

Analiza 4 - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar
po predavanjih profesorice Jasne Prezelj

2019/20

Kazalo

1	Diferenčne enačbe	3
1.1	Uvod	3
1.2	Linearne diferenčne enačbe in sistemi linearnih diferenčnih enačb	4

1 Diferenčne enačbe

1.1 Uvod

Definicija 1.1 (Diferenca). Denimo, da je $y = f(t)$ dana funkcija.

- 1. način: $\Delta y_t = f(t+h) - f(t) = y_{t+h} - y_t$
- 2. način: $\Delta y_t = f(t) - f(t-h) = y_t - y_{t-h}$

Posebej definiramo $\Delta^0 y_t = y_t$. Velja

$$\Delta^{n+1} y_t = \Delta(\Delta^n y_t)_t.$$

Definicija 1.2. Navadna diferenčna enačba je enačba, ki vsebuje (eno ali) več diferenc,

$$F(t, \Delta^0 y_t, \dots, \Delta^n y_t) = 0.$$

Red diferenčne enačbe je red najvišje difference. Če je F linearna v $\Delta^k y_t$, je enačba linearna.

Definicija 1.3. Sistem n diferenčnih enačb 1. reda je dan z

$$\begin{aligned} y_1(t+1) &= f_1(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \\ &\vdots \\ y_n(t+1) &= f_n(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \end{aligned}$$

Če t eksplicitno ne nastopa, rečemo, da je to *avtonomen sistem*. Če so f_1, \dots, f_n linearne, lahko sistem zapišemo v matrični obliki:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad f_i(t) = b_i(t) + a_{i1}y_1(t) + \dots + a_{in}y_n(t), \quad i = 1, \dots, n$$

$$\mathbf{y}(t+1) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \vdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t)$$

Nelinearen sistem lahko vseeno zapišemo v vektorski obliki:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}(t+1) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$$

Definicija 1.4. Če je sistem oblike

$$\mathbf{y}_{m+1} = \mathbf{A}\mathbf{y}_m,$$

se imenuje *homogen*.

1.2 Linearne diferenčne enačbe in sistemi linearnih diferenčnih enačb

Definicija 1.5. Sistem linearnih diferencialnih enačb reda n je dan s predpisom

$$\mathbf{y}(t+1) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t),$$

kjer je $\mathbf{A} \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

Definicija 1.6. Začetni pogoj (ali *Cauchyjeva naloga*) za sistem n linearnih diferenčnih enačb 1. reda je: reši

$$\mathbf{y}(t+1) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t)$$

pri začetnem pogoju $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Izrek 1.1. Prostor rešitev homogenega sistema je n -dimenzionalen vektorski prostor. Rešitve so linearno neodvisne v času $t+m \iff$ so linearno neodvisne v času t .

Komentar (Nehomogen sistem). Opazili smo, da če \mathbf{y}, \mathbf{z} rešita

$$\mathbf{y}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t),$$

potem $\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t) = \mathbf{w}(t)$ reši

$$\mathbf{w}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{w}(t).$$

Posledično je vsaka rešitev nehomogenega sistema oblike

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_h + \mathbf{y}_p,$$

kjer je \mathbf{y}_h rešitev homogenega sistema, \mathbf{y}_p pa - pravimo ji *partikularna* - rešitev nehomogenega sistema.

Definicija 1.7. Cauchyjeva naloga za linearne diferenčne enačbe s *konstantnimi koeficienti* je: reši

$$\mathbf{y}_{t+n} + a_{n-1}\mathbf{y}_{t+n-1} + \dots + a_0\mathbf{y}_t = \mathbf{g}(t)$$

pri pogoju

$$\mathbf{y}(0) = \gamma_0, \dots, \mathbf{y}(n-1) = \gamma_{n-1}.$$

Enačbo lahko prevedemo na sistem:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1(t+1) \\ \mathbf{y}_2(t+1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{n-1}(t+1) \\ \mathbf{y}_n(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1(t) \\ \mathbf{y}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{n-1}(t) \\ \mathbf{y}_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\mathbf{g}(t) \end{bmatrix},$$

kjer je $\mathbf{y}_k(t) := \mathbf{y}(t+k-1)$ (torej velja $\mathbf{y}_k(t) = \mathbf{y}_{k-1}(t+1)$).

Izrek 1.2. Splošna rešitev homogene enačbe je dana z

$$\mathbf{y}_h = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{y}_i,$$

kjer so \mathbf{y}_i , $i = 1, \dots, n$ linearno odvisne rešitve enačbe. Prostor rešitev je vektorski prostor dimenzije n .

Metoda 1.1. Za iskanje linearnih neodvisnih rešitev homogene enačbe uporabimo nastavek $\mathbf{y}_t = \lambda^t$:

$$\lambda^{t+n} + a_{n-1}\lambda^{t+n-1} + \dots + a_0\lambda^t = 0$$

Karakteristični polinom:

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0.$$

Naj bo λ_0 ničla $p(\lambda)$, $p(\lambda_0) = 0$. Potem je

$$\lambda_0^{t+1} + \dots + a_0\lambda_0^t = \lambda_0^t \cdot p(\lambda_0) = 0.$$

Če ima $p(\lambda)$ n enostavnih ničel, $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$, je vsaka rešitev oblike

$$\mathbf{y}(t) = \alpha_0\lambda^t + \dots + \alpha_{n-1}\lambda_{n-1}^t.$$