Analiza 3 - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar

2020/21

Kazalo

1 PARAMETRIČNO PODANE KRIVULJE **3**

2 PLOSKVE V $\mathbb{R}^3$ **4**

3 INTEGRALI S PARAMETROM **6**

3.1 Izlimitirani integrali s parametrom 6
3.2 Dvojni in dvakratni integrali 7
3.3 Integriranje in odvajanje integralov s parametrom 9
3.4 Eulerjevi funkciji Γ in B 10

4 VEČKRATNI INTEGRALI **12**

4.1 Cilindrične ali valjne koordinate 15
4.2 Sferične koordinate 16
4.3 Splošne koordinate 17

5 PLOSKOVNI IN KRIVULJNI INTEGRAL **19**

5.1 Površina ploskve in ploskovni integral skalarne funkcije 19
5.2 Krivuljni integral 20

1 PARAMETRIČNO PODANE KRIVULJE

Trditev 1.1. Če je $\vec{r}$ *odvedljiva* vektorska funkcija (njene komponente x, y in z so odvedljive funkcije spremenljivke t), potem je

$$\dot{\vec{r}}(t_0) = (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0))$$

tangentni vektor na krivuljo $t \mapsto \vec{r}(t)$ v točki $\vec{r}(t_0)$, če velja $\dot{\vec{r}}(t_0) \neq 0$.

Trditev 1.2. Če je $\vec{r}$ *zvezno odvedljiva* vektorska funkcija na intervalu $[a, b]$ (za $a < b$), je potem *dolžina* krivulje, ki jo določa, enaka

$$s = \int_a^b \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt.$$

To velja tudi za funkcijo, ki so le *odsekoma zvezne.* Opazimo tudi, da je zgornja dolžina neodvisna od parametrizacije krivulje.

Trditev 1.3. Naj bo $\vec{r}$ *zvezno odvedljiva* vektorska funkcija, definirana na intervalu $[a, b]$ (za $a < b$) in naj bo $\psi : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ *zvezno odvedljiva bijekcija*, tako da $t = \psi(\tau)$ preteče interval $[a, b]$, ko τ preteče interval $[\alpha, \beta]$ (za $\alpha < \beta$). Potem je

$$\int_a^b \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt = \int_\alpha^\beta \|\frac{d}{d\tau}\vec{r}(\psi(\tau))\| d\tau.$$

2 PLOSKVE V $\mathbb{R}^3$

Definicija 2.1 (Ploskev)**.** Podmnožica $P \subseteq \mathbb{R}^3$ je *ploskev*, če za vsako točko $\vec{r} \in P$ obstaja taka okolica $H \subseteq \mathbb{R}^3$, da je $P \cap H$ graf kake zvezno odvedljive funkcije $\phi : D \to \mathbb{R}$, definirane na kaki *odprti* podmnožici $D \subseteq \mathbb{R}^2$.
To pomeni, da se na $P \cap H$ ena od koordinat x, y, z da *enolično* izraziti kot funkcija preostalih, torej da je $P \cap H$ ene od oblik:

$$P \cap H = \{(x, y, \phi(x, y)) \mid (x, y) \in D\},$$

$$P \cap H = \{(x, \phi(x, z), y) \mid (x, z) \in D\},$$

$$P \cap H = \{(\phi(y, z), y, z) \mid (y, z) \in D\}.$$

Trditev 2.1 (Izrek o implicitni funkciji)**.** Naj bo $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *zvezno odvedljiva* funkcija in privzemimo, da je množica $P = g^{-1}(0)$ *neprazna.* Če je

$$\nabla g(\vec{r}) \neq 0$$

za $\forall \vec{r} \in P$ je P *ploskev.*

Enačba oblike $\vec{r} = \vec{r}(t)$ $(t \in [a, b] \subseteq \mathbb{R},\ a < b)$ predstavlja krivuljo v $\mathbb{R}^3$. Privzeli bomo, da je pri tem $\vec{r}$ *zvezno odvedljiva* funkcija spremenljivke t. Taka krivulja leži na ploskvi $P = g^{-1}(0)$ natanko tedaj, ko je $g(\vec{r}(t)) = 0$ za $\forall t \in [a, b]$. Ko to enakost odvajamo po t, dobimo

$$\nabla g(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = 0.$$

Ta enakost pomeni, da je vektor $\nabla g(\vec{r}(t))$ pravokoten na tangentni vektor $\dot{\vec{r}}(t)$ krivulje v točki $\vec{r}(t)$.

Če sedaj izberemo poljubno točko $\vec{r}_0$ na ploskvi P in opazujemo vse krivulje na ploskvi P, ki gredo skozi točko $\vec{r}_0$ (vsaka taka krivulja $\vec{r} = \vec{r}(t)$ zadošča pogoju $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ za kak t_0), vidimo, da je vektor $\nabla g(\vec{r}_0)$ pravokoten na tangentni vektor $\dot{\vec{r}}(t_0)$ vsake take krivulje.

To pomeni, da mora biti vektor $\nabla g(\vec{r}_0)$ pravokoten na ploskev P. To velja za vsako točko $\vec{r}_0 \in P$.

Definicija 2.2 (Normalni vektor)**.** Vektor $\nabla g(\vec{r})$ imenujemo *normalni vektor* na ploskev $P = g^{-1}(0)$ v točki $\vec{r} \in P$. Ravnino $T_{\vec{r}}P$ z normalnim vektorjem $\nabla g(\vec{r})$ skozi točko $\vec{r}$ na ploskvi P pa imenujemo *tangentna ravnina* na ploskev P v točki $\vec{r}$.

Tangentna ravnina na P skozi točko $\vec{r}$ je torej vzporedna vsem tangentnim vektorjem v točki $\vec{r}$ na krivulje skozi $\vec{r}$ na ploskvi P.

3 INTEGRALI S PARAMETROM

Definicija 3.1 (Integral s parametrom)**.** Naj bo f *zvezna funkcija* dveh spremenljivk, definirana na pravokotniku $P = [a, b] \times [c, d]$ $(a < b,\ c < d)$. Integral

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)dx \tag{1}$$

je funkcija spremenljivke y. Tak integral imenujemo *integral s parametrom y*.

Trditev 3.1. Če je f *zvezna funkcija* na pravokotniku $P = [a, b] \times [c, d]$, je funkcija F (definirana z (1)) *zvezna* na intervalu P.

Izrek 3.1. Naj bo f *zvezna* na pravokotniku $P = [a, b] \times [c, d]$ in privzemimo, da obstaja parcialni odvod $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, ki naj bo *zvezen* na P. Potem je funkcija F (podana z (1)) *odvedljiva* in velja

$$F'(y) = \frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx. \tag{2}$$

3.1 Izlimitirani integrali s parametrom

Definicija 3.2. Integral $F(y) = \displaystyle\int_a^{\infty} f(x, y)dx$ je *enakomerno konvergenten* za $y \in S \subseteq \mathbb{R}$, če za $\forall \varepsilon > 0\ \exists M \in \mathbb{R}$, da za $\forall b \geq M$ in $\forall y \in S$ velja

$$\left| \int_b^{\infty} f(x, y)dx \right| < \varepsilon.$$

Za razliko od navadne konvergence mora tukaj obstajati tak M, ki je istočasno ustrezen za $\forall y \in S$, torej je $M = M_\varepsilon$ odvisen le od ε, ne pa tudi od y. Pri navadni konvergenci bi bil veljalo $M = M_{\varepsilon,y}$.

Trditev 3.2. Če je f *zvezna* funkcija na pasu $P = [a, \infty) \times [c, d]$ in integral

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$$

enakomerno konvergenten za $y \in [c, d]$, je F *zvezna funkcija* na $[c, d]$.

3.2 Dvojni in dvakratni integrali

Definicija 3.3. Naj bo $P = [a, b] \times [c, d]$ in $f : P \to \mathbb{R}$ funkcija. Delitev $D_{[a,b]}$ intervala $[a, b]$ je določena z zaporedjem točk

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b.$$

Delitev $D_{[a,b]}$ skupaj s poljubno delitvijo $D_{[c,d]}$ intervala $[c, d]$, določeno z

$$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d,$$

določa neko delitev pravokotnika P na manjpe pravokotnike

$$P_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{i-1}, y_i], \; (i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, n).$$

Naj bo

$$m_{i,j} = \inf_{(x,y) \in P_{i,j}} f(x, y),$$

$$M_{i,j} = \sup_{(x,y) \in P_{i,j}} f(x, y).$$

Z $\Delta_{i,j} p = \Delta_i x \cdot \Delta_j y = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ označimo ploščino pravokotnika $P_{i,j}$. Vsoto

$$\underline{S}_D = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n m_{i,j} \Delta_{i,j} p$$

imenujemo *spodnja*, vsoto

$$\overline{S}_D = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{i,j} \Delta_{i,j} p$$

pa *zgornja Riemannova vsota* funkcije f pri delitvi D.

Lema 1. Če je N nadaljevanje delitve D pravokotnika P, za spodnje in zgornje Riemannove vsote poljubne omejene funkcije $f : P \to \mathbb{R}$ velja

$$\underline{S}_N \geq \underline{S}_D \text{ in } \overline{S}_N \leq \overline{S}_D.$$

Definicija 3.4. Omejena funkcija $f : P \to \mathbb{R}$ je na pravokotniku P *integrabilna v Riemannovem smislu*, če velja

$$\underline{S} = \overline{S},$$

kjer je $\underline{S}$ supermum njenih *spodnjih*, $\overline{S}$ pa infimum njenih *zgornjih* Riemannovih vsot. Tedaj skupno vrednost $\underline{S} = \overline{S}$ označimo kot

$$\iint_P f(x,y)dp,$$

kjer pomeni $dp = dxdy$ *ploščinski element*, in jo imenujemo *dvojni integral funkcije f po pravokotniku P.*

Izrek 3.2. *Zvezna funkcija f* na pravokotniku $P = [a,b] \times [c,d]$ je *integrabilna* in velja

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \iint_P f(x,y)dp = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy. \tag{3}$$

Enak zaključek velja tudi za funkcijo f, ki ni nujno zvezna, če je N množica njenih točk nezveznosti taka, da jo za $\forall \varepsilon > 0$ lahko pokrijemo s kakim zaporedjem pravokotnikov, katerih vsota ploščin je pod ε. Tedaj pravimo, da ima N mero 0.

Posledica. Za funkcijo f, ki je na pravokotniku P *integrabilna* v Riemannovem smislu, konvergirajo Riemannove vsote S proti $\iint_P f(x,y)dp$, ko gredo velikosti delilnih pravokotnikov (njihove diagonale) proti 0.

Natančneje: za $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, da je

$$\left| S - \iint_P f(x,y)dp \right| < \varepsilon$$

za vsako Riemannovo vsoto funkcije f pri vsaki delitvi pravokotnika P, kjer si dolžine diagonal pod δ.

3.3 Integriranje in odvajanje integralov s parametrom

Izrek 3.3. Naj bo f *zvezna* na pasu $[a,\infty)\times[c,d]$. Če je integral $\int_a^\infty f(x,y)dx$ *enakomerno konvergenten* za $y\in[c,d]$, potem je

$$\int_c^d \int_a^\infty f(x,y)dx\ dy = \int_a^\infty \int_c^d f(x,y)dy\ dx.$$

Izrek 3.4. Naj bosta f in $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *zvezni* na pasu $[a,\infty)\times[c,d]$, naj bo integral

$$F(y) = \int_a^\infty f(x,y)dx$$

konvergenten za $y\in[c,d]$ in naj bo integral

$$\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

enakomerno konvergenten na $[c,d]$. Potem je F *odvedljiva* funkcija in velja

$$F'(y) = \frac{d}{dy}\int_a^\infty f(x,y)dx = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx.$$

Izrek 3.5 (Kriterij za ugotavljanje enakomerne konvergence)**.**
Integral $\int_a^\infty f(x,y)dx = F(y)$ je *enakomerno konvergenten* na S natanko tedaj, ko za $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{R}$, da za poljubna $d>b\geq N$ in za $\forall y\in S$ velja

$$\left|\int_b^d f(x,y)dx\right| < \varepsilon.$$

Posledica. Če je $|f(x,y)|\leq g(x,y)$ za $\forall(x,y)\in[a,\infty)\times[c,d]$ in je integral $\int_a^b g(x,y)dx$ *enakomerno konvergenten* na $[c,d]$, je *enakomerno konvergenten* tudi integral $\int_a^b f(x,y)dx$.

Izrek 3.6 (2. izrek o povprečju)**.** Naj bo f *integrabilna*, g pa *nenegativna padajoča (odvedljiva)* funkcija na intervalu $[a,b]$. Potem $\exists\xi \in [a,b]$, da je

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx.$$

3.4 Eulerjevi funkciji Γ in B

Definicija 3.5 (Funkcija Γ)**.** Na poltraku $x > 0$ je funkcija Γ definirana z

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{t-1}e^{-t}dt. \tag{4}$$

Trditev 3.3 (Rekurzivna formula)**.** Za $\forall x > 0$ velja

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Posledica. $\Gamma(n+1) = n!$ za $\forall n \in \mathbb{N}$

To nam namiguje, naj definiramo

$$x! := \Gamma(x+1) \text{ za } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Rekurzivna formula nam omogoča, da razširimo definicijsko območje funkcije Γ. Če je namreč $x \in (-1,0)$, je $x+1 \in (0,1)$, zato je vrednost $\Gamma(x+1)$ že definiramo in lahko postavimo

$$\Gamma := \frac{\Gamma(x+1)}{x}.$$

S ponavljanjem rekurzivne formule dobimo

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\dots(x+n-1)}. \tag{5}$$

Za $\forall x \in \mathbb{R}$, ki ni negativno celo število ali 0, lahko izberemo tak najmanjši $n \in \mathbb{N}$, da je $(x+n) > 0$; tedaj je vrednost $\Gamma(x+n)$ že definirana in lahko $\Gamma(x)$ definiramo s formulo (5).

Definicija 3.6. Funkcija beta je definirana kot

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad (x>0, y>0). \tag{6}$$

Lahko se je prepričati, da je integral v (6) konvergenten, če je $x>0$ in $y>0$.

Z vpeljavo nove integracijske spremenljivke $t = \sin^2\varphi$ lahko definicijo funkcije B zapišemo tudi kot

$$B(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\varphi \cos^{2y-1}\varphi d\varphi. \tag{7}$$

Trditev 3.4. Za poljubna pozitivna x, y je

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{8}$$

Izrek 3.7 (Stirlingova formula)**.**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{n}(\frac{n}{e})^n} = \sqrt{2\pi}$$

Trditev 3.5 (Wallisova formula)**.**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{2j}{2j-1}\right)^2 = \frac{\pi}{2}$$

4 VEČKRATNI INTEGRALI

Definicija 4.1. Naj bo $f : K \to \mathbb{R}$ *omejena* funkcija, definirana na kvadru $K = [a, b] \times [c, d] \times [e, g]$ v $\mathbb{R}^3$. Vse tri intervale $[a, b]$, $[c, d]$ in $[e, g]$ razdelimo na podintervale z delilnimi točkami:

$$a = x_0 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_m = b,$$

$$c = y_0 < \ldots < y_{j-1} < y_j < \ldots < y_n = d,$$

$$e = z_0 < \ldots < z_{k-1} < z_k < \ldots < z_p = g.$$

S tem razdelimo kvader K na manjše podkvadre

$$K_{i,j,k} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k];$$

to delitev imenujemo D. Označimo

$$m_{i,j,k} = \inf_{(x,y,z)\in K_{i,j,k}} f(x, y, z),$$

$$M_{i,j,k} = \sup_{(x,y,z)\in K_{i,j,k}} f(x, y, z)$$

ter tvorimo *spodnjo* in *zgornjo* Riemannovo vsoto pri tej delitvi:

$$\underline{S}_D = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} m_{i,j,k}\Delta_{i,j,k}V,$$

$$\overline{S}_D = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} M_{i,j,k}\Delta_{i,j,k}V,$$

kjer je

$$\Delta_{i,j,k}V = \Delta_i x \Delta_j y \Delta_k z = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$$

prostornina kvadra $K_{i,j,k}$. Končno naj bo

$$\underline{S} = \sup_D \underline{S}_D \quad \text{in} \quad \overline{S} = \inf_D \overline{S}_D,$$

kjer teče D po vseh takih delitvah kvadra K. Če je $\underline{S} = \overline{S}$ pravimo, da je funkcija f *integrabilna* na kvadru K in skupno vrednost $\underline{S} = \overline{S}$ označimo kot

$$\iiint_K f(x, y, z)\, dV$$

ter jo imenujemo *trojni* (Riemannov) integral funkcije f.

Definicija 4.2. Naj bo Ω poljubna omejena podmnožica v $\mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ pa omejena funkcija. Izberimo kvader K oblike $K = [a, b] \times [c, d] \times \ldots$, ki naj vsebuje Ω, definirajmo funkcijo $f_K : K \to \mathbb{R}$ kot

$$f(x) = \begin{cases} f(x, y, \ldots) & ; \ (x, y, \ldots) \in \Omega \\ 0 & ; \ (x, y, \ldots) \in K \setminus \Omega \end{cases}$$

ter večkratni integral $\int \cdots \int_\Omega f(x, y, \ldots)\, dV$ kot

$$\int \cdots \int_\Omega f(x, y, \ldots)\, dV = \int \cdots \int_K f_K(x, y, \ldots)\, dV.$$

Trditev 4.1. Če ima presek *omejenih* množic Ω_1 in Ω_2 v $\mathbb{R}^2$ (ali v $\mathbb{R}^n$) mero 0, potem je

$$\int \cdots \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(x_1, \ldots, x_n)\, dV = \int \cdots \int_{\Omega_1} f(x_1, \ldots, x_n)\, dV + \int \cdots \int_{\Omega_2} f(x_1, \ldots, x_n)\, dV$$

Trditev 4.2. Naj bosta f_1 in f_2 *zvezni* funkciji na Ω ter c_1 in c_2 poljubni konstanti. Potem velja

$$\int \cdots \int_\Omega (c_1 f_1 + c_2 f_2)\, dV = c_1 \int \cdots \int_\Omega f_1\, dV + c_2 \int \cdots \int_\Omega f_2\, dV.$$

Trditev 4.3. Če je $f \leq g$, potem je $\iint_\Omega f\, dp \leq \iint_\Omega g\, dp$ in podobno za večkratne integrale. Če je torej funkcija f *omejena* na mnoćici Ω navzgor s konstanto M, navzdol pa s konstanto m, potem velja

$$m p_\Omega \leq \iint_\Omega f dp \leq M p_\Omega,$$

kjer je p_Ω ploščina množice Ω.

Trditev 4.4.

$$\left| \iint_\Omega f\, dp \right| \leq \iint_\Omega |f|\, dp$$

Trditev 4.5. Naj bo Ω *kompaktna* množica v $\mathbb{R}^2$, katere rob sestoji iz končno mnogo krivulj oblike $\vec{:}[a,b] \to \mathbb{R}^2$ za kake *zvezno odvedljive* funkcije $\vec{r}$ in kake intervale $[a,b]$. Izberimo pravokotnik P, ki vsebuje Ω, in naj bo D poljubna delitev tega pravokotnika s premicami, vzporednimi koordinatnima osema. V vsakem od tistih delilnih pravokotnikov P_k delitve D, ki sekajo Ω, izberemo točko $\vec{r}_k \in P_k \cap \Omega$, označimo z $\Delta_k p$ ploščino pravokotnika P_k in tvorimo Riemannovo vsoto

$$S_D(f) = \sum_k f(\vec{r}_k)\Delta_k p,$$

kjer teče indeks le po tistih delilnih pravokotnikih P_k, ki sekajo Ω. Za vsako zvezno funkcijo f na Ω je integral $\iint_\Omega f(\vec{r})\ dp$ enak limiti vsot $S_D(f)$, ko gredo velikosti vseh delilnih pravokotnikov (torej največja diagonala vseh delilnih pravokotnikov) proti 0. Natančneje, za $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$, da je

$$\left| S_D(f) - \iint_\Omega f(\vec{r})\ dp \right| < \varepsilon,$$

če je maksimalna diagonalna delilnih pravokotnikov P_k manjša od δ.

Posledica. Naj bo Ω podana kot

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g_1(x) \le y \le g_2(x),\ a \le x \le b\}, \tag{9}$$

kjer sta g_1 in g_2 *zvezni* funkciji na intervalu $[a,b]$ in $g_1(x) \le g_2(x)$ za $\forall x \in [a,b]$. Naj bosta M_1 in M_2 taki števili, da pravokotnik $P = [a,b] \times [M_1, M_2]$ vsebuje množico Δ (torej $M_1 \le g_1(x) \le g_2(x) \le M_2$ za $\forall x \in [a,b]$). Po definiciji imamo potem za vsako *zvezno* funkcijo $f : \Omega \to \mathbb{R}$:

$$\iint_\Omega f(x,y)\ dp = \iint_P f_P(x,y)\ dp,$$

kjer je f_P funkcija na P, definirana z

$$f_P(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & ;\ (x,y) \in \Omega \\ 0 & ;\ (x,y) \in P \setminus \Omega. \end{cases}$$

Po zgornjem izreku pa je

$$\iint_P f_P(x,y)\ dp = \int_a^b \left(\int_{M_1}^{M_2} f(x,y)\ dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\ dy \right) dx,$$

kjer smo upoštevali, da je funkcija f_P enaka 0 izven Ω in zato $\int_{M_1}^{M_2} f_P(x,y)\ dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy.$
Torej velja naslednja trditev:

Trditev 4.6. Za vsako *zvezno* funkcijo f na množici Ω, definirani kot (9), velja

$$\iint_\Omega f(x,y)\ dp = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\ dy \right) dx.$$

Trditev 4.7. Za območja Ω, podana kot
$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g_1(x,y) \leq z \leq g_2(x,y),\ (x,y) \in \Lambda\}$, in (skoraj povsod) *zvezne* funkcije f na njih velja

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\ dV = \iint_\Lambda \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y,z)\ dz \right) dp.$$

4.1 Cilindrične ali valjne koordinate

Definicija 4.3. Lega točke (x,y,z) v prostoru $\mathbb{R}$ je določena s koordinato z in polarnima koordinatama r, φ njene projekcije $(x,y,0)$ na ravnino x,y. Trojko φ, r, z imenujemo *cilindrične* ali *valjne* koordinatne točke. S kartezičnimi koordinatami so povezane prek enakosti

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z.$$

Pri tem lahko r zavzame vse nenegativne vrednosti, z vse realne vrednosti, φ pa na intervalu $[0, 2\pi)$. Za dano točko T pomeni r njeno razdaljo od osi z, ki je enaka razdalji projekcije točke T na ravnino x,y od koordinatnega izhodišča.

Posledica (Koordinatne ploskve)**.**

- Ploskve $z =$ konstanta so ravnine, vzporedne z ravnino x,y

- Ploskve $r =$ konstanta so neskončni valji, katerih os je os z
- Ploskve $\varphi =$ konstanta pa so polravnine

4.2 Sferične koordinate

Definicija 4.4. *Sferične* ali *krogelne koordinate* točke $T(x, y, z)$ so:

- $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ razdalja od izhodišča
- θ kot, ki ga vektor $\vec{0T}$ oklepa s pozitivnim poltrakom osi z
- φ kot, ki ga pravokotna projekcija vektorja $\vec{0T}$ na ravnino x, y oklepa s pozitivnim poltrakom osi x

Naj bo kot doslej r, razdalja T od osi z. Potem je $r = R \sin\theta$ in

$$x = R\sin\theta\cos\varphi, \quad y = R\sin\theta\sin\varphi, \quad z = R\cos\theta.$$

Tukaj lahko zavzame kot θ vrednosti na intervalu $[0, \pi]$ (0 je na pozitivnem, π pa na negativnem poltraku osi z), kot φ pa vrednosti na intervalu $[0, 2\pi)$.

Volumni element v sferičnih koordinatah je

$$dV = R^2 \sin\theta \; dR \; d\theta \; d\varphi.$$

Od tod sledi, da lahko trojni integral po telesu Ω, ki je opisano kot

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; g_1(\varphi, \theta) \leq R \leq g_2(\varphi, \theta), \; (\varphi, \theta) \in \Lambda\},$$

kjer sta $g_1 \leq g_2$ *zvezni* funkciji na množici $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$, izrazimo kot

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\, dV = \iint_\Lambda \left(\int_{g_1(\varphi,\theta)}^{g_2(\varphi,\theta)} f(R\sin\theta\cos\varphi, \; R\sin\theta\sin\varphi, \; R\cos\theta) R^2 \sin\theta \; dR \right) d\theta \; d\varphi.$$

Posledica (Koordinatne ploskve)**.**

- Ploskve $R =$ konstanta so sfere
- Ploskve $\theta =$ konstanta so stožci
- Plosvke $\varphi =$ konstanta so polravnine

4.3 Splošne koordinate

Definicija 4.5. Naj bo V *odprta* podmožica v ravnini. Vlogo splošnih koordinat na V lahko igra vsak tak par funkcij

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

na V, da iz $(x, y) \neq (x_1, y_2)$ sledi $(u(x, y), v(x, y)) \neq (u(x_1, y_1), v(x_1, y_1))$, kar pomeni, da je točka (x, y) enolično določena s parom $(u(x, y), v(x, y))$. Drugače povedano, vektorska funkcija

$$F : V \to \mathbb{R}^2,\ F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

mora biti *injektivna*. Zavoljo diferencialnega računa predpostavimo, da sta funkciji u in v *zvezno odvedljivi.* Iz *izreka o inverzni preslikavi* vemo, da potem obrnljivost Jacobijeve matrike $F'(x, y)$ preslikave F zagotavlja *injektivnost* preslikave F v okolici točke (x, y), ne pa na celem definicijskem območju V, zato jo je treba posebej privzeti. Tedaj je pri pogoju, da je $F'(x, y)$ *obrnljiva* matrika za $\forall(x, y) \in V$, preslikava F dejansko *bijekcija* na odprto množico $U := F(V)$, inverzna preslikava

$$G := F^{-1} : U \to V$$

pa je tudi *zvezno odvedljiva* in

$$G'(\vec{q}) = (F'(G(\vec{q})))^{-1} \text{ za } \forall \vec{q} \in U.$$

Pri fiksnih u_0 in v_0 imenujemo krivulje $u = (x, y)$ in $v = (x, y)$ *koordinatne* krivulje.

Izrek 4.1. Naj bo $G : U \to V$ taka *zvezno odvedljiva bijekcija*, kjer sta U in V *odprti* podmnožici v $\mathbb{R}$, da je $\det G'(\vec{r}) \neq 0$ za $\forall \vec{r} \in U$. Označimo $\vec{r} = (u, v)$ in $G(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$. Naj bo Ω *kompaktna* podmnožica v V, katere rob naj sestoji iz končno mnogo *zvezno odvedljivih* krivulj (oz. naj ima mero 0), f pa naj bo *zvezna* funkcija na V (razen morda na množici z mero 0). Potem je

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\ dx\ dy \ = \ \iint_{G^{-1}(\Omega)} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u, v) \right| du\ dv,$$

kjer je

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u, v) \ = \ \det G'(u, v) \ = \ \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{bmatrix}.$$

Lema 2. Naj bo $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *obrnljiva linearna* preslikava in Λ paralelogram. Potem med ploščinama paralelograma Λ in $L(\Lambda)$ velja zveza

$$p_{L(\Lambda)} = |\det L| p_{\Lambda}. \tag{10}$$

Enaka povezava velja tudi za vsako *kompaktno* podmnožico Λ v $\mathbb{R}^2$ oziroma za vsako *ravninsko* podmnožico, za katero je ploščina definirana.

Lema 3. Naj bo $G : U \to \mathbb{R}^2$ *zvezno odvedljiva injektivna* preslikava s *povsod obrbljivim* odvodom $G'(u, v)$, definirana na *odprti* množici U, K *kompaktna* podmnožica v U, $\Lambda = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2;\ |u - a| \leq h,\ |v - b| \leq h\}$ pa kvadrat s središčem (a, b) in stranico dolžine $2h$, vsebovan v K. Označimo

$$L \ = \ \det G'(a, b) \ = \ \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(a, b) & \frac{\partial x}{\partial v}(a, b) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(a, b) & \frac{\partial y}{\partial v}(a, b) \end{bmatrix}$$

in naj bo A preslikava, definirana z $A(u, v) = G(a, b) + L(u - a, v - b)$. Potem za $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0$ (neodvisen od izbire kvadrata), da za ploščini likov $G(\Lambda)$ in $A(\Lambda)$, ko je $h < \delta$, velja

$$|p_{G(\Lambda)} - p_{A(\Lambda)}| < \varepsilon p_{\Lambda}.$$

Ker se preslikavi A in L razlikujeta le za translacijo, lahko v tej oceni nadomestimo A z L.

5 PLOSKOVNI IN KRIVULJNI INTEGRAL

5.1 Površina ploskve in ploskovni integral skalarne funkcije

Definicija 5.1. Naj bo Λ pravokotnik s središčem $(u, v) \in \Omega$ in stranicama du, dv, ki naj bosta vzporedni koordinatnima osema in je L Jacobijeva matrika preslikave $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, torej

$$L = \left[\tfrac{\partial}{\partial u}\vec{r}(u,v) \quad \tfrac{\partial}{\partial v}\vec{r}(u,v)\right].$$

Ploščina paralelograma $L(\Lambda)$ je tako

$$p_{L(\Lambda)} \;=\; \|duL(1,0) \times dvL(0,1)\| \;=\; du\ dv\ \|\frac{\partial}{\partial u}\vec{r}(u,v) \times \frac{\partial}{\partial v}\vec{r}(u,v)\|.$$

Celotno površino ploskve lahko izračunamo tako, da seštejemo ploščine takih paralelogramov in limitiramo njihove velikosti proti 0, s čimer preide vsota v integral

$$p \;=\; \iint_\Omega \|\frac{\partial}{\partial u}\vec{r}(u,v) \times \frac{\partial}{\partial v}\vec{r}(u,v)\|\ du\ dv.$$

Z upoštevanjem Lagranjeove identitete $\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \sqrt{\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$, lahko nekoliko poenostavimo formulo:

$$E(u,v) = \|\frac{\partial}{\partial u}\vec{r}\|^2, \quad F(u,v) = \frac{\partial}{\partial u}\vec{r}\cdot\frac{\partial}{\partial v}\vec{r}, \quad G(u,v) = \|\frac{\partial}{\partial v}\vec{r}\|^2$$

$$p \;=\; \iint_\Omega \sqrt{EG - F^2}\ du\ dv.$$

Označimo $\vec{q} = (u, v)$. Jacobijeva matrika $\dot{\vec{r}}(\vec{q})$ je

$$[\dot{\vec{r}}(\vec{q})]^T[\dot{\vec{r}}(\vec{q})] \;=\; \begin{bmatrix} E(u,v) & F(u,v) \\ F(u,v) & G(u,v) \end{bmatrix},$$

od kjer dobimo determinanto

$$\det[\dot{\vec{r}}(\vec{q})]^T[\dot{\vec{r}}(\vec{q})] \;=\; E(u,v)G(u,v) - F(u,v)^2.$$

Zamenjava spremenljivk:

$$\begin{aligned}\iint_\Lambda \sqrt{E(s,t)G(s,t) - F(s,t)^2}\ ds\ dt \;&=\; \iint_\Lambda \sqrt{E(s,t)G(s,t) - F(s,t)^2}\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\right|\ ds\ dt \\ &=\; \iint_\Omega \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F(u,v)^2}\ du\ dv.\end{aligned}$$

Trditev 5.1. Definicija površine ploskve je neodvisna od parametrizacije.

Definicija 5.2. Naj bo f funkcija, definirana na ploskvi $\mathcal{P}$ z enačbo $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. *Ploskovni integral* te funkcije po ploskvi $\mathcal{P}$ je definirana kot

$$\iint_{\mathcal{P}} f \; dp \;=\; \iint_{\Omega} f(\vec{r}(u, v))\sqrt{E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2} \; du \; dv.$$

Lahko bi pokazali, da je ploskovni integral neodvisen od parametrizacije ploskve.

5.2 Krivuljni integral

Definicija 5.3. Naj bo f (*zvezna*) funkcija na krivulji γ z enačbo $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. *Krivuljni integral* funkcije f po krivulji γ, je definiran kot

$$\int_{\gamma} f(\vec{r}) \; ds \;=\; \int_a^b f(\vec{r}(t))\|\dot{\vec{r}}(t)\| \; dt.$$

Definicija 5.4. *Krivuljni integral* je definiran kot

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \;=\; \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) \; dt.$$