Analiza 3 - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar

2020/21

Kazalo

1 PARAMETRIČNO PODANE KRIVULJE

Trditev 1.1. Če je $\vec{r}$ *odvedljiva* vektorska funkcija (njene komponente x, y in z so odvedljive funkcije spremenljivke t), potem je

$$\dot{\vec{r}}(t_0) = (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0))$$

tangentni vektor na krivuljo $t \mapsto \vec{r}(t)$ v točki $\vec{r}(t_0)$, če velja $\dot{\vec{r}}(t_0) \neq 0$.

Trditev 1.2. Če je $\vec{r}$ *zvezno odvedljiva* vektorska funkcija na intervalu $[a, b]$ (za $a < b$), je potem *dolžina* krivulje, ki jo določa, enaka

$$s = \int_a^b \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt.$$

To velja tudi za funkcijo, ki so le *odsekoma zvezne.* Opazimo tudi, da je zgornja dolžina neodvisna od parametrizacije krivulje.

Trditev 1.3. Naj bo $\vec{r}$ *zvezno odvedljiva* vektorska funkcija, definirana na intervalu $[a, b]$ (za $a < b$) in naj bo $\psi : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ *zvezno odvedljiva bijekcija*, tako da $t = \psi(\tau)$ preteče interval $[a, b]$, ko τ preteče interval $[\alpha, \beta]$ (za $\alpha < \beta$). Potem je

$$\int_a^b \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt = \int_\alpha^\beta \|\frac{d}{d\tau}\vec{r}(\psi(\tau))\| d\tau.$$

2 PLOSKVE V $\mathbb{R}^3$

Definicija 2.1 (Ploskev)**.** Podmnožica $P \subseteq \mathbb{R}^3$ je *ploskev*, če za vsako točko $\vec{r} \in P$ obstaja taka okolica $H \subseteq \mathbb{R}^3$, da je $P \cap H$ graf kake zvezno odvedljive funkcije $\phi : D \to \mathbb{R}$, definirane na kaki *odprti* podmnožici $D \subseteq \mathbb{R}^2$.
To pomeni, da se na $P \cap H$ ena od koordinat x, y, z da *enolično* izraziti kot funkcija preostalih, torej da je $P \cap H$ ene od oblik:

$$P \cap H = \{(x, y, \phi(x, y)) \mid (x, y) \in D\},$$

$$P \cap H = \{(x, \phi(x, z), y) \mid (x, z) \in D\},$$

$$P \cap H = \{(\phi(y, z), y, z) \mid (y, z) \in D\}.$$

Trditev 2.1 (Izrek o implicitni funkciji)**.** Naj bo $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *zvezno odvedljiva* funkcija in privzemimo, da je množica $P = g^{-1}(0)$ *neprazna.* Če je

$$\nabla g(\vec{r}) \neq 0$$

za $\forall \vec{r} \in P$ je P *ploskev.*

Enačba oblike $\vec{r} = \vec{r}(t)$ $(t \in [a, b] \subseteq \mathbb{R},\ a < b)$ predstavlja krivuljo v $\mathbb{R}^3$. Privzeli bomo, da je pri tem $\vec{r}$ *zvezno odvedljiva* funkcija spremenljivke t. Taka krivulja leži na ploskvi $P = g^{-1}(0)$ natanko tedaj, ko je $g(\vec{r}(t)) = 0$ za $\forall t \in [a, b]$. Ko to enakost odvajamo po t, dobimo

$$\nabla g(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = 0.$$

Ta enakost pomeni, da je vektor $\nabla g(\vec{r}(t))$ pravokoten na tangentni vektor $\dot{\vec{r}}(t)$ krivulje v točki $\vec{r}(t)$.

Če sedaj izberemo poljubno točko $\vec{r}_0$ na ploskvi P in opazujemo vse krivulje na ploskvi P, ki gredo skozi točko $\vec{r}_0$ (vsaka taka krivulja $\vec{r} = \vec{r}(t)$ zadošča pogoju $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ za kak t_0), vidimo, da je vektor $\nabla g(\vec{r}_0)$ pravokoten na tangentni vektor $\dot{\vec{r}}(t_0)$ vsake take krivulje.

To pomeni, da mora biti vektor $\nabla g(\vec{r}_0)$ pravokoten na ploskev P. To velja za vsako točko $\vec{r}_0 \in P$.

Definicija 2.2 (Normalni vektor)**.** Vektor $\nabla g(\vec{r})$ imenujemo *normalni vektor* na ploskev $P = g^{-1}(0)$ v točki $\vec{r} \in P$. Ravnino $T_{\vec{r}}P$ z normalnim vektorjem $\nabla g(\vec{r})$ skozi točko $\vec{r}$ na ploskvi P pa imenujemo *tangentna ravnina* na ploskev P v točki $\vec{r}$.

Tangentna ravnina na P skozi točko $\vec{r}$ je torej vzporedna vsem tangentnim vektorjem v točki $\vec{r}$ na krivulje skozi $\vec{r}$ na ploskvi P.

3 INTEGRALI S PARAMETROM

Definicija 3.1 (Integral s parametrom)**.** Naj bo f *zvezna funkcija* dveh spremenljivk, definirana na pravokotniku $P = [a, b] \times [c, d]$ ($a < b$, $c < d$). Integral

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)dx \tag{1}$$

je funkcija spremenljivke y. Tak integral imenujemo *integral s parametrom y.*

Trditev 3.1. Če je f *zvezna funkcija* na pravokotniku $P = [a, b] \times [c, d]$, je funkcija F (definirana z (1)) *zvezna* na intervalu P.

Izrek 3.1. Naj bo f *zvezna* na pravokotniku $P = [a, b] \times [c, d]$ in privzemimo, da obstaja parcialni odvod $\frac{\partial f}{\partial y}$, ki naj bo *zvezen* na P. Potem je funkcija F (podana z (1)) *odvedljiva* in velja

$$F'(y) = \frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx. \tag{2}$$

3.1 Izlimitirani integrali s parametrom

Definicija 3.2. Integral $F(y) = \int_a^\infty f(x, y)dx$ je *enakomerno konvergenten* za $y \in S \subseteq \mathbb{R}$, če za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists M \in \mathbb{R}$, da za $\forall b \geq M$ in $\forall y \in S$ velja

$$\left| \int_b^\infty f(x, y)dx \right| < \varepsilon.$$

Za razliko od navadne konvergence mora tukaj obstajati tak M, ki je istočasno ustrezen za $\forall y \in S$, torej je $M = M_\varepsilon$ odvisen le od ε, ne pa tudi od y. Pri navadni konvergenci bi bil veljalo $M = M_{\varepsilon,y}$.

Trditev 3.2. Če je f *zvezna* funkcija na pasu $P = [a, \infty) \times [c, d]$ in integral

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y)dx$$

enakomerno konvergenten za $y \in [c, d]$, je F *zvezna funkcija* na $[c, d]$.

3.2 Dvojni in dvakratni integrali

Definicija 3.3. Naj bo $P = [a, b] \times [c, d]$ in $f : P \to \mathbb{R}$ funkcija. Delitev $D_{[a,b]}$ intervala $[a, b]$ je določena z zaporedjem točk

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b.$$

Delitev $D_{[a,b]}$ skupaj s poljubno delitvijo $D_{[c,d]}$ intervala $[c, d]$, določeno z

$$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d,$$

določa neko delitev pravokotnika P na manjpe pravokotnike

$$P_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{i-1}, y_i], \; (i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, n).$$

Naj bo

$$m_{i,j} = \inf_{(x,y)\in P_{i,j}} f(x, y),$$
$$M_{i,j} = \sup_{(x,y)\in P_{i,j}} f(x, y).$$

Z $\Delta_{i,j}p = \Delta_i x \cdot \Delta_j y = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ označimo ploščino pravokotnika $P_{i,j}$. Vsoto

$$\underline{S}_D = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n m_{i,j}\Delta_{i,j}p$$

imenujemo *spodnja*, vsoto

$$\overline{S}_D = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{i,j}\Delta_{i,j}p$$

pa *zgornja Riemannova vsota* funkcije f pri delitvi D.

Lema 1. Če je N nadaljevanje delitve D pravokotnika P, za spodnje in zgornje Riemannove vsote poljubne omejene funkcije $f : P \to \mathbb{R}$ velja

$$\underline{S}_N \geq \underline{S}_D \text{ in } \overline{S}_N \leq \overline{S}_D.$$

Definicija 3.4. Omejena funkcija $f : P \to \mathbb{R}$ je na pravokotniku P *integrabilna v Riemannovem smislu*, če velja

$$\underline{S} = \overline{S},$$

kjer je $\underline{S}$ supermum njenih *spodnjih*, $\overline{S}$ pa infimum njenih *zgornjih* Riemannovih vsot. Tedaj skupno vrednost $\underline{S} = \overline{S}$ označimo kot

$$\iint_P f(x,y)dp,$$

kjer pomeni $dp = dxdy$ *ploščinski element*, in jo imenujemo *dvojni integral funkcije f po pravokotniku P.*

Izrek 3.2. *Zvezna funkcija f* na pravokotniku $P = [a,b] \times [c,d]$ je *integrabilna* in velja

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \iint_P f(x,y)dp = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy. \qquad (3)$$

Enak zaključek velja tudi za funkcijo f, ki ni nujno zvezna, če je N množica njenih točk nezveznosti taka, da jo za $\forall \varepsilon > 0$ lahko pokrijemo s kakim zaporedjem pravokotnikov, katerih vsota ploščin je pod ε. Tedaj pravimo, da ima N mero 0.

Posledica. Za funkcijo f, ki je na pravokotniku P *integrabilna* v Riemannovem smislu, konvergirajo Riemannove vsote S proti $\iint_P f(x,y)dp$, ko gredo velikosti delilnih pravokotnikov (njihove diagonale) proti 0.

Natančneje: za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, da je

$$\left| S - \iint_P f(x,y)dp \right| < \varepsilon$$

za vsako Riemannovo vsoto funkcije f pri vsaki delitvi pravokotnika P, kjer si dolžine diagonal pod δ.

3.3 Integriranje in odvajanje integralov s parametrom

Izrek 3.3. Naj bo f *zvezna* na pasu $[a,\infty)\times[c,d]$. Če je integral $\displaystyle\int_a^\infty f(x,y)dx$ *enakomerno konvergenten* za $y\in[c,d]$, potem je

$$\int_c^d\int_a^\infty f(x,y)dx\ dy=\int_a^\infty\int_c^d f(x,y)dy\ dx.$$

Izrek 3.4. Naj bosta f in $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *zvezni* na pasu $[a,\infty)\times[c,d]$, naj bo integral

$$F(y)=\int_a^\infty f(x,y)dx$$

konvergenten za $y\in[c,d]$ in naj bo integral

$$\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

enakomerno konvergenten na $[c,d]$. Potem je F *odvedljiva* funkcija in velja

$$F'(y)=\frac{d}{dy}\int_a^\infty f(x,y)dx=\int_a^\infty\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx.$$

Izrek 3.5 (Kriterij za ugotavljanje enakomerne konvergence)**.**
Integral $\displaystyle\int_a^\infty f(x,y)dx=F(y)$ je *enakomerno konvergenten* na S natanko tedaj, ko za $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{R}$, da za poljubna $d>b\geq N$ in za $\forall y\in S$ velja

$$\left|\int_b^d f(x,y)dx\right|<\varepsilon.$$

Posledica. Če je $|f(x,y)|\leq g(x,y)$ za $\forall(x,y)\in[a,\infty)\times[c,d]$ in je integral $\displaystyle\int_a^b g(x,y)dx$ *enakomerno konvergenten* na $[c,d]$, je *enakomerno konvergenten* tudi integral $\displaystyle\int_a^b f(x,y)dx$.

Izrek 3.6 (2. izrek o povprečju)**.** Naj bo f *integrabilna*, g pa *nenegativna padajoča (odvedljiva)* funkcija na intervalu $[a, b]$. Potem $\exists \xi \in [a, b]$, da je

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^\xi f(x)dx.$$

3.4 Eulerjevi funkciji Γ in B

Definicija 3.5 (Funkcija Γ)**.** Na poltraku $x > 0$ je funkcija Γ definirana z

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{t-1} e^{-t} dt. \tag{4}$$

Trditev 3.3 (Rekurzivna formula)**.** Za $\forall x > 0$ velja

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x).$$

Posledica. $\Gamma(n + 1) = n!$ za $\forall n \in \mathbb{N}$

To nam namiguje, naj definiramo

$$x! := \Gamma(x + 1) \text{ za } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Rekurzivna formula nam omogoča, da razširimo definicijsko območje funkcije Γ. Če je namreč $x \in (-1, 0)$, je $x + 1 \in (0, 1)$, zato je vrednost $\Gamma(x + 1)$ že definiramo in lahko postavimo

$$\Gamma := \frac{\Gamma(x + 1)}{x}.$$

S ponavljanjem rekurzivne formule dobimo

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x + n)}{x(x + 1) \dots (x + n - 1)}. \tag{5}$$

Za $\forall x \in \mathbb{R}$, ki ni negativno celo število ali 0, lahko izberemo tak najmanjši $n \in \mathbb{N}$, da je $(x + n) > 0$; tedaj je vrednost $\Gamma(x + n)$ že definirana in lahko $\Gamma(x)$ definiramo s formulo (5).

Definicija 3.6. Funkcija beta je definirana kot

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad (x>0, y>0). \tag{6}$$

Lahko se je prepričati, da je integral v (6) konvergenten, če je $x > 0$ in $y > 0$.

Z vpeljavo nove integracijske spremenljivke $t = \sin^2\varphi$ lahko definicijo funkcije B zapišemo tudi kot

$$B(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\varphi \cos^{2y-1}\varphi d\varphi. \tag{7}$$

Trditev 3.4. Za poljubna pozitivna x, y je

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{8}$$

Izrek 3.7 (Stirlingova formula)**.**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{n}(\frac{n}{e})^n} = \sqrt{2\pi}$$

Trditev 3.5 (Wallisova formula)**.**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{2j}{2j-1}\right)^2 = \frac{\pi}{2}$$

4 VEČKRATNI INTEGRALI

Definicija 4.1. Naj bo $f : K \to \mathbb{R}$ *omejena* funkcija, definirana na kvadru $K = [a, b] \times [c, d] \times [e, g]$ v $\mathbb{R}^3$. Vse tri intervale $[a, b]$, $[c, d]$ in $[e, g]$ razdelimo na podintervale z delilnimi točkami:

$$a = x_0 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_m = b,$$

$$c = y_0 < \ldots < y_{j-1} < y_j < \ldots < y_n = d,$$

$$e = z_0 < \ldots < z_{k-1} < z_k < \ldots < z_p = g.$$

S tem razdelimo kvader K na manjše podkvadre

$$K_{i,j,k} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k];$$

to delitev imenujemo D. Označimo

$$m_{i,j,k} = \inf_{(x,y,z)\in K_{i,j,k}} f(x, y, z),$$

$$M_{i,j,k} = \sup_{(x,y,z)\in K_{i,j,k}} f(x, y, z)$$

ter tvorimo *spodnjo* in *zgornjo* Riemannovo vsoto pri tej delitvi:

$$\underline{S}_D = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} m_{i,j,k} \Delta_{i,j,k} V,$$

$$\overline{S}_D = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} M_{i,j,k} \Delta_{i,j,k} V,$$

kjer je

$$\Delta_{i,j,k} V = \Delta_i x \Delta_j y \Delta_k z = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$$

prostornina kvadra $K_{i,j,k}$. Končno naj bo

$$\underline{S} = \sup_D \underline{S}_D \quad \text{in} \quad \overline{S} = \inf_D \overline{S}_D,$$

kjer teče D po vseh takih delitvah kvadra K. Če je $\underline{S} = \overline{S}$ pravimo, da je funkcija f *integrabilna* na kvadru K in skupno vrednost $\underline{S} = \overline{S}$ označimo kot

$$\iiint_K f(x, y, z)\ dV$$

ter jo imenujemo *trojni* (Riemannov) integral funkcije f.

Definicija 4.2. Naj bo Ω poljubna omejena podmnožica v $\mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ pa omejena funkcija. Izberimo kvader K oblike $K = [a, b] \times [c, d] \times \ldots$, ki naj vsebuje Ω, definirajmo funkcijo $f_K : K \to \mathbb{R}$ kot

$$f(x) = \begin{cases} f(x, y, \ldots) & ; \ (x, y, \ldots) \in \Omega \\ 0 & ; \ (x, y, \ldots) \in K \setminus \Omega \end{cases}$$

ter večkratni integral $\int \cdots \int_\Omega f(x, y, \ldots) \, dV$ kot

$$\int \cdots \int_\Omega f(x, y, \ldots) \, dV = \int \cdots \int_K f_K(x, y, \ldots) \, dV.$$

Trditev 4.1. Če ima presek *omejenih* množic Ω_1 in Ω_2 v $\mathbb{R}^2$ (ali v $\mathbb{R}^n$) mero 0, potem je

$$\int \cdots \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(x_1, \ldots, x_n) \, dV = \int \cdots \int_{\Omega_1} f(x_1, \ldots, x_n) \, dV + \int \cdots \int_{\Omega_2} f(x_1, \ldots, x_n) \, dV$$

Trditev 4.2. Naj bosta f_1 in f_2 *zvezni* funkciji na Ω ter c_1 in c_2 poljubni konstanti. Potem velja

$$\int \cdots \int_\Omega (c_1 f_1 + c_2 f_2) \, dV = c_1 \int \cdots \int_\Omega f_1 \, dV + c_2 \int \cdots \int_\Omega f_2 \, dV.$$

Trditev 4.3. Če je $f \leq g$, potem je $\iint_\Omega f \, dp \leq \iint_\Omega g \, dp$ in podobno za večkratne integrale. Če je torej funkcija f *omejena* na mnoćici Ω navzgor s konstanto M, navzdol pa s konstanto m, potem velja

$$m p_\Omega \leq \iint_\Omega f dp \leq M p_\Omega,$$

kjer je p_Ω ploščina množice Ω.

Trditev 4.4.

$$\left| \iint_\Omega f \, dp \right| \leq \iint_\Omega |f| \, dp$$

Trditev 4.5. Naj bo Ω *kompaktna* množica v $\mathbb{R}^2$, katere rob sestoji iz končno mnogo krivulj oblike $\vec{\,}:[a,b] \to \mathbb{R}^2$ za kake *zvezno odvedljive* funkcije $\vec{r}$ in kake intervale $[a,b]$. Izberimo pravokotnik P, ki vsebuje Ω, in naj bo D poljubna delitev tega pravokotnika s premicami, vzporednimi koordinatnima osema. V vsakem od tistih delilnih pravokotnikov P_k delitve D, ki sekajo Ω, izberemo točko $\vec{r}_k \in P_k \cap \Omega$, označimo z $\Delta_k p$ ploščino pravokotnika P_k in tvorimo Riemannovo vsoto

$$S_D(f) = \sum_k f(\vec{r}_k)\Delta_k p,$$

kjer teče indeks le po tistih delilnih pravokotnikih P_k, ki sekajo Ω. Za vsako zvezno funkcijo f na Ω je integral $\iint_\Omega f(\vec{r})\ dp$ enak limiti vsot $S_D(f)$, ko gredo velikosti vseh delilnih pravokotnikov (torej največja diagonala vseh delilnih pravokotnikov) proti 0. Natančneje, za $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, da je

$$\left| S_D(f) - \iint_\Omega f(\vec{r})\ dp \right| < \varepsilon,$$

če je maksimalna diagonalna delilnih pravokotnikov P_k manjša od δ.

Posledica. Naj bo Ω podana kot

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g_1(x) \le y \le g_2(x),\ a \le x \le b\}, \tag{9}$$

kjer sta g_1 in g_2 *zvezni* funkciji na intervalu $[a,b]$ in $g_1(x) \le g_2(x)$ za $\forall x \in [a,b]$. Naj bosta M_1 in M_2 taki števili, da pravokotnik $P = [a,b] \times [M_1, M_2]$ vsebuje množico Δ (torej $M_1 \le g_1(x) \le g_2(x) \le M_2$ za $\forall x \in [a,b]$). Po definiciji imamo potem za vsako *zvezno* funkcijo $f : \Omega \to \mathbb{R}$:

$$\iint_\Omega f(x,y)\ dp = \iint_P f_P(x,y)\ dp,$$

kjer je f_P funkcija na P, definirana z

$$f_P(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & ;\ (x,y) \in \Omega \\ 0 & ;\ (x,y) \in P \setminus \Omega. \end{cases}$$

Po zgornjem izreku pa je

$$\iint_P f_P(x,y)\ dp = \int_a^b \left(\int_{M_1}^{M_2} f(x,y)\ dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\ dy \right) dx,$$

kjer smo upoštevali, da je funkcija f_P enaka 0 izven Ω in zato $\displaystyle\int_{M_1}^{M_2} f_P(x,y)\ dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy$.
Torej velja naslednja trditev:

Trditev 4.6. Za vsako *zvezno* funkcijo f na množici Ω, definirani kot (9), velja

$$\iint_\Omega f(x,y)\ dp = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\ dy \right) dx.$$

Trditev 4.7. Za območja Ω, podana kot
$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y),\ (x,y) \in \Lambda\}$, in (skoraj povsod) *zvezne* funkcije f na njih velja

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\ dV = \iint_\Lambda \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y,z)\ dz \right) dp.$$

4.1 Cilindrične ali valjne koordinate

Definicija 4.3. Lega točke (x,y,z) v prostoru $\mathbb{R}$ je določena s koordinato z in polarnima koordinatama r, φ njene projekcije $(x,y,0)$ na ravnino x,y. Trojko φ, r, z imenujemo *cilindrične* ali *valjne* koordinatne točke. S kartezičnimi koordinatami so povezane prek enakosti

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z.$$

Pri tem lahko r zavzame vse nenegativne vrednosti, z vse realne vrednosti, φ pa na intervalu $[0, 2\pi)$. Za dano točko T pomeni r njeno razdaljo od osi z, ki je enaka razdalji projekcije točke T na ravnino x,y od koordinatnega izhodišča.

Posledica (Koordinatne ploskve)**.**

- Ploskve $z =$ konstanta so ravnine, vzporedne z ravnino x,y

- Ploskve $r =$ konstanta so neskončni valji, katerih os je os z
- Ploskve $\varphi =$ konstanta pa so polravnine

4.2 Sferične koordinate

Definicija 4.4. *Sferične* ali *krogelne koordinate* točke $T(x, y, z)$ so:

- $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ razdalja od izhodišča
- θ kot, ki ga vektor $\vec{0T}$ oklepa s pozitivnim poltrakom osi z
- φ kot, ki ga pravokotna projekcija vektorja $\vec{0T}$ na ravnino x, y oklepa s pozitivnim poltrakom osi x

Naj bo kot doslej r, razdalja T od osi z. Potem je $r = R\sin\theta$ in

$$x = R\sin\theta\cos\varphi, \quad y = R\sin\theta\sin\varphi, \quad z = R\cos\theta.$$

Tukaj lahko zavzame kot θ vrednosti na intervalu $[0, \pi]$ (0 je na pozitivnem, π pa na negativnem poltraku osi z), kot φ pa vrednosti na intervalu $[0, 2\pi)$.

Volumni element v sferičnih koordinatah je

$$dV = R^2 \sin\theta \; dR \; d\theta \; d\varphi.$$

Od tod sledi, da lahko trojni integral po telesu Ω, ki je opisano kot

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; g_1(\varphi, \theta) \leq R \leq g_2(\varphi, \theta), \; (\varphi, \theta) \in \Lambda\},$$

kjer sta $g_1 \leq g_2$ *zvezni* funkciji na množici $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$, izrazimo kot

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\, dV = \iint_\Lambda \left(\int_{g_1(\varphi,\theta)}^{g_2(\varphi,\theta)} f(R\sin\theta\cos\varphi, \; R\sin\theta\sin\varphi, \; R\cos\theta) R^2 \sin\theta \; dR \right) d\theta \; d\varphi.$$

Posledica (Koordinatne ploskve)**.**

- Ploskve $R =$ konstanta so sfere
- Ploskve $\theta =$ konstanta so stožci
- Plosvke $\varphi =$ konstanta so polravnine

4.3 Splošne koordinate

Definicija 4.5. Naj bo V *odprta* podmožica v ravnini. Vlogo splošnih koordinat na V lahko igra vsak tak par funkcij

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

na V, da iz $(x, y) \neq (x_1, y_2)$ sledi $(u(x, y), v(x, y)) \neq (u(x_1, y_1), v(x_1, y_1))$, kar pomeni, da je točka (x, y) enolično določena s parom $(u(x, y), v(x, y))$. Drugače povedano, vektorska funkcija

$$F : V \to \mathbb{R}^2, \; F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

mora biti *injektivna.* Zavoljo diferencialnega računa predpostavimo, da sta funkciji u in v *zvezno odvedljivi.* Iz *izreka o inverzni preslikavi* vemo, da potem obrnljivost Jacobijeve matrike $F'(x, y)$ preslikave F zagotavlja *injektivnost* preslikave F v okolici točke (x, y), ne pa na celem definicijskem območju V, zato jo je treba posebej privzeti. Tedaj je pri pogoju, da je $F'(x, y)$ *obrnljiva* matrika za $\forall (x, y) \in V$, preslikava F dejansko *bijekcija* na odprto množico $U := F(V)$, inverzna preslikava

$$G := F^{-1} : U \to V$$

pa je tudi *zvezno odvedljiva* in

$$G'(\vec{q}) = (F'(G(\vec{q})))^{-1} \text{ za } \forall \vec{q} \in U.$$

Pri fiksnih u_0 in v_0 imenujemo krivulje $u = (x, y)$ in $v = (x, y)$ *koordinatne* krivulje.

Izrek 4.1. Naj bo $G : U \to V$ taka *zvezno odvedljiva bijekcija*, kjer sta U in V *odprti* podmnožici v $\mathbb{R}$, da je $\det G'(\vec{r}) \neq 0$ za $\forall \vec{r} \in U$. Označimo $\vec{r} = (u, v)$ in $G(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$. Naj bo Ω *kompaktna* podmnožica v V, katere rob naj sestoji iz končno mnogo *zvezno odvedljivih* krivulj (oz. naj ima mero 0), f pa naj bo *zvezna* funkcija na V (razen morda na množici z mero 0). Potem je

$$\iint_\Omega f(x, y) \; dx \; dy \;=\; \iint_{G^{-1}(\Omega)} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u, v) \right| du \; dv,$$

kjer je

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u, v) \;=\; \det G'(u, v) \;=\; \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{bmatrix}.$$

Lema 2. Naj bo $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *obrnljiva linearna* preslikava in Λ paralelogram. Potem med ploščinama paralelograma Λ in $L(\Lambda)$ velja zveza

$$p_{L(\Lambda)} = |\det L| p_{\Lambda}. \tag{10}$$

Enaka povezava velja tudi za vsako *kompaktno* podmnožico Λ v $\mathbb{R}^2$ oziroma za vsako *ravninsko* podmnožico, za katero je ploščina definirana.

Lema 3. Naj bo $G : U \to \mathbb{R}^2$ *zvezno odvedljiva injektivna* preslikava s *povsod obrbljivim* odvodom $G'(u, v)$, definirana na *odprti* množici U, K *kompaktna* podmnožica v U, $\Lambda = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2;\ |u - a| \le h,\ |v - b| \le h\}$ pa kvadrat s središčem (a, b) in stranico dolžine $2h$, vsebovan v K. Označimo

$$L \ = \ \det G'(a,b) \ = \ \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(a,b) & \frac{\partial x}{\partial v}(a,b) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(a,b) & \frac{\partial y}{\partial v}(a,b) \end{bmatrix}$$

in naj bo A preslikava, definirana z $A(u, v) = G(a, b)+L(u-a, v-b)$. Potem za $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0$ (neodvisen od izbire kvadrata), da za ploščini likov $G(\Lambda)$ in $A(\Lambda)$, ko je $h < \delta$, velja

$$|p_{G(\Lambda)} - p_{A(\Lambda)}| < \varepsilon p_{\Lambda}.$$

Ker se preslikavi A in L razlikujeta le za translacijo, lahko v tej oceni nadomestimo A z L.

5 PLOSKOVNI IN KRIVULJNI INTEGRAL

5.1 Površina ploskve in ploskovni integral skalarne funkcije

Definicija 5.1. Naj bo Λ pravokotnik s središčem $(u,v) \in \Omega$ in stranicama du, dv, ki naj bosta vzporedni koordinatnima osema in je L Jacobijeva matrika preslikave $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, torej

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u}\vec{r}(u,v) & \frac{\partial}{\partial v}\vec{r}(u,v) \end{bmatrix}.$$

Ploščina paralelograma $L(\Lambda)$ je tako

$$p_{L(\Lambda)} \;=\; \|duL(1,0) \times dvL(0,1)\| \;=\; du\; dv\; \|\frac{\partial}{\partial u}\vec{r}(u,v) \times \frac{\partial}{\partial v}\vec{r}(u,v)\|.$$

Celotno površino ploskve lahko izračunamo tako, da seštejemo ploščine takih paralelogramov in limitiramo njihove velikosti proti 0, s čimer preide vsota v integral

$$p \;=\; \iint_\Omega \|\frac{\partial}{\partial u}\vec{r}(u,v) \times \frac{\partial}{\partial v}\vec{r}(u,v)||\; du\; dv.$$

Z upoštevanjem Lagranjeove identitete $\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \sqrt{\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$, lahko nekoliko poenostavimo formulo:

$$E(u,v) = \|\frac{\partial}{\partial u}\vec{r}\|^2, \quad F(u,v) = \frac{\partial}{\partial u}\vec{r}\cdot\frac{\partial}{\partial v}\vec{r}, \quad G(u,v) = \|\frac{\partial}{\partial v}\vec{r}\|^2$$

$$p \;=\; \iint_\Omega \sqrt{EG - F^2}\; du\; dv.$$

Označimo $\vec{q} = (u,v)$. Jacobijeva matrika $\dot{\vec{r}}(\vec{q})$ je

$$[\dot{\vec{r}}(\vec{q})]^T[\dot{\vec{r}}(\vec{q})] \;=\; \begin{bmatrix} E(u,v) & F(u,v) \\ F(u,v) & G(u,v) \end{bmatrix},$$

od kjer dobimo determinanto

$$\det\,[\dot{\vec{r}}(\vec{q})]^T[\dot{\vec{r}}(\vec{q})] \;=\; E(u,v)G(u,v) - F(u,v)^2.$$

Zamenjava spremenljivk:

$$\begin{aligned}\iint_\Lambda \sqrt{E(s,t)G(s,t) - F(s,t)^2}\; ds\; dt \;&=\; \iint_\Lambda \sqrt{E(s,t)G(s,t) - F(s,t)^2}\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,v)}\right|\; ds\; dt \\ &=\; \iint_\Omega \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F(u,v)^2}\; du\; dv.\end{aligned}$$

Trditev 5.1. Definicija površine ploskve je neodvisna od parametrizacije.

Definicija 5.2. Naj bo f funkcija, definirana na ploskvi $\mathcal{P}$ z enačbo $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. *Ploskovni integral* te funkcije po ploskvi $\mathcal{P}$ je definirana kot

$$\iint_{\mathcal{P}} f \; dp \;=\; \iint_{\Omega} f(\vec{r}(u,v))\sqrt{E(u,v)G(u,v) - F(u,v)^2} \; du \; dv.$$

Lahko bi pokazali, da je ploskovni integral neodvisen od parametrizacije ploskve.

5.2 Krivuljni integral

5.2.1 Krivuljni integral skalarne funkcije

Definicija 5.3. Naj bo f (*zvezna*) funkcija na krivulji γ z enačbo $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. *Krivuljni integral* funkcije f po krivulji γ, je definiran kot

$$\int_{\gamma} f(\vec{r}) \; ds \;=\; \int_a^b f(\vec{r}(t)) \|\dot{\vec{r}}(t)\| \; dt.$$

5.2.2 Krivuljni integral vektorske funkcije

Definicija 5.4. *Krivuljni integral* je definiran kot

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \;=\; \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) \; dt.$$

Trditev 5.2. Če je $t = t(\tau)$ $(\alpha \leq \tau \leq \beta)$ *naraščajoča zvezno odvedljiva* funkcija novega parametra τ in t preteče interval $[a, b]$, ko τ preteče interval $[\alpha, \beta]$, potem je

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d}{dt}\vec{r}(t) dt \;=\; \int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(\vec{r}(t(\tau))) \cdot \frac{d}{dt}\vec{r}(t(\tau)) d\tau,$$

kar pomeni, da je krivuljni integral enak za vse parametrizacije dane krivulje z enako orientacijo.
Če je pa $t = t(\tau)$ *padajoča* funkcija in t preteče interval $[a, b]$, ko τ teče od β do α, potem je

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d}{dt}\vec{r}(t)dt \ = \ -\int_\alpha^\beta \vec{F}(\vec{r}(t(\tau))) \cdot \frac{d}{dt}\vec{r}(t(\tau))d\tau,$$

kar pomeni, da pri spremembi orientacije krivulje, krivuljni integral spremeni predznak.

Trditev 5.3.

(i)
$$\int_{\gamma \dot{+} \lambda} \vec{F} \cdot d\vec{r} \ = \ \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_\lambda \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

kjer je $\vec{F}$ *vektorsko polje* na $\gamma \dot{+} \lambda$

(ii)
$$\int_{\gamma^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} \ = \ -\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Krivuljo γ, katere končna točka se ujema z začetno, imenujemo *sklenjena.*

Trditev 5.4. Naj bo $\vec{F}$ *vektorsko polje* na U. Velja

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} \ = \ 0$$

za vsako sklenjeno krivuljo γ v U natanko tedaj, ko je

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \ = \ \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

za vsaki krivulji γ_1 in γ_2 v U, ki imata isto začetno in isto končno točko.

5.2.3 Krivuljni integral potencialnega polja

Definicija 5.5. Vektorsko polje $\vec{F} : U \to \mathbb{R}^3$ $(\mathbb{R}^2)$ je *potencialno*, če obstaja taka funkcija $u : U \to \mathbb{R}^3$ $(\mathbb{R}^2)$, imenovana *potencial polja* $\vec{F}$, da je

$$\vec{F} \;=\; \vec{\nabla} u,$$

kjer je $\vec{\nabla} u$ gradient funkcije u.

Trditev 5.5. *Zvezno odvedljivo* vektorsko polje $\vec{F} = (M, N)$ je potencialno le, če velja

$$\frac{\partial M}{\partial y} \;=\; \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Trditev 5.6. Krivuljni integral *potencialnega* vektorskega polja $\vec{\nabla} u$ po katerikoli krivulji γ v definicijskem območju polja je

$$\int_\gamma \vec{\nabla} u \cdot d\vec{r} \;=\; u(\vec{r}(b)) - u(\vec{r}(a)),$$

kjer sta $\vec{r}(a)$ in $\vec{r}(b)$ začetna in končna točka krivulje γ. Torej je krivuljni integral danega potencialnega polja neodvisen od poteka krivulje, odvisen je le od njene začetne in končne točke.

Trditev 5.7. Vektorsko polje $\vec{F}$ na območju U je potencialno natanko tedaj, ko je za vsaki dve točki $\vec{r}_0$ in $\vec{r}$ iz U krivuljni integral $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ enak za vse krivulje γ v U z začetno točko $\vec{r}_0$ in končno točko $\vec{r}$.

Posledica. Vektorsko polje $\vec{F}$ na U je potencialno natanko tedaj, ko je

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} \;=\; 0$$

za vsako sklenjeno krivuljo γ v U.

5.2.4 Povezava med krivuljnim in dvojnim integralom

Izrek 5.1. Naj bo Ω kompaktna ravninska množica, katere rob $\partial\Omega$ sestoji iz končno mnogo sklenjenih zvezno odvedljivih krivulj, parametriziranih na kompaktnih interavlih in usmerjenih tako, da je Ω na njihovi levi. Za vsako *zvezno odvedljivo* vektorsko polje $\vec{F} = (M, N)$, definirano na kaki okolici množice Ω, velja Greenova formula

$$\int_{\partial\Omega} (M\ dx + N\ dy) \ = \ \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)\ dp.$$

Ravninsko območje U brez lukenj imenujemo *enostavno povezano.* Natančneje: U je enostavno povezano, če je njegov komplement v razširjeni ravnini (torej v $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ povezana množica, se pravi je iz enega kosa).

Posledica. Na *enostavnem povezanem* območju U je pogoj

$$\frac{\partial M}{\partial y} \ = \ \frac{\partial N}{\partial x}$$

potreben in zadosten za potencialnost vektorskega polja $\vec{F} = (M, N)$.

6 DIFERENCIALNE ENAČBE

Definicija 6.1. *Splošna diferencialna enačba* reda n je enačba oblike

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

kjer je F dana funkcija $n + 2$ spremenljivk definirana na kakem območju v $\mathbb{R}^{n+1}$, y neznana funkcija spremenljivke x, $y^{(k)}$ $(k = 1, \dots, n)$ pa njeni odvodi. *Red enačbe* je red najvišjega odvoda, ki nastopa v enačbi.

6.1 Enačbe 1. reda

Definicija 6.2 (Enačba z ločljivima spremenljivkama)**.** To je enačba oblike

$$g(y)y' = f(x),$$

kjer sta f in g *zvezni* funkciji. V tem primeru obe strani lahko integriramo in dobimo

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx \quad \Rightarrow \quad G(y) = F(x) + C,$$

kjer sta F in G *primitivni funkciji* f in g ter je C *integracijska konstanta.* Če se da izraziti $y = y(x)$ smo dobili rešitev, sicer rečemo, da zgornja enačba predstavlja rešitev v *implicitni* obliki.

Definicija 6.3 (Enačba oblike $y' = f(\frac{y}{x})$)**.** Naj bo f zvezna funkcija. Z novo neznanko $v = \dfrac{y}{x}$, torej $y = xv$ in $y' = xv'$, kar enačbo preoblikuje v

$$xv' = f(v) - v,$$

kjer sta spremenljivki x in v ločljivi.

Definicija 6.4 (Linearna enačba 1. reda)**.** To je vsaka enačba, ki se jo da preoblikovati v

$$y' = py + q,$$

kjer sta p in q *zvezni* funkciji na kakem intervalu I (lahko tudi poltrak ali cela realna os). Če je $q \equiv 0$ imenujemo enačbo *homogena*. Tedaj sta spremenljivki ločljivi. Ko $q \not\equiv 0$, najprej enačbo rešimo homogeno enačbo in nato rešitev vstavimo v enačbo (*variacija konstante*). Dobimo

$$y' = C'e^P + Ce^P P,$$

kjer je $P' = p$. Originalno enačbo tako preoblikujemo v

$$C'e^P = q.$$

Od tod izračunamo $C = \displaystyle\int_a^x e^{-P(t)} q(t)dt + K$, kjer je K konstanta in sledi

$$y(x) \;=\; Ce^{P(x)} \;=\; e^{P(x)} \int_a^x e^{-P(x)} q(t)dt + Ke^{P(x)}.$$

Definicija 6.5 (Bernoullijeva enačba)**.** To je enačba oblike

$$y' = py + qy^n,$$

kjer sta p in q *zvezni* funkciji in $n \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ *realna* konstanta. Za $n > 0$ je ena rešitev te enačbe $y \equiv 0$. Pri deljenju enačbe z y^n vidimo, da jo vpeljava nove neznanke $v = y^{1-n}$ spremeni v *linearno*. Tedaj $y = v^{\frac{1}{1-n}}$ in $y' = \frac{1}{1-n} v^{\frac{1}{1-n}-1} v'$, enačba pa se preoblikuje v

$$\frac{1}{1-n} v' = pv + q,$$

ki je linearna. Pri deljenju z $v^{\frac{1}{1-n}}$ izgubimo rešitve v, ki so za $n > 0$ enake 0. V vsaki ničli x_0 funkcije v je tudi $y(x_0) = 0$ in $y'(x_0) = 0$, če je $n \in (0, 1)$, zato lahko v točki $(x_0, 0)$ združimo rešitvi $y \equiv 0$ in $y = v^{\frac{1}{1-n}}$.

Definicija 6.6 (Eksaktna enačba)**.** Diferencialno enačbo $y' = f(x, y)$ lahko zapišemo tudi kot $f(x, y)dx - dy = 0$. Splošnejšo enačbo take oblike

$$\omega := f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0,$$

znamo rešiti, če je izraz ω *totalni diferencial* kake funkcije u, torej

$$\omega = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Tedaj $\omega = du = 0$ pomeni (na povezanem območju v ravnini), da je funkcija u konstantna, torej $u(x, y) = C$, kar imamo lahko za *implicitno* podano rešitev.

Pogoj, da je ω totalni diferencialn oz. da je $f = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ in $g = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ za kako funkcijo u, je enakost

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Na splošno ω ni totalni diferencial, lahko pa morda najdemo tako funkcijo μ brez ničel, da je $\mu\omega$ totalni diferencial funkcije u. Tak μ imenujemo *integrirajoči množitelj.* Ker je $\omega = 0$ ekvivalentna enačbi $du = \mu\omega = 0$, je $u(x, y) = C$ spet implicitno podana rešitev.

Pogoj, da je $\mu\omega$ totalni diferencial kake funkcije je

$$\frac{\partial(\mu f)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu g)}{\partial x} \quad \text{oz.} \quad \frac{1}{\mu}\left(g\frac{\partial \mu}{\partial x} - f\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Če $\exists \mu = \mu(x)$, torej $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$, se enakost poenostavi ter dobimo (kjer g ni 0)

$$\frac{d(\ln \mu)}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}}{g}.$$

Če je izraz na desni odvisen le od x, potem je

$$\mu = e^{\int \frac{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}}{g} dx}.$$

integrirajoči množitelj. Podobno lahko izpeljemo, če $\exists \mu = \mu(y)$

6.2 Homogena linearna diferencialna enačba 2. reda

Definicija 6.7. *Splošna linearna diferencialna* enačba 2. reda je enačba oblike

$$f(x)y'' + g(x)y' + h(x)y = d(x),$$

kjer so f, g, h in d *zvezne* funkcije na kakem intervalu I, y pa neznana, *dvakrat zvezno odvedljiva* funkcija. Če je desna stran $d \equiv 0$, imenujemo enačbo *homogena.* Kadar f nima ničel, dobimo po deljenju z f ekvivalentno enačbo oblike

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x),$$

kjer so p, q in r *zvezne* funkcije. Vse funkcije tukaj imajo lahko vrednosti v $\mathbb{C}$. Zgornje enačbe ne moremo vedno rešiti *eksplicitno* z znanimi funkcijami, rešitve pa vedno obstajajo in so določene enolično pri začetnih pogojih.

Izrek 6.1. Če so p, q in r *zvezne* funkcije na intervalu I, potem za $\forall x_0 \in I$ in poljubni konstanti $y_0, \tilde{y}_0 \in \mathbb{C}$ obstaja natanko ena *dvakrat zvezno odvedljiva* funkcija $y : I \to \mathbb{C}$, ki zadošča enačbi $y''+p(x)y'+q(x)y = r(x)$ in začetnima pogojema

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = \tilde{y}_0.$$

Če so pri tem p, q, r *realne* funkcije in $y_0, \tilde{y}_0 \in \mathbb{R}$, potem je tudi rešitev y *realna* funkcija.

Definicija 6.8 (Linearna neodvisnost)**.** Funkciji y_1 in y_2 sta *linearno neodvisni*, če nobena njuna *netrivialna linearna* kombinacija $c_1y_1+c_2y_2$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ sta konstanti, $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$) ni identično enaka 0. To pomeni, da nobena od obeh funkcij ni konstanten večkratnik druge.

Definicija 6.9. *Determinanta Wronskega* funkcij y_1, y_2 je funkcija, definirana kot

$$W_{y_1,y_2}(x) \;=\; \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \;=\; y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x).$$

Trditev 6.1 (Liouvillova formula)**.** Za determinanto Wronskega $W = W_{y_1,y_2}$ dveh rešitev y_1, y_2 enačbe $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ velja *Liouvillova formula*

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$$

za $\forall x \in I$, kjer je x_0 poljubna točka iz intervala I, nad katerim opazujemo enačbo. Torej je W bodisi enaka 0 bodisi nima nobene ničle na I.

Trditev 6.2. Rešitvi y_1, y_2 enačbe $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ sta na intervalu I *linearno neodvisni* natanko tedaj, ko njuna determinanta Wronskega W ni identično enaka 0 na I, kar je natanko takrat, ko W nima nobene ničle na I.

Izrek 6.2. Množica vseh rešitev enačbe $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, je *dvorazsežen vektorski prostor.* Če sta torej y_1 in y_2 linearno neodvisni rešitvi, potem lahko vsako rešitev y izrazimo kot njuno *linearno kombinacijo*, $y = c_1y_1 + c_2y_2$, kjer sta c_1, c_2 primerni konstanti (v splošnem kompleksni, sicer pa realni, če nas zanimajo le realne rešitve in sta y_1 in y_2 realni funkciji).

Trditev 6.3. Naj bo y_p *partikularna* rešitev enačbe $y'' + py' + qy = r$ (torej neka konkretna rešitev), y pa poljubna nadaljna rešitev. Potem je funkcija

$$y_h := y - y_p$$

rešitev ustrezne *homogene* enačbe $y'' + py' + qy = 0$.
Velja tudi obratno: za vsako rešitev y_h *homogene* enačbe $y'' + py + +gy = 0$ je vsota

$$y = y_p + y_h$$

rešitev enačbe $y'' + py' + qy = r$.