

Analiza 3 - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar

2020/21

Kazalo

1	PARAMETRIČNO PODANE KRIVULJE	3
2	PLOSKVE V \mathbb{R}^3	4
3	INTEGRALI S PARAMETROM	6
3.1	Izlimitirani integrali s parametrom	6
3.2	Dvojni in dvakratni integrali	7
3.3	Integriranje in odvajanje integralov s parametrom	9
3.4	Eulerjevi funkciji Γ in B	10
4	VEČKRATNI INTEGRALI	12
4.1	Cilindrične ali valjne koordinate	15
4.2	Sferične koordinate	16
4.3	Splošne koordinate	17
5	PLOSKOVNI IN KRIVULJNI INTEGRAL	19
5.1	Površina ploskve in ploskovni integral skalarne funkcije	19
5.2	Krivuljni integral	20
5.2.1	Krivuljni integral skalarne funkcije	20
5.2.2	Krivuljni integral vektorske funkcije	20
5.2.3	Krivuljni integral potencialnega polja	22
5.2.4	Povezava med krivuljnim in dvojnim integralom	23
6	DIFERENCIALNE ENAČBE	23

1 PARAMETRIČNO PODANE KRIVULJE

Trditev 1.1. Če je \vec{r} odvedljiva vektorska funkcija (njene komponente x , y in z so odvedljive funkcije spremenljivke t), potem je

$$\dot{\vec{r}}(t_0) = (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0))$$

tangentni vektor na krivuljo $t \mapsto \vec{r}(t)$ v točki $\vec{r}(t_0)$, če velja $\dot{\vec{r}}(t_0) \neq 0$.

Trditev 1.2. Če je \vec{r} zvezno odvedljiva vektorska funkcija na intervalu $[a, b]$ (za $a < b$), je potem *dolžina* krivulje, ki jo določa, enaka

$$s = \int_a^b \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt.$$

To velja tudi za funkcijo, ki so le *odsekoma zvezne*. Opazimo tudi, da je zgornja dolžina neodvisna od parametrizacije krivulje.

Trditev 1.3. Naj bo \vec{r} zvezno odvedljiva vektorska funkcija, definirana na intervalu $[a, b]$ (za $a < b$) in naj bo $\psi : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ zvezno odvedljiva bijekcija, tako da $t = \psi(\tau)$ preteče interval $[a, b]$, ko τ preteče interval $[\alpha, \beta]$ (za $\alpha < \beta$). Potem je

$$\int_a^b \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt = \int_\alpha^\beta \left\| \frac{d}{d\tau} \vec{r}(\psi(\tau)) \right\| d\tau.$$

2 PLOSKVE V \mathbb{R}^3

Definicija 2.1 (Ploskev). Podmnožica $P \subseteq \mathbb{R}^3$ je *ploskev*, če za vsako točko $\vec{r} \in P$ obstaja taka okolica $H \subseteq \mathbb{R}^3$, da je $P \cap H$ graf kake zvezno odvedljive funkcije $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$, definirane na kaki *odprti* podmnožici $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

To pomeni, da se na $P \cap H$ ena od koordinat x, y, z da *enolično* izraziti kot funkcija preostalih, torej da je $P \cap H$ ene od oblik:

$$P \cap H = \{(x, y, \phi(x, y)) \mid (x, y) \in D\},$$

$$P \cap H = \{(x, \phi(x, z), y) \mid (x, z) \in D\},$$

$$P \cap H = \{(\phi(y, z), y, z) \mid (y, z) \in D\}.$$

Trditev 2.1 (Izrek o implicitni funkciji). Naj bo $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva funkcija in privzemimo, da je množica $P = g^{-1}(0)$ neprazna. Če je

$$\nabla g(\vec{r}) \neq 0$$

za $\forall \vec{r} \in P$ je P ploskev.

Enačba oblike $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ($t \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$) predstavlja krivuljo v \mathbb{R}^3 . Privzeli bomo, da je pri tem \vec{r} zvezno odvedljiva funkcija spremenljivke t . Taka krivulja leži na ploskvi $P = g^{-1}(0)$ natanko tedaj, ko je $g(\vec{r}(t)) = 0$ za $\forall t \in [a, b]$. Ko to enakost odvajamo po t , dobimo

$$\nabla g(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = 0.$$

Ta enakost pomeni, da je vektor $\nabla g(\vec{r}(t))$ pravokoten na tangentni vektor $\dot{\vec{r}}(t)$ krivulje v točki $\vec{r}(t)$.

Če sedaj izberemo poljubno točko \vec{r}_0 na ploskvi P in opazujemo vse krivulje na ploskvi P , ki gredo skozi točko \vec{r}_0 (vsaka taka krivulja $\vec{r} = \vec{r}(t)$ zadošča pogoju $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ za kak t_0), vidimo, da je vektor $\nabla g(\vec{r}_0)$ pravokoten na tangentni vektor $\dot{\vec{r}}(t_0)$ vsake take krivulje.

To pomeni, da mora biti vektor $\nabla g(\vec{r}_0)$ pravokoten na ploskev P . To velja za vsako točko $\vec{r}_0 \in P$.

Definicija 2.2 (Normalni vektor). Vektor $\nabla g(\vec{r})$ imenujemo *normalni vektor* na ploskev $P = g^{-1}(0)$ v točki $\vec{r} \in P$. Ravnino $T_{\vec{r}}P$ z normalnim vektorjem $\nabla g(\vec{r})$ skozi točko \vec{r} na ploskvi P pa imenujemo *tangentna ravnina* na ploskev P v točki \vec{r} .

Tangentna ravnina na P skozi točko \vec{r} je torej vzporedna vsem tangen-
tnim vektorjem v točki \vec{r} na krivulje skozi \vec{r} na ploskvi P .

3 INTEGRALI S PARAMETROM

Definicija 3.1 (Integral s parametrom). Naj bo f zvezna funkcija dveh spremenljivk, definirana na pravokotniku $P = [a, b] \times [c, d]$ ($a < b$, $c < d$). Integral

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad (1)$$

je funkcija spremenljivke y . Tak integral imenujemo *integral s parametrom* y .

Trditev 3.1. Če je f zvezna funkcija na pravokotniku $P = [a, b] \times [c, d]$, je funkcija F (definirana z (1)) zvezna na intervalu P .

Izrek 3.1. Naj bo f zvezna na pravokotniku $P = [a, b] \times [c, d]$ in privzemimo, da obstaja parcialni odvod $\frac{\partial f}{\partial y}$, ki naj bo zvezen na P . Potem je funkcija F (podana z (1)) odvedljiva in velja

$$F'(y) = \frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx. \quad (2)$$

3.1 Izlimitirani integrali s parametrom

Definicija 3.2. Integral $F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$ je enakomerno konvergenten za $y \in S \subseteq \mathbb{R}$, če za $\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{R}$, da za $\forall b \geq M$ in $\forall y \in S$ velja

$$\left| \int_b^\infty f(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

Za razliko od navadne konvergence mora tukaj obstajati tak M , ki je istočasno ustrezen za $\forall y \in S$, torej je $M = M_\varepsilon$ odvisen le od ε , ne pa tudi od y . Pri navadni konvergenci bi bil veljalo $M = M_{\varepsilon, y}$.

Trditev 3.2. Če je f zvezna funkcija na pasu $P = [a, \infty) \times [c, d]$ in integral

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$$

enakomerno konvergenten za $y \in [c, d]$, je F zvezna funkcija na $[c, d]$.

3.2 Dvojni in dvakratni integrali

Definicija 3.3. Naj bo $P = [a, b] \times [c, d]$ in $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Delitev $D_{[a,b]}$ intervala $[a, b]$ je določena z zaporedjem točk

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b.$$

Delitev $D_{[a,b]}$ skupaj s poljubno delitvijo $D_{[c,d]}$ intervala $[c, d]$, določeno z

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d,$$

določa neko delitev pravokotnika P na manjše pravokotnike

$$P_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad (i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n).$$

Naj bo

$$m_{i,j} = \inf_{(x,y) \in P_{i,j}} f(x, y),$$

$$M_{i,j} = \sup_{(x,y) \in P_{i,j}} f(x, y).$$

Z $\Delta_{i,j}p = \Delta_i x \cdot \Delta_j y = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ označimo ploščino pravokotnika $P_{i,j}$. Vsoto

$$\underline{S}_D = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n m_{i,j} \Delta_{i,j} p$$

imenujemo *spodnja*, vsoto

$$\overline{S}_D = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{i,j} \Delta_{i,j} p$$

pa *zgornja Riemannova vsota* funkcije f pri delitvi D .

Lema 1. Če je N nadaljevanje delitve D pravokotnika P , za spodnje in zgornje Riemannove vsote poljubne omejene funkcije $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ velja

$$\underline{S}_N \geq \underline{S}_D \text{ in } \overline{S}_N \leq \overline{S}_D.$$

Definicija 3.4. Omejena funkcija $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ je na pravokotniku P *integrabilna v Riemannovem smislu*, če velja

$$\underline{S} = \overline{S},$$

kjer je \underline{S} supremum njenih *spodnjih*, \overline{S} pa infimum njenih *zgornjih* Riemannovih vsot. Tedaj skupno vrednost $\underline{S} = \overline{S}$ označimo kot

$$\iint_P f(x, y) dp,$$

kjer pomeni $dp = dxdy$ *ploščinski element*, in jo imenujemo *dvojni integral funkcije f po pravokotniku P* .

Izrek 3.2. Zvezna funkcija f na pravokotniku $P = [a, b] \times [c, d]$ je *integrabilna* in velja

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \iint_P f(x, y) dp = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy. \quad (3)$$

Enak zaključek velja tudi za funkcijo f , ki ni nujno zvezna, če je N množica njenih točk nezveznosti taka, da jo za $\forall \varepsilon > 0$ lahko pokrijemo s kakim zaporedjem pravokotnikov, katerih vsota ploščin je pod ε . Tedaj pravimo, da ima N mero 0.

Posledica. Za funkcijo f , ki je na pravokotniku P *integrabilna* v Riemannovem smislu, konvergirajo Riemannove vsote S proti $\iint_P f(x, y) dp$, ko gredo velikosti delilnih pravokotnikov (njihove diagonale) proti 0.

Natančneje: za $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, da je

$$\left| S - \iint_P f(x, y) dp \right| < \varepsilon$$

za vsako Riemannovo vsoto funkcije f pri vsaki delitvi pravokotnika P , kjer si dolžine diagonal pod δ .

3.3 Integriranje in odvajanje integralov s parametrom

Izrek 3.3. Naj bo f zvezna na pasu $[a, \infty) \times [c, d]$. Če je integral $\int_a^\infty f(x, y) dx$ enakomerno konvergenten za $y \in [c, d]$, potem je

$$\int_c^d \int_a^\infty f(x, y) dx dy = \int_a^\infty \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

Izrek 3.4. Naj bosta f in $\frac{\partial f}{\partial y}$ zvezni na pasu $[a, \infty) \times [c, d]$, naj bo integral

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$$

konvergenten za $y \in [c, d]$ in naj bo integral

$$\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$$

enakomerno konvergenten na $[c, d]$. Potem je F odvedljiva funkcija in velja

$$F'(y) = \frac{d}{dy} \int_a^\infty f(x, y) dx = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$

Izrek 3.5 (Kriterij za ugotavljanje enakomerne konvergence).

Integral $\int_a^\infty f(x, y) dx = F(y)$ je enakomerno konvergenten na S natanko tedaj, ko za $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{R}$, da za poljubna $d > b \geq N$ in za $\forall y \in S$ velja

$$\left| \int_b^d f(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

Posledica. Če je $|f(x, y)| \leq g(x, y)$ za $\forall (x, y) \in [a, \infty) \times [c, d]$ in je integral $\int_a^b g(x, y) dx$ enakomerno konvergenten na $[c, d]$, je enakomerno konvergenten tudi integral $\int_a^b f(x, y) dx$.

Izrek 3.6 (2. izrek o povprečju). Naj bo f integrabilna, g pa nenegativna padajoča (odvedljiva) funkcija na intervalu $[a, b]$. Potem $\exists \xi \in [a, b]$, da je

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(\xi) \int_a^b f(x)dx.$$

3.4 Eulerjevi funkciji Γ in B

Definicija 3.5 (Funkcija Γ). Na poltraku $x > 0$ je funkcija Γ definirana z

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (4)$$

Trditev 3.3 (Rekurzivna formula). Za $\forall x > 0$ velja

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Posledica. $\Gamma(n+1) = n!$ za $\forall n \in \mathbb{N}$

To nam namiguje, naj definiramo

$$x! := \Gamma(x+1) \text{ za } \forall x \in \mathbb{N}.$$

Rekurzivna formula nam omogoča, da razširimo definicijsko območje funkcije Γ . Če je namreč $x \in (-1, 0)$, je $x+1 \in (0, 1)$, zato je vrednost $\Gamma(x+1)$ že definirano in lahko postavimo

$$\Gamma := \frac{\Gamma(x+1)}{x}.$$

S ponavljanjem rekurzivne formule dobimo

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\dots(x+n-1)}. \quad (5)$$

Za $\forall x \in \mathbb{R}$, ki ni negativno celo število ali 0, lahko izberemo tak najmanjši $n \in \mathbb{N}$, da je $(x+n) > 0$; tedaj je vrednost $\Gamma(x+n)$ že definirana in lahko $\Gamma(x)$ definiramo s formulo (5).

Definicija 3.6. Funkcija beta je definirana kot

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad (x > 0, y > 0). \quad (6)$$

Lahko se je prepričati, da je integral v (6) konvergenten, če je $x > 0$ in $y > 0$.

Z vpeljavo nove integracijske spremenljivke $t = \sin^2 \varphi$ lahko definicijo funkcije B zapišemo tudi kot

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1} \varphi \cos^{2y-1} \varphi d\varphi. \quad (7)$$

Trditev 3.4. Za poljubna pozitivna x, y je

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (8)$$

Izrek 3.7 (Stirlingova formula).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = \sqrt{2\pi}$$

Trditev 3.5 (Wallisova formula).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \prod_{j=1}^n \left(\frac{2j}{2j-1} \right)^2 = \frac{\pi}{2}$$

4 VEČKRATNI INTEGRALI

Definicija 4.1. Naj bo $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ omejena funkcija, definirana na kvadru $K = [a, b] \times [c, d] \times [e, g]$ v \mathbb{R}^3 . Vse tri intervale $[a, b]$, $[c, d]$ in $[e, g]$ razdelimo na podintervale z delilnimi točkami:

$$a = x_0 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_m = b,$$

$$c = y_0 < \dots < y_{j-1} < y_j < \dots < y_n = d,$$

$$e = z_0 < \dots < z_{k-1} < z_k < \dots < z_p = g.$$

S tem razdelimo kvader K na manjše podkvadre

$$K_{i,j,k} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k];$$

to delitev imenujemo D . Označimo

$$m_{i,j,k} = \inf_{(x,y,z) \in K_{i,j,k}} f(x, y, z),$$

$$M_{i,j,k} = \sup_{(x,y,z) \in K_{i,j,k}} f(x, y, z)$$

ter tvorimo *spodnjo* in *zgornjo* Riemannovo vsoto pri tej delitvi:

$$\underline{S}_D = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p m_{i,j,k} \Delta_{i,j,k} V,$$

$$\overline{S}_D = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p M_{i,j,k} \Delta_{i,j,k} V,$$

kjer je

$$\Delta_{i,j,k} V = \Delta_i x \Delta_j y \Delta_k z = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$$

prostornina kvadra $K_{i,j,k}$. Končno naj bo

$$\underline{S} = \sup_D \underline{S}_D \quad \text{in} \quad \overline{S} = \inf_D \overline{S}_D,$$

kjer teče D po vseh takih delitvah kvadra K . Če je $\underline{S} = \overline{S}$ pravimo, da je funkcija f *integrabilna* na kvadru K in skupno vrednost $\underline{S} = \overline{S}$ označimo kot

$$\iiint_K f(x, y, z) dV$$

ter jo imenujemo *trojni* (Riemannov) integral funkcije f .

Definicija 4.2. Naj bo Ω poljubna omejena podmnožica v \mathbb{R}^n ($n = 1, 2, 3, \dots$), $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ pa omejena funkcija. Izberimo kvader K oblike $K = [a, b] \times [c, d] \times \dots$, ki naj vsebuje Ω , definirajmo funkcijo $f_K : K \rightarrow \mathbb{R}$ kot

$$f(x) = \begin{cases} f(x, y, \dots) & ; (x, y, \dots) \in \Omega \\ 0 & ; (x, y, \dots) \in K \setminus \Omega \end{cases}$$

ter večkratni integral $\int \cdots \int_{\Omega} f(x, y, \dots) dV$ kot

$$\int \cdots \int_{\Omega} f(x, y, \dots) dV = \int \cdots \int_K f_K(x, y, \dots) dV.$$

Trditev 4.1. Če ima presek *omejenih* množic Ω_1 in Ω_2 v \mathbb{R}^2 (ali v \mathbb{R}^n) mero 0, potem je

$$\int \cdots \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(x_1, \dots, x_n) dV = \int \cdots \int_{\Omega_1} f(x_1, \dots, x_n) dV + \int \cdots \int_{\Omega_2} f(x_1, \dots, x_n) dV$$

Trditev 4.2. Naj bosta f_1 in f_2 *zvezni* funkciji na Ω ter c_1 in c_2 poljubni konstanti. Potem velja

$$\int \cdots \int_{\Omega} (c_1 f_1 + c_2 f_2) dV = c_1 \int \cdots \int_{\Omega} f_1 dV + c_2 \int \cdots \int_{\Omega} f_2 dV.$$

Trditev 4.3. Če je $f \leq g$, potem je $\iint_{\Omega} f dp \leq \iint_{\Omega} g dp$ in podobno za večkratne integrale. Če je torej funkcija f *omejena* na množici Ω navzgor s konstanto M , navzdol pa s konstanto m , potem velja

$$mp_{\Omega} \leq \iint_{\Omega} f dp \leq Mp_{\Omega},$$

kjer je p_{Ω} ploščina množice Ω .

Trditev 4.4.

$$\left| \iint_{\Omega} f dp \right| \leq \iint_{\Omega} |f| dp$$

Trditev 4.5. Naj bo Ω kompaktna množica v \mathbb{R}^2 , katere rob sestoji iz končno mnogo krivulj oblike $\gamma[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ za kake zvezno odvedljive funkcije \vec{r} in kake intervale $[a, b]$. Izberimo pravokotnik P , ki vsebuje Ω , in naj bo D poljubna delitev tega pravokotnika s premicami, vzporednimi koordinatnima osema. V vsakem od tistih delilnih pravokotnikov P_k delitve D , ki sekajo Ω , izberemo točko $\vec{r}_k \in P_k \cap \Omega$, označimo z $\Delta_k p$ ploščino pravokotnika P_k in tvorimo Riemannovo vsoto

$$S_D(f) = \sum_k f(\vec{r}_k) \Delta_k p,$$

kjer teče indeks le po tistih delilnih pravokotnikih P_k , ki sekajo Ω . Za vsako zvezno funkcijo f na Ω je integral $\iint_{\Omega} f(\vec{r}) dp$ enak limiti vsot $S_D(f)$, ko gredo velikosti vseh delilnih pravokotnikov (torej največja diagonalna vseh delilnih pravokotnikov) proti 0. Natančneje, za $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, da je

$$\left| S_D(f) - \iint_{\Omega} f(\vec{r}) dp \right| < \varepsilon,$$

če je maksimalna diagonalna delilnih pravokotnikov P_k manjša od δ .

Posledica. Naj bo Ω podana kot

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g_1(x) \leq y \leq g_2(x), a \leq x \leq b\}, \quad (9)$$

kjer sta g_1 in g_2 zvezni funkciji na intervalu $[a, b]$ in $g_1(x) \leq g_2(x)$ za $\forall x \in [a, b]$. Naj bosta M_1 in M_2 taki števili, da pravokotnik $P = [a, b] \times [M_1, M_2]$ vsebuje množico Δ (torej $M_1 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq M_2$ za $\forall x \in [a, b]$). Po definiciji imamo potem za vsako zvezno funkcijo $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dp = \iint_P f_P(x, y) dp,$$

kjer je f_P funkcija na P , definirana z

$$f_P(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & ; (x, y) \in \Omega \\ 0 & ; (x, y) \in P \setminus \Omega. \end{cases}$$

Po zgornjem izreku pa je

$$\iint_P f_P(x, y) dp = \int_a^b \left(\int_{M_1}^{M_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx,$$

kjer smo upoštevali, da je funkcija f_P enaka 0 izven Ω in zato $\int_{M_1}^{M_2} f_P(x, y) dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy$.

Torej velja naslednja trditev:

Trditev 4.6. Za vsako *zvezno* funkcijo f na množici Ω , definirani kot (9), velja

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dp = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Trditev 4.7. Za območja Ω , podana kot $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y), (x, y) \in \Lambda\}$, in (skoraj povsod) *zvezne* funkcije f na njih velja

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iint_{\Lambda} \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y, z) dz \right) dp.$$

4.1 Cilindrične ali valjne koordinate

Definicija 4.3. Lega točke (x, y, z) v prostoru \mathbb{R} je določena s koordinato z in polarnima koordinatama r, φ njene projekcije $(x, y, 0)$ na ravnino x, y . Trojko φ, r, z imenujemo *cilindrične* ali *valjne* koordinatne točke. S kar-tezičnimi koordinatami so povezane prek enakosti

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z.$$

Pri tem lahko r zavzame vse nenegativne vrednosti, z vse realne vrednosti, φ pa na intervalu $[0, 2\pi)$. Za dano točko T pomeni r njeno razdaljo od osi z , ki je enaka razdalji projekcije točke T na ravnino x, y od koordinatnega izhodišča.

Posledica (Koordinatne ploskve).

- Ploskve $z = \text{konstanta}$ so ravnine, vzporedne z ravnino x, y

- Ploskve $r = \text{konstanta}$ so neskončni valji, katerih os je os z
- Ploskve $\varphi = \text{konstanta}$ pa so polravnine

4.2 Sferične koordinate

Definicija 4.4. *Sferične ali krogelne koordinate* točke $T(x, y, z)$ so:

- $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ razdalja od izhodišča
- θ kot, ki ga vektor $0\vec{T}$ oklepa s pozitivnim poltrakom osi z
- φ kot, ki ga pravokotna projekcija vektorja $0\vec{T}$ na ravnino x, y oklepa s pozitivnim poltrakom osi x

Naj bo kot doslej r , razdalja T od osi z . Potem je $r = R \sin \theta$ in

$$x = R \sin \theta \cos \varphi, \quad y = R \sin \theta \sin \varphi, \quad z = R \cos \theta.$$

Tukaj lahko zavzame kot θ vrednosti na intervalu $[0, \pi]$ (0 je na pozitivnem, π pa na negativnem poltraku osi z), kot φ pa vrednosti na intervalu $[0, 2\pi)$.

Volumni element v sferičnih koordinatah je

$$dV = R^2 \sin \theta \, dR \, d\theta \, d\varphi.$$

Od tod sledi, da lahko trojni integral po telesu Ω , ki je opisano kot

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g_1(\varphi, \theta) \leq R \leq g_2(\varphi, \theta), (\varphi, \theta) \in \Lambda\},$$

kjer sta $g_1 \leq g_2$ zvezni funkciji na množici $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$, izrazimo kot

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dV = \iint_{\Lambda} \left(\int_{g_1(\varphi, \theta)}^{g_2(\varphi, \theta)} f(R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta) R^2 \sin \theta \, dR \right) d\theta \, d\varphi.$$

Posledica (Koordinatne ploskve).

- Ploskve $R = \text{konstanta}$ so sfere
- Ploskve $\theta = \text{konstanta}$ so stožci
- Ploskve $\varphi = \text{konstanta}$ so polravnine

4.3 Splošne koordinate

Definicija 4.5. Naj bo V odprta podmožica v ravnini. Vlogo splošnih koordinat na V lahko igra vsak tak par funkcij

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

na V , da iz $(x, y) \neq (x_1, y_2)$ sledi $(u(x, y), v(x, y)) \neq (u(x_1, y_1), v(x_1, y_1))$, kar pomeni, da je točka (x, y) enolično določena s parom $(u(x, y), v(x, y))$. Drugače povedano, vektorska funkcija

$$F : V \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

mora biti *injektivna*. Zavoljo diferencialnega računa predpostavimo, da sta funkciji u in v *zvezno odvedljivi*. Iz izreka o inverzni preslikavi vemo, da potem obrnljivost Jacobijeve matrike $F'(x, y)$ preslikave F zagotavlja *injektivnost* preslikave F v okolici točke (x, y) , ne pa na celem definicijskem območju V , zato jo je treba posebej privzeti. Tedaj je pri pogoju, da je $F'(x, y)$ *obrnjljiva* matrika za $\forall (x, y) \in V$, preslikava F dejansko *bijekcija* na odprto množico $U := F(V)$, inverzna preslikava

$$G := F^{-1} : U \rightarrow V$$

pa je tudi *zvezno odvedljiva* in

$$G'(\vec{q}) = (F'(G(\vec{q})))^{-1} \quad \text{za } \forall \vec{q} \in U.$$

Pri fiksnih u_0 in v_0 imenujemo krivulje $u = (x, y)$ in $v = (x, y)$ *koordinatne* krivulje.

Izrek 4.1. Naj bo $G : U \rightarrow V$ taka *zvezno odvedljiva bijekcija*, kjer sta U in V odprti podmnožici v \mathbb{R}^2 , da je $\det G'(\vec{r}) \neq 0$ za $\forall \vec{r} \in U$. Označimo $\vec{r} = (u, v)$ in $G(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$. Naj bo Ω *kompaktna* podmnožica v V , katere rob naj sestoji iz končno mnogo *zvezno odvedljivih* krivulj (oz. naj ima mero 0), f pa naj bo *zvezna* funkcija na V (razen morda na množici z mero 0). Potem je

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{G^{-1}(\Omega)} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u, v) \right| du \, dv,$$

kjer je

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u, v) = \det G'(u, v) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{bmatrix}.$$

Lema 2. Naj bo $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ obrnljiva linearna preslikava in Λ paralelogram. Potem med ploščinama paralelograma Λ in $L(\Lambda)$ velja zveza

$$p_{L(\Lambda)} = |\det L| p_{\Lambda}. \quad (10)$$

Enaka povezava velja tudi za vsako *kompaktno* podmnožico Λ v \mathbb{R}^2 oziroma za vsako *ravninsko* podmnožico, za katero je ploščina definirana.

Lema 3. Naj bo $G : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ zvezno odvedljiva injektivna preslikava s povsod obrbljivim odvodom $G'(u, v)$, definirana na odprti množici U , K kompaktna podmnožica v U , $\Lambda = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; |u - a| \leq h, |v - b| \leq h\}$ pa kvadrat s središčem (a, b) in stranico dolžine $2h$, vsebovan v K . Označimo

$$L = \det G'(a, b) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(a, b) & \frac{\partial x}{\partial v}(a, b) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(a, b) & \frac{\partial y}{\partial v}(a, b) \end{bmatrix}$$

in naj bo A preslikava, definirana z $A(u, v) = G(a, b) + L(u - a, v - b)$. Potem za $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ (neodvisen od izbire kvadrata), da za ploščini likov $G(\Lambda)$ in $A(\Lambda)$, ko je $h < \delta$, velja

$$|p_{G(\Lambda)} - p_{A(\Lambda)}| < \varepsilon p_{\Lambda}.$$

Ker se preslikavi A in L razlikujeta le za translacijo, lahko v tej oceni nadomestimo A z L .

5 PLOSKOVNI IN KRIVULJNI INTEGRAL

5.1 Površina ploskve in ploskovni integral skalarne funkcije

Definicija 5.1. Naj bo Λ pravokotnik s središčem $(u, v) \in \Omega$ in stranicama du , dv , ki naj bosta vzporedni koordinatnima osema in je L Jacobijeva matrika preslikave $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, torej

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \vec{r}(u, v) & \frac{\partial}{\partial v} \vec{r}(u, v) \end{bmatrix}.$$

Ploščina paralelograma $L(\Lambda)$ je tako

$$p_{L(\Lambda)} = \|du L(1, 0) \times dv L(0, 1)\| = du \, dv \left\| \frac{\partial}{\partial u} \vec{r}(u, v) \times \frac{\partial}{\partial v} \vec{r}(u, v) \right\|.$$

Celotno površino ploskve lahko izračunamo tako, da seštejemo ploščine takih paralelogramov in limitiramo njihove velikosti proti 0, s čimer preide vsota v integral

$$p = \iint_{\Omega} \left\| \frac{\partial}{\partial u} \vec{r}(u, v) \times \frac{\partial}{\partial v} \vec{r}(u, v) \right\| du \, dv.$$

Z upoštevanjem Lagranjeve identitete $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$, lahko nekoliko poenostavimo formulo:

$$E(u, v) = \left\| \frac{\partial}{\partial u} \vec{r} \right\|^2, \quad F(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} \vec{r} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \vec{r}, \quad G(u, v) = \left\| \frac{\partial}{\partial v} \vec{r} \right\|^2$$

$$p = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv.$$

Označimo $\vec{q} = (u, v)$. Jacobijeva matrika $\dot{\vec{r}}(\vec{q})$ je

$$[\dot{\vec{r}}(\vec{q})]^T [\dot{\vec{r}}(\vec{q})] = \begin{bmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{bmatrix},$$

od kjer dobimo determinanto

$$\det [\dot{\vec{r}}(\vec{q})]^T [\dot{\vec{r}}(\vec{q})] = E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2.$$

Zamenjava spremenljivk:

$$\begin{aligned} \iint_{\Lambda} \sqrt{E(s, t)G(s, t) - F(s, t)^2} \, ds \, dt &= \iint_{\Lambda} \sqrt{E(s, t)G(s, t) - F(s, t)^2} \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \right| \, ds \, dt \\ &= \iint_{\Omega} \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2} \, du \, dv. \end{aligned}$$

Trditev 5.1. Definicija površine ploskve je neodvisna od parametrizacije.

Definicija 5.2. Naj bo f funkcija, definirana na ploskvi \mathcal{P} z enačbo $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. *Ploskovni integral* te funkcije po ploskvi \mathcal{P} je definirana kot

$$\iint_{\mathcal{P}} f \, dp = \iint_{\Omega} f(\vec{r}(u, v)) \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2} \, du \, dv.$$

Lahko bi pokazali, da je ploskovni integral neodvisen od parametrizacije ploskve.

5.2 Krivuljni integral

5.2.1 Krivuljni integral skalarne funkcije

Definicija 5.3. Naj bo f (zvezna) funkcija na krivulji γ z enačbo $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. *Krivuljni integral* funkcije f po krivulji γ , je definiran kot

$$\int_{\gamma} f(\vec{r}) \, ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \|\dot{\vec{r}}(t)\| \, dt.$$

5.2.2 Krivuljni integral vektorske funkcije

Definicija 5.4. *Krivuljni integral* je definiran kot

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) \, dt.$$

Trditev 5.2. Če je $t = t(\tau)$ ($\alpha \leq \tau \leq \beta$) naraščajoča zvezno odvedljiva funkcija novega parametra τ in t preteče interval $[a, b]$, ko τ preteče interval $[\alpha, \beta]$, potem je

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d}{dt} \vec{r}(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(\vec{r}(t(\tau))) \cdot \frac{d}{d\tau} \vec{r}(t(\tau)) d\tau,$$

kar pomeni, da je krivuljni integral enak za vse parametrizacije dane krivulje z enako orientacijo.

Če je pa $t = t(\tau)$ padajoča funkcija in t preteče interval $[a, b]$, ko τ teče od β do α , potem je

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d}{dt} \vec{r}(t) dt = - \int_\alpha^\beta \vec{F}(\vec{r}(t(\tau))) \cdot \frac{d}{d\tau} \vec{r}(t(\tau)) d\tau,$$

kar pomeni, da pri spremembi orientacije krivulje, krivuljni integral spremeni predznak.

Trditev 5.3.

(i)

$$\int_{\gamma \dot{+} \lambda} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_\lambda \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

kjer je \vec{F} vektorsko polje na $\gamma \dot{+} \lambda$

(ii)

$$\int_{\gamma^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Krivuljo γ , katere končna točka se ujema z začetno, imenujemo *sklenjena*.

Trditev 5.4. Naj bo \vec{F} vektorsko polje na U . Velja

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

za vsako sklenjeno krivuljo γ v U natanko tedaj, ko je

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

za vsaki krivulji γ_1 in γ_2 v U , ki imata isto začetno in isto končno točko.

5.2.3 Krivuljni integral potencialnega polja

Definicija 5.5. Vektorsko polje $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ (\mathbb{R}^2) je *potencialno*, če obstaja taka funkcija $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{R}^2), imenovana *potencial polja* \vec{F} , da je

$$\vec{F} = \vec{\nabla}u,$$

kjer je $\vec{\nabla}u$ gradient funkcije u .

Trditev 5.5. Zvezno odvedljivo vektorsko polje $\vec{F} = (M, N)$ je potencialno le, če velja

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Trditev 5.6. Krivuljni integral *potencialnega* vektorskega polja $\vec{\nabla}u$ po katerikoli krivulji γ v definicijskem območju polja je

$$\int_{\gamma} \vec{\nabla}u \cdot d\vec{r} = u(\vec{r}(b)) - u(\vec{r}(a)),$$

kjer sta $\vec{r}(a)$ in $\vec{r}(b)$ začetna in končna točka krivulje γ . Torej je krivuljni integral danega potencialnega polja neodvisen od poteka krivulje, odvisen je le od njene začetne in končne točke.

Trditev 5.7. Vektorsko polje \vec{F} na območju U je potencialno natanko tedaj, ko je za vsaki dve točki \vec{r}_0 in \vec{r} iz U krivuljni integral $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ enak za vse krivulje γ v U z začetno točko \vec{r}_0 in končno točko \vec{r} .

Posledica. Vektorsko polje \vec{F} na U je potencialno natanko tedaj, ko je

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

za vsako sklenjeno krivuljo γ v U .

5.2.4 Povezava med krivuljnim in dvojnim integralom

Izrek 5.1. Naj bo Ω kompaktna ravninska množica, katere rob $\partial\Omega$ sestoji iz končno mnogo sklenjenih zvezno odvedljivih krivulj, parametriziranih na kompaktnih intervalih in usmerjenih tako, da je Ω na njihovi levi. Za vsako zvezno odvedljivo vektorsko polje $\vec{F} = (M, N)$, definirano na neki okolici množice Ω , velja Greenova formula

$$\int_{\partial\Omega} (M \, dx + N \, dy) = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \, dp.$$

Ravninsko območje U brez lukenj imenujemo *enostavno povezano*. Natančneje: U je enostavno povezano, če je njegov komplement v razširjeni ravnini (torej v $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$) povezana množica, se pravi je iz enega kosa).

Posledica. Na enostavnem povezanem območju U je pogoj

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

potreben in zadosten za potencialnost vektorskega polja $\vec{F} = (M, N)$.

6 DIFERENCIALNE ENAČBE