Analiza 4 - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar
po predavanjih profesorice Jasne Prezelj

2021/22

Kazalo

1 Diferenčne enačbe

1.1 Uvod

Definicija 1.1 (Diferenca)**.** Denimo, da je $y = f(t)$ dana funkcija.

- 1. način: $\Delta y_t \;=\; f(t+h) - f(t) \;=\; y_{t+h} - y_t$
- 2. način: $\Delta y_t \;=\; f(t) - f(t-h) \;=\; y_t - y_{t-h}$

Posebej definiramo $\Delta^0 y_t = y_t$. Velja

$$\Delta^{n+1} y_t \;=\; \Delta(\Delta^n y_t)_t.$$

Definicija 1.2. *Navadna diferenčna enačba* je enačba, ki vsebuje eno ali več diferenc,

$$F(t, \Delta^0 y_t, \ldots, \Delta^n y_t) \;=\; 0.$$

Red diferenčne enačbe je red najvišje diference. Če je F linearna v $\Delta^k y_t$, je enačba linearna.

Definicija 1.3. *Sistem n diferenčnih enačb 1. reda* je dan z

$$\begin{aligned} y_1(t+1) &= f_1(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)) \\ &\vdots \\ y_n(t+1) &= f_n(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)) \end{aligned}$$

Če t eksplicitno ne nastopa, rečemo, da je to *avtonomen sistem.* Če so $f_1, \ldots, f_n$ linearne, lahko sistem zapišemo v matrični obliki:

$$\mathbf{y} \;=\; \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad f_i(t) \;=\; b_i(t) + a_{i1} y_1(t) + \ldots + a_{in} y_n(t), \; i = 1, \ldots, n$$

$$\mathbf{y}(t+1) \;=\; \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix} \;=\; \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t)$$

Nelinearen sistem lahko vseeno zapišemo v vektorski obliki:

$$\mathbf{f} \;=\; \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}(t+1) \;=\; \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$$

Definicija 1.4. Če je sistem oblike

$$\mathbf{y}_{m+1} = \mathbf{A}\mathbf{y}_m,$$

se imenuje *homogen.*

1.2 Linearne diferenčne enačbe in sistemi linearnih diferenčnih enačb

Definicija 1.5. *Sistem linearnih diferencialnih enačb* reda n je dan s predpisom

$$\mathbf{y}(t+1) \;=\; \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t),$$

kjer je $\mathbf{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

Definicija 1.6. *Začetni pogoj* (ali *Cauchyjeva naloga*) za sistem n linearnih diferenčnih enačb 1. reda je: reši

$$\mathbf{y}(t+1) \;=\; \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t)$$

pri začetnem pogoju $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Izrek 1.1. Prostor rešitev homogenega sistema je n-dimenzionalen vektorski prostor. Rešitve so linearno neodvisne v času $t + m \iff$ so linearno neodvisne v času t.

Komentar (Nehomogen sistem)**.** Opazili smo, da če $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ rešita

$$\mathbf{y}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t),$$

potem $\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t) = \mathbf{w}(t)$ reši

$$\mathbf{w}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{w}(t).$$

Posledično je vsaka rešitev nehomogenega sistema oblike

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_h + \mathbf{y}_p,$$

kjer je $\mathbf{y}_h$ rešitev homogenega sistema, $\mathbf{y}_p$ pa - pravimo ji *partikularna* - rešitev nehomogenega sistema.

Definicija 1.7. Cauchyjeva naloga za linearne diferenčne enačbe s *konstantnimi koeficienti* je: reši

$$y_{t+n} + a_{n-1}y_{t+n-1} + \ldots + a_0 y_t = g(t)$$

pri pogoju

$$y(0) = \gamma_0, \ldots, y(n-1) = \gamma_{n-1}.$$

Enačbo lahko prevedemo na sistem:

$$\begin{bmatrix} y_1(t+1) \\ y_2(t+1) \\ \vdots \\ y_{n-1}(t+1) \\ y_n(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_{n-1}(t) \\ y_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -g(t) \end{bmatrix},$$

kjer je $y_k(t) := y(t+k-1)$ (torej velja $y_k(t) = y_{k-1}(t+1)$).

Izrek 1.2. Splošna rešitev homogene enačbe je dana z

$$y_H = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i,$$

kjer so y_i, $i = 1, \ldots, n$ linearno neodvisne rešitve enačbe. Prostor rešitev je vektorski prostor dimenzije n.

Metoda 1.1. Za iskanje linearnih neodvisnih rešitev homogene enačbe uporabimo nastavek $y_t = \lambda^t$:

$$\lambda^{t+n} + a_{n-1}\lambda^{t+n-1} + \ldots + a_0\lambda^t \; = \; 0$$

Karakteristični polinom:

$$p(\lambda) \; = \; \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Naj bo λ_0 ničla $p(\lambda)$, $p(\lambda_0) = 0$. Potem je

$$\lambda_0^{t+n} + \ldots + a_0\lambda_0^t \; = \; \lambda_0^t \cdot p(\lambda_0) \; = \; 0.$$

Če ima $p(\lambda)$ n enostavnih ničel, $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$, je vsaka rešitev oblike

$$y(t) \; = \; \alpha_0\lambda^t + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda_{n-1}^t.$$

1.3 Stabilnost

Definicija 1.8. Naj bo $\mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{f}(t, y_t)$ dan sistem in postavimo $t_0 = 0$. Rešitev $\mathbf{y}$ je *stabilna*, če za $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$: če je $\mathbf{z}$ katerakoli druga rešitev, ki zadošča $|\mathbf{z}_0 - \mathbf{y}_0| < \delta \Rightarrow |\mathbf{z}_t - \mathbf{y}_t| < \varepsilon$, $t > 0$.

Rešitev je *asimptotsko stabilna*, če je stabilna in za $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$: $|\mathbf{z}_0 - \mathbf{y}_0| < \delta$, $|\mathbf{z}_t - \mathbf{y}_t| < \varepsilon$, $t \geq 0$ in $\lim_{t\to\infty} |\mathbf{z}_t - y_t| = 0$.

Za linearne sisteme:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{t+1} &= \mathbf{A}\mathbf{y}_t + \mathbf{b}_t \\
\mathbf{y}_n &= \mathbf{y}_{n,P} + \mathbf{A}^n\mathbf{y}_0, \quad y_{0,P} = 0 \\
\mathbf{z}_n &= \mathbf{y}_{n,P} + \mathbf{A}^n\mathbf{z}_0 \\
|\mathbf{y}_n - \mathbf{z}_n| &= |\mathbf{A}^n(\mathbf{y}_0 - \mathbf{z}_0)| \; \leq \; \|\mathbf{A}\|^n \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{z}_0\|
\end{aligned}$$

$\mathbf{y}_{n,P}$ je (asimptotsko) stabilna rešitev nehomogenega sistema $\iff$ $\mathbf{0}$ je (asimptotsko) stabilna rešitev homogenega sistema. Torej: $\|\mathbf{A}\| < 1$: stabilnost.

2 Navadne diferencialne enačbe

Definicija 2.1. *Navadna diferencialna enačba* je vsaka enačba oblike

$$f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \;=\; 0.$$

Red najvišjega odvoda je *red* enačbe.

Cauchyjeva naloga za NDE n-tega reda je: reši

$$y^{(n)} \;=\; f(x, y, \ldots, y^{(n-1)}) \tag{1}$$

pri pogoju

$$(x_0, y(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0)) \;:=\; (x_0, y_0, \ldots, y_{n-1}) \in D_f.$$

Če f ni eksplicitno odvisna od x, se enačba imenuje *avtonomna*. Če ke f linearna v $y, \ldots, y^{(n-1)}$, je enačba (1) linearna.

Definicija 2.2. Naj bo $D \subset \mathbb{R}^2$, odprta, $f : D \to \mathbb{R}$ dana funkcija in $(x_0, y_0) \in D$ začetni pogoj. Potem je funkcija y rešitev $y' \;=\; f(x, y), \quad y(x_0) \;=\; y_0$, na okolici x_0, če $\exists \delta > 0$:

$$y'(x) \;=\; f(x, y(x))$$

na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $y(x_0) = y_0$.

3 Linearne diferencialne enačbe

3.1 LDE 1. reda

Enačba 1.

$$y' = f(x)y + g(x)$$

Naj bo x_0 izbrana točka. Potem je vsaka rešitev oblike

$$y = Ce^{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt} + y_p.$$

Prostor rešitve homogene enačbe $y' = f(x)y$ je 1-dimenzionalni vektorski prostor.

3.2 Bernoullijeva DE

Enačba 2.

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}.$$

Če $\alpha \in \{0, 1\}$, potem je BDE kar LDE. Če ni, se v LDE prevede s substitucijo $z = y^{1-\alpha}$.

3.3 Ricattijeva DE

Enačba 3.

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x), \quad a, b, c \in \mathcal{C}([a, b])$$

V splošnem ni rešljiva. Če pa eno rešitev imamo, npr. y_1, s substitucijo $y = y_1 + z$ enačbo prevedemo na BDE za z.

3.4 LDE višjih redov s konstantnimi koeficienti

Definicija 3.1. *Nehomogena LDE n-tega reda s konstantnimi koeficienti* je enačba oblike

$$L(y) \;:=\; y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y \;=\; f(x).$$

Če $f(x) \equiv 0$ je enačba homogena.

Trditev 3.1. Prostor rešitev enačbe $L(y) = 0$ je n-dimenzionalen vektorski prostor. Če je y_p rešitev enačbe

$$L(y_p) \;=\; f,$$

potem je vsaka druga rešitev te enačbe oblike

$$y \;=\; y_h + y_p,$$

kjer $L(y_h) = 0$.

4 Eksistenca, enoličnost, gladkost

4.1 Uvod

Izrek 4.1 (Lokalni eksistenčni izrek)**.** Naj ob $y' = f(x, y)$ diferencialna enačba, $f \in \mathcal{C}((0, a) \times (0, b))$, f Lipschitzova na 2. spremenljivko pri fiksni prvi spremenljivki x s koeficientom $k(x)$, ki je lokalno integrabilna na $(0, a)$. Potem lahko za $\forall(x_0, y_0) \in (0, a) \times (0, b)$ obstaja natanko ena rešitev enačbe pri začetnem pogoju $y(x_0) = y_0$, ki je definirana na neki okolici x_0.

Izrek 4.2 (Globalni eksistenčni izrek)**.** Naj bo $y' = f(x, y)$ diferencialna enačba, $f \in \mathcal{C}([0, a] \times \mathbb{R})$, Lipschitzova na 2. spremenljivko pri fiksni 1. spremenljivki s konstanto $k(x)$, ki je integrabilna na $[0, a]$. Potem obstaja natanko ena rešitev enačba pri pogoju $y(0) = y_0$, ki je definirana na $[0, a]$.

4.2 Gladkost

Izrek 4.3. Cauchyjeva naloga:

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y, a), \quad a \in P \subset \mathbb{R}^n, \\ y(s) &= t \end{aligned}$$

$\varphi(x, x_0, y_0)$ je rešitev zgornje Cauchyjeve naloge. Naj bo f gladka v vseh spremenljivkah. Potem je φ gladko odvisna od x, s, t, a.

5 Sistemi diferencialnih enačb

5.1 Uvod

Definicija 5.1. Naj bodo $x, y_1, \ldots, y_n$ realne spremenljivke in $f_i : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, realna funkcija. Sistem n diferencialnih enačb 1. reda je

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

V vektorski obliki:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}.$$

Sistem se prepiše v $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$. Cauchyjeva naloga:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' &= \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(x_0) &= \mathbf{y}_0 \end{aligned}$$

Če x v $\mathbf{f}$ eksplicitno ne nastopa, se sistem imenuje *avtonomen.* Če je $\mathbf{f}$ linearna v $\mathbf{y}$, je sistem *linearen* in pišemo

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x).$$

Če je $\mathbf{b} \equiv 0$, je sistem *homogen.*

5.2 Sistemi linearnih diferencialnih enačb

Posledica. Sistem

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x),$$

$\mathbf{A}, \mathbf{b}$ zvezni na $[0, a]$, izpolnjuje predpostavke G.E.I.

Izrek 5.1. Naj bo

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$$

sistem n diferencialnih enačb 1. reda, $\mathbf{A}, \mathbf{b}$ zvezni na $[0, a]$. Prostor rešitev homogene enačbe $\mathbf{y} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}$ je vektorski prostor dimenzije n. Vsaka rešitev nehomogenega je oblike

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_H + \mathbf{y}_P,$$

kjer je $\mathbf{y}_H$ rešitev homogenega sistema, $\mathbf{y}_P$ pa partikularna rešitev nehomogenega sistema.

6 Kvalitativna analiza

6.1 Uvod

Definicija 6.1. Naj bo $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ dan sistem enačb in $\boldsymbol{\varphi}(x)$ njegova rešitev. Potem pravimo, da je $\boldsymbol{\varphi}$ *stabilna*, da za $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, da velja: če je $\boldsymbol{\psi}$ neka druga rešitev in je $\|\boldsymbol{\psi}(0) - \boldsymbol{\varphi}(0)\| < \delta$, potem

$$\|\boldsymbol{\psi}(x) - \boldsymbol{\varphi}(x)\| \ < \ \varepsilon, \quad x > 0.$$

Če je $\boldsymbol{\varphi}$ stabilna in za $\boldsymbol{\psi}$, ki zadošča zgornjim pogojem, velja še

$$\lim_{x \to \infty} \|\boldsymbol{\psi}(x) - \boldsymbol{\varphi}(x)\| \ = \ 0,$$

pravimo, da je $\boldsymbol{\varphi}$ *asimptotsko stabilna.*

Izrek 6.1. Naj bo $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ dan sistem in je $\mathbf{A}$ matrika z lastnimi vrednostmi λ_i.

(a) Če $\forall i : \mathfrak{Re}(\lambda_i) < 0$ je vsaka rešitev asimptotsko stabilna.

(b) Če $\exists i : \mathfrak{Re}(\lambda_i) > 0$ so vse rešitve nestabilne.

(c) Če $i < j : \mathfrak{Re}(\lambda_i) = 0$ in je število lastnih vektorjev, ki pripadajo λ_i, enako njeni algebrajski večkratnosti in $i \geq j : \mathfrak{Re}(\lambda_i) < 0$, je vsaka rešitev stabilna. Če $\exists i < j$, tako da algebrajska večkratnost ni enaka številu lastnih vektorjev ($\mathfrak{Re}(\lambda_i) = 0$), potem je vsaka rešitev nestabilna.

Definicija 6.2. Naj bo $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ dan sistem in naj bo $\mathbf{v}_j = \mathbf{u}_j + i\mathbf{w}_j$ posplošeni lastni vektor (lastni ali korenski) za lastno vrednost λ_j. Definiramo:

- *Stabilni podprostor*:

$$E^s \ = \ \mathscr{Lin}\{\mathbf{u}_j, \mathbf{w}_j \in \mathbb{R}^n \mid \mathfrak{Re}(\lambda_j) < 0\}$$

- *Nestabilni podprostor*:

$$E^n \ = \ \mathscr{Lin}\{\mathbf{u}_j, \mathbf{w}_j \in \mathbb{R}^n \mid \mathfrak{Re}(\lambda_j) > 0\}$$

- *Centralni podprostor*:

$$E^c \ = \ \mathscr{Lin}\{\mathbf{u}_j, \mathbf{w}_j \in \mathbb{R}^n \mid \mathfrak{Re}(\lambda_j) = 0\}$$

6.2 Stabilnost ravnovesnih rešitev

Definicija 6.3. Stacionarna točka $\mathbf{y}_0$ avtonomnega sistema $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, $\mathbf{f}$ gladka, je *hiperbolična*, če ima

$$\mathbf{A} = \mathbf{Df}(\mathbf{y})$$

trivialen centralni prostor. Če $\mathbf{y}_0$ ni hiperbolična, je *nehiperbolična*.

Izrek 6.2 (Harman-Grobman)**.** Naj bo $E \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica, ki vsebuje izhodišče in naj bo $\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^n$ razreda $\mathcal{C}^2$. Označimo z $\boldsymbol{\varphi}_x(t)$ rešitev, ki zadošča $\boldsymbol{\varphi}_x(0) = x$ (tokovnica skozi x). Naj bo $\mathbf{0}$ hiperbolična stacionarna točka sistema in pišimo

$$\mathbf{A} = \mathbf{Df}(\mathbf{0}).$$

Obstaja $H : U \to V$, difeomorfizem reda $\mathcal{C}^1$, U, V odprti okolici izhodišča, $H(0) = (0)$ tak, da velja: $\forall x_0 \in U$ obstaja odprt interval I_0 okoli 0, $I_0 \subset \mathbb{R}$ in velja

$$H \circ \boldsymbol{\varphi}_{x_0} = e^{\mathbf{A}t} H(x_0).$$

Opomba. Če je $\mathbf{f}$ zgolj razreda $\mathcal{C}^1$, je H homeomorfizem.

Posledica. Ob predpostavkah izreka Hartman-Grobman je $x = 0$ asimptotsko stabilna rešitev linearizirane enačbe $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Rešitev je nestabilna, če ima $\mathbf{A}$ vsaj eno lastno vrednost λ, $\mathfrak{Re}(\lambda) > 0$ ($\iff E^n \neq \{0\}$).

6.3 Problem morskih psov med 1. svetovno vojno

Lema 1. Naj bosta $x(t), y(t)$ periodični rešitvi sistem Lotka-Volterra s periodo $T > 0$. Potem je

$$\frac{l}{b} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt,$$
$$\frac{k}{a} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt.$$

6.4 Limitne rešitve

Izrek 6.3. Naj bo $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ dan sistem, $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1$, $\varphi(t)$ rešitev in $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \mathbf{y}_0$. Potem je $\mathbf{y}_0$ stacionarna točka.

6.5 Stabilnost in funkcija Ljapunova

Izrek 6.4. Naj bo $E \subset \mathbb{R}^2$ odprta množica, ki vsebuje izhodišče. Naj bo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ dan sistem in naj bo $\mathbf{0}$ njegova stacionarna točka in naj obstaja gladka vunkcija V na E, $V(0) = 0$, $V > 0$ sicer.

(a) $\dot{V} \leq 0$: $\mathbf{0}$ je stabilna;

(b) $\dot{V} < 0$ na $E \setminus \{\mathbf{0}\}$: $\mathbf{0}$ je asimptotsko stabilna;

(c) $\dot{V} > 0$ na $E \setminus \{\mathbf{0}\}$: $\mathbf{0}$ je nestabilna.

Funkcija V se imenuje *Ljupanova*.

6.6 Vedenje pri velikih časih

Izrek 6.5 (Poincare-Bendixon)**.** Naj bo $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ dan sistem, $K \subset \mathbb{R}^2$ kompaktna množica brez stacionarnih točk sistemu in naj bo $\varphi_x(t)$, $t \geq 0$, točkovnica, ki je v K za $\forall t \geq 0$:

$$\varphi_x(t) \in K, \quad \forall t \geq 0.$$

Potem obstaja v K periodična rešitev in $\varphi_x(t)$ se navija okoli nje.

7 Variacijski račun

Definicija 7.1. Funkcija $f(x, y)$ je homogena reda α, če je

$$f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y).$$

8 Parcialne diferencialne enačbe

Definicija 8.1. Parcialna diferencialna enačba je vsaka enačba oblike

$$f(x_1, \ldots, x_n, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, \ldots, u_{x_n \ldots x_n}, u) \;=\; 0.$$

Definicija 8.2. PDE 1. reda je oblike

$$f(x_1, \ldots, x_n, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, u) \;=\; 0.$$

Primer 2 spremenljivk, $u = u(x, y)$:

$$f(x, y, u_x, u_y, u) \;=\; 0.$$

Če je f linearna v $p := u_x, q := u_y$ je enačba *kvazilinearna.* Zapišemo

$$ap + bq = c.$$

Začetna naloga: reši $ap + bq = c$ pri pogoju $u(x(s), y(s)) = u(s)$ oz. u vsebuje krivuljo

$$\Gamma(s) \;=\; \{(x(s), y(s), u(s));\; s \in (\alpha, \beta)\}.$$

Denimo, da smo našli rešitev: graf je nivojnica funkcij

$$u(x, y) - z \;=\; 0,$$

zato je normalna na ploskev dano z

$$(u_x, u_y, -1) \;=\; (p, q, -1).$$

Enačba je $ap + bq - c = 0$:

$$(p, q, -1)(a, b, c) \;=\; 0.$$

Enačba pove, da je graf sestavljen iz tokovnic polja (a, b, c), ki gredo skozi Γ.

Izrek 8.1 (Metoda karakteristik)**.** Naj bodo a, b, c gladke funkcije na okolici gladke začetne krivulje

$$\Gamma \;=\; \{(x(s), y(s), u(s));\; s \in I\},$$

$I \subset \mathbb{R}$ odprt integral, ki je taka, da je $\{(x(s), y(s));\; s \in I\}$ brez samopresečišč. Naj velja, da je $J(s, 0) \neq 0$ na I (torej izpolnjuje transverzalni pogoj). Potem je $ap + bq = c$ rešljiva na okolici začetne krivulje in rešitev je ena sama ter gladko odvisna od začetnih pogojev.

Opomba. Če transverzalni pogoj ne izpolnjen na nekem intervalu, potem bodisi ni rešitve bodisi jih je neskončno mnogo.

Definicija 8.3. Naj bo $y' = f(x, y)$ sistem diferencialnih enačb. Funkcija F je *prvi integral* sistema, če je $F(x, y)$ konstantna za vsako rešitev sistema. Če sta F_1, F_2 prva integrala, je tudi $G(F_1, F_2)$ prvi integral. Prvi integrali $F_1, \ldots, F_n$ so funkcijsko neodvisni, če obstaja natanko ena netrivialna funkcija G, da je

$$G(F_1, \ldots, F_n) \;=\; 0.$$

Izrek 8.2. Pfaffova enačba

$$F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz \;=\; 0$$

je rešljiva natanko tedaj, ko je

$$F \cdot \mathrm{rot}(F) \;=\; 0.$$

9 Linearne PDE 2. reda

Definicija 9.1. Splošna oblika LPDE 2. reda je

$$L_u \ := \ au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + cu_y + f \ = \ 0,$$

kjer so $a, \ldots, f$ gladke funkcije. $L_0 u = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy}$.

Definicija 9.2. Naj bo dan diferencialni operator $Lu = 0$. Naj bo

$$G \ = \ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Če je na območju U:

- $\det G = ac - b^2 < 0$, je enačba na U hiperbolična. Model: valovna enačba
$$u_{tt} \ = \ c^2 u_{xx}.$$
- $\det G = ac - b^2 = 0$, je enačba na U parabolična. Model: toplotna enačba
$$u_t \ = \ cu_{xx}.$$
- $\det G = ac - b^2 > 0$, je enačba na U eliptična. Model: Laplaceova enačba
$$u_{xx} + u_{yy} \ = \ 0.$$

Posledica. Ker je

$$AC - B^2 \ = \ (\det J)^2 (ac - b^2)$$

je tip neodvisen od koordinat.