Finančna matematika 1 - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar
po predavanjih profesorja Janeza Bernika

2020/21

Kazalo

1 FINANČNI INŠTRUMENTI

Definicija 1.1 (Obresti)**.** Naj bo T *časovni horizont* in R *obrestna mera.*

- Navadne obresti:
  - Obrestovalni faktor:
    $$A(0,T) = 1 + RT$$
  - Diskontni faktor:
    $$D(0,T) = \frac{1}{1+RT}$$
- Diskretno obrestovanje (kapitalizacija)
  $$A(0,1) = \left(1 + \frac{R_k}{k}\right)^k$$
- Zvezno obrestovanje:
  $$A(0,1) = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{R_k}{k}\right)^k = e^{Y\cdot 1}$$
- Efektivna obrestna mera:
  - Diskretno obrestovanje:
    $$Re = \left(1 + \frac{R_k}{k}\right)^k - 1$$
  - Zvezno obrestovanje:
    $$Re = e^y - 1$$

Vrednost 1 (Kuponska obveznica)**.**

$$P = \sum_{i=1}^{n-1} C_i \cdot D(0,t_i) + (C_n + N)D(0,t)$$

Vrednost 2 (Donos do dospetje (Yield to maturity))**.**

$$P \;=\; \sum_{i=1}^{n-1} \frac{C_i}{(1+y)^i} + \frac{C_n + N}{(1+y)^n}$$

Definicija 1.2 (Časovna struktura obrestnih mer)**.**

$$\begin{aligned} D(0,t) &= \frac{1}{1 + L(0,t)\cdot t} \\ D(0,t) &= e^{-Y_t \cdot t} \end{aligned}$$

Definicija 1.3 (Forward rate agreement)**.** Dogovor danes (v času 0) o obrestni meri za obdobje (t_1, t_2), $0 < t_1 < t_2$, z diskontnimi faktorji

$$D(0,t_2) \;=\; D(0,t_1)\cdot D(0,t_1,t_2)$$

Definicija 1.4 (Terminski posel)**.** Dogovorimo se v času 0 o ceni finančnega inštrumenta v času $t > 0$ (FRA je terminski posel za nekuponske obveznice). Terminska cena (Forward price):

$$F(t_1) \;=\; \frac{S_0}{D(0,t_1)}$$

Vrednost 3 (Convenience yield)**.**

$$F_T \;=\; \frac{S_0 \cdot D_{dollar}(0,T)}{D_{euro}(0,T)} \;=\; S_0 \cdot e^{-\left(Y^{(t)}_{euro} - Y^{(t)}_{dollar}\right)\cdot t}$$

Definicija 1.5 (Opcija)**.**

- Nakupna opcija:

$$C_T \;=\; (S_T - K)^+ \;=\; \max\{S_T - K, 0\}$$

- Prodajna opcija:

$$P_T \;=\; (K - S_T)^+ \;=\; \max\{K - S_T, 0\}$$

Tržne cene ameriških opcij:

$$\begin{aligned} c_t &\geq C_t \\ p_t &\geq P_t \end{aligned}$$

Časovna vrednost opcije:

$$\begin{aligned} &c_t - C_t \\ &p_t - C_t \end{aligned}$$

Trditev 1.1.

$$\max\{S_t - D(t,T) \cdot K, 0\} \;\leq\; c_t^e \;\leq\; c_t^a \;\leq\; S_t$$

Trditev 1.2. Če ni dividend na osnovno premoženje a $[t, T]$, je

$$p_t^e + S_t \;=\; c_t^e + K \cdot D(t,T)$$

Za ameriške opcije velja:

$$c_t^a + D(t,T) \cdot K \;\leq\; p_t^a + S_t \;\leq\; c_t^a + K$$

po predpostavki, da do T ni dividend. Velja le, če $D(t,T) < 1$ in je $D(t,S)$, $0 \leq S \leq T$, padajoča funkcija.

2 ENODOBNI MODEL TRGA

Definicija 2.1 (Matrika izplačil)**.** $K \times N$ matrika, i-ti stolpec je vektor izplačil v času t_1 za A_i

$$M = \begin{bmatrix} S_1(\omega_1) & \cdots & S_i(\omega_1) & \cdots & S_N(\omega_1) \\ \vdots & & & & \vdots \\ S_1(\omega_k) & \cdots & S_i(\omega_k) & \cdots & S_N(\omega_k) \end{bmatrix}$$

Definicija 2.2. Vrednostni papir A_i:

- Netvegan, če je $S_i(\omega_j) = S_i(\omega_l)\ \forall j, l = 1, \ldots, K$. Izplačilo je konstantno, ne glede na stanje ekonomije v času t_1
- Tvegan, če obstajata stanji ω_j in ω_l, da je $S_i(\omega_j) \neq S_i(\omega_l)$

Vrednost 4.

- V času t_0:

$$V_0 = \sum_{i=1}^{N} c_i \cdot \vartheta_i = \langle c, \vartheta \rangle$$

- V času t_1 (slučajna spremenljivka):

$$V_1 = \sum_{i=1}^{N} \vartheta \cdot S_i = M \cdot \vartheta = \begin{bmatrix} V_1(\omega_1) \\ \vdots \\ V_1(\omega_k) \end{bmatrix}$$

Definicija 2.3 (Arbitražni portfelj)**.** Portfelj ϑ je *arbitražni*, če je $V_0(\vartheta) \leq 0$ in je $V_1(\vartheta)$ pozitiven vektor, ki ima vsaj eno komponentno strogo pozitivno.

Na trgu ne obstaja arbitražna priložnost, če ne obstaja arbitražni portfelj.

Definicija 2.4 (Pogojna terjatev)**.** Pogojna terjatev je slučajna spremenljivka $X : \Omega \to \mathbb{R}$, ki jo lahko podamo z vektorjem $\begin{bmatrix} X(\omega_1) \\ \vdots \\ X(\omega_k) \end{bmatrix}$

Če obstaja portfelj ϑ tak, da je

$$X \;=\; V_0(\vartheta) \quad \text{oz.} \quad X(\omega_j) \;=\; V_1(\vartheta)(\omega_j)\ \forall j$$

je X *dosegljiva* pogojna terjatev. V tem primeru je ϑ *izvedbeni* portfelj.

Definicija 2.5 (Popoln model trga)**.** Trg, ki zadošča našim predpostavkam (ni trenj, vsi enako informirani,...) in v katerem ne obstaja arbitražni portfelj, imenujemo *popoln model trga.*

Definicija 2.6 (Zakon ene cene)**.** Na našem modela velja *zakon ene cene*, če za dva izvedbena portfelja ϑ_1, ϑ_2 za pogojno terjatev X nujno velja

$$V_0(\vartheta_1) \;=\; V_0(\vartheta_2).$$

Trditev 2.1. Trg je *popoln.* $\Longrightarrow$ Velja *zakon ene cene.*

Definicija 2.7. Trg je *poln*, če je vsaka pogojna terjatev dosegljiva.

Definicija 2.8 (Cenovni funkcional)**.** Denimo, da na našem modelu trga velja *zakon ene cene.* potem lahko definiramo linearni funkcional $R_0 : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, s predpisom

$$\Pi_o(x) \;=\; V_0(\vartheta),$$

kjer je ϑ izvedbeni portfelj za X.

Trditev 2.2. Za dani model trga (vse predpostavke razen popolnosti) so ekvivalentne naslednje trditve:

- Ne obstaja arbitražni portfelj (popoln trg).
- Za vsak portfelj ϑ tak, da je $V_1(\vartheta) \geq 0$ in $V_i(\vartheta) \neq 0$ je $V_0(\vartheta) > 0$.
- Ne obstaja pozitivna dosegljiva pogojna terjatev X z izvedbenim portfeljem ϑ, da je $V_0(\vartheta) = 0$.
- Cenovni funkcional Π je krepko pozitiven.

Definicija 2.9 (Numerar)**.** *Numerar* je tak vrednostni papir A_i, da je $S_i(\omega_j) > 0$, $\forall j = 1, \ldots, K$.

Definiramo:

- Relativne cene:
$$\tilde{C}_k = \frac{C_k}{C_i}$$
- Relativne donose:
$$\tilde{S}_k(\omega_j) = \frac{S_k(\omega_j)}{S_i(\omega_j)}$$

Vrednost portfelja:

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_0(\vartheta) &= \langle \tilde{C}, \vartheta \rangle \\
\tilde{V}_1(\vartheta) &= \langle \tilde{S}, \vartheta \rangle
\end{aligned}$$

$(\tilde{V}_0(\vartheta), \tilde{V}_1(\vartheta))$ je *diskontirani* vrednostni proces za ϑ glede na A_i.

Definicija 2.10 (Martingal)**.** Diskontirani vrednostni proces $(\tilde{V}_0(\vartheta), \tilde{V}_1(\vartheta))$ je *martingal* glede na neko verjetnost Q na Ω, če velja

$$\mathbb{E}_Q(\tilde{V}_1(\vartheta)) = \tilde{V}_0(\vartheta).$$

Izrek 2.1 (1. osnovni izrek vrednotenja premoženja)**.** Naj bo dan enodobni model trga (z vsemi predpostavkami razen neobstoja arbitraže). A_1 naj bo *numerar.* Potem je trg brez arbitraže (popoln) natanko tedaj, ko na Ω obstaja ekvivalentna verjetnost Q taka, da je diskontiran osnovni proces za vsak A_i, $1 \leq i \leq N$, *martingal* glede na Q.

$$\tilde{C}_i \;=\; \mathbb{E}_Q(\tilde{S}_i),\; i = 1, \ldots, N \quad \Longrightarrow \quad \tilde{V}_0(\vartheta) \;=\; \tilde{V}_1(\vartheta)\; \forall \vartheta.$$

Izrek 2.2 (2. osnovni izrek vrednotenja premoženja)**.** Če je trg *popoln*, torej za dan A_1 obstaja ekvivalentna martingalska verjetnost Q, je ta enolična natanko tedaj, ko je trg *poln.*

3 VEČOBDOBNI MODEL TRGA

Definicija 3.1. Če je $\mathcal{F}_0$ generirana z atomi (najmanjša neprazna množica, ki je še v $\mathcal{F}_t$) $A_1^t, \ldots, A_{k_t}^t$, je $\mathcal{F}_t$ *merljiva* natanko tedaj, ko je konstantna na vsakem od atomov A_j^t, $1 \leq j \leq k_t$. ($\mathcal{F}_t$ merljiva $\Longleftrightarrow$ poznana v času t)

Definicija 3.2. Zaporedje $V = (V_0, V_1, \ldots, V_T)$ je *prilagojen proces* filtraciji $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_T)$, če je V_t *merljiva* glede na $\mathcal{F}_t$, za $0 \leq t \leq T$. V posebnem primeru, ker je $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, je potem V_0 konstantna.

Definicija 3.3. Proces $(V_0, \ldots, V_T)$ je *napovedljiv*, če je V_t merljiva glede na $\mathcal{F}_{t-1}$, $t = 1, \ldots, T$, V_0 pa konstantna. To pomeni: če je proces *napovedljiv*, vem v času $t-1$, kaj bo v času t.

Trditev 3.1. Za vsak dinamični portfelj imamo:

- Likvidacijsko vrednost v času t:

$$V_t^L(\vartheta) \ = \ \sum_{j=1}^{N} \vartheta_t^j \cdot S_t^j \quad (V_t^L)_{t=0}^{S} \text{ je prilagojen}$$

- Nabavno vrednost v času t:

$$V_t^A(\vartheta) \ = \ \sum_{j=1}^{N} \vartheta_{t+1}^j \cdot S_t^j \quad (V_t^A)_{t=1}^{N-1} \text{ je prilagojen}$$

Definicija 3.4 (Strategija samofinanciranje)**.** *Strategija samofinanciranja* je taka trgovalna strategija $(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_S)$, $S \leq T$, za katero je

$$V_t^L(\vartheta) \ = \ V_t^A(\vartheta), \quad 1 \leq t \leq S-1.$$

To pomeni, da v vmesnem času od 0 do S ni vmesnih denarnih tokov, ne pozitivnih, ne negativnih. Tedaj govorimo kar o $(V_t(\vartheta))_{t=0}^{T}$ kot vrednostnem procesu strategije samofinanciranja.

Definicija 3.5. Atom za $\mathcal{F}_k$ je najmanjša podmnožica Ω, za katero lahko v času k povemo, ali se je zgodila ali ne.

Definicija 3.6. Če imamo dano filtracijo $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}_T$ je $(X_i)_{i=0}^T$ *prilagojen* tej filtraciji, če je X_i $\mathcal{F}_i$-merljiva, $\forall i \in \{0, \ldots, T\}$ (torej je X_i konstantna na atomih, ki generirajo $\mathcal{F}_i$). $(S_i)_{i=0}^T$ je *prilagojen* $\forall j = 1, \ldots, K$.

Definicija 3.7. $(Y_i)_{i=0}^T$ je *predvidljiv*, če je Y_i $\mathcal{F}_i$-merljiv za $\forall i > 1$ in Y_0 konstantna.

Trditev 3.2.
Zakon ene cene velja za dospelost $T \iff$ velja za vse dospelosti $1 \leq S \leq T$.

Definicija 3.8 (Arbitražni portfelj)**.** Strategija samofinanciranja ϑ z dospelostjo S je *arbitražna strategija*, če

$$V_0^A(\vartheta) = V_0(\vartheta) \leq 0, \quad V_i(\vartheta) \geq 0,\ 1 \leq i \leq S \quad \text{in} \quad V_S(\vartheta) \neq 0.$$

Trditev 3.3. Ne obstaja arbitražna strategija z dospelostjo $T \iff$ ne obstaja za dospelost S, $1 \leq S \leq T$.

Trditev 3.4. Trg je *popoln* $\Longrightarrow$ velja *zakon ene cene.*

Izrek 3.1. Na trgu ni arbitraže (z dospelostjo S) $\iff$ Π_S strogo ($X_S \in \mathcal{M}_S$, $X_S \geq 0$ in $X_S \neq 0 \ \Rightarrow\ \Pi_S(X_S) > 0$).

$$\Pi_S : \mathcal{M}_S \to \mathbb{R}, \quad \Pi_S(X_S) \ = \ V_0(\vartheta); \quad \vartheta \text{ izvedbena strategija za } X_S.$$

Trditev 3.5. Trg je *poln* za dospelost $T \iff$ poln je za vse ostale dospelosti.

Izrek 3.2. Denimo, da velja *zakon ene cene.* Potem na trgu ni arbitraže $\iff$ cenovni funkcional Π_S ima krepko pozitivno rešitev $\tilde{\Pi}_S$ na $\mathcal{L}_S(\Omega)$ (ni enolična, če trg ni *poln*).

Definicija 3.9 (Martingal)**.** Filtriran verjetnostni prostor. Prilagojen proces $(X_i)_{i=1}^T$ je *martingal* glede na $\mathcal{F}_i$ in P, če je

$$X_i \;=\; \mathbb{E}(X_{i+1} \mid \mathcal{F}_i), \quad i = 0, \ldots, T-1 \quad (\mathcal{F}_0 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}_t).$$

Trditev 3.6 (Stolpna lastnost)**.** $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_j$:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_T \mid \mathcal{F}_j) \mid \mathcal{F}_i) \;=\; \mathbb{E}(X_T \mid \mathcal{F}_i)$$

Definicija 3.10 (Submartingal)**.** Prilagojen proces $(X_i)_{i=1}^T$ je *podmartingal (submartingal)*, če velja

$$X_i \;\leq\; \mathbb{E}(X_{i+1} \mid \mathcal{F}_i), \quad i = 0, \ldots, T-1.$$

Definicija 3.11 (Supermartingal)**.** Prilagojen proces $(X_i)_{i=1}^T$ je *nadmartingal (supermartingal)*, če velja

$$X_i \;\geq\; \mathbb{E}(X_{i+1} \mid \mathcal{F}_i), \quad i = 0, \ldots, T-1.$$

Trditev 3.7 (Doobova dekompozicija)**.** Naj bo $(X_n)_{n=0}^T$ prilagojen proces glede na $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^T$. Potem obstaja martingal $(M_n)_{n=0}^T$ in predvidljiv proces $(A_n)_{n=0}^T$, taka da je

$$X_n \;=\; M_n + A_n, \quad m = 0, \ldots, T.$$

Če zahtevamo še $A_0 = 0$, potem je ta dekompozicija enolična.

Trditev 3.8. Q je ekvivalentna martingalska verjetnost $\iff$ diskontirani vrednostni procesi samofinancirajočih strategij so martingali.

Izrek 3.3 (1. osnovni izrek vrednotenja premoženja)**.** Obstoj ekvivalentne martingalske verjetnosti pri vsakem numerarju je ekvivalenten pogoju, da je trg brez arbitraže.

Izrek 3.4 (2. osnovni izrek vrednotenja premoženja)**.** Če je trg popoln (torej ne obstaja arbitraža), potem je pri izbranem numerarju ekvivalentna martingalska verjetnost ena sama natanko tedaj, ko je trg poln.