

Analiza 4 - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar
po predavanjih profesorice Jasne Prezelj

2021/22

Kazalo

1	Diferenčne enačbe	3
1.1	Uvod	3
1.2	Linearne diferenčne enačbe in sistemi linearnih diferenčnih enačb	4
1.3	Stabilnost	6
2	Navadne diferencialne enačbe	7
3	Linearne diferencialne enačbe	8
3.1	LDE 1. reda	8
3.2	Bernoullijeva DE	8
3.3	Ricattijeva DE	8
3.4	LDE višjih redov s konstantnimi koeficienti	9
4	Eksistenca, enoličnost, gladkost	10
4.1	Uvod	10
4.2	Gladkost	10
5	Sistemi diferencialnih enačb	11
5.1	Uvod	11
5.2	Sistemi linearnih diferencialnih enačb	11
6	Kvalitativna analiza	13
6.1	Uvod	13
6.2	Stabilnost ravnovesnih rešitev	14

1 Diferenčne enačbe

1.1 Uvod

Definicija 1.1 (Diferenca). Denimo, da je $y = f(t)$ dana funkcija.

- 1. način: $\Delta y_t = f(t+h) - f(t) = y_{t+h} - y_t$
- 2. način: $\Delta y_t = f(t) - f(t-h) = y_t - y_{t-h}$

Posebej definiramo $\Delta^0 y_t = y_t$. Velja

$$\Delta^{n+1} y_t = \Delta(\Delta^n y_t).$$

Definicija 1.2. *Navadna diferenčna enačba* je enačba, ki vsebuje eno ali več diferenc,

$$F(t, \Delta^0 y_t, \dots, \Delta^n y_t) = 0.$$

Red diferenčne enačbe je red najvišje difference. Če je F linearna v $\Delta^k y_t$, je enačba linearna.

Definicija 1.3. *Sistem n diferenčnih enačb 1. reda* je dan z

$$\begin{aligned} y_1(t+1) &= f_1(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \\ &\vdots \\ y_n(t+1) &= f_n(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \end{aligned}$$

Če t eksplicitno ne nastopa, rečemo, da je to *avtonomen sistem*. Če so f_1, \dots, f_n linearne, lahko sistem zapišemo v matrični obliki:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad f_i(t) = b_i(t) + a_{i1}y_1(t) + \dots + a_{in}y_n(t), \quad i = 1, \dots, n$$
$$\mathbf{y}(t+1) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t)$$

Nelinearen sistem lahko vseeno zapišemo v vektorski obliki:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}(t+1) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$$

Definicija 1.4. Če je sistem oblike

$$\mathbf{y}_{m+1} = \mathbf{A}\mathbf{y}_m,$$

se imenuje *homogen*.

1.2 Linearne diferenčne enačbe in sistemi linearnih diferenčnih enačb

Definicija 1.5. Sistem linearnih diferencialnih enačb reda n je dan s predpisom

$$\mathbf{y}(t+1) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t),$$

kjer je $\mathbf{A} \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

Definicija 1.6. Začetni pogoj (ali *Cauchyjeva naloga*) za sistem n linearnih diferenčnih enačb 1. reda je: reši

$$\mathbf{y}(t+1) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t)$$

pri začetnem pogoju $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Izrek 1.1. Prostor rešitev homogenega sistema je n -dimenzionalen vektorski prostor. Rešitve so linearno neodvisne v času $t+m \iff$ so linearno neodvisne v času t .

Komentar (Nehomogen sistem). Opazili smo, da če \mathbf{y}, \mathbf{z} rešita

$$\mathbf{y}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t),$$

potem $\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t) = \mathbf{w}(t)$ reši

$$\mathbf{w}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{w}(t).$$

Posledično je vsaka rešitev nehomogenega sistema oblike

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_h + \mathbf{y}_p,$$

kjer je \mathbf{y}_h rešitev homogenega sistema, \mathbf{y}_p pa - pravimo ji *partikularna* - rešitev nehomogenega sistema.

Definicija 1.7. Cauchyjeva naloga za linearne diferenčne enačbe s *konstantnimi koeficienti* je: reši

$$y_{t+n} + a_{n-1}y_{t+n-1} + \dots + a_0y_t = g(t)$$

pri pogoju

$$y(0) = \gamma_0, \dots, y(n-1) = \gamma_{n-1}.$$

Enačbo lahko prevedemo na sistem:

$$\begin{bmatrix} y_1(t+1) \\ y_2(t+1) \\ \vdots \\ y_{n-1}(t+1) \\ y_n(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_{n-1}(t) \\ y_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -g(t) \end{bmatrix},$$

kjer je $y_k(t) := y(t+k-1)$ (torej velja $y_k(t) = y_{k-1}(t+1)$).

Izrek 1.2. Splošna rešitev homogene enačbe je dana z

$$y_H = \sum_{i=1}^n a_i y_i,$$

kjer so $y_i, i = 1, \dots, n$ linearno neodvisne rešitve enačbe. Prostor rešitev je vektorski prostor dimenzije n .

Metoda 1.1. Za iskanje linearnih neodvisnih rešitev homogene enačbe uporabimo nastavek $y_t = \lambda^t$:

$$\lambda^{t+n} + a_{n-1}\lambda^{t+n-1} + \dots + a_0\lambda^t = 0$$

Karakteristični polinom:

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_n.$$

Naj bo λ_0 ničla $p(\lambda)$, $p(\lambda_0) = 0$. Potem je

$$\lambda_0^{t+n} + \dots + a_0\lambda_0^t = \lambda_0^t \cdot p(\lambda_0) = 0.$$

Če ima $p(\lambda)$ n enostavnih ničel, $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$, je vsaka rešitev oblike

$$y(t) = \alpha_0\lambda^t + \dots + \alpha_{n-1}\lambda_{n-1}^t.$$

1.3 Stabilnost

Definicija 1.8. Naj bo $\mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{f}(t, y_t)$ dan sistem in postavimo $t_0 = 0$. Rešitev \mathbf{y} je *stabilna*, če za $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: če je \mathbf{z} katerakoli druga rešitev, ki zadošča $|\mathbf{z}_0 - \mathbf{y}_0| < \delta \Rightarrow |\mathbf{z}_t - \mathbf{y}_t| < \varepsilon, t > 0$.

Rešitev je *asimptotsko stabilna*, če je stabilna in za $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: $|\mathbf{z}_0 - \mathbf{y}_0| < \delta, |\mathbf{z}_t - \mathbf{y}_t| < \varepsilon, t \geq 0$ in $\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{z}_t - \mathbf{y}_t| = 0$.

Za linearne sisteme:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{t+1} &= \mathbf{A}\mathbf{y}_t + \mathbf{b}_t \\ \mathbf{y}_n &= \mathbf{y}_{n,P} + \mathbf{A}^n\mathbf{y}_0, \quad \mathbf{y}_{0,P} = 0 \\ \mathbf{z}_n &= \mathbf{y}_{n,P} + \mathbf{A}^n\mathbf{z}_0 \\ |\mathbf{y}_n - \mathbf{z}_n| &= |\mathbf{A}^n(\mathbf{y}_0 - \mathbf{z}_0)| \leq \|\mathbf{A}\|^n \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{z}_0\| \end{aligned}$$

$\mathbf{y}_{n,P}$ je (asimptotsko) stabilna rešitev nehomogenega sistema $\iff \mathbf{0}$ je (asimptotsko) stabilna rešitev homogenega sistema. Torej: $\|\mathbf{A}\| < 1$: stabilnost.

2 Navadne diferencialne enačbe

Definicija 2.1. *Navadna diferencialna enačba* je vsaka enačba oblike

$$f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

Red najvišjega odvoda je *red* enačbe.

Cauchyjeva naloga za NDE n -tega reda je: reši

$$y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}) \quad (1)$$

pri pogoju

$$(x_0, y(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)) := (x_0, y_0, \dots, y_{n-1}) \in D_f.$$

Če f ni eksplicitno odvisna od x , se enačba imenuje *avtonomna*. Če f linearna v $y, \dots, y^{(n-1)}$, je enačba (1) linearna.

Definicija 2.2. Naj bo $D \subset \mathbb{R}^2$, odprta, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ dana funkcija in $(x_0, y_0) \in D$ začetni pogoj. Potem je funkcija y rešitev $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, na okolici x_0 , če $\exists \delta > 0$:

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $y(x_0) = y_0$.

3 Linearne diferencialne enačbe

3.1 LDE 1. reda

Enačba 1.

$$y' = f(x)y + g(x)$$

Naj bo x_0 izbrana točka. Potem je vsaka rešitev oblike

$$y = Ce^{\int_{x_0}^x f(t) dt} + y_p.$$

Prostor rešitve homogene enačbe $y' = f(x)y$ je 1-dimenzionalni vektorski prostor.

3.2 Bernoullijeva DE

Enačba 2.

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha.$$

Če $\alpha \in \{0, 1\}$, potem je BDE kar LDE. Če ni, se v LDE prevede s substitucijo $z = y^{1-\alpha}$.

3.3 Ricattijeva DE

Enačba 3.

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x), \quad a, b, c \in \mathcal{C}([a, b])$$

V splošnem ni rešljiva. Če pa eno rešitev imamo, npr. y_1 , s substitucijo $y = y_1 + z$ enačbo prevedemo na BDE za z .

3.4 LDE višjih redov s konstantnimi koeficienti

Definicija 3.1. *Nehomogena LDE n -tega reda s konstantnimi koeficienti je enačba oblike*

$$L(y) := y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x).$$

Če $f(x) \equiv 0$ je enačba homogena.

Trditev 3.1. Prostor rešitev enačbe $L(y) = 0$ je n -dimenzionalen vektorski prostor. Če je y_p rešitev enačbe

$$L(y_p) = f,$$

potem je vsaka druga rešitev te enačbe oblike

$$y = y_h + y_p,$$

kjer $L(y_h) = 0$.

4 Eksistenca, enoličnost, gladkost

4.1 Uvod

Izrek 4.1 (Lokalni eksistenčni izrek). Naj ob $y' = f(x, y)$ diferencialna enačba, $f \in \mathcal{C}((0, a) \times (0, b))$, f Lipschitzova na 2. spremenljivko pri fiksni prvi spremenljivki x s koeficientom $k(x)$, ki je lokalno integrabilna na $(0, a)$. Potem lahko za $\forall (x_0, y_0) \in (0, a) \times (0, b)$ obstaja natanko ena rešitev enačbe pri začetnem pogoju $y(x_0) = y_0$, ki je definirana na neki okolici x_0 .

Izrek 4.2 (Globalni eksistenčni izrek). Naj bo $y' = f(x, y)$ diferencialna enačba, $f \in \mathcal{C}([0, a] \times \mathbb{R})$, Lipschitzova na 2. spremenljivko pri fiksni 1. spremenljivki s konstanto $k(x)$, ki je integrabilna na $[0, a]$. Potem obstaja natanko ena rešitev enačba pri pogoju $y(0) = y_0$, ki je definirana na $[0, a]$.

4.2 Gladkost

Izrek 4.3. Cauchyjeva naloga:

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y, a), \quad a \in P \subset \mathbb{R}^n, \\y(s) &= t\end{aligned}$$

$\varphi(x, x_0, y_0)$ je rešitev zgornje Cauchyjeve naloge. Naj bo f gladka v vseh spremenljivkah. Potem je φ gladko odvisna od x, s, t, a .

5 Sistemi diferencialnih enačb

5.1 Uvod

Definicija 5.1. Naj bodo x, y_1, \dots, y_n realne spremenljivke in $f_i : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, realna funkcija. Sistem n diferencialnih enačb 1. reda je

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

V vektorski obliki:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}.$$

Sistem se prepiše v $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$. Cauchyjeva naloga:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' &= \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(x_0) &= \mathbf{y}_0 \end{aligned}$$

Če x v \mathbf{f} eksplicitno ne nastopa, se sistem imenuje *avtonomen*. Če je \mathbf{f} linearna v \mathbf{y} , je sistem *linearen* in pišemo

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x).$$

Če je $\mathbf{b} \equiv 0$, je sistem *homogen*.

5.2 Sistemi linearnih diferencialnih enačb

Posledica. Sistem

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x),$$

\mathbf{A}, \mathbf{b} zvezni na $[0, a]$, izpolnjuje predpostavke G.E.I.

Izrek 5.1. Naj bo

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$$

sistem n diferencialnih enačb 1. reda, \mathbf{A}, \mathbf{b} zvezni na $[0, a]$. Prostor rešitev homogene enačbe $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}$ je vektorski prostor dimenzije n . Vsaka rešitev nehomogenega je oblike

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_H + \mathbf{y}_P,$$

kjer je \mathbf{y}_H rešitev homogenega sistema, \mathbf{y}_P pa partikularna rešitev nehomogenega sistema.

6 Kvalitativna analiza

6.1 Uvod

Definicija 6.1. Naj bo $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ dan sistem enačb in $\varphi(x)$ njegova rešitev. Potem pravimo, da je φ *stabilna*, da za $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, da velja: če je ψ neka druga rešitev in je $\|\psi(0) - \varphi(0)\| < \delta$, potem

$$\|\psi(x) - \varphi(x)\| < \varepsilon, \quad x > 0.$$

Če je φ stabilna in za ψ , ki zadošča zgornjim pogojem, velja še

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \|\psi(x) - \varphi(x)\| = 0,$$

pravimo, da je φ *asimptotsko stabilna*.

Izrek 6.1. Naj bo $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ dan sistem in je \mathbf{A} matrika z lastnimi vrednostmi λ_i .

- (a) Če $\forall i : \Re(\lambda_i) < 0$ je vsaka rešitev asimptotsko stabilna.
- (b) Če $\exists i : \Re(\lambda_i) > 0$ so vse rešitve nestabilne.
- (c) Če $i < j : \Re(\lambda_i) = 0$ in je število lastnih vektorjev, ki pripadajo λ_i , enako njeni algebrajski večkratnosti in $i \geq j : \Re(\lambda_i) < 0$, je vsaka rešitev stabilna. Če $\exists i < j$, tako da algebrajska večkratnost ni enaka številu lastnih vektorjev ($\Re(\lambda_i) = 0$), potem je vsaka rešitev nestabilna.

Definicija 6.2. Naj bo $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ dan sistem in naj bo $\mathbf{v}_j = \mathbf{u}_j + i\mathbf{w}_j$ posplošeni lastni vektor (lastni ali korenski) za lastno vrednost λ_j . Definiramo:

- *Stabilni podprostor:*

$$E^s = \mathcal{L}\{\mathbf{u}_j, \mathbf{w}_j \in \mathbb{R}^n \mid \Re(\lambda_j) < 0\}$$

- *Nestabilni podprostor:*

$$E^n = \mathcal{L}\{\mathbf{u}_j, \mathbf{w}_j \in \mathbb{R}^n \mid \Re(\lambda_j) > 0\}$$

- *Centralni podprostor:*

$$E^c = \mathcal{L}\{\mathbf{u}_j, \mathbf{w}_j \in \mathbb{R}^n \mid \Re(\lambda_j) = 0\}$$

6.2 Stabilnost ravnovesnih rešitev

Definicija 6.3. Stacionarna točka \mathbf{y}_0 avtonomnega sistema $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, \mathbf{f} gladka, je *hiperbolična*, če ima

$$\mathbf{A} = \mathbf{Df}(\mathbf{y})$$

trivialen centralni prostor. Če \mathbf{y}_0 ni hiperbolična, je *nehiperbolična*.

Izrek 6.2. Naj bo $E \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica, ki vsebuje izhodišče in naj bo $\mathbf{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ razreda \mathcal{C}^2 . Označimo z $\varphi_x(t)$ rešitev, ki zadošča $\varphi_x(0) = x$ (tokovnica skozi x). Naj bo $\mathbf{0}$ hiperbolična stacionarna točka sistema in pišimo

$$\mathbf{A} = \mathbf{Df}(\mathbf{0}).$$

Obstaja $H : U \rightarrow V$, difeomorfizem reda \mathcal{C}^1 , U, V odprti okolici izhodišča, $H(0) = (0)$ tak, da velja: $\forall x_0 \in U$ obstaja odprt interval I_0 okoli 0, $I_0 \subset \mathbb{R}$ in velja

$$H \circ \varphi_{x_0} = e^{\mathbf{A}t} H(x_0).$$

Opomba. Če je \mathbf{f} zgolj razreda \mathcal{C}^1 , je H homeomorfizem.