Numerične metode 2 - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar
po predavanjih profesorice Marjetke Knez

2020/21

Kazalo

1 Teorija aproksimacije

Definicija 1.1 (Aproksimacijska shema)**.** Z X označimo (realni) vektorski prostor, katerega elemente želimo aproksimirati, $S \subseteq X$ označuje podprostor oz. podmnožico, v kateri iščemo aproksimant. *Aproksimacijska shema* je operator $\mathcal{A} : X \to S$, ki vsakemu elementu $f \in X$ priredi aproksimacijski element $\tilde{f} = \mathcal{A}f \in S$.

Definicija 1.2 (Optimalni aproksimacijski problem)**.** Naj bo X vektorski prostor z normo $\| \bullet \|$, $S \subseteq X$. Za $f \in X$ iščemo $\tilde{f} \in S$, da je

$$\|f - \tilde{f}\| \;=\; \inf_{s \in S} \|f - s\| \;=:\; \mathrm{dist}(f, S).$$

Definicija 1.3. Recimo, da je $S = S_n$, kjer je n dimenzija. Zanima nas, ali za $f \in X$ in $\tilde{f}_n \in S_n$ napaka $\|f - \tilde{f}_n\|$ konvergira proti 0, ko gre $n \to \infty$. Če je to res, je aproksimacijska shema *konvergentna*.

Če gledamo zaporedje podprostorov $S_n \subset X$, mora veljati, da z večanjem svobodnih parametrov postane S_n gost v X. Za polinome to sledi iz Weierstrassovega izreka.

Izrek 1 (Weierstrassov izrek)**.** Naj bo $f \in \mathcal{C}([a, b])$ poljubna funkcija. Potem $\forall \varepsilon > 0$ obstaja polinom p, da je

$$\|f - p\|_{\infty,\ [a,b]} \;<\; \varepsilon.$$

Drugače povedano:

$$\mathrm{dist}_\infty(f, \mathbb{P}_n) \;\xrightarrow{n \to \infty}\; 0.$$

Definicija 1.4 (Bernsteinov polinom)**.**

$$\mathcal{B}_n f(x) \;=\; \sum_{i=0}^{n} f(\frac{i}{n}) \cdot B_i^n(x),$$

kjer je B_i^n *Bernsteinov bazni polinom*:

$$B_i^n(x) \;:=\; \binom{n}{i} x^i (1 - x)^{n-1}, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

Da se pokazati, da gre $\|f - \mathcal{B}_f\|_{\infty,\ [0,1]} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Bernsteinov aproksimacijski polinom nam poda en možen način aproksimacije funkcije f (na $[0,1]$).

Definicija 1.5 (Bernsteinov aproksimacijski operator)**.**
$\mathcal{B}_n : \mathcal{C}([a,b]) \to \mathbb{P}_n,\ \ f \mapsto \mathcal{B}_n f$:

$$\mathcal{B}_n f(x) \ = \ \sum_{i=0}^{n} f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) \cdot B_i^n(\frac{x-a}{b-a})$$

$$\|f - \mathcal{B}_n f\|_{\infty,\ [a,b]} \ = \ \max_{x\in[a,b]} |f(x) - \mathcal{B}_n f(x)|$$

2 Enakomerna aproksimacija zveznih funkcij s polinomi

Problem 2.1. Za dano $f \in \mathcal{C}([a,b])$ iščemo polinom $p^* \in \mathbb{P}_n$, za katerega velja

$$\|f - p^*\|_{\infty,\ [a,b]} \;=\; \min_{p\in\mathbb{P}_n} \|f - p\|_{\infty,\ [a,b]} \;=\; \min_{p\in\mathbb{P}_n} \max_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)|.$$

Ta problem sodi pod optimalne aproksimacijske probleme. Polinom p^* imenujemo *polinom najboljše enakomerne aproksimacije*[1] za f na $[a,b]$. Problem je nelinearen.

Izrek 2. Naj bo $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Če je polinom $p \in \mathbb{P}_n$ takšen, da *residual* $r = f - p$ doseže svojo normo $\|r\|_{\infty,\ [a,b]}$ alternirajoče v vsaj $n+2$ točkah $x_i \in [a,b]$, $a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} \le b$, potem je p *p.n.e.a.* za f na $[a,b]$.

Natančneje: Če obstaja $n+2$ točk $x_i \in [a,b]$, da je $\|r\|_{\infty,[a,b]} = |r(x_i)|$ za $i = 0,1,\ldots,n+1$, in $r(x_i)\cdot r(x_{i+1}) < 0$ za $i = 0,1,\ldots,n$, potem je $p \in \mathbb{P}_n$ *p.n.e.a.* za f na $[a,b]$.

Definicija 2.1. Naj bo $E = \{x_i;\ a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} \le b\}$. Definirajmo *minimaks* za f na E:

$$M_n(f,E) \;=\; \min_{p\in\mathbb{P}_n} \max_{x\in E} |f(x) - p(x)|$$

Polinom, pri katerem je ta minimum dosežen, imenujemo *p.n.e.a.* za f na množici E. Dobimo ga tako, da rešimo sistem linearnih enačb:

$$f(x_i) - p(x_i) \;=\; (-1)^i m, \quad i = 0,1,\ldots,n+1$$

kjer so neznanke koeficienti polinoma p ter število m.[2]

[1] Od tu naprej *p.n.e.a.*

[2] Imamo $n+2$ enačb za $n+2$ neznank.

Algoritem (Remesov postopek)**.** Vhodni podatki: funkcija f, interval $[a, b]$, stopnja n, toleranca ε

Ponavljaj $k = 0, 1, 2, \ldots$

1. Poišči polinom ${p_k}^* \in \mathbb{P}_n$, ki zadošča pogojem

$$f(x_i) - {p_k}^*(x_i) \;=\; (-1)^i m, \quad i = 0, 1, \ldots, n+2$$

2. Poišči ekstrem residuala $r_l = f - {p_k}^*$, torej poišči $u \in [a, b]$, da bo

$$|r_k(u)| \;=\; \|r_k\|_{\infty,\ [a,b]}$$

3. Če je $|r_k(u)| - |m| < \varepsilon$, potem končaj in vrni $p^* = {p_k}^*$.

Opomba. Da se dokazati, da zaporedje polinomov, ki ga tvori Remesov postopek konvergira proti *p.n.e.a.* p^*. Hitrost konvergence je *linearna*.

3 Aproksimacija po metodi najmanjših kvadratov

Definicija 3.1. Naj bo X vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ s skalarnim produktom $\langle \bullet, \bullet \rangle$, s kvadratno normo $\| \bullet \|_2 = \sqrt{\langle \bullet, \bullet \rangle}$. $S \subseteq X$ je končnodimenzionalen podprostor v X, definiran kot

$$S = \mathcal{L}in\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}, \quad \dim S = n.$$

Za izbran $f \in X$ iščemo $f* \in S$, da velja

$$\|f - f^*\|_2 = \min_{s \in S} \|f - s\|_2.$$

f^* imenujemo *element najboljše aproksimacije po metodi najmanjših kvadratov.*[3]

Izrek 3. Naj bo $S \subseteq X$. Element $f^* \in S$ je element najboljše aproksimacije po MNK za $f \in X$ natanko tedaj, ko je $f - f^* \perp S$.

Posledica. Iz izreka sledi konstrukcija. Naj bodo $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ baza podprostora S.

$$f^* = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j,$$

$(\alpha_j)_{j=1}^n$ so neznani koeficienti. Veljati mora $f - f^* \perp S$, torej $f - f^* \perp \varphi_i$ $\forall i = 1, 2, \dots, n$. Na podlagi tega dobimo

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle & \cdots & \langle \varphi_n, \varphi_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \varphi_1, \varphi_n \rangle & \cdots & \langle \varphi_n, \varphi \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, \varphi_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, \varphi_n \rangle \end{bmatrix}.$$

Ta sistem enačb imenujemo *Gramov* oz. *normalni sistem.* Numerilno ta sistem rešimo z razcepom Choleskega. Levo matriko imenujemo *Gramova matrika.* Gramova matrika $G = (\langle \varphi_j, \varphi_i \rangle)_{i,j=1}^n$ je *simetrična pozitivno definitna* matrika.

[3] *e.n.a. po MNK*

Algoritem (Gram-Schmidt)**.** Vhodni podatki: baza $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$.
Izhod: Ortonormirana baza $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$.

```
for i = 1:n
        φ_i = ψ_i
end
for i = 1:n
        φ_i = φ_i / ||φ_i||_2
        for j = i+1:n
                φ_j = φ_j - ⟨φ_j, φ_i⟩φ_i
        end
end
```

4 Interpolacija

Problem 4.1. Podane so vrednosti izbrane funkcije f v $n+1$ paroma različnih točkah $x_0, x_1, \ldots, x_n$ na realni osi[4], iščemo pa neko preprostejšo funkcijo g, ki zadošča pogojem

$$f(x_i) \;=\; g(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Problem 4.2 (Polinomska interpolacija)**.** Imejmo funkcijo $f \in \mathcal{C}([a,b])$ in zaporedje točk
$a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$. Iščemo polinom $p = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{P}_n$, ki zadošča pogojem

$$p(x_i) \;=\; f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

4.1 Lagrangeeva oblika zapisa interpolacijskega polinoma

Definicija 4.1 (Lagrangeevi bazni polinomi)**.**

$$\begin{aligned}
\ell_{0,n}(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}\\
\ell_{1,n}(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}\\
&\vdots\\
\ell_{n,n}(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}
\end{aligned}$$

i-ti Lagrangeev bazni polinom lahko posplošimo kot

$$\ell_{i,n}(x) \;=\; \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

Velja:

$$\ell_{i,n}(x_j) \;=\; \begin{cases} 1; & i = j\\ 0; & i \neq j \end{cases}$$

[4] To so *interpolacijske točke.*

Lema 4.1. Polinomi $\ell_{i,n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ so baza za $\mathbb{P}_n$.

Trditev 4.1 (Lagrangeeva oblika zapisa interpolacijskega polinoma)**.**

$$p(x) \;=\; \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_{i,n}(x)$$

Lema 4.2. Če je $f \in \mathbb{P}_n$, potem je

$$\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_{i,n}(x) \;=\; f(x).$$

Posledica. Lagrangeevi bazni polinomi tvorijo *particija* oz. *razčlenitev* enote:

$$\sum_{i=0}^{n} \ell_{i,n}(x) \;=\; 1.$$

Izrek 4. Naj bo $a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq b$, $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$ in $p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_{i,n}(x)$ interpolacijski polinom za f na točkah $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Potem $\forall x \in [a, b]$ obstaka nek $\xi_x \in (a, b)$, da velja

$$\begin{aligned} f(x) - p(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega(x), \\ \omega(x) &= (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n), \quad \omega \in \mathbb{P}_{n+1}. \end{aligned}$$

Opomba. Za poljuben $x \in [a, b]$ torej velja

$$\|f(x) - p(x)\|_{\infty,\ [a,b]} \;\leq\; \frac{1}{(n+1)!}\|\omega(x)\|_{\infty,\ [a,b]} \cdot \|f^{(n+1)}(x)\|_{\infty,\ [a,b]}$$

4.2 Newtonova oblika zapisa interpolacijskega polinoma

Problem 4.3. Za bazo v kateri bomo interpolacijski polinom izrazili, izberemo *prestavljene potence*:

$1,\ x-x_0,\ (x-x_0)(x-x_1),\ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2),\ \dots,\ (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$

$$p(x) \ = \ \sum_{i=0}^{n} c_i(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})$$

Iščemo c_i, $i = 0, 1, \dots, n$, da bo $p(x_i) = f(x_i)\ \forall i$.

Definicija 4.2. *Deljiva diferenca* $[x_0, x_1, \dots, x_k]f$ je *vodilni koeficient* interpolacijskega polinoma stopnje k[5], ki se s funkcijo f ujema v točkah $x_0, x_1, \dots, x_k$. Sledi

$$p_l(x) \ = \ p_{k-1}(x) \ + \ [x_0, x_1, \dots, x_k]f\,(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1}).$$

Trditev 4.2 (Newtonova oblika zapisa interpolacijskega polinoma)**.**

$$p(x) \ = \ \sum_{i=0}^{n}[x_0, x_1, \dots, x_i]f\,(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})$$

Izrek 5 (Rekurzivna formula za deljene diference)**.** Naj bodo $x_0, x_1, \dots, x_k$ paroma različne točke na x-osi. Tedaj je

$$[x_0, x_1, \dots, x_k]f \ = \ \frac{[x_1, x_2, \dots, x_k]f - [x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]f}{x_k - x_0}.$$

[5]Koeficient pri potenci x^k.

Algoritem (Hornerjev algoritem)**.** Vhodni podatki:

- $x_0, x_1, \ldots, x_n$
- $d_0, x_1, \ldots, d_n$
- x

```
v_n = d_n
for i = n-1 : -1 : 0
    v_i = d_i + (x-x_i)·v_{i+1}
end
```

Izhod: v_0