

Numerične metode 1 - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar

2020/21

Kazalo

1	NUMERIČNO RAČUNANJE	3
1.1	Uvod	3
1.2	Premična pika	3
1.3	Občutljivost problema	4
1.4	Vrste napak pri numeričnem računanju	4
1.5	Stabilnost metode	5
1.6	Analiza zaokrožitvenih napak	5
1.6.1	Produkt $n + 1$ predstavljivih števil	5
1.6.2	Skalarni produkt vektorjev dolžine n	6
2	NELINEARNE ENAČBE	7
2.1	Uvod	7
2.2	Bisekcija	7
2.3	Navadna iteracija	8

1 NUMERIČNO RAČUNANJE

1.1 Uvod

Definicija 1.1 (Napaka). Pri numeričnem računanju izračunamo numerični približek za točno rešitev. Razlika med približkom in točno vrednostjo je *napaka* približka. Ločimo *absolutno* in *relativno* napako.

- absolutna napaka = približek – točna vrednost
- relativna napaka = $\frac{\text{absolutna napaka}}{\text{točna vrednost}}$

Naj bo x točna vrednost, \hat{x} pa približek za x .

- Če je $\hat{x} = x + d_a$, potem je $d_a = \hat{x} - x$ *absolutna napaka*.
- Če je $\hat{x} = x(1 + d_r)$, potem je $d_r = \frac{\hat{x} - x}{x}$ *relativna napaka*.

1.2 Premična pika

Definicija 1.2. Velja $\text{fl}(x) = x(1 + \delta)$ za $|\delta| \leq u$, kjer je

$$u = \frac{1}{2}b^{1-t}$$

osnovna zaokrožitvena napaka:

- single: $u = 2^{-24} = 6 \times 10^{-8}$
- double: $u = 2^{-53} = 1 \times 10^{-16}$

Izrek 1. Če za število x velja, da $|x|$ leži na intervalu med najmanjšim in največjim *pozitivnim predstavljivim normaliziranim številom*, potem velja

$$\frac{|\text{fl}(x) - x|}{|x|} \leq u.$$

1.3 Občutljivost problema

Definicija 1.3 (Občutljivost). Če se rezultat pri majhni spremembi argumentov (*motnji* oz. *perturbaciji*) ne spremeni veliko, je problem *neobčutljiv*, sicer pa je *občutljiv*.

1.4 Vrste napak pri numeričnem računanju

Definicija 1.4. Pri numeričnem računanju se pojavijo 3 vrste napak:

1. NEODSTRANLJIVE NAPAKE: Npr. ko podatek ni predstavljivo število. Namesto $y = f(x)$ lahko v najboljšem primeru izračunamo $\bar{y} = f(\bar{x})$, kjer je \bar{x} najbližje predstavljivo število.

$$D_n = y - \bar{y} = f(x) - f(\bar{x})$$

2. NAPAKA METODE: Npr. ko na voljo nimamo željene operacije. Namesto $f(\bar{x})$ potem izračunamo $\tilde{y} = g(\bar{x})$, kjer je $g(x)$ približek za $f(x)$, kjer znamo vrednost g izračunati s končnim številom operacij.

$$D_m = \bar{y} - \tilde{y} = f(\bar{x}) - g(\bar{x})$$

3. ZAOKROŽITVENE NAPAKE: Pri izračunu $\tilde{y} = g(\bar{x})$ lahko pri vsaki osnovni operaciji pride do zaokrožitvene napake, zato na koncu kot numeričen rezultat dobimo \hat{y} .

$$D_z = \tilde{y} - \hat{y}$$

Skupna napaka:

$$D = D_n + D_m + D_z$$

V splošnem lahko ocenimo:

$$|D| \leq |D_n| + |D_m| + |D_z|$$

1.5 Stabilnost metode

Definicija 1.5. Če metoda za $\forall x$ vrne \hat{y} , ki je *absolutno (relativno)* blizu točnemu y , je metoda *direktno stabilna*.

Če metoda za $\forall x$ vrne tak \hat{y} , da $\exists \hat{x}$ absolutno (relativno) blizu x , da je $\hat{y} = f(\hat{x})$ (točno), je metoda *obratno stabilna*.

V splošnem:

$$|\text{direktna napaka}| \leq |\text{občutljivost}| \cdot |\text{obratna napaka}|$$

1.6 Analiza zaokrožitvenih napak

1.6.1 Produkt $n + 1$ predstavljivih števil

Algoritem. Dana so predstavljiva števila x_0, x_1, \dots, x_n ; računamo $p = x_0 \cdot x_1 \cdot \dots \cdot x_n$.

TOČNO:

```
p0 = x0
i = 1, ..., n
    pi = pi-1 · xi
p = pn
```

NUMERIČNO:

```
 $\hat{p}_0 = x_0$ 
 $i = 1, \dots, n$ 
     $\hat{p}_i = \hat{p}_{i-1} \cdot x_i \cdot (1 + \delta_i) \quad |\delta_i| \leq u$ 
 $\hat{p} = \hat{p}_n$ 
```

1.6.2 Skalarni produkt vektorjev dolžine n

Algoritem. Imamo vektorje *predstavljivih* števil $a = [a_1, \dots, a_n]^T$, $b = [b_1, \dots, b_n]^T$. Računamo $s = \langle b^T, a \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$.

TOČNO:

```
s0 = 0
i = 1, ..., n
    pi = ai · bi
    si = si-1 + pi
s = sn
```

NUMERIČNO:

```
ŝ0 = 0
i = 1, ..., n
    p̂i = ai · bi · (1 + αi)    |αi| ≤ u
    ŝi = (ŝi-1 + p̂i) · (1 + βi)  |βi| ≤ u
ŝ = ŝn
```

Trditev 1. Računanje skalarnega produkta je *obratno* stabilno, ni pa *direktno* stabilno.

2 NELINEARNE ENAČBE

2.1 Uvod

Definicija 2.1. Naj bo α ničla funkcije f , ki je *zvezno odvedljiva* v okolici α :

- $f'(\alpha) \neq 0$: α je *enostavna* ničla
- $f'(\alpha) = 0$: α je *večkratna* ničla

Če je f m -krat zvezno odvedljiva in

$$f'(\alpha) = f''(\alpha) = \dots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0, \quad f^{(m)} \neq 0,$$

je α m -kratna ničla.

Trditev 2 (Občutljivost ničel). Naj bo α enostavna ničla. Če v okolici $x = \alpha$ obstaja inverzna funkcija $\alpha = f^{-1}(0)$ v bistvu "računamo" vrednost inverzne funkcije. Občutljivost je enaka absolutni vrednosti odvoda inverzne funkcije:

$$|(f^{-1})'(0)| = \frac{1}{|f'(f^{-1}(0))|} = \frac{1}{|f'(\alpha)|}.$$

Večkratno ničlo lahko izračunamo le z natančnostjo $u^{\frac{1}{m}}$, kjer je m večkratnost ničle (za dvojno ničlo dobimo le polovico točnih decimal, za trojno le tretjino...).

2.2 Bisekcija

Izrek 2. Če je f realna zvezna funkcija na $[a, b]$ in je $f(a) \cdot f(b) < 0$, potem $\exists \xi \in (a, b)$, da je $f(\xi) = 0$.

Algoritem (Bisekcija). Naj velja $f(a) \cdot f(b) < 0$ in $a < b$:

```
e = b - a
while e > ε
    e = e/2, c = a + e
    if sign(f(c)) = sign(f(a))
        a = c
    else
        b = c
```

2.3 Navadna iteracija

Algoritem (Navadna iteracija).

```
izberi  $x_0$ 
 $r = 0, 1, 2, \dots$ 
     $x_{r+1} = g(x_r)$ 
```

Ustavitveni kriterij:

- a) $r > r_{max}$ (prekoračeno število korakov)
- b) $|r_{x+1} - r_x| < \varepsilon$

Izrek 3. Naj bo $\alpha = g(\alpha)$ in naj iteracijska funkcija g na intervalu $I = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ za nek $\delta > 0$ zadošča Lipschitzovem pogoju

$$|g(x) - g(y)| \leq m|x - y| \quad \text{za } x, y \in I, 0 \leq m < 1.$$

Potem za $\forall x_0 \in I$ zaporedje $x_{r+1} = g(x_r)$, $r = 0, 1, \dots$ konvergira k α in velja

- $|x_r - \alpha| \leq m^r \cdot |x_0 - \alpha|$
- $|x_{r+1} - \alpha| \leq \frac{m}{1-m} \cdot |x_{r+1} - x_r|$

Posledica. Naj bo $\alpha = g(\alpha)$, g zvezno odvedljiva in $|g'(\alpha)| < 1$. Potem $\exists \delta > 0$, da za $\forall x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ zaporedje $x_{r+1} = g(x_r)$ konvergira k α .

Definicija 2.2. Naj zaporedje $\{x_r\}$ konvergira proti α ($\lim_{r \rightarrow \infty} x_r = \alpha$). Pravimo, da zaporedje konvergira z redom konvergence p , če obstaja limita

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{|x_{r+1} - \alpha|}{|x_r - \alpha|^p} = C > 0.$$

Izrek 4. Naj bo iteracijska funkcija g p -krat zvezno odvedljiva v okolici negibne točke α . Če velja $g'(\alpha) = \dots = g^{(p-1)}(\alpha) = 0$ in $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$, potem zaporedje $x_{r+1} = g(x_r)$, $r = 0, 1, \dots$, v okolici α konvergira z redom p . V primeru $p = 1$ mora za konvergenco veljati še $|g'(\alpha)| < 1$.