Analiza 4 - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar
po predavanjih profesorice Jasne Prezelj

2021/22

Kazalo

1 Diferenčne enačbe

1.1 Uvod

Definicija 1.1 (Diferenca)**.** Denimo, da je $y = f(t)$ dana funkcija.

- 1. način: $\Delta y_t \;=\; f(t+h) - f(t) \;=\; y_{t+h} - y_t$
- 2. način: $\Delta y_t \;=\; f(t) - f(t-h) \;=\; y_t - y_{t-h}$

Posebej definiramo $\Delta^0 y_t = y_t$. Velja

$$\Delta^{n+1} y_t \;=\; \Delta(\Delta^n y_t)_t.$$

Definicija 1.2. *Navadna diferenčna enačba* je enačba, ki vsebuje eno ali več diferenc,

$$F(t, \Delta^0 y_t, \ldots, \Delta^n y_t) \;=\; 0.$$

Red diferenčne enačbe je red najvišje diference. Če je F linearna v $\Delta^k y_t$, je enačba linearna.

Definicija 1.3. *Sistem n diferenčnih enačb 1. reda* je dan z

$$\begin{aligned} y_1(t+1) &= f_1(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)) \\ &\vdots \\ y_n(t+1) &= f_n(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)) \end{aligned}$$

Če t eksplicitno ne nastopa, rečemo, da je to *avtonomen sistem.* Če so $f_1, \ldots, f_n$ linearne, lahko sistem zapišemo v matrični obliki:

$$\mathbf{y} \;=\; \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad f_i(t) \;=\; b_i(t) + a_{i1} y_1(t) + \ldots + a_{in} y_n(t),\; i = 1, \ldots, n$$

$$\mathbf{y}(t+1) \;=\; \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix} \;=\; \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t)$$

Nelinearen sistem lahko vseeno zapišemo v vektorski obliki:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}(t+1) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$$

Definicija 1.4. Če je sistem oblike

$$\mathbf{y}_{m+1} = \mathbf{A}\mathbf{y}_m,$$

se imenuje *homogen.*

1.2 Linearne diferenčne enačbe in sistemi linearnih diferenčnih enačb

Definicija 1.5. *Sistem linearnih diferencialnih enačb* reda n je dan s predpisom

$$\mathbf{y}(t+1) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t),$$

kjer je $\mathbf{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

Definicija 1.6. *Začetni pogoj* (ali *Cauchyjeva naloga*) za sistem n linearnih diferenčnih enačb 1. reda je: reši

$$\mathbf{y}(t+1) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t)$$

pri začetnem pogoju $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Izrek 1.1. Prostor rešitev homogenega sistema je n-dimenzionalen vektorski prostor. Rešitve so linearno neodvisne v času $t + m \iff$ so linearno neodvisne v času t.

Komentar (Nehomogen sistem)**.** Opazili smo, da če $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ rešita

$$\mathbf{y}(t+1) \;=\; \mathbf{A}\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t),$$

potem $\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t) = \mathbf{w}(t)$ reši

$$\mathbf{w}(t+1) \;=\; \mathbf{A}\mathbf{w}(t).$$

Posledično je vsaka rešitev nehomogenega sistema oblike

$$\mathbf{y} \;=\; \mathbf{y}_h + \mathbf{y}_p,$$

kjer je $\mathbf{y}_h$ rešitev homogenega sistema, $\mathbf{y}_p$ pa - pravimo ji *partikularna* - rešitev nehomogenega sistema.

Definicija 1.7. Cauchyjeva naloga za linearne diferenčne enačbe s *konstantnimi koeficienti* je: reši

$$y_{t+n} + a_{n-1}y_{t+n-1} + \ldots + a_0 y_t \;=\; g(t)$$

pri pogoju

$$y(0) \;=\; \gamma_0, \ldots, y(n-1) \;=\; \gamma_{n-1}.$$

Enačbo lahko prevedemo na sistem:

$$\begin{bmatrix} y_1(t+1) \\ y_2(t+1) \\ \vdots \\ y_{n-1}(t+1) \\ y_n(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_{n-1}(t) \\ y_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -g(t) \end{bmatrix},$$

kjer je $y_k(t) := y(t+k-1)$ (torej velja $y_k(t) = y_{k-1}(t+1)$).

Izrek 1.2. Splošna rešitev homogene enačbe je dana z

$$y_H \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_i y_i,$$

kjer so y_i, $i = 1, \ldots, n$ linearno neodvisne rešitve enačbe. Prostor rešitev je vektorski prostor dimenzije n.

Metoda 1.1. Za iskanje linearnih neodvisnih rešitev homogene enačbe uporabimo nastavek $y_t = \lambda^t$:

$$\lambda^{t+n} + a_{n-1}\lambda^{t+n-1} + \ldots + a_0\lambda^t \; = \; 0$$

Karakteristični polinom:

$$p(\lambda) \; = \; \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Naj bo λ_0 ničla $p(\lambda)$, $p(\lambda_0) = 0$. Potem je

$$\lambda_0^{t+n} + \ldots + a_0\lambda_0^t \; = \; \lambda_0^t \cdot p(\lambda_0) \; = \; 0.$$

Če ima $p(\lambda)$ n enostavnih ničel, $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$, je vsaka rešitev oblike

$$y(t) \; = \; \alpha_0\lambda^t + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda_{n-1}^t.$$

1.3 Stabilnost

Definicija 1.8. Naj bo $\mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{f}(t, y_t)$ dan sistem in postavimo $t_0 = 0$. Rešitev $\mathbf{y}$ je *stabilna*, če za $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$: če je $\mathbf{z}$ katerakoli druga rešitev, ki zadošča $|\mathbf{z}_0 - \mathbf{y}_0| < \delta \Rightarrow |\mathbf{z}_t - \mathbf{y}_t| < \varepsilon$, $t > 0$.

Rešitev je *asimptotsko stabilna*, če je stabilna in za $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$: $|\mathbf{z}_0 - \mathbf{y}_0| < \delta$, $|\mathbf{z}_t - \mathbf{y}_t| < \varepsilon$, $t \geq 0$ in $\lim_{t\to\infty} |\mathbf{z}_t - y_t| = 0$.

Za linearne sisteme:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{t+1} &= \mathbf{A}\mathbf{y}_t + \mathbf{b}_t \\
\mathbf{y}_n &= \mathbf{y}_{n,P} + \mathbf{A}^n\mathbf{y}_0, \quad y_{0,P} = 0 \\
\mathbf{z}_n &= \mathbf{y}_{n,P} + \mathbf{A}^n\mathbf{z}_0 \\
|\mathbf{y}_n - \mathbf{z}_n| &= |\mathbf{A}^n(\mathbf{y}_0 - \mathbf{z}_0)| \;\leq\; \|\mathbf{A}\|^n\|\mathbf{y}_0 - \mathbf{z}_0\|
\end{aligned}$$

$\mathbf{y}_{n,P}$ je (asimptotsko) stabilna rešitev nehomogenega sistema $\iff$ $\mathbf{0}$ je (asimptotsko) stabilna rešitev homogenega sistema. Torej: $\|\mathbf{A}\| < 1$: stabilnost.

2 Navadne diferencialne enačbe

Definicija 2.1. *Navadna diferencialna enačba* je vsaka enačba oblike

$$f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \;=\; 0.$$

Red najvišjega odvoda je *red* enačbe.

Cauchyjeva naloga za NDE n-tega reda je: reši

$$y^{(n)} \;=\; f(x, y, \ldots, y^{(n-1)}) \tag{1}$$

pri pogoju

$$(x_0, y(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0)) \;:=\; (x_0, y_0, \ldots, y_{n-1}) \in D_f.$$

Če f ni eksplicitno odvisna od x, se enačba imenuje *avtonomna*. Če ke f linearna v $y, \ldots, y^{(n-1)}$, je enačba (1) linearna.

Definicija 2.2. Naj bo $D \subset \mathbb{R}^2$, odprta, $f : D \to \mathbb{R}$ dana funkcija in $(x_0, y_0) \in D$ začetni pogoj. Potem je funkcija y rešitev $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, na okolici x_0, če $\exists\delta > 0$:

$$y'(x) \;=\; f(x, y(x))$$

na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $y(x_0) = y_0$.

3 Linearne diferencialne enačbe

3.1 LDE 1. reda

Enačba 1.

$$y' = f(x)y + g(x)$$

Naj bo x_0 izbrana točka. Potem je vsaka rešitev oblike

$$y = Ce^{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt} + y_p.$$

Prostor rešitve homogene enačbe $y' = f(x)y$ je 1-dimenzionalni vektorski prostor.

3.2 Bernoullijeva DE

Enačba 2.

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}.$$

Če $\alpha \in \{0, 1\}$, potem je BDE kar LDE. Če ni, se v LDE prevede s substitucijo $z = y^{1-\alpha}$.

3.3 Ricattijeva DE

Enačba 3.

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x), \quad a, b, c \in \mathcal{C}([a, b])$$

V splošnem ni rešljiva. Če pa eno rešitev imamo, npr. y_1, s substitucijo $y = y_1 + z$ enačbo prevedemo na BDE za z.

3.4 LDE višjih redov s konstantnimi koeficienti

Definicija 3.1. *Nehomogena LDE n-tega reda s konstantnimi koeficienti* je enačba oblike

$$L(y) \ := \ y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y \ = \ f(x).$$

Če $f(x) \equiv 0$ je enačba homogena.

Trditev 3.1. Prostor rešitev enačbe $L(y) = 0$ je n-dimenzionalen vektorski prostor. Če je y_p rešitev enačbe

$$L(y_p) \ = \ f,$$

potem je vsaka druga rešitev te enačbe oblike

$$y \ = \ y_h + y_p,$$

kjer $L(y_h) = 0$.

4 Eksistenca, enoličnost, gladkost

4.1 Uvod

Izrek 4.1 (Lokalni eksistenčni izrek)**.** Naj ob $y' = f(x,y)$ diferencialna enačba, $f \in \mathcal{C}((0,a) \times (0,b))$, f Lipschitzova na 2. spremenljivko pri fiksni prvi spremenljivki x s koeficientom $k(x)$, ki je lokalno integrabilna na $(0,a)$. Potem lahko za $\forall (x_0, y_0) \in (0,a) \times (0,b)$ obstaja natanko ena rešitev enačbe pri začetnem pogoju $y(x_0) = y_0$, ki je definirana na neki okolici x_0.

Izrek 4.2 (Globalni eksistenčni izrek)**.** Naj bo $y' = f(x,y)$ diferencialna enačba, $f \in \mathcal{C}([0,a] \times \mathbb{R})$, Lipschitzova na 2. spremenljivko pri fiksni 1. spremenljivki s konstanto $k(x)$, ki je integrabilna na $[0,a]$. Potem obstaja natanko ena rešitev enačba pri pogoju $y(0) = y_0$, ki je definirana na $[0,a]$.

4.2 Gladkost

Izrek 4.3. Cauchyjeva naloga:

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y,a), \quad a \in P \subset \mathbb{R}^n, \\ y(s) &= t \end{aligned}$$

$\varphi(x, x_0, y_0)$ je rešitev zgornje Cauchyjeve naloge. Naj bo f gladka v vseh spremenljivkah. Potem je φ gladko odvisna od x, s, t, a.

5 Sistemi diferencialnih enačb

5.1 Uvod

Definicija 5.1. Naj bodo $x, y_1, \ldots, y_n$ realne spremenljivke in $f_i : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, realna funkcija. Sistem n diferencialnih enačb 1. reda je

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

V vektorski obliki:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}.$$

Sistem se prepiše v $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$. Cauchyjeva naloga:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' &= \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(x_0) &= \mathbf{y}_0 \end{aligned}$$

Če x v $\mathbf{f}$ eksplicitno ne nastopa, se sistem imenuje *avtonomen*. Če je $\mathbf{f}$ linearna v $\mathbf{y}$, je sistem *linearen* in pišemo

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x).$$

Če je $\mathbf{b} \equiv 0$, je sistem *homogen*.

5.2 Sistemi linearnih diferencialnih enačb

Posledica. Sistem

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x),$$

$\mathbf{A}, \mathbf{b}$ zvezni na $[0, a]$, izpolnjuje predpostavke G.E.I.

Izrek 5.1. Naj bo

$$\mathbf{y}' \; = \; \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$$

sistem n diferencialnih enačb 1. reda, $\mathbf{A}, \mathbf{b}$ zvezni na $[0, a]$. Prostor rešitev homogene enačbe $\mathbf{y} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}$ je vektorski prostor dimenzije n. Vsaka rešitev nehomogenega je oblike

$$\mathbf{y} \; = \; \mathbf{y}_H + \mathbf{y}_P,$$

kjer je $\mathbf{y}_H$ rešitev homogenega sistema, $\mathbf{y}_P$ pa partikularna rešitev nehomogenega sistema.

6 Kvalitativna analiza

6.1 Uvod

Definicija 6.1. Naj bo $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ dan sistem enačb in $\boldsymbol{\varphi}(x)$ njegova rešitev. Potem pravimo, da je $\boldsymbol{\varphi}$ *stabilna*, da za $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, da velja: če je $\boldsymbol{\psi}$ neka druga rešitev in je $\|\boldsymbol{\psi}(0) - \boldsymbol{\varphi}(0)\| < \delta$, potem

$$\|\boldsymbol{\psi}(x) - \boldsymbol{\varphi}(x)\| \ < \ \varepsilon, \quad x > 0.$$

Če je $\boldsymbol{\varphi}$ stabilna in za $\boldsymbol{\psi}$, ki zadošča zgornjim pogojem, velja še

$$\lim_{x\to\infty} \|\boldsymbol{\psi}(x) - \boldsymbol{\varphi}(x)\| \ = \ 0,$$

pravimo, da je $\boldsymbol{\varphi}$ *asimptotsko stabilna.*

Izrek 6.1. Naj bo $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ dan sistem in je $\mathbf{A}$ matrika z lastnimi vrednostmi λ_i.

(a) Če $\forall i : \mathfrak{Re}(\lambda_i) < 0$ je vsaka rešitev asimptotsko stabilna.

(b) Če $\exists i : \mathfrak{Re}(\lambda_i) > 0$ so vse rešitve nestabilne.

(c) Če $i < j : \mathfrak{Re}(\lambda_i) = 0$ in je število lastnih vektorjev, ki pripadajo λ_i, enako njeni algebrajski večkratnosti in $i \geq j : \mathfrak{Re}(\lambda_i) < 0$, je vsaka rešitev stabilna. Če $\exists i < j$, tako da algebrajska večkratnost ni enaka številu lastnih vektorjev ($\mathfrak{Re}(\lambda_i) = 0$), potem je vsaka rešitev nestabilna.

Definicija 6.2. Naj bo $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ dan sistem in naj bo $\mathbf{v}_j = \mathbf{u}_j + i\mathbf{w}_j$ posplošeni lastni vektor (lastni ali korenski) za lastno vrednost λ_j. Definiramo:

- *Stabilni podprostor*:

$$E^s \ = \ \mathscr{Lin}\{\mathbf{u}_j, \mathbf{w}_j \in \mathbb{R}^n \mid \mathfrak{Re}(\lambda_j) < 0\}$$

- *Nestabilni podprostor*:

$$E^n \ = \ \mathscr{Lin}\{\mathbf{u}_j, \mathbf{w}_j \in \mathbb{R}^n \mid \mathfrak{Re}(\lambda_j) > 0\}$$

- *Centralni podprostor*:

$$E^c \ = \ \mathscr{Lin}\{\mathbf{u}_j, \mathbf{w}_j \in \mathbb{R}^n \mid \mathfrak{Re}(\lambda_j) = 0\}$$

6.2 Stabilnost ravnovesnih rešitev

Definicija 6.3. Stacionarna točka $\mathbf{y}_0$ avtonomnega sistema $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, $\mathbf{f}$ gladka, je *hiperbolična*, če ima

$$\mathbf{A} = \mathbf{Df}(\mathbf{y})$$

trivialen centralni prostor. Če $\mathbf{y}_0$ ni hiperbolična, je *nehiperbolična*.

Izrek 6.2 (Harman-Grobman)**.** Naj bo $E \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica, ki vsebuje izhodišče in naj bo $\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^n$ razreda $\mathcal{C}^2$. Označimo z $\boldsymbol{\varphi}_x(t)$ rešitev, ki zadošča $\boldsymbol{\varphi}_x(0) = x$ (tokovnica skozi x). Naj bo $\mathbf{0}$ hiperbolična stacionarna točka sistema in pišimo

$$\mathbf{A} = \mathbf{Df}(\mathbf{0}).$$

Obstaja $H : U \to V$, difeomorfizem reda $\mathcal{C}^1$, U, V odprti okolici izhodišča, $H(0) = (0)$ tak, da velja: $\forall x_0 \in U$ obstaja odprt interval I_0 okoli 0, $I_0 \subset \mathbb{R}$ in velja

$$H \circ \boldsymbol{\varphi}_{x_0} = e^{\mathbf{A}t} H(x_0).$$

Opomba. Če je $\mathbf{f}$ zgolj razreda $\mathcal{C}^1$, je H homeomorfizem.

Posledica. Ob predpostavkah izreka Hartman-Grobman je $x = 0$ asimptotsko stabilna rešitev linearizirane enačbe $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Rešitev je nestabilna, če ima $\mathbf{A}$ vsaj eno lastno vrednost λ, $\mathfrak{Re}(\lambda) > 0$ ($\iff$ $E^n \neq \{0\}$).

6.3 Problem morskih psov med 1. svetovno vojno

Lema 1. Naj bosta $x(t), y(t)$ periodični rešitvi sistem Lotka-Volterra s periodo $T > 0$. Potem je

$$\begin{aligned} \frac{l}{b} &= \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt, \\ \frac{k}{a} &= \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt. \end{aligned}$$

6.4 Limitne rešitve

Izrek 6.3. Naj bo $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ dan sistem, $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1$, $\varphi(t)$ rešitev in $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \mathbf{y}_0$. Potem je $\mathbf{y}_0$ stacionarna točka.

6.5 Stabilnost in funkcija Ljapunova

Izrek 6.4. Naj bo $E \subset \mathbb{R}^2$ odprta množica, ki vsebuje izhodišče. Naj bo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ dan sistem in naj bo $\mathbf{0}$ njegova stacionarna točka in naj obstaja gladka vunkcija V na E, $V(0) = 0$, $V > 0$ sicer.

(a) $\dot{V} \leq 0$: $\mathbf{0}$ je stabilna;

(b) $\dot{V} < 0$ na $E \setminus \{\mathbf{0}\}$: $\mathbf{0}$ je asimptotsko stabilna;

(c) $\dot{V} > 0$ na $E \setminus \{\mathbf{0}\}$: $\mathbf{0}$ je nestabilna.

Funkcija V se imenuje *Ljupanova*.

6.6 Vedenje pri velikih časih

Izrek 6.5 (Poincare-Bendixon)**.** Naj bo $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ dan sistem, $K \subset \mathbb{R}^2$ kompaktna množica brez stacionarnih točk sistemu in naj bo $\varphi_x(t)$, $t \geq 0$, točkovnica, ki je v K za $\forall t \geq 0$:

$$\varphi_x(t) \in K, \quad \forall t \geq 0.$$

Potem obstaja v K periodična rešitev in $\varphi_x(t)$ se navija okoli nje.