Finančni praktikum - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar
po predavanjih profesorja Janeza Bernika

2021/22

Kazalo

1 Uvodna predavanja

6. oktober

Definicija 1.1. Z obratno indukcijo definiramo

$$\begin{aligned} U_T &= V_T, \\ U_t &= \max\{V_t, \max_{\tau \in S_{t,T}} \mathbb{E}(V_t \mid \mathcal{F}_t)\}. \end{aligned}$$

Slučajni proces $(U_t)_{t=0}^T$ imenujemo *Snellova ovojnica* za $(V_t)_{t=0}^T$.

7. oktober

Definicija 1.2. $X_n \xrightarrow{(d)} X \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ za vsako zvezno omejeno funkcijo $f : R^m \to \mathbb{R}$ velja

$$\mathbb{E}[f(X_n)] \longrightarrow \mathbb{E}[f(X)].$$

Za $m = 1$ je ekvivalentno

$$F_{X_n}(x) \longrightarrow F_X(x),$$

za $\forall x$, kjer je F_X zvezna.

Trditev 1.1. Naj bo $X_n \sim \mathrm{Bin}(n, p_n)$. Če $\exists \lim_{n\to\infty} n \cdot p_n = \lambda > 0$, potem zaporedje limitira v porazdelitvi k $\mathrm{Poi}(\lambda)$:

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \mathrm{Poi}(\lambda).$$

Dokaz. Ideja: dokazati moramo

$$\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(\mathrm{Poi}(\lambda) = k).$$

□

Definicija 1.3. *Karakteristično funkcijo* slučajne spremenljivke X definiramo kot

$$\varphi_{X_n}(t) \;=\; \mathbb{E}[e^{itX}].$$

Izrek 1.1 (Lévyjev izrek)**.** $X_n \xrightarrow{(d)} X \iff \varphi_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi_X(t)$ po točkah.

13. oktober

Definicija 1.4. *Rodovno funkcijo* slučajne spremenljivke X definiramo kot

$$G_X(t) \;=\; \mathbb{E}[t^X].$$

Definicija 1.5. *Momentno rodovno funkcijo* slučajne spremenljivke X definiramo kot

$$M_X(t) \;=\; \mathbb{E}[e^{tX}].$$

Trditev 1.2. Če za slučajno spremenljivko X obstaja karakteristična, rodovna ali momentno rodovna funkcija, potem enolično določa njeno porazdelitev.

Definicija 1.6. Neka porazdelitev slučajne spremenljivke X je *neskončno deljiva*, če $\forall n \geq 1$ obstajajo neodvisne in slučajno porazdeljene slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_n$, da

$$X \;\sim\; X_1 + \ldots + X_n.$$

Primeri neskončno deljivih slučajnih porazdelitev:

- Poissonova
- Normalna
- Gamma

- Negativna binomska

Definicija 1.7 (Negativna binomska porazdelitev)**.** Naj bo $X \sim \mathrm{Poi}(\Lambda)$ in $\Lambda \sim \mathrm{Gamma}(a, c)$. Potem je

$$\mathbb{P}(X = k) \;=\; \mathbb{E}[\mathbb{P}(X = k \mid \Lambda)] \;=\; \frac{c}{(c+1)^k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$