Analiza 4 - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar
po predavanjih profesorice Jasne Prezelj

2019/20

Kazalo

1 Diferenčne enačbe

1.1 Uvod

Definicija 1.1 (Diferenca)**.** Denimo, da je $y = f(t)$ dana funkcija.

- 1. način: $\Delta y_t \;=\; f(t+h) - f(t) \;=\; y_{t+h} - y_t$
- 2. način: $\Delta y_t \;=\; f(t) - f(t-h) \;=\; y_t - y_{t-h}$

Posebej definiramo $\Delta^0 y_t = y_t$. Velja

$$\Delta^{n+1} y_t \;=\; \Delta(\Delta^n y_t)_t.$$

Definicija 1.2. *Navadna diferenčna enačba* je enačba, ki vsebuje (eno ali) več diferenc,

$$F(t, \Delta^0 y_t, \ldots, \Delta^n y_t) \;=\; 0.$$

Red diferenčne enačbe je red najvišje diference. Če je F linearna v $\Delta^k y_t$, je enačba linearna.

Definicija 1.3. *Sistem n diferenčnih enačb 1. reda* je dan z

$$\begin{aligned} y_1(t+1) &= f_1(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)) \\ &\vdots \\ y_n(t+1) &= f_n(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)) \end{aligned}$$

Če t eksplicitno ne nastopa, rečemo, da je to *avtonomen sistem.* Če so $f_1, \ldots, f_n$ linearne, lahko sistem zapišemo v matrični obliki:

$$\mathbf{y} \;=\; \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad f_i(t) \;=\; b_i(t) + a_{i1} y_1(t) + \ldots + a_{in} y_n(t),\; i = 1, \ldots, n$$

$$\mathbf{y}(t+1) \;=\; \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \vdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix} \;=\; \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t)$$

Nelinearen sistem lahko vseeno zapišemo v vektorski obliki:

$$\mathbf{f} \;=\; \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}(t+1) \;=\; \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$$

Definicija 1.4. Če je sistem oblike

$$\mathbf{y}_{m+1} = \mathbf{A}\mathbf{y}_m,$$

se imenuje *homogen.*