

Analiza 3 - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar

2020/21

Kazalo

1	PARAMETRIČNO PODANE KRIVULJE	3
2	PLOSKVE V \mathbb{R}^3	4
3	INTEGRALI S PARAMETROM	6
3.1	Izlimitirani integrali s parametrom	6
3.2	Dvojni in dvakratni integrali	7
3.3	Integriranje in odvajanje integralov s parametrom	9
3.4	Eulerjevi funkciji Γ in B	10
4	VEČKRATNI INTEGRALI	12
4.1	Cilindrične ali valjne koordinate	15
4.2	Sferične koordinate	16
4.3	Splošne koordinate	17

1 PARAMETRIČNO PODANE KRIVULJE

Trditev 1.1. Če je \vec{r} odvedljiva vektorska funkcija (njene komponente x , y in z so odvedljive funkcije spremenljivke t), potem je

$$\dot{\vec{r}}(t_0) = (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0))$$

tangentni vektor na krivuljo $t \mapsto \vec{r}(t)$ v točki $\vec{r}(t_0)$, če velja $\dot{\vec{r}}(t_0) \neq 0$.

Trditev 1.2. Če je \vec{r} zvezno odvedljiva vektorska funkcija na intervalu $[a, b]$ (za $a < b$), je potem dolžina krivulje, ki jo določa, enaka

$$s = \int_a^b \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt.$$

To velja tudi za funkcijo, ki so le odsekoma zvezne. Opazimo tudi, da je zgornja dolžina neodvisna od parametrizacije krivulje.

Trditev 1.3. Naj bo \vec{r} zvezno odvedljiva vektorska funkcija, definirana na intervalu $[a, b]$ (za $a < b$) in naj bo $\psi : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ zvezno odvedljiva bijekcija, tako da $t = \psi(\tau)$ preteče interval $[a, b]$, ko τ preteče interval $[\alpha, \beta]$ (za $\alpha < \beta$). Potem je

$$\int_a^b \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt = \int_\alpha^\beta \left\| \frac{d}{d\tau} \vec{r}(\psi(\tau)) \right\| d\tau.$$

2 PLOSKVE V \mathbb{R}^3

Definicija 2.1 (Ploskev). Podmnožica $P \subseteq \mathbb{R}^3$ je *ploskev*, če za vsako točko $\vec{r} \in P$ obstaja taka okolica $H \subseteq \mathbb{R}^3$, da je $P \cap H$ graf kake zvezno odvedljive funkcije $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$, definirane na kaki *odprti* podmnožici $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

To pomeni, da se na $P \cap H$ ena od koordinat x, y, z da *enolično* izraziti kot funkcija preostalih, torej da je $P \cap H$ ene od oblik:

$$P \cap H = \{(x, y, \phi(x, y)) \mid (x, y) \in D\},$$

$$P \cap H = \{(x, \phi(x, z), y) \mid (x, z) \in D\},$$

$$P \cap H = \{(\phi(y, z), y, z) \mid (y, z) \in D\}.$$

Trditev 2.1 (Izrek o implicitni funkciji). Naj bo $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva funkcija in privzemimo, da je množica $P = g^{-1}(0)$ neprazna. Če je

$$\nabla g(\vec{r}) \neq 0$$

za $\forall \vec{r} \in P$ je P ploskev.

Enačba oblike $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ($t \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$) predstavlja krivuljo v \mathbb{R}^3 . Privzeli bomo, da je pri tem \vec{r} zvezno odvedljiva funkcija spremenljivke t . Taka krivulja leži na ploskvi $P = g^{-1}(0)$ natanko tedaj, ko je $g(\vec{r}(t)) = 0$ za $\forall t \in [a, b]$. Ko to enakost odvajamo po t , dobimo

$$\nabla g(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = 0.$$

Ta enakost pomeni, da je vektor $\nabla g(\vec{r}(t))$ pravokoten na tangentni vektor $\dot{\vec{r}}(t)$ krivulje v točki $\vec{r}(t)$.

Če sedaj izberemo poljubno točko \vec{r}_0 na ploskvi P in opazujemo vse krivulje na ploskvi P , ki gredo skozi točko \vec{r}_0 (vsaka taka krivulja $\vec{r} = \vec{r}(t)$ zadošča pogoju $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ za kak t_0), vidimo, da je vektor $\nabla g(\vec{r}_0)$ pravokoten na tangentni vektor $\dot{\vec{r}}(t_0)$ vsake take krivulje.

To pomeni, da mora biti vektor $\nabla g(\vec{r}_0)$ pravokoten na ploskev P . To velja za vsako točko $\vec{r}_0 \in P$.

Definicija 2.2 (Normalni vektor). Vektor $\nabla g(\vec{r})$ imenujemo *normalni vektor* na ploskev $P = g^{-1}(0)$ v točki $\vec{r} \in P$. Ravnino $T_{\vec{r}}P$ z normalnim vektorjem $\nabla g(\vec{r})$ skozi točko \vec{r} na ploskvi P pa imenujemo *tangentna ravnina* na ploskev P v točki \vec{r} .

Tangentna ravnina na P skozi točko \vec{r} je torej vzporedna vsem tangen-tnim vektorjem v točki \vec{r} na krivulje skozi \vec{r} na ploskvi P .

3 INTEGRALI S PARAMETROM

Definicija 3.1 (Integral s parametrom). Naj bo f zvezna funkcija dveh spremenljivk, definirana na pravokotniku $P = [a, b] \times [c, d]$ ($a < b$, $c < d$). Integral

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad (1)$$

je funkcija spremenljivke y . Tak integral imenujemo *integral s parametrom* y .

Trditev 3.1. Če je f zvezna funkcija na pravokotniku $P = [a, b] \times [c, d]$, je funkcija F (definirana z (1)) zvezna na intervalu P .

Izrek 3.1. Naj bo f zvezna na pravokotniku $P = [a, b] \times [c, d]$ in privzemimo, da obstaja parcialni odvod $\frac{\partial f}{\partial y}$, ki naj bo zvezen na P . Potem je funkcija F (podana z (1)) odvedljiva in velja

$$F'(y) = \frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx. \quad (2)$$

3.1 Izlimitirani integrali s parametrom

Definicija 3.2. Integral $F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$ je enakomerno konvergenten za $y \in S \subseteq \mathbb{R}$, če za $\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{R}$, da za $\forall b \geq M$ in $\forall y \in S$ velja

$$\left| \int_b^\infty f(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

Za razliko od navadne konvergence mora tukaj obstajati tak M , ki je istočasno ustrezen za $\forall y \in S$, torej je $M = M_\varepsilon$ odvisen le od ε , ne pa tudi od y . Pri navadni konvergenci bi bil veljalo $M = M_{\varepsilon, y}$.

Trditev 3.2. Če je f zvezna funkcija na pasu $P = [a, \infty) \times [c, d]$ in integral

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$$

enakomerno konvergenten za $y \in [c, d]$, je F zvezna funkcija na $[c, d]$.

3.2 Dvojni in dvakratni integrali

Definicija 3.3. Naj bo $P = [a, b] \times [c, d]$ in $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Delitev $D_{[a,b]}$ intervala $[a, b]$ je določena z zaporedjem točk

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b.$$

Delitev $D_{[a,b]}$ skupaj s poljubno delitvijo $D_{[c,d]}$ intervala $[c, d]$, določeno z

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d,$$

določa neko delitev pravokotnika P na manjše pravokotnike

$$P_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad (i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n).$$

Naj bo

$$m_{i,j} = \inf_{(x,y) \in P_{i,j}} f(x, y),$$

$$M_{i,j} = \sup_{(x,y) \in P_{i,j}} f(x, y).$$

Z $\Delta_{i,j}p = \Delta_i x \cdot \Delta_j y = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ označimo ploščino pravokotnika $P_{i,j}$. Vsoto

$$\underline{S}_D = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n m_{i,j} \Delta_{i,j} p$$

imenujemo *spodnja*, vsoto

$$\overline{S}_D = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{i,j} \Delta_{i,j} p$$

pa *zgornja Riemannova vsota* funkcije f pri delitvi D .

Lema 1. Če je N nadaljevanje delitve D pravokotnika P , za spodnje in zgornje Riemannove vsote poljubne omejene funkcije $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ velja

$$\underline{S}_N \geq \underline{S}_D \text{ in } \overline{S}_N \leq \overline{S}_D.$$

Definicija 3.4. Omejena funkcija $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ je na pravokotniku P *integrabilna v Riemannovem smislu*, če velja

$$\underline{S} = \overline{S},$$

kjer je \underline{S} supremum njenih *spodnjih*, \overline{S} pa infimum njenih *zgornjih* Riemannovih vsot. Tedaj skupno vrednost $\underline{S} = \overline{S}$ označimo kot

$$\iint_P f(x, y) dp,$$

kjer pomeni $dp = dxdy$ *ploščinski element*, in jo imenujemo *dvojni integral funkcije f po pravokotniku P* .

Izrek 3.2. Zvezna funkcija f na pravokotniku $P = [a, b] \times [c, d]$ je *integrabilna* in velja

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \iint_P f(x, y) dp = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy. \quad (3)$$

Enak zaključek velja tudi za funkcijo f , ki ni nujno zvezna, če je N množica njenih točk nezveznosti taka, da jo za $\forall \varepsilon > 0$ lahko pokrijemo s kakim zaporedjem pravokotnikov, katerih vsota ploščin je pod ε . Tedaj pravimo, da ima N mero 0.

Posledica. Za funkcijo f , ki je na pravokotniku P *integrabilna* v Riemannovem smislu, konvergirajo Riemannove vsote S proti $\iint_P f(x, y) dp$, ko gredo velikosti delilnih pravokotnikov (njihove diagonale) proti 0.

Natančneje: za $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, da je

$$\left| S - \iint_P f(x, y) dp \right| < \varepsilon$$

za vsako Riemannovo vsoto funkcije f pri vsaki delitvi pravokotnika P , kjer si dolžine diagonal pod δ .

3.3 Integriranje in odvajanje integralov s parametrom

Izrek 3.3. Naj bo f zvezna na pasu $[a, \infty) \times [c, d]$. Če je integral $\int_a^\infty f(x, y) dx$ enakomerno konvergenten za $y \in [c, d]$, potem je

$$\int_c^d \int_a^\infty f(x, y) dx dy = \int_a^\infty \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

Izrek 3.4. Naj bosta f in $\frac{\partial f}{\partial y}$ zvezni na pasu $[a, \infty) \times [c, d]$, naj bo integral

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$$

konvergenten za $y \in [c, d]$ in naj bo integral

$$\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$$

enakomerno konvergenten na $[c, d]$. Potem je F odvedljiva funkcija in velja

$$F'(y) = \frac{d}{dy} \int_a^\infty f(x, y) dx = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$

Izrek 3.5 (Kriterij za ugotavljanje enakomerne konvergence).

Integral $\int_a^\infty f(x, y) dx = F(y)$ je enakomerno konvergenten na S natanko tedaj, ko za $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{R}$, da za poljubna $d > b \geq N$ in za $\forall y \in S$ velja

$$\left| \int_b^d f(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

Posledica. Če je $|f(x, y)| \leq g(x, y)$ za $\forall (x, y) \in [a, \infty) \times [c, d]$ in je integral $\int_a^b g(x, y) dx$ enakomerno konvergenten na $[c, d]$, je enakomerno konvergenten tudi integral $\int_a^b f(x, y) dx$.

Izrek 3.6 (2. izrek o povprečju). Naj bo f integrabilna, g pa nenegativna padajoča (odvedljiva) funkcija na intervalu $[a, b]$. Potem $\exists \xi \in [a, b]$, da je

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(\xi) \int_a^b f(x)dx.$$

3.4 Eulerjevi funkciji Γ in B

Definicija 3.5 (Funkcija Γ). Na poltraku $x > 0$ je funkcija Γ definirana z

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (4)$$

Trditev 3.3 (Rekurzivna formula). Za $\forall x > 0$ velja

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Posledica. $\Gamma(n+1) = n!$ za $\forall n \in \mathbb{N}$

To nam namiguje, naj definiramo

$$x! := \Gamma(x+1) \text{ za } \forall x \in \mathbb{N}.$$

Rekurzivna formula nam omogoča, da razširimo definicijsko območje funkcije Γ . Če je namreč $x \in (-1, 0)$, je $x+1 \in (0, 1)$, zato je vrednost $\Gamma(x+1)$ že definirano in lahko postavimo

$$\Gamma := \frac{\Gamma(x+1)}{x}.$$

S ponavljanjem rekurzivne formule dobimo

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\dots(x+n-1)}. \quad (5)$$

Za $\forall x \in \mathbb{R}$, ki ni negativno celo število ali 0, lahko izberemo tak najmanjši $n \in \mathbb{N}$, da je $(x+n) > 0$; tedaj je vrednost $\Gamma(x+n)$ že definirana in lahko $\Gamma(x)$ definiramo s formulo (5).

Definicija 3.6. Funkcija beta je definirana kot

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad (x > 0, y > 0). \quad (6)$$

Lahko se je prepričati, da je integral v (6) konvergenten, če je $x > 0$ in $y > 0$.

Z vpeljavo nove integracijske spremenljivke $t = \sin^2 \varphi$ lahko definicijo funkcije B zapišemo tudi kot

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1} \varphi \cos^{2y-1} \varphi d\varphi. \quad (7)$$

Trditev 3.4. Za poljubna pozitivna x, y je

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (8)$$

Izrek 3.7 (Stirlingova formula).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = \sqrt{2\pi}$$

Trditev 3.5 (Wallisova formula).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \prod_{j=1}^n \left(\frac{2j}{2j-1} \right)^2 = \frac{\pi}{2}$$

4 VEČKRATNI INTEGRALI

Definicija 4.1. Naj bo $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ omejena funkcija, definirana na kvadru $K = [a, b] \times [c, d] \times [e, g]$ v \mathbb{R}^3 . Vse tri intervale $[a, b]$, $[c, d]$ in $[e, g]$ razdelimo na podintervale z delilnimi točkami:

$$a = x_0 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_m = b,$$

$$c = y_0 < \dots < y_{j-1} < y_j < \dots < y_n = d,$$

$$e = z_0 < \dots < z_{k-1} < z_k < \dots < z_p = g.$$

S tem razdelimo kvader K na manjše podkvadre

$$K_{i,j,k} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k];$$

to delitev imenujemo D . Označimo

$$m_{i,j,k} = \inf_{(x,y,z) \in K_{i,j,k}} f(x, y, z),$$

$$M_{i,j,k} = \sup_{(x,y,z) \in K_{i,j,k}} f(x, y, z)$$

ter tvorimo *spodnjo* in *zgornjo* Riemannovo vsoto pri tej delitvi:

$$\underline{S}_D = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p m_{i,j,k} \Delta_{i,j,k} V,$$

$$\overline{S}_D = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p M_{i,j,k} \Delta_{i,j,k} V,$$

kjer je

$$\Delta_{i,j,k} V = \Delta_i x \Delta_j y \Delta_k z = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$$

prostornina kvadra $K_{i,j,k}$. Končno naj bo

$$\underline{S} = \sup_D \underline{S}_D \quad \text{in} \quad \overline{S} = \inf_D \overline{S}_D,$$

kjer teče D po vseh takih delitvah kvadra K . Če je $\underline{S} = \overline{S}$ pravimo, da je funkcija f *integrabilna* na kvadru K in skupno vrednost $\underline{S} = \overline{S}$ označimo kot

$$\iiint_K f(x, y, z) dV$$

ter jo imenujemo *trojni* (Riemannov) integral funkcije f .

Definicija 4.2. Naj bo Ω poljubna omejena podmnožica v \mathbb{R}^n ($n = 1, 2, 3, \dots$), $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ pa omejena funkcija. Izberimo kvader K oblike $K = [a, b] \times [c, d] \times \dots$, ki naj vsebuje Ω , definirajmo funkcijo $f_K : K \rightarrow \mathbb{R}$ kot

$$f(x) = \begin{cases} f(x, y, \dots) & ; (x, y, \dots) \in \Omega \\ 0 & ; (x, y, \dots) \in K \setminus \Omega \end{cases}$$

ter večkratni integral $\int \cdots \int_{\Omega} f(x, y, \dots) dV$ kot

$$\int \cdots \int_{\Omega} f(x, y, \dots) dV = \int \cdots \int_K f_K(x, y, \dots) dV.$$

Trditev 4.1. Če ima presek *omejenih* množic Ω_1 in Ω_2 v \mathbb{R}^2 (ali v \mathbb{R}^n) mero 0, potem je

$$\int \cdots \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(x_1, \dots, x_n) dV = \int \cdots \int_{\Omega_1} f(x_1, \dots, x_n) dV + \int \cdots \int_{\Omega_2} f(x_1, \dots, x_n) dV$$

Trditev 4.2. Naj bosta f_1 in f_2 *zvezni* funkciji na Ω ter c_1 in c_2 poljubni konstanti. Potem velja

$$\int \cdots \int_{\Omega} (c_1 f_1 + c_2 f_2) dV = c_1 \int \cdots \int_{\Omega} f_1 dV + c_2 \int \cdots \int_{\Omega} f_2 dV.$$

Trditev 4.3. Če je $f \leq g$, potem je $\iint_{\Omega} f dp \leq \iint_{\Omega} g dp$ in podobno za večkratne integrale. Če je torej funkcija f *omejena* na množici Ω navzgor s konstanto M , navzdol pa s konstanto m , potem velja

$$mp_{\Omega} \leq \iint_{\Omega} f dp \leq Mp_{\Omega},$$

kjer je p_{Ω} ploščina množice Ω .

Trditev 4.4.

$$\left| \iint_{\Omega} f dp \right| \leq \iint_{\Omega} |f| dp$$

Trditev 4.5. Naj bo Ω kompaktna množica v \mathbb{R}^2 , katere rob sestoji iz končno mnogo krivulj oblike $\gamma[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ za kake zvezno odvedljive funkcije \vec{r} in kake intervale $[a, b]$. Izberimo pravokotnik P , ki vsebuje Ω , in naj bo D poljubna delitev tega pravokotnika s premicami, vzporednimi koordinatnima osema. V vsakem od tistih delilnih pravokotnikov P_k delitve D , ki sekajo Ω , izberemo točko $\vec{r}_k \in P_k \cap \Omega$, označimo z $\Delta_k p$ ploščino pravokotnika P_k in tvorimo Riemannovo vsoto

$$S_D(f) = \sum_k f(\vec{r}_k) \Delta_k p,$$

kjer teče indeks le po tistih delilnih pravokotnikih P_k , ki sekajo Ω . Za vsako zvezno funkcijo f na Ω je integral $\iint_{\Omega} f(\vec{r}) dp$ enak limiti vsot $S_D(f)$, ko gredo velikosti vseh delilnih pravokotnikov (torej največja diagonalna vseh delilnih pravokotnikov) proti 0. Natančneje, za $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, da je

$$\left| S_D(f) - \iint_{\Omega} f(\vec{r}) dp \right| < \varepsilon,$$

če je maksimalna diagonalna delilnih pravokotnikov P_k manjša od δ .

Posledica. Naj bo Ω podana kot

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g_1(x) \leq y \leq g_2(x), a \leq x \leq b\}, \quad (9)$$

kjer sta g_1 in g_2 zvezni funkciji na intervalu $[a, b]$ in $g_1(x) \leq g_2(x)$ za $\forall x \in [a, b]$. Naj bosta M_1 in M_2 taki števili, da pravokotnik $P = [a, b] \times [M_1, M_2]$ vsebuje množico Δ (torej $M_1 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq M_2$ za $\forall x \in [a, b]$). Po definiciji imamo potem za vsako zvezno funkcijo $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dp = \iint_P f_P(x, y) dp,$$

kjer je f_P funkcija na P , definirana z

$$f_P(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & ; (x, y) \in \Omega \\ 0 & ; (x, y) \in P \setminus \Omega. \end{cases}$$

Po zgornjem izreku pa je

$$\iint_P f_P(x, y) dp = \int_a^b \left(\int_{M_1}^{M_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx,$$

kjer smo upoštevali, da je funkcija f_P enaka 0 izven Ω in zato $\int_{M_1}^{M_2} f_P(x, y) dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy$.

Torej velja naslednja trditev:

Trditev 4.6. Za vsako *zvezno* funkcijo f na množici Ω , definirani kot (9), velja

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dp = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Trditev 4.7. Za območja Ω , podana kot $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y), (x, y) \in \Lambda\}$, in (skoraj povsod) *zvezne* funkcije f na njih velja

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iint_{\Lambda} \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y, z) dz \right) dp.$$

4.1 Cilindrične ali valjne koordinate

Definicija 4.3. Lega točke (x, y, z) v prostoru \mathbb{R} je določena s koordinato z in polarnima koordinatama r, φ njene projekcije $(x, y, 0)$ na ravnino x, y . Trojko φ, r, z imenujemo *cilindrične* ali *valjne* koordinatne točke. S kar-tezičnimi koordinatami so povezane prek enakosti

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z.$$

Pri tem lahko r zavzame vse nenegativne vrednosti, z vse realne vrednosti, φ pa na intervalu $[0, 2\pi)$. Za dano točko T pomeni r njeno razdaljo od osi z , ki je enaka razdalji projekcije točke T na ravnino x, y od koordinatnega izhodišča.

Posledica (Koordinatne ploskve).

- Ploskve $z = \text{konstanta}$ so ravnine, vzporedne z ravnino x, y

- Ploskve $r = \text{konstanta}$ so neskončni valji, katerih os je os z
- Ploskve $\varphi = \text{konstanta}$ pa so polravnine

4.2 Sferične koordinate

Definicija 4.4. *Sferične ali krogelne koordinate* točke $T(x, y, z)$ so:

- $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ razdalja od izhodišča
- θ kot, ki ga vektor $0\vec{T}$ oklepa s pozitivnim poltrakom osi z
- φ kot, ki ga pravokotna projekcija vektorja $0\vec{T}$ na ravnino x, y oklepa s pozitivnim poltrakom osi x

Naj bo kot doslej r , razdalja T od osi z . Potem je $r = R \sin \theta$ in

$$x = R \sin \theta \cos \varphi, \quad y = R \sin \theta \sin \varphi, \quad z = R \cos \theta.$$

Tukaj lahko zavzame kot θ vrednosti na intervalu $[0, \pi]$ (0 je na pozitivnem, π pa na negativnem poltraku osi z), kot φ pa vrednosti na intervalu $[0, 2\pi)$.

Volumni element v sferičnih koordinatah je

$$dV = R^2 \sin \theta \, dR \, d\theta \, d\varphi.$$

Od tod sledi, da lahko trojni integral po telesu Ω , ki je opisano kot

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g_1(\varphi, \theta) \leq R \leq g_2(\varphi, \theta), (\varphi, \theta) \in \Lambda\},$$

kjer sta $g_1 \leq g_2$ zvezni funkciji na množici $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$, izrazimo kot

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dV = \iint_{\Lambda} \left(\int_{g_1(\varphi, \theta)}^{g_2(\varphi, \theta)} f(R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta) R^2 \sin \theta \, dR \right) d\theta \, d\varphi.$$

Posledica (Koordinatne ploskve).

- Ploskve $R = \text{konstanta}$ so sfere
- Ploskve $\theta = \text{konstanta}$ so stožci
- Ploskve $\varphi = \text{konstanta}$ so polravnine

4.3 Splošne koordinate

Definicija 4.5. Naj bo V odprta podmožica v ravnini. Vlogo splošnih koordinat na V lahko igra vsak tak par funkcij

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

na V , da iz $(x, y) \neq (x_1, y_2)$ sledi $(u(x, y), v(x, y)) \neq (u(x_1, y_1), v(x_1, y_1))$, kar pomeni, da je točka (x, y) enolično določena s parom $(u(x, y), v(x, y))$. Drugače povedano, vektorska funkcija

$$F : V \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

mora biti *injektivna*. Zavoljo diferencialnega računa predpostavimo, da sta funkciji u in v *zvezno odvedljivi*. Iz izreka o inverzni preslikavi vemo, da potem obrnljivost Jacobijeve matrike $F'(x, y)$ preslikave F zagotavlja *injektivnost* preslikave F v okolici točke (x, y) , ne pa na celem definicijskem območju V , zato jo je treba posebej privzeti. Tedaj je pri pogoju, da je $F'(x, y)$ *obrnjiva* matrika za $\forall (x, y) \in V$, preslikava F dejansko *bijekcija* na odprto množico $U := F(V)$, inverzna preslikava

$$G := F^{-1} : U \rightarrow V$$

pa je tudi *zvezno odvedljiva* in

$$G'(\vec{q}) = (F'(G(\vec{q})))^{-1} \quad \text{za } \forall \vec{q} \in U.$$

Pri fiksnih u_0 in v_0 imenujemo krivulje $u = (x, y)$ in $v = (x, y)$ *koordinatne* krivulje.

Izrek 4.1. Naj bo $G : U \rightarrow V$ taka *zvezno odvedljiva bijekcija*, kjer sta U in V odprti podmnožici v \mathbb{R}^2 , da je $\det G'(\vec{r}) \neq 0$ za $\forall \vec{r} \in U$. Označimo $\vec{r} = (u, v)$ in $G(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$. Naj bo Ω *kompaktna* podmnožica v V , katere rob naj sestoji iz končno mnogo *zvezno odvedljivih* krivulj (oz. naj ima mero 0), f pa naj bo *zvezna* funkcija na V (razen morda na množici z mero 0). Potem je

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{G^{-1}(\Omega)} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u, v) \right| du \, dv,$$

kjer je

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u, v) = \det G'(u, v) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{bmatrix}.$$

Lema 2. Naj bo $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ obrnljiva linearna preslikava in Λ paralelogram. Potem med ploščinama paralelograma Λ in $L(\Lambda)$ velja zveza

$$p_{L(\Lambda)} = |\det L| p_{\Lambda}. \quad (10)$$

Enaka povezava velja tudi za vsako *kompaktno* podmnožico Λ v \mathbb{R}^2 oziroma za vsako *ravninsko* podmnožico, za katero je ploščina definirana.

Lema 3. Naj bo $G : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ zvezno odvedljiva injektivna preslikava s povsod obrbljivim odvodom $G'(u, v)$, definirana na odprti množici U , K kompaktna podmnožica v U , $\Lambda = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; |u - a| \leq h, |v - b| \leq h\}$ pa kvadrat s središčem (a, b) in stranico dolžine $2h$, vsebovan v K . Označimo

$$L = \det G'(a, b) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(a, b) & \frac{\partial x}{\partial v}(a, b) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(a, b) & \frac{\partial y}{\partial v}(a, b) \end{bmatrix}$$

in naj bo A preslikava, definirana z $A(u, v) = G(a, b) + L(u - a, v - b)$. Potem za $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ (neodvisen od izbire kvadrata), da za ploščini likov $G(\Lambda)$ in $A(\Lambda)$, ko je $h < \delta$, velja

$$|p_{G(\Lambda)} - p_{A(\Lambda)}| < \varepsilon p_{\Lambda}.$$

Ker se preslikavi A in L razlikujeta le za translacijo, lahko v tej oceni nadomestimo A z L .