Numerične metode 2 - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar
po predavanjih profesorice Marjetke Knez

2020/21

Kazalo

1 Teorija aproksimacije

Definicija 1.1 (Aproksimacijska shema)**.** Z X označimo (realni) vektorski prostor, katerega elemente želimo aproksimirati, $S \subseteq X$ označuje podprostor oz. podmnožico, v kateri iščemo aproksimant. *Aproksimacijska shema* je operator $\mathcal{A} : X \to S$, ki vsakemu elementu $f \in X$ priredi aproksimacijski element $\tilde{f} = \mathcal{A}f \in S$.

Definicija 1.2 (Optimalni aproksimacijski problem)**.** Naj bo X vektorski prostor z normo $\|\cdot\|$, $S \subseteq X$. Za $f \in X$ iščemo $\tilde{f} \in S$, da je

$$\|f - \tilde{f}\| \; = \; \inf_{s \in S} \|f - s\| \; =: \; \mathrm{dist}(f, S).$$

Definicija 1.3. Recimo, da je $S = S_n$, kjer je n dimenzija. Zanima nas, ali za $f \in X$ in $\tilde{f}_n \in S_n$ napaka $\|f - \tilde{f}_n\|$ konvergira proti 0, ko gre $n \to \infty$. Če je to res, je aproksimacijska shema *konvergentna.*

Če gledamo zaporedje podprostorov $S_n \subset X$, mora veljati, da z večanjem svobodnih parametrov postane S_n gost v X. Za polinome to sledi iz Weierstrassovega izreka.

Izrek 1.1 (Weierstrassov izrek)**.** Naj bo $f \in \mathcal{C}([a, b])$ poljubna funkcija. Potem $\forall \varepsilon > 0$ obstaja polinom p, da je

$$\|f - p\|_{\infty,\ [a,b]} \; < \; \varepsilon.$$

Drugače povedano:

$$\mathrm{dist}_\infty(f, \mathbb{P}_n) \; \xrightarrow{n \to \infty} \; 0.$$

Definicija 1.4 (Bernsteinov polinom)**.**

$$\mathcal{B}_n f(x) \; = \; \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \cdot B_i^n(x),$$

kjer je B_i^n *Bernsteinov bazni polinom*:

$$B_i^n(x) \; := \; \binom{n}{i} x^i (1 - x)^{n-1}, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

Da se pokazati, da gre $\|f - \mathcal{B}_n f\|_{\infty,\ [0,1]} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Bernsteinov aproksimacijski polinom nam poda en možen način aproksimacije funkcije f (na $[0,1]$).

Definicija 1.5 (Bernsteinov aproksimacijski operator)**.**
$\mathcal{B}_n : \mathcal{C}([a,b]) \to \mathbb{P}_n,\ \ f \mapsto \mathcal{B}_n f$:

$$\mathcal{B}_n f(x) \ = \ \sum_{i=0}^{n} f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) \cdot B_i^n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$$

$$\|f - \mathcal{B}_n f\|_{\infty,\ [a,b]} \ = \ \max_{x\in[a,b]} |f(x) - \mathcal{B}_n f(x)|$$

2 Enakomerna aproksimacija zveznih funkcij s polinomi

Problem 2.1. Za dano $f \in \mathcal{C}([a,b])$ iščemo polinom $p^* \in \mathbb{P}_n$, za katerega velja

$$\|f - p^*\|_{\infty,\ [a,b]} \ = \ \min_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_{\infty,\ [a,b]} \ = \ \min_{p \in \mathbb{P}_n} \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)|.$$

Ta problem sodi pod optimalne aproksimacijske probleme. Polinom p^* imenujemo *polinom najboljše enakomerne aproksimacije*[1] za f na $[a,b]$. Problem je nelinearen.

Izrek 2.1. Naj bo $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Če je polinom $p \in \mathbb{P}_n$ takšen, da *residual* $r = f - p$ doseže svojo normo $\|r\|_{\infty,\ [a,b]}$ alternirajoče v vsaj $n+2$ točkah $x_i \in [a,b]$, $a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} \le b$, potem je p *p.n.e.a.* za f na $[a,b]$.

Natančneje: Če obstaja $n+2$ točk $x_i \in [a,b]$, da je $\|r\|_{\infty,[a,b]} = |r(x_i)|$ za $i = 0, 1, \ldots, n+1$, in $r(x_i) \cdot r(x_{i+1}) < 0$ za $i = 0, 1, \ldots, n$, potem je $p \in \mathbb{P}_n$ *p.n.e.a.* za f na $[a,b]$.

Definicija 2.1. Naj bo $E = \{x_i;\ a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} \le b\}$. Definirajmo *minimaks* za f na E:

$$M_n(f,E) \ = \ \min_{p \in \mathbb{P}_n} \max_{x \in E} |f(x) - p(x)|$$

Polinom, pri katerem je ta minimum dosežen, imenujemo *p.n.e.a.* za f na množici E. Dobimo ga tako, da rešimo sistem linearnih enačb:

$$f(x_i) - p(x_i) \ = \ (-1)^i m, \quad i = 0, 1, \ldots, n+1$$

kjer so neznanke koeficienti polinoma p ter število m.[2]

[1] Od tu naprej *p.n.e.a.*

[2] Imamo $n+2$ enačb za $n+2$ neznank.

Algoritem (Remesov postopek)**.** Vhodni podatki: funkcija f, interval $[a, b]$, stopnja n, toleranca ε

Ponavljaj $k = 0, 1, 2, \ldots$

1. Poišči polinom ${p_k}^* \in \mathbb{P}_n$, ki zadošča pogojem

$$f(x_i) - {p_k}^*(x_i) \;=\; (-1)^i m, \quad i = 0, 1, \ldots, n+1$$

2. Poišči ekstrem residuala $r_k = f - {p_k}^*$, torej poišči $u \in [a, b]$, da bo

$$|r_k(u)| \;=\; \|r_k\|_{\infty,\ [a,b]}$$

3. Če je $|r_k(u)| - |m| < \varepsilon$, potem končaj in vrni $p^* = {p_k}^*$.

Opomba. Da se dokazati, da zaporedje polinomov, ki ga tvori Remesov postopek konvergira proti *p.n.e.a.* p^*. Hitrost konvergence je *linearna*.

3 Aproksimacija po metodi najmanjših kvadratov

Definicija 3.1. Naj bo X vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ s skalarnim produktom $\langle\cdot,\cdot\rangle$, s kvadratno normo $\|\cdot\|_2 = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$. $S \subseteq X$ je končnodimenzionalen podprostor v X, definiran kot

$$S \;=\; \mathcal{L}in\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}, \quad \dim S = n.$$

Za izbran $f \in X$ iščemo $f^* \in S$, da velja

$$\|f - f^*\|_2 \;=\; \min_{s\in S} \|f - s\|_2.$$

f^* imenujemo *element najboljše aproksimacije po metodi najmanjših kvadratov.*[3]

Izrek 3.1. Naj bo $S \subseteq X$. Element $f^* \in S$ je element najboljše aproksimacije po MNK za $f \in X$ natanko tedaj, ko je $f - f^* \perp S$.

Posledica. Iz izreka sledi konstrukcija. Naj bodo $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ baza podprostora S.

$$f^* \;=\; \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j,$$

$(\alpha_j)_{j=1}^n$ so neznani koeficienti. Veljati mora $f - f^* \perp S$, torej $f - f^* \perp \varphi_i$ $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. Na podlagi tega dobimo

$$\begin{bmatrix} \langle\varphi_1,\varphi_1\rangle & \cdots & \langle\varphi_n,\varphi_1\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle\varphi_1,\varphi_n\rangle & \cdots & \langle\varphi_n,\varphi_n\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f,\varphi_1\rangle \\ \vdots \\ \langle f,\varphi_n\rangle \end{bmatrix}.$$

Ta sistem enačb imenujemo *Gramov* oz. *normalni sistem.* Numerično ta sistem rešimo z razcepom Choleskega. Levo matriko imenujemo *Gramova matrika.* Gramova matrika $G = (\langle\varphi_j,\varphi_i\rangle)_{i,j=1}^n$ je *simetrična pozitivno definitna* matrika.

[3] *e.n.a. po MNK*

Algoritem (Gram-Schmidt)**.** Vhodni podatki: baza $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$.
Izhod: Ortonormirana baza $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$.

```
for i = 1:n
        φ_i = ψ_i
end
for i = 1:n
        φ_i = φ_i / ||φ_i||_2
        for j = i+1:n
                φ_j = φ_j - ⟨φ_j, φ_i⟩φ_i
        end
end
```

4 Interpolacija

Problem 4.1. Podane so vrednosti izbrane funkcije f v $n+1$ paroma različnih točkah $x_0, x_1, \ldots, x_n$ na realni osi[4], iščemo pa neko preprostejšo funkcijo g, ki zadošča pogojem

$$f(x_i) \;=\; g(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Problem 4.2 (Polinomska interpolacija)**.** Imejmo funkcijo $f \in \mathcal{C}([a,b])$ in zaporedje točk
$a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$. Iščemo polinom $p = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{P}_n$, ki zadošča pogojem

$$p(x_i) \;=\; f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

4.1 Lagrangeeva oblika zapisa interpolacijskega polinoma

Definicija 4.1 (Lagrangeevi bazni polinomi)**.**

$$\begin{aligned}
\ell_{0,n}(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}\\
\ell_{1,n}(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}\\
&\vdots\\
\ell_{n,n}(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}
\end{aligned}$$

i-ti Lagrangeev bazni polinom lahko posplošimo kot

$$\ell_{i,n}(x) \;=\; \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

Velja:

$$\ell_{i,n}(x_j) \;=\; \begin{cases} 1; & i = j\\ 0; & i \neq j \end{cases}$$

[4] To so *interpolacijske točke.*

Lema 4.1. Polinomi $\ell_{i,n}$, $i = 0, 1, \dots, n$ so baza za $\mathbb{P}_n$.

Trditev 4.1 (Lagrangeeva oblika zapisa interpolacijskega polinoma)**.**

$$p(x) \; = \; \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_{i,n}(x)$$

Lema 4.2. Če je $f \in \mathbb{P}_n$, potem je

$$\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_{i,n}(x) \; = \; f(x).$$

Posledica. Lagrangeevi bazni polinomi tvorijo *particija* oz. *razčlenitev* enote:

$$\sum_{i=0}^{n} \ell_{i,n}(x) \; = \; 1.$$

Izrek 4.1. Naj bo $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$, $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$ in $p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_{i,n}(x)$ interpolacijski polinom za f na točkah $x_0, x_1, \dots, x_n$. Potem $\forall x \in [a, b]$ obstaka nek $\xi_x \in (a, b)$, da velja

$$\begin{aligned} f(x) - p(x) \; &= \; \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega(x), \\ \omega(x) \; &= \; (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n), \quad \omega \in \mathbb{P}_{n+1}. \end{aligned}$$

Opomba. Za poljuben $x \in [a, b]$ torej velja

$$\|f(x) - p(x)\|_{\infty,\ [a,b]} \; \leq \; \frac{1}{(n+1)!}\|\omega(x)\|_{\infty,\ [a,b]} \cdot \|f^{(n+1)}(x)\|_{\infty,\ [a,b]}$$

4.2 Newtonova oblika zapisa interpolacijskega polinoma

Problem 4.3. Za bazo v kateri bomo interpolacijski polinom izrazili, izberemo *prestavljene potence*:

$$1,\ x-x_0,\ (x-x_0)(x-x_1),\ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2),\ \ldots,\ (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

$$p(x) \;=\; \sum_{i=0}^{n} c_i(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})$$

Iščemo c_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, da bo $p(x_i) = f(x_i)\ \forall i$.

Definicija 4.2. *Deljiva diferenca* $[x_0, x_1, \ldots, x_k]f$ je *vodilni koeficient* interpolacijskega polinoma stopnje k[5], ki se s funkcijo f ujema v točkah $x_0, x_1, \ldots, x_k$. Sledi

$$p_l(x) \;=\; p_{k-1}(x) \;+\; [x_0, x_1, \ldots, x_k]f\,(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1}).$$

Trditev 4.2 (Newtonova oblika zapisa interpolacijskega polinoma)**.**

$$p(x) \;=\; \sum_{i=0}^{n}[x_0, x_1, \ldots, x_i]f\,(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})$$

Izrek 4.2 (Rekurzivna formula za deljene diference)**.** Naj bodo $x_0, x_1, \ldots, x_k$ paroma različne točke na x-osi. Tedaj je

$$[x_0, x_1, \ldots, x_k]f \;=\; \frac{[x_1, x_2, \ldots, x_k]f - [x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]f}{x_k - x_0}.$$

[5]Koeficient pri potenci x^k.

Algoritem (Hornerjev algoritem)**.** Vhodni podatki:

- $x_0, x_1, \ldots, x_n$
- $d_0, x_1, \ldots, d_n$
- x

```
v_n = d_n
for i = n-1 : -1 : 0
    v_i = d_i + (x-x_i)·v_{i+1}
end
```

Izhod: v_0

Definicija 4.3. Pravimo, da se polinom p z f ujema v točki x_i $(k+1)$-kratno, če se ujema v vrednosti in v prvih k odvodih:

$$p(x_i) \;=\; f(x_i), \quad p'(x_i) \;=\; f'(x_i), \quad \ldots \quad p^{(k)}(x_i) \;=\; f^{(k)}(x_i).$$

Tak polinom p stopnje k je Taylorjev polinom:

$$p(x) \;=\; f(x_i) + f'(x_i)\,(x - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2}(x - x_i)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}(x - x_i)^k.$$

Posplošitev rekurzivne formule: recimo[6], da je $x_i \leq x_{i+1} \leq \ldots \leq x_{i+k}$:

$$[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}]f \;=\; \begin{cases} \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}; & x_i = x_{i+1} = \ldots = x_{i+k} \\ \frac{[x_{i+1},\ldots,x_{i+k}]f - [x_i,\ldots,x_i]}{x_{i+k} - x_i}, & x_i \neq x_{i+k} \end{cases}$$

[6]Vrstni red točk v diferenci ni pomemben.

5 Numerično odvajanje

Problem 5.1. Iščemo približek za vrednost odvoda funkcije f pri nekem izbranem x. Približek bi radi izrazili s kombinacijo vrednosti funkcije f v bližnjih točkah $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Metoda (Ideja za izpeljavo aproksimacijskih formul)**.** Kot približek za odvod funkcije f v izbranem x vzamemo vrednost odvoda interpolacijskega polinoma (ki se z f ujema v točkah $x_0, x_1, \ldots, x_n$) pri izbranem x. Vemo že:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_{i,n}(x)}_{p(x)} + \omega(x)[x_0, x_1, \ldots, x_n, x], f$$

kjer je

$$\omega(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i).$$

Odvajamo to formulo:

$$f'(x) = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} f(x_i)(\ell_{i,n}(x))'}_{\text{aproksimacijska formula}} + \underbrace{(\omega(x)[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]f')'}_{\text{napaka: } R(f) \text{ ali } \mathcal{R}f}$$

Opomba (Odvod deljene diference)**.**

$$\frac{d}{dx}[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]f = [x_0, x_1, \ldots, x_n, x, x]f$$

Trditev 5.1 (?)**.**

$$f'(x_k) = p'(x_k) + \omega'(x_k)[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_k]f + \underbrace{\omega(x_k)}_{0}[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_k, x_k]f$$

$$f'(x_k) = p'(x_k) + \omega'(x_k)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \xi \in (x_0, x_n)$$

6 Numerično integriranje

Problem 6.1. Radi bi izračunal približek za integral

$$\mathcal{S}f \;=\; \int_a^b f(x)\,dx.$$

Približek bi radi izrazili s kombinacijo vrednosti funkcije f v izbranih točkah iz intervala $[a,b]$.

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : \mathcal{C}([a,b]) \;&\to\; \mathbb{R} \\ f \;&\mapsto\; \int_a^b f(x)\,dx \end{aligned}$$

Funkcional $\mathcal{S}$ je *linearen*:

$$\mathcal{S}(\alpha f + \beta g) \;=\; \alpha\mathcal{S}f + \beta\mathcal{S}g, \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R},\; f,g \in \mathcal{C}([a,b]).$$

Metoda (Ideja za izpeljavo formul)**.** Namesto funkcije f integriramo interpolacijski polinom za f na točkah $x_0, x_1, \ldots, x_n$ iz intervala $[a,b]$, $a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$. Vemo:

$$\begin{aligned} f(x) \;&=\; p(x) \;+\; \omega(x)[x_0,x_1,\ldots,x_n]f \\ p(x) \;&=\; \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_{i,n}(x) \\ \ell_{i,n}(x) \;&=\; \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \end{aligned}$$

Integriramo prvo enačbo in dobimo

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\mathcal{S}f} \;=\; \underbrace{\int_a^b p(x)\,dx}_{\text{približek za integral } \mathcal{F}f} \;+\; \underbrace{\int_a^b \omega(x)[x_0,x_1,\ldots,x_n,x]f\,dx}_{\text{napaka } \mathcal{R}f}$$

Trditev 6.1 (Kvadraturna formula oz. integracijsko pravilo)**.**

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}f &= \mathcal{F}f + \mathcal{R}f \\
\mathcal{F}f &= \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i)\ell_{i,n}(x)\,dx = \underbrace{\sum_{i=0}^n f(x_i)\int_a^b \ell_{i,n}(x)\,dx}_{A_i} \\
\mathcal{F}f &= \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)
\end{aligned}
$$

- A_i ... uteži integracijskega pravila
- $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ... vozli integracijskega pravila

Definicija 6.1. *Red* oziroma *stopnja* integracijskega pravila je enaka m, če je pravilo točno za vse polinome stopnje $\leq m$, to je

$$\mathcal{R}p = 0 \quad \forall p \in \mathbb{P}_m \quad \text{in} \quad \mathcal{R}x^{m+1} \neq 0.$$

Glede na izbiro vozlov ločimo:

- *Newton-Cotesova* pravila:
  vozle izberemo ekvidistantno:

  $$
  \begin{aligned}
  h &= \frac{b-a}{n}, \quad x_0 = a \\
  x_i &= x_0 + ih, \quad i = 0, 1, 2 \ldots, n
  \end{aligned}
  $$

  Ločimo:

  – Pravila odprtega tipa (upoštevamo krajišča):

  $$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) + \mathcal{R}f$$

  – Pravila zaprtega tipa (ne upoštevamo krajišč):

  $$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n-1} A_i f(x_i) + \mathcal{R}f$$

- *Gaussova* pravila:
  vozle in uteži določimo tako, da je pravilo največjega možnega reda

Pravilo (Trapezno pravilo)**.** Naj velja $n = 1$, $a = x_0$ in $b = x_1 = x_0 + h$. Potem sledi

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \;=\; \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) - \frac{h^3}{2} f''(\xi), \quad \xi \in [x_0, x_1].$$

Za *trapezno pravilo* velja

$$\mathcal{R}1 = 0, \quad \mathcal{R}(x - x_0) = 0 \quad \text{ter} \quad \mathcal{R}(x - x_0)^2 = \frac{h^3}{6} \neq 0,$$

torej je pravilo reda 1.

Pravilo (Simpsonovo pravilo)**.** Naj velja $n = 2$, $a = x_0$, $x_1 = x_0 + h$ ter $x_2 = x_0 + 2h = b$, torej $h = \dfrac{b-a}{2}$. Potem sledi

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \;=\; \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [x_0, x_2],$$

kjer je $f \in \mathcal{C}^4([x_0, x_2])$. *Simpsonovo pravilo* je reda 3.

Trditev 6.2 (Napaka aritmetike pri Newton-Cotesovih pravilih)**.** Recimo, da velja $|f(x_i) - \hat{f}(x_i)| < \varepsilon$. Ocena za napako aritmetike:

$$D_a \;=\; \left| \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) - \sum_{i=0}^{n} A_i \hat{f}(x_i) \right| \;\leq\; \sum_{i=0}^{n} |A_i| |f(x_i) - \hat{f}(x_i)| \;\leq\; \varepsilon \sum_{i=0}^{n} |A_i|.$$

Ker so pravila točna za konstante velja

$$\int_a^b 1\,dx \;=\; \sum_{i=0}^{n} A_i \cdot 1 \;\Rightarrow\; \sum_{i=0}^{n} A_i \;=\; b - a.$$

Če so vse uteži pozitivne, potem $D_a \leq \varepsilon(b - a)$ in ni numeričnih težav.

6.1 Sestavljena integracijska pravila

Ideja. Interval $[a, b]$ razdelimo na manjše podintervale in na vsakem podintervalu uporabimo integracijsko pravilo nizkega reda in rezultate seštejemo.

Pravilo (Sestavljeno trapezno pravilo)**.** $h = \frac{b-a}{m}$

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + f(x_m)\right) - \frac{h^2}{12}(b-a)f''(\mu)$$

Pravilo (Sestavljeno Simpsonovo pravilo)**.** $n = 2$, $h = \frac{b-a}{2m}$, $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, 2m$

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \frac{h}{3}\left(f(x_o) + 4\sum_{i=0}^{m-1} f(x_{2i+1}) + 2\sum_{i=0}^{m-1} f(x_{2i}) + f(x_{2m})\right) - \frac{h^4}{180}(b-a)f^{(4)}(\mu)$$

6.2 Ocena napake in Richardsonova ekstrapolacija

Metoda. Označimo z F_n približek za I, ki ga dobimo, o računamo s korakom h. Predpostavimo, da velja

$$I \;=\; F_n + c_0 \cdot h^p + \mathcal{O}(h^{p+1}),$$

kjer je c_0 konstanta neodvisna od h. Z nekaj vragolijami dobimo

$$I \;=\; F_{\frac{h}{2}} + \underbrace{\frac{F_{\frac{h}{2}} - F_h}{2^p - 1}}_{\text{Ocena za napako približka } F_{\frac{h}{2}}} + \mathcal{O}(h^{p+1}) \;=\; F_h + 2^p \underbrace{\frac{F_{\frac{h}{2}} - F_h}{2^p - 1}}_{\text{Ocena za napako približka } F_h} + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

6.3 Gaussova pravila

Ideja. Vozle in uteži v integracijskemu pravilo izračunamo tako, da bo pravilo čim višjega reda.

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) + \mathcal{R}f, \quad \text{neznanke}: \; A_i \text{ in vozli } x_i$$

Če vozle izberemo tako, da bo $\omega \perp \mathbb{P}_n$, potem je red pravila enak $2n+1$. Velja tudi obratno.

Opomba (Drug način)**.** Iz baze $\{1, x, x^2, \ldots, x^n, x^{n+1}\}$ izračunamo ON bazo polinomov $p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}$. Iz pogoja $\omega \perp \mathbb{P}_n$ vidimo, da za vozle $x_0, x_1, \ldots, x_n$ izberemo ničle polinoma p_{n+1}.

Izrek 6.1. Naj bo $\mathcal{F}f = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$ Gaussovo integracijsko pravilo reda $2n+1$. Uteži

$$A_i \;=\; \int_a^b \ell_{i,n}(x)\,dx$$

so pozitivne. Za $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a,b])$ je napaka oblike

$$\mathcal{R}f \;=\; \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_a^b \omega^2(x)\,dx, \quad \xi \in [a,b].$$

V integral, ki ga izračunamo, lahko vstavimo še pozitivno utež $\rho(x) > 0$.

7 Numerično reševanje NDE

Problem 7.1 (Začetni problem)**.**
Začetni problem reda 1:

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y), \quad f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ y(a) &= y_a \end{aligned}$$

Začetni problem reda p:

$$\begin{aligned} y^{(p)} &= f(x, y, y', \ldots, y^{(p-1)}) \\ y(a) &= y_a, \ y'(a) = y_{a,1}, \ y^2(a) = y_{a,2}, \ \ldots, \ y^{(p-1)}(a) = y_{a,p-1} \end{aligned}$$

Problem 7.2 (Robni primer)**.**

$$\begin{aligned} y^{(4)} + xy &= 0 \\ y(a) &= y_a, \ y'(a) = y_{a,1} \\ y(b) &= y_b, \ y'(b) = y_{b,1} \end{aligned}$$

Metoda (Eksplicitna Eulerjeva metoda)**.**

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad x_{n+1} = x_n + h$$

Metoda (Implicitna Eulerjeva metoda)**.**

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$

$$\begin{aligned} &\mathtt{y_{n+1} = g(y_{n+1}) \quad (g(y_{n+1}) = y_n + h \cdot f(x_{n+1},\ y_{n+1}))} \\ &\mathtt{y^{(0)}_{n+1} = y_n} \\ &\mathtt{while\ |y^{(k)}_{n+1} - y^{(k-1)}_{n+1}| \geq tol \cdot |y^{(k)}_{n+1}|} \\ &\qquad \mathtt{y^{(k)}_{n+1} = g(y^{(k)}_{n+1}),\ k = 1,2,\ldots} \end{aligned}$$

Metoda (Trapezna metoda)**.** $x_n = a + nh$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$$

7.1 Globalna in lokalna napaka

Definicija 7.1. Metoda je *konvergentna*, če za vse DE, ki zadoščajo pogojem eksistenčnega izreka, velja:

$$\|y - y_n\|_{\infty,[a,b]} \xrightarrow{h\to 0} 0,$$

oziroma:

$$\max_{0\le n\le m} |y(x_n) - y_n| \xrightarrow{h\to 0 \text{ oz. } m\to\infty} 0.$$

Definicija 7.2 (Globalna napaka)**.**

$$\max_{0\le n\le m} |y(x_n) - y_n|$$

Globalna točka v točki x_n:

$$|y(x_n) - y_n|$$

Definicija 7.3. Metoda je reda r, če velja

$$\max_{0\le n\le m} |y(x_n) - y_n| \;=\; C\cdot h^r + \mathcal{O}(h^{r+1}) \;=\; \mathcal{O}(h^r).$$

Definicija 7.4. *Lokalna napaka* v točki x_n je razlika med točno rešitvijo in njenim numeričnim približkom, ob predpostavki, da se ti dve rešitvi ujemata na vseh prejšnjih korakih.

$$\mathcal{T}_n(n) \;=\; y(x_n) - y_n, \quad \text{če } y(x_k) = y_k \; \forall k < n.$$

7.2 Runge-Kutta metode

Metoda (s-stopenjska Runge-Kutta metoda)**.** Izračunamo s koeficientov:

$$\begin{aligned} k_i \;&=\; h\cdot f(x_i + \alpha_i\cdot h,\; y_n = \sum_{j=1}^{s}\beta_{ij}k_j), \quad i = 1, 2, \ldots, s \\ y_{n+1} \;&=\; y_n + \sum_{i=1}^{s}\gamma_i\cdot k_i \end{aligned}$$

Pri tem so $\alpha_i, \beta_{ij}, \gamma_i$ koeficienti, ki jih določimo tako, da je metoda čim višjega reda.

$$\begin{aligned}
\alpha_i &\in [0,1] \\
\alpha_i &= \sum_{j=1}^{s} \beta_{ij}
\end{aligned}$$

Da bo R-K metoda reda vsaj 1, mora biti $\sum_{i=1}^{s} \gamma_i = 1$. R-K metode podamo v *Butcherjevi shemi*:

$$\begin{array}{c|cccc}
\alpha_1 & \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1s} \\
\alpha_2 & \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2s} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\alpha_s & \beta_{s1} & \beta_{s2} & \dots & \beta_{ss} \\
\hline
 & \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_s
\end{array}$$

Če so $\beta_{ij} = 0 \ \forall j \geq i$, je metoda *eksplicitna.* Če so $\beta_{ij} = 0 \ \forall j > i$ in je vsaj en $\beta_{ii} \neq 0$, je metoda *diagonalno implicitna.* Sicer je *implicitna.*

Metoda (Modificirana Eulerjeva metoda)**.**

$$\begin{array}{c|cc}
0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
\hline
 & 0 & 1
\end{array}$$

Lokalna napaka je reda 3, oz. metoda je reda 2.

Metoda (Heunova metoda)**.**

$$\begin{array}{c|cc}
0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{array}$$

Lokalna napaka je reda 3.

Metoda.

$$\begin{array}{c|cc}
0 & 0 & 0 \\
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\hline
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{array}$$

Lokalna napaka je reda 3. Metoda je *diagonalno implicitna.*

Metoda (4-stopenjska R-K metoda).

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Lokalna napaka je reda 5. Metoda je reda 4.

7.3 Sistemi DE 1. in višjega reda

Problem 7.3.

$$\underline{\overline{Y}} := \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{bmatrix}, \quad \text{vektorska funkcija} \quad \underline{\overline{Y}} : [a,b] \to \mathbb{R}^d$$

$$F := \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{bmatrix}, \quad \text{preslikava} \quad F : [a,b] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$$

$$\Longrightarrow \underline{\overline{Y}}' = F(x, \underline{\overline{Y}}), \quad \underline{\overline{Y}}(a) = \underline{\overline{Y}}_a = \begin{bmatrix} y_{1,a} \\ \vdots \\ y_{d,a} \end{bmatrix}$$

Vse metode, ki smo jih spoznali, lahko direktno uporabimo za sisteme DE 1. reda.

Euler:

$$\underline{\overline{Y}}_{n+1} = \underline{\overline{Y}}_n + h \cdot F(x_n, \underline{\overline{Y}}_n)$$

Metoda (Reševanje DE višjega reda). Začetni problem reda p:

$$y^{(p)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(p-1)})$$

$$y(a) = y_{a,0}, \; y'(a) = y_{a,1}, \; \ldots, \; y^{(p-1)}(a) = y_{a,p-1}$$

Preko novih neznanih funkcij $z_1, z_2, \ldots, z_{p-1}$ prevedemo na sistem DE 1. reda:

$$\begin{aligned}
z_1 &= y' \\
z_2 &= z_1' = y'' \\
z_3 &= z_2' = y''' \\
&\vdots \\
z_{p-1} &= z_{p-2}' = y^{(p-1)} \\
z_{p-1}' &= y^{(p)} = f(x, y, z_1, z_2, \ldots, z_{p-1})
\end{aligned}$$

Dobimo:

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} y \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{p-2} \\ z_{p-1} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_{p-1} \\ f(x, y, z_1, \ldots, z_{p-1}) \end{bmatrix}$$

$$\underline{Y}' = F(x, \underline{Y}) = \begin{bmatrix} \underline{Y}(2) \\ \underline{Y}(3) \\ \vdots \\ \underline{Y}(p) \\ f(x, \underline{Y}(1), \ldots, \underline{Y}(p)) \end{bmatrix}$$

$$\underline{Y}(a) = \begin{bmatrix} y_{a,0} \\ y_{a,1} \\ \vdots \\ y_{a,p-1} \end{bmatrix}$$