

Definicija 8.3. *Razširjena* kompleksna ravnina je $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Okolice točke ∞ so množice oblike $(\mathbb{C} \setminus K) \cup \{\infty\}$, kjer je K *kompaktna* podmnožica v $\mathbb{C}$.

---

[1] Vsako zvezno preslikavo $\gamma : [a,b] \to D$ namreč lahko poljubno dobro aproksimiramo z *odsekoma linearno* preslikavo, se pravi s poligonsko krivuljo. Še več, vsako tako pot je mogoče poljubno natančno aproksimirati z *zvezno odveljivo* potjo, zato bi se v definiciji povezanosti s potmi za *odprte* množice lahko omejili na *zvezno odvedljive* poti.

[2] Pomeni, da je iz enega kosa.

8.2 Odvedljivost v kompleksnem smislu in konformnost

8.2.1 Kompleksna odvedljivost

Definicija 8.4. Naj bo $f : D \to \mathbb{C}$ funkcija, definirana na *odprti* množici $D \subseteq \mathbb{C}$. Pravimo, da je f *odvedljiva v kompleksnem smislu* ali *holomorfna* v točki $z \in D$, če obstaja limita

$$f'(z) \ := \ \lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}.$$

To limito imenujemo *odvod funkcije f v točki z*. Če je f odvedljiva v vsaki točki $z \in D$, rečemo, da je f *holomorfna* na D

Trditev 8.1. Funkcija f, podana s potenčno vrsto

$$f(z) \ = \ a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (a_n) \in \mathbb{C},$$

je *holomorfna* na krogu $|z| < R$, kjer je njen odvod enak

$$f'(z) \ = \ g(z) \ := \ \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Tukaj je R konvergenčni polmer vrste $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Posledica. Če vrsta $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n$ konvergira na krogu $|z - \alpha| < R$, potem je funkcija f *neskončnokrat odvedljiva (v kompleksnem smislu)* in

$$f^{(k)}(z) \ = \ \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1) a_n (z - \alpha)^{n-k}.$$

Torej je

$$a_k \ = \ \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}.$$

8.2.2 Konformne preslikave

Definicija 8.5. Naj bo $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ kaka *zvezno odvedljiva* pot, ki naj gre skozi točko $z_0 \in \mathbb{C}$, torej $z_0 = \gamma(t_0)$ za kak $t_0 \in [0,1]$. Tangentni vektor v točki z_0 na pot γ je tedaj (gledan kot kompleksno število) enak $\dot{\gamma}(t_0)$. Nadalje naj bo f funkcija, ki je definirana in *holomorfna* na kakem območju, ki vsebuje množico $[\gamma] := \gamma([0,1])$. Tangentni vektor v točki $f(z_0)$ na pot $f \circ \gamma$ je potem

$$\frac{d}{dt}\left(f \circ \gamma\right)(t_0) \;=\; f'(z_0)\dot{\gamma}(t_0).$$

Pri tem privzamemo, da je $f'(z_0) \neq 0$. Dolžina tega tangentnega vektorja je torej

$$|f'(z_0)||\dot{\gamma}(t_0)|.$$

njegov argument pa $\arg \dot{\gamma}(t_0) + \arg f'(z_0)$.

Za dve taki, v točki z_0 sekajoči poti γ_1 in γ_2, je kot med njima [3] enak

$$\psi \;:=\; \arg \dot{\gamma_2}(t_2) - \arg \dot{\gamma_1}(t_1).$$

Kot med potema $f \circ \gamma_1$ in $f \circ \gamma_2$ v presečišču $f(z_0)$ je torej

$$\begin{aligned} &\arg \frac{d}{dt}\left(f \circ \gamma_2\right)(t_2) - \arg \frac{d}{dt}\left(f \circ \gamma_1\right)(t_1) \;= \\ =\; &(\arg f'(z_0) + \arg \dot{\gamma_2}(t_2)) - (\arg f'(z_0) + \arg \dot{\gamma_1}(t_1) \;=\; \psi \end{aligned}$$

Torej preslikava f ohranja kote med krivuljami. Zato imenujemo *holomorfne* preslikave z neničelnim odvodom tudi *konformne preslikave*.

8.3 Cauchy-Riemannovi enakosti

Izrek 8.1. Naj bosta $u(x,y)$ in $v(x,y)$ *realni* funkciji na *odprti* množici D v ravnini. Če je funkcija $f = u + iv$ *holomorfna* na D, sta u in v *odvedljivi* [4] in veljata Cauchy-Riemannovi enakosti

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{in} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

[3] Kot med njunima tangentnima vektorjema $\dot{\gamma_j}(t_j)$, kjer je $\gamma_j(t_j) = z_0$, $j = 1, 2$

[4] V realnem smislu.

V obratno smer pa velja: če so partialni odvodi $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ in $\frac{\partial v}{\partial y}$ *zvezni* na D in veljata Cauchy-Riemannovi enakosti, potem je f *holomorfna* na D in

$$f' \;=\; \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Definicija 8.6. *Dvakrat zvezno odvedljivo* funkcijo, definirano na odprti množici $D \subseteq \mathbb{R}^n$, imenujemo *harmonična* na D, če je

$$\Delta u \;:=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_j}^2}(u) \;=\; 0 \quad (x \in D).$$

Operator Δ imenujemo *Laplaceov operator.*

Trditev 8.2. Realni in imaginarni del *holomorfne* funkcije sta *harmonični* funkciji. Na *enostavno povezanem* območju je vsaka harmonična funkcija realni del kake holomorfne funkcije.

8.4 Integriranje kompleksnih funkcij

Definicija 8.7. *Integral kompleksne funkcije* $f = u + iv$, kjer sta u in v *realni integrabilni* funkciji na intervalu $[a, b]$, definiramo kot

$$\int_a^b f(t)dt \;=\; \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt.$$

Funkcijo $f = u+iv$ imenujemo *integrabilna*, če sta integrabilni funkciji u in v.

Integral kompleksnih funkcij ima podobne lastnosti kot integral realnih funkcij, npr.

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\, dt \;=\; \alpha \int_a^b f dt + \beta \int_a^b g dt$$

za poljubni konstanti $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ in *integrabilni* kompleksni funkciji f in g. Integral kompleksne funkcija f na intervalu $[a, b]$ bi lahko ekvivalentno definirali tudi kot limito Riemannovih vsot

$$\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(t_j - t_{j-1}), \quad \xi_j \in [t_{j-1}, t_j],$$

ko gre širina $\max_{1\leq j\leq n}(t_j - t_{j-1})$ delitve

$$a = t_1 < t_1 < \ldots < t_{j-1} < t_j < \ldots < t_n = b$$

intervala $[a,b]$ proti 0.

Trditev 8.3.

$$\left|\int_a^b f dt\right| \;\leq\; \int_a^b |f| dt, \quad (a \leq b).$$

Definicija 8.8. Če je $\gamma : [a,b] \to D$ *zvezno odvedljiva*, $f : D \to \mathbb{C}$ pa *zvezna* funkcija, kjer je $D \subseteq \mathbb{C}$ poljubna množica, ki vsebuje $\gamma([a,b])$, definiramo *krivuljni integral* kot

$$\int_\gamma f(z)dz \;:=\; \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Če je $\gamma : [a,b] \to D$ poljubna pot [5], pa najprej $[a,b]$ razdelimo na podintervale $[t_{j-1}, t_j]$, na katerih je γ *zvezno odvedljiva*, in definiramo $\int_\gamma f(z)dz$ kot vsoto integralov $\int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$.

Trditev 8.4. Če je $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ *naraščujoča zvezno odvedljiva bijekcija*, je

$$\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)dz \;=\; \int_\gamma f(z)dz.^6$$

Izrek 8.2.

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \;\leq\; \int_\gamma |f(z)|dz.$$

[5] Torej le *odsekoma zvezno odvedljiva*

[6] Krivuljni integral je torej neodvisen od parametrizacije krivulje.

Definicija 8.9. Poti $\gamma : [a,b] \to D$ *nasprotna* je pot

$$\gamma^- : [a,b] \to D, \quad \gamma^- \ = \ \gamma(a+b-t).$$

Ko teče t od a do b, potuje točja $\gamma(t)$ od $\gamma(a)$ do $\gamma(b)$, točka $\gamma^-(t)$ pa v nasprotni smeri od $\gamma(b)$ do $\gamma(a)$.

Trditev 8.5.

$$\int_{\gamma^-} f(z)dz \ = \ -\int_\gamma f(z)dz.$$

Trditev 8.6.

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)dz \ = \ \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Definicija 8.10. Pot $\gamma : [a,b] \to D$ je *sklenjena*, če je $\gamma(b) = \gamma(a)$. Če imata poti γ_1 in γ_2 isto začetno in isto končno točko, potem je $\gamma_1 + {\gamma_2}^-$ sklenjena pot.

Lema 5. Naj bo $f : D \to \mathbb{C}$ *(zvezna)* funkcija. Potem je

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz \ = \ \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

za vsaki dve poti γ_1 in γ_2 v D, ki imata isto začetno in isto končno točko, natanko tedaj, ko je

$$\int_\gamma f(z)dz \ = \ 0$$

za vsako *sklenjeno* pot γ v D.

Lema 6. Za vsako *holomorfno* funkcijo $F : D \to \mathbb{C}$ z zveznim odvodom in vsako pot $\gamma : [a,b] \to D$ je

$$\int_\gamma F'(z)dt \ = \ F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).^7$$

[7] Privzamemo, da je F' zvezna funkcija.

Izrek 8.3. Naj bo $f : D \to \mathbb{C}$ taka *zvezna* funkcija na območju D, da je

$$\int_\gamma f(z)dz \;=\; 0$$

za vsako sklenjeno pot γ v D. Potem obstaja taka *holomorfna* funkcija F na D, da je

$$f = F'.$$

8.5 Ovojno število

Definicija 8.11. Za sklenjeno pot γ v $\mathbb{C}$ in vsako točko α, ki ne leži na sliki poti γ, je *ovojno število* (ali *indeks*) definirano kot

$$I_\gamma(\alpha) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-\alpha}.$$

8.6 Cauchyjeva-Greenova formula

Izrek 8.4 (Cauchyjev izrek)**.** Naj bo γ taka *sklenjena* pot v *neprazni odprti* množici $D \subseteq \mathbb{C}$, da je $I_\gamma(w) = 0$ za $\forall w \in \mathbb{C}\backslash D$. Potem za vsako *v kompleksne smislu odvedljivo* funkcijo $f : D \to \mathbb{C}$ velja

$$\int_\gamma f(z)dz \;=\; 0.$$

Izrek 8.5 (Cauchyjeva formula)**.** Naj bo γ taka *sklenjena* pot v *neprazni odprti* množici $D \subseteq \mathbb{C}$, da je $I_\gamma(\zeta) = 0$ za $\forall\zeta \in \mathbb{C} \setminus D$. Potem za vsako *holomorfno* funkcijo $f : D \to \mathbb{C}$ velja

$$I_\gamma(w)f(w) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}dw$$

za $\forall w \in D \setminus [\gamma]$.

Posledica (Cauchyjeva formula za kolobar)**.** Naj bo f *holomorfna* funkcija na kaki okolici kolobarja $K := \{z \in \mathbb{C} : \ r \leq |z-\alpha| \leq R\}$ [8]. Potem za vsak w iz notranjosti kolobarja K [9] velja

$$f(w) \ = \ \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-\alpha|=R}\frac{f(z)}{z-w}dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-\alpha|=r}\frac{f(z)}{z-\alpha}dz,$$

kjer sta oba integrala po *pozitivno orientiranih* krožnicah. [10]

Posledica. Če je torej f holomorfna na kaki okolici kroga $|z-\alpha| \leq R$, potem je za vsak w v notranjosti tega kroga

$$f(w) \ = \ \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-\alpha|=R}\frac{f(z)}{z-w}dz.$$

Posledica. *Holomorfna* funkcija na območju D je *neskončnokrat odvedljiva.* Za $\forall n \in \mathbb{N}$ in vsak *zaprt* krog $\overline{D}(\alpha, r)$, vsebovan v D, velja za $\forall w \in D(\alpha, r)$ enakost

$$f^{(n)}(w) \ = \ \frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z-\alpha|=r}\frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}dz.$$

Če je torej $|f|$ *omejena*, se pravi $|f(z)| \leq M$ za kak M in $\forall z \in D$, potem velja *Cauchyjeva ocena za odvod*

$$|f^{(n)}(\alpha)| \ \leq \ \frac{Mn!}{r^n}.$$

Posledica (Liouvillow izrek)**.** *Omejena holomorfna* funkcija f na $\mathbb{C}$ je konstantna.

Posledica (Osnovni izrek algebre)**.** Vsak *nekonstanten kompleksen* polinom

$$p(z) \ = \ z^n + a_{n_1}z^{n-1} + \ldots + a_0, \quad (n \geq 1)$$

ima vsaj eno kompleksno ničlo.

---

[8] Kjer sta $r < R$ *nenegativni* konstanti.

[9] Torej $r < |w-\alpha| < R$

[10] Kolobar leži potem na desni strani notranje krožnice, od tod predznak $-$ pred drugim integralom.

8.7 Razvoj v Laurentovo in v Taylorjevo vrsto

Izrek 8.6 (Laurentov razvoj)**.** Funkcijo f, *holomorfno* na kaki okolici kolobarja $K = \{z \in \mathbb{C} : \ r \leq |z-\alpha| \leq R\}$, lahko za vsak w iz notranjosti kolobarja razvijemo v *Laurentovo vrsto*

$$f(w) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} c_n (w-\alpha)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (w-\alpha)^n,$$

kjer je

$$c_n \ = \ \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\alpha|=R} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz \quad \textit{za } n \geq 0$$

in

$$c_n \ = \ \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\alpha|=r} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz \quad \textit{za } n \leq -1.$$

Prva vrsta v $f(w)$ [11] konvergira za vse w znotraj kroga $|w-\alpha| < R$, druga [12] pa ua vse w zunaj kroga $|w-\alpha| \leq r$. Vrsti predstavljata *holomorfni* funkciji na območjih konvergence.

Posledica (Taylorjev razvoj)**.** Funkcijo f, ki je *holomorfna* na okolici *zaprtega* kroga $\overline{D}(\alpha, R)$, lahko razvijemo v *Taylorjevo vrsto*

$$f(w) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} c_n (w-\alpha)^n \quad (|w-\alpha| < R),$$

kjer je

$$c_n \ = \ \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\alpha|=R} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz$$

in kjer integriramo krožnici po pozitivni smeri.

Trditev 8.7. Ničle *holomorfne* funckije $f : D \to \mathbb{C}$ na območju D nimajo stekališč v D, če f ni identično enaka 0.

[11] Regularni del Laurentovega razvoja.
[12] Glavni del Laurentovega razvoja.

Posledica. Če se *holomorfni* funkciji f in g, definirani na območju D, ujemata na kaki podmnožici $S \subseteq D$, ki ima kako stekališče v D, potem je $g = f$.

Trditev 8.8. Naj bo α *izolirana singularna* točka *holomorfne* funkcije f. Če je f *omejena* v kaki okolici točke α, potem je α *premostljiva singularna* točka. [13]

Izrek 8.7 (Casorati-Weierstrass)**.** Če je α *bistvena singularna* točka funkcije f [14], potem za $\forall w \in \mathbb{C}$ ter $\forall \varepsilon > 0$ in $\forall \delta > 0$ obstaka tak $z \in D(\alpha, \delta) \setminus \{\alpha\}$, da je

$$|f(z) - w| < \varepsilon.$$

[13] Glej opombo v skripti.

[14] Ta je sicer *holomorfna* na kaki okolici te točke, razen v α