Analiza 4 - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar
po predavanjih profesorice Jasne Prezelj

2019/20

Kazalo

1 Diferenčne enačbe

1.1 Uvod

Definicija 1.1 (Diferenca)**.** Denimo, da je $y = f(t)$ dana funkcija.

- 1. način: $\Delta y_t \ = \ f(t+h) - f(t) \ = \ y_{t+h} - y_t$
- 2. način: $\Delta y_t \ = \ f(t) - f(t-h) \ = \ y_t - y_{t-h}$

Posebej definiramo $\Delta^0 y_t = y_t$. Velja

$$\Delta^{n+1} y_t \ = \ \Delta(\Delta^n y_t)_t.$$

Definicija 1.2. *Navadna diferenčna enačba* je enačba, ki vsebuje (eno ali) več diferenc,

$$F(t, \Delta^0 y_t, \ldots, \Delta^n y_t) \ = \ 0.$$

Red diferenčne enačbe je red najvišje diference. Če je F linearna v $\Delta^k y_t$, je enačba linearna.

Definicija 1.3. *Sistem n diferenčnih enačb 1. reda* je dan z

$$\begin{aligned} y_1(t+1) \ &= \ f_1(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)) \\ &\vdots \\ y_n(t+1) \ &= \ f_n(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)) \end{aligned}$$

Če t eksplicitno ne nastopa, rečemo, da je to *avtonomen sistem.* Če so $f_1, \ldots, f_n$ linearne, lahko sistem zapišemo v matrični obliki:

$$\mathbf{y} \ = \ \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad f_i(t) \ = \ b_i(t) + a_{i1} y_1(t) + \ldots + a_{in} y_n(t), \ i = 1, \ldots, n$$

$$\mathbf{y}(t+1) \ = \ \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \vdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix} \ = \ \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t)$$

Nelinearen sistem lahko vseeno zapišemo v vektorski obliki:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}(t+1) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$$

Definicija 1.4. Če je sistem oblike

$$\mathbf{y}_{m+1} = \mathbf{A}\mathbf{y}_m,$$

se imenuje *homogen.*

1.2 Linearne diferenčne enačbe in sistemi linearnih diferenčnih enačb

Definicija 1.5. *Sistem linearnih diferencialnih enačb* reda n je dan s predpisom

$$\mathbf{y}(t+1) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t),$$

kjer je $\mathbf{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Definicija 1.6. *Začetni pogoj* (ali *Cauchyjeva naloga*) za sistem n linearnih diferenčnih enačb 1. reda je: reši

$$\mathbf{y}(t+1) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t)$$

pri začetnem pogoju $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Izrek 1.1. Prostor rešitev homogenega sistema je n-dimenzionalen vektorski prostor. Rešitve so linearno neodvisne v času $t + m \iff$ so linearno neodvisne v času t.

Komentar (Nehomogen sistem). Opazili smo, da če $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ rešita

$$\mathbf{y}(t+1) \;=\; \mathbf{A}\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t),$$

potem $\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t) = \mathbf{w}(t)$ reši

$$\mathbf{w}(t+1) \;=\; \mathbf{A}\mathbf{w}(t).$$

Posledično je vsaka rešitev nehomogenega sistema oblike

$$\mathbf{y} \;=\; \mathbf{y}_h + \mathbf{y}_p,$$

kjer je $\mathbf{y}_h$ rešitev homogenega sistema, $\mathbf{y}_p$ pa - pravimo ji *partikularna* - rešitev nehomogenega sistema.

Definicija 1.7. Cauchyjeva naloga za linearne diferenčne enačbe s *konstantnimi koeficienti* je: reši

$$\mathbf{y}_{t+n} + a_{n-1}\mathbf{y}_{t+n-1} + \ldots + a_0\mathbf{y}_t \;=\; \mathbf{g}(t)$$

pri pogoju

$$\mathbf{y}(0) \;=\; \gamma_0, \ldots, \mathbf{y}(n-1) \;=\; \gamma_{n-1}.$$

Enačbo lahko prevedemo na sistem:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1(t+1) \\ \mathbf{y}_2(t+1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{n-1}(t+1) \\ \mathbf{y}_n(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1(t) \\ \mathbf{y}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{n-1}(t) \\ \mathbf{y}_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\mathbf{g}(t) \end{bmatrix},$$

kjer je $\mathbf{y}_k(t) := \mathbf{y}(t+k-1)$ (torej velja $\mathbf{y}_k(t) = \mathbf{y}_{k-1}(t+1)$).

Izrek 1.2. Splošna rešitev homogene enačbe je dana z

$$\mathbf{y}_h \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{y}_i,$$

kjer so $\mathbf{y}_i$, $i = 1, \ldots, n$ linearno odvisne rešitve enačbe. Prostor rešitev je vektorski prostor dimenzije n.

Metoda 1.1. Za iskanje linearnih neodvisnih rešitev homogene enačbe uporabimo nastavek $\mathbf{y}_t = \lambda^t$:

$$\lambda^{t+n} + a_{n-1}\lambda^{t+n-1} + \ldots + a_0\lambda^t \;=\; 0$$

Karakteristični polinom:

$$p(\lambda) \;=\; \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Naj bo λ_0 ničla $p(\lambda)$, $p(\lambda_0) = 0$. Potem je

$$\lambda_0^{t+1} + \ldots + a_0\lambda_0^t \;=\; \lambda_0^t \cdot p(\lambda_0) \;=\; 0.$$

Če ima $p(\lambda)$ n enostavnih ničel, $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$, je vsaka rešitev oblike

$$\mathbf{y}(t) \;=\; \alpha_0\lambda^t + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda_{n-1}^t.$$

1.3 Stabilnost

Definicija 1.8. Naj bo $\mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{f}(t, y_t)$ dan sistem in postavimo $t_0 = 0$. Rešitev $\mathbf{y}$ je *stabilna*, če za $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$: če je $\mathbf{z}$ katerakoli druga rešitev, ki zadošča $|\mathbf{z}_0 - \mathbf{y}_0| < \delta \Rightarrow |\mathbf{z}_t - \mathbf{y}_t| < \varepsilon$, $t > 0$.

Rešitev je *asimptotsko stabilna*, če je stabilna in za $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$: $|\mathbf{z}_0 - \mathbf{y}_0| < \delta$, $|\mathbf{z}_t - \mathbf{y}_t| < \varepsilon$, $t \geq 0$ in $\lim_{t\to\infty} |\mathbf{z}_t - y_t| = 0$.

Za linearne sisteme:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{t+1} &= \mathbf{A}\mathbf{y}_t + \mathbf{b}_t \\
\mathbf{y}_n &= \mathbf{y}_{n,p} + \mathbf{A}^n\mathbf{y}_0, \quad y_{0,p} = 0 \\
\mathbf{z}_n &= \mathbf{y}_{n,p} + \mathbf{A}^n\mathbf{z}_0 \\
|\mathbf{y}_n - \mathbf{z}_n| &= |\mathbf{A}^n(\mathbf{y}_0 - \mathbf{z}_0)| \;\leq\; \|\mathbf{A}\|^n\|\mathbf{y}_0 - \mathbf{z}_0\|
\end{aligned}$$

$\mathbf{y}_{n,p}$ je (asimptotsko) stabilna rešitev nehomogenega sistema $\iff$ $\mathbf{0}$ je (asimptotsko) stabilna rešitev homogenega sistema. Torej: $\|\mathbf{A}\| < 1$: stabilnost.

2 Navadne diferencialne enačbe

Definicija 2.1. *Navadna diferencialna enačba* je vsaka enačba oblike

$$f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \;=\; 0.$$

Red najvišjega odvoda je *red* enačbe.

Cauchyjeva naloga za NDE n-tega reda je: reši

$$y^{(n)} \;=\; f(x, y, \ldots, y^{(n-1)}) \tag{1}$$

pri pogoju

$$(x_0, y(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0)) \;:=\; (x_0, y_0, \ldots, y_{n-1}) \in D_f.$$

Če f ni eksplicitno odvisna od x, se enačba imenuje *avtonomna.* Če ke f linearna v $y, \ldots, y^{(n-1)}$, je enačba (1) linearna.

Definicija 2.2. Naj bo $D \subset \mathbb{R}^2$, odprta, $f : D \to \mathbb{R}$ dana funkcija in $(x_0, y_0) \in D$ začetni pogoj. Potem je funkcija y rešitev $y' \;=\; f(x, y), \quad y(x_0) \;=\; y_0$, na okolici x_0, če $\exists \delta > 0$:

$$y'(x) \;=\; f(x, y(x))$$

na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $y(x_0) = y_0$.

3 Linearne diferencialne enačbe

3.1 LDE 1. reda

Enačba 1.

$$y' = f(x)y + g(x)$$

Naj bo x_0 izbrana točka. Potem je vsaka rešitev oblike

$$y = Ce^{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt} + y_p.$$

Prostor rešitve homogene enačbe $y' = f(x)y$ je 1-dimenzionalni vektorski prostor.

3.2 Bernoullijeva DE

Enačba 2.

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}.$$

Če $\alpha \in \{0, 1\}$, potem je BDE kar LDE. Če ni, se v LDE prevede s substitucijo $z = y^{1-\alpha}$.

3.3 Ricattijeva DE

Enačba 3.

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x), \quad a, b, c \in \mathcal{C}([a, b])$$

V splošnem ni rešljiva. Če pa eno rešitev imamo, npr. y_1, s substitucijo $y = y_1 + z$ enačbo prevedemo na BDE za z.

3.4 LDE višjih redov s konstantnimi koeficienti

Definicija 3.1. *Nehomogena LDE n-tega reda s konstantnimi koeficienti* je enačba oblike

$$L(y) \ := \ y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y \ = \ f(x).$$

Če $f(x) \equiv 0$ je enačba homogena.

Trditev 3.1. Prostor rešitev enačbe $L(y) = 0$ je n-dimenzionalen vektorski prostor. Če je y_p rešitev enačbe

$$L(y_p) \ = \ f,$$

potem je vsaka druga rešitev te enačbe oblike

$$y \ = \ y_h + y_p,$$

kjer $L(y_h) = 0$.