

# Numerične metode 2 - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar  
po predavanjih profesorice Marjetke Knez

2020/21

## Kazalo

<b>1</b>	<b>Teorija aproksimacije</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Enakomerna aproksimacija zveznih funkcij s polinomi</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Aproksimacija po metodi najmanjših kvadratov</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Interpolacija</b>	<b>9</b>
4.1	Lagrangeeva oblika zapisa interpolacijskega polinoma . . . . .	9
4.2	Newtonova oblika zapisa interpolacijskega polinoma . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Numerično odvajanje</b>	<b>13</b>
<b>6</b>	<b>Numerično integriranje</b>	<b>14</b>
6.1	Sestavljena integracijska pravila . . . . .	17
6.2	Ocena napake in Richardsonova ekstrapolacija . . . . .	17
6.3	Gaussova pravila . . . . .	18
<b>7</b>	<b>Numerično reševanje NDE</b>	<b>19</b>
7.1	Globalna in lokalna napaka . . . . .	20
7.2	Runge-Kutta metode . . . . .	20
7.3	Sistemi DE 1. in višjega reda . . . . .	22
<b>8</b>	<b>Numerično računanje lastnih vrednosti</b>	<b>24</b>
8.1	Potenčna metoda . . . . .	24
8.2	Inverzna iteracija . . . . .	25
8.3	QR iteracija . . . . .	26

## 1 Teorija aproksimacije

**Definicija 1.1** (Aproksimacijska shema). Z  $X$  označimo (realni) vektorski prostor, katerega elemente želimo aproksimirati,  $S \subseteq X$  označuje podprostor oz. podmnožico, v kateri iščemo aproksimant. *Aproksimacijska shema* je operator  $\mathcal{A} : X \rightarrow S$ , ki vsakemu elementu  $f \in X$  priredi aproksimacijski element  $\tilde{f} = \mathcal{A}f \in S$ .

**Definicija 1.2** (Optimalni aproksimacijski problem). Naj bo  $X$  vektorski prostor z normo  $\|\cdot\|$ ,  $S \subseteq X$ . Za  $f \in X$  iščemo  $\tilde{f} \in S$ , da je

$$\|f - \tilde{f}\| = \inf_{s \in S} \|f - s\| =: \text{dist}(f, S).$$

**Definicija 1.3.** Recimo, da je  $S = S_n$ , kjer je  $n$  dimenzija. Zanima nas, ali za  $f \in X$  in  $\tilde{f}_n \in S_n$  napaka  $\|f - \tilde{f}_n\|$  konvergira proti 0, ko gre  $n \rightarrow \infty$ . Če je to res, je aproksimacijska shema *konvergentna*.

Če gledamo zaporedje podprostorov  $S_n \subset X$ , mora veljati, da z večanjem svobodnih parametrov postane  $S_n$  gost v  $X$ . Za polinome to sledi iz Weierstrassovega izreka.

**Izrek 1.1** (Weierstrassov izrek). Naj bo  $f \in \mathcal{C}([a, b])$  poljubna funkcija. Potem  $\forall \varepsilon > 0$  obstaja polinom  $p$ , da je

$$\|f - p\|_{\infty, [a, b]} < \varepsilon.$$

Drugače povedano:

$$\text{dist}_{\infty}(f, \mathbb{P}_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

**Definicija 1.4** (Bernsteinov polinom).

$$\mathcal{B}_n f(x) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \cdot B_i^n(x),$$

kjer je  $B_i^n$  *Bernsteinov bazni polinom*:

$$B_i^n(x) := \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Da se pokazati, da gre  $\|f - \mathcal{B}_n f\|_{\infty, [0,1]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Bernsteinov aproksimacijski polinom nam poda en možen način aproksimacije funkcije  $f$  (na  $[0, 1]$ ).

**Definicija 1.5** (Bernsteinov aproksimacijski operator).

$\mathcal{B}_n : \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathbb{P}_n$ ,  $f \mapsto \mathcal{B}_n f$ :

$$\mathcal{B}_n f(x) = \sum_{i=0}^n f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) \cdot B_i^n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$$

$$\|f - \mathcal{B}_n f\|_{\infty, [a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - \mathcal{B}_n f(x)|$$

## 2 Enakomerna aproksimacija zveznih funkcij s polinomi

**Problem 2.1.** Za dano  $f \in \mathcal{C}([a, b])$  iščemo polinom  $p^* \in \mathbb{P}_n$ , za katerega velja

$$\|f - p^*\|_{\infty, [a, b]} = \min_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_{\infty, [a, b]} = \min_{p \in \mathbb{P}_n} \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p(x)|.$$

Ta problem sodi pod optimalne aproksimacijske probleme. Polinom  $p^*$  imenujemo *polinom najboljše enakomerne aproksimacije*<sup>1</sup> za  $f$  na  $[a, b]$ . Problem je nelinearen.

**Izrek 2.1.** Naj bo  $f \in \mathcal{C}([a, b])$ . Če je polinom  $p \in \mathbb{P}_n$  takšen, da *residual*  $r = f - p$  doseže svojo normo  $\|r\|_{\infty, [a, b]}$  alternirajoče v vsaj  $n + 2$  točkah  $x_i \in [a, b]$ ,  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} \leq b$ , potem je  $p$  *p.n.e.a.* za  $f$  na  $[a, b]$ .

**Natančneje:** Če obstaja  $n + 2$  točk  $x_i \in [a, b]$ , da je  $\|r\|_{\infty, [a, b]} = |r(x_i)|$  za  $i = 0, 1, \dots, n + 1$ , in  $r(x_i) \cdot r(x_{i+1}) < 0$  za  $i = 0, 1, \dots, n$ , potem je  $p \in \mathbb{P}_n$  *p.n.e.a.* za  $f$  na  $[a, b]$ .

**Definicija 2.1.** Naj bo  $E = \{x_i; a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} \leq b\}$ . Definirajmo *minimaks* za  $f$  na  $E$ :

$$M_n(f, E) = \min_{p \in \mathbb{P}_n} \max_{x \in E} |f(x) - p(x)|$$

Polinom, pri katerem je ta minimum dosežen, imenujemo *p.n.e.a.* za  $f$  na množici  $E$ . Dobimo ga tako, da rešimo sistem linearnih enačb:

$$f(x_i) - p(x_i) = (-1)^i m, \quad i = 0, 1, \dots, n + 1$$

kjer so neznanke koeficienti polinoma  $p$  ter število  $m$ .<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup>Od tu naprej *p.n.e.a.*

<sup>2</sup>Imamo  $n + 2$  enačb za  $n + 2$  neznank.

**Algoritem** (Remesov postopek). Vhodni podatki: funkcija  $f$ , interval  $[a, b]$ , stopnja  $n$ , toleranca  $\varepsilon$

Ponavljaj  $k = 0, 1, 2, \dots$

1. Poišči polinom  $p_k^* \in \mathbb{P}_n$ , ki zadošča pogoju

$$f(x_i) - p_k^*(x_i) = (-1)^i m, \quad i = 0, 1, \dots, n+1$$

2. Poišči ekstrem residuala  $r_k = f - p_k^*$ , torej poišči  $u \in [a, b]$ , da bo

$$|r_k(u)| = \|r_k\|_{\infty, [a, b]}$$

3. Če je  $|r_k(u)| - |m| < \varepsilon$ , potem končaj in vrni  $p^* = p_k^*$ .

**Opomba.** Da se dokazati, da zaporedje polinomov, ki ga tvori Remesov postopek konvergira proti *p.n.e.a.*  $p^*$ . Hitrost konvergence je *linear*.

### 3 Aproximacija po metodi najmanjših kvadratov

**Definicija 3.1.** Naj bo  $X$  vektorski prostor nad  $\mathbb{R}$  s skalarnim produktom  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , s kvadratno normo  $\| \cdot \|_2 = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ .  $S \subseteq X$  je končnodimenzionalen podprostor v  $X$ , definiran kot

$$S = \mathcal{Lin}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}, \quad \dim S = n.$$

Za izbran  $f \in X$  iščemo  $f^* \in S$ , da velja

$$\|f - f^*\|_2 = \min_{s \in S} \|f - s\|_2.$$

$f^*$  imenujemo *element najboljše aproksimacije po metodi najmanjših kvadratov*.<sup>3</sup>

**Izrek 3.1.** Naj bo  $S \subseteq X$ . Element  $f^* \in S$  je element najboljše aproksimacije po MNK za  $f \in X$  natanko tedaj, ko je  $f - f^* \perp S$ .

**Posledica.** Iz izreka sledi konstrukcija. Naj bodo  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  baza podprostora  $S$ .

$$f^* = \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j,$$

$(\alpha_j)_{j=1}^n$  so neznani koeficienti. Veljati mora  $f - f^* \perp S$ , torej  $f - f^* \perp \varphi_i$   $\forall i = 1, 2, \dots, n$ . Na podlagi tega dobimo

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \cdots & \langle \varphi_n, \varphi_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \varphi_1, \varphi_n \rangle & \cdots & \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, \varphi_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, \varphi_n \rangle \end{bmatrix}.$$

Ta sistem enačb imenujemo *Gramov oz. normalni sistem*. Numerično ta sistem rešimo z razcepom Choleskega. Levo matriko imenujemo *Gramova matrika*. Gramova matrika  $G = (\langle \varphi_j, \varphi_i \rangle)_{i,j=1}^n$  je *simetrična pozitivno definitna* matrika.

---

<sup>3</sup>e.n.a. po MNK

**Algoritem** (Gram-Schmidt). Vhodni podatki: baza  $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ .  
 Izhod: Ortonormirana baza  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ .

```

for i = 1:n
     $\varphi_i = \psi_i$ 
end
for i = 1:n
     $\varphi_i = \frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|_2}$ 
    for j = i+1:n
         $\varphi_j = \varphi_j - \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle \varphi_i$ 
    end
end
end

```



## 4 Interpolacija

**Problem 4.1.** Podane so vrednosti izbrane funkcije  $f$  v  $n + 1$  paroma različnih točkah  $x_0, x_1, \dots, x_n$  na realni osi<sup>4</sup>, iščemo pa neko preprostejšo funkcijo  $g$ , ki zadošča pogojem

$$f(x_i) = g(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

**Problem 4.2** (Polinomska interpolacija). Imejmo funkcijo  $f \in \mathcal{C}([a, b])$  in zaporedje točk  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ . Iščemo polinom  $p = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{P}_n$ , ki zadošča pogojem

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

### 4.1 Lagrangeeva oblika zapisa interpolacijskega polinoma

**Definicija 4.1** (Lagrangeevi bazni polinomi).

$$\begin{aligned} \ell_{0,n}(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} \\ \ell_{1,n}(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)} \\ &\vdots \\ \ell_{n,n}(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})} \end{aligned}$$

$i$ -ti Lagrangeev bazni polinom lahko posplošimo kot

$$\ell_{i,n}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Velja:

$$\ell_{i,n}(x_j) = \begin{cases} 1; & i = j \\ 0; & i \neq j \end{cases}$$

---

<sup>4</sup>To so *interpolacijske točke*.

**Lema 4.1.** Polinomi  $\ell_{i,n}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  so baza za  $\mathbb{P}_n$ .

**Trditev 4.1** (Lagrangeeva oblika zapisa interpolacijskega polinoma).

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \ell_{i,n}(x)$$

**Lema 4.2.** Če je  $f \in \mathbb{P}_n$ , potem je

$$\sum_{i=0}^n f(x_i) \ell_{i,n}(x) = f(x).$$

**Posledica.** Lagrangeevi bazni polinomi tvorijo *particija* oz. *razčlenitev* enote:

$$\sum_{i=0}^n \ell_{i,n}(x) = 1.$$

**Izrek 4.1.** Naj bo  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ ,  $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$  in

$p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \ell_{i,n}(x)$  interpolacijski polinom za  $f$  na točkah  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .

Potem  $\forall x \in [a, b]$  obstaja nek  $\xi_x \in (a, b)$ , da velja

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \omega(x),$$

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n), \quad \omega \in \mathbb{P}_{n+1}.$$

**Opomba.** Za poljuben  $x \in [a, b]$  torej velja

$$\|f(x) - p(x)\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{1}{(n+1)!} \|\omega(x)\|_{\infty, [a, b]} \cdot \|f^{(n+1)}(x)\|_{\infty, [a, b]}$$

## 4.2 Newtonova oblika zapisa interpolacijskega polinoma

**Problem 4.3.** Za bazo v kateri bomo interpolacijski polinom izrazili, izberemo *prestavljene potence*:

$$1, x-x_0, (x-x_0)(x-x_1), (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2), \dots, (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^n c_i (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})$$

Iščemo  $c_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , da bo  $p(x_i) = f(x_i) \forall i$ .

**Definicija 4.2.** *Deljiva diferenca*  $[x_0, x_1, \dots, x_k]f$  je *vodilni koeficient* interpolacijskega polinoma stopnje  $k^5$ , ki se s funkcijo  $f$  ujema v točkah  $x_0, x_1, \dots, x_k$ . Sledi

$$p_l(x) = p_{k-1}(x) + [x_0, x_1, \dots, x_k]f (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1}).$$

**Trditev 4.2** (Newtonova oblika zapisa interpolacijskega polinoma).

$$p(x) = \sum_{i=0}^n [x_0, x_1, \dots, x_i]f (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})$$

**Izrek 4.2** (Rekurzivna formula za deljene difference). Naj bodo  $x_0, x_1, \dots, x_k$  paroma različne točke na  $x$ -osi. Tedaj je

$$[x_0, x_1, \dots, x_k]f = \frac{[x_1, x_2, \dots, x_k]f - [x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]f}{x_k - x_0}.$$

---

<sup>5</sup>Koeficient pri potenci  $x^k$ .

**Algoritem** (Hornerjev algoritem). Vhodni podatki:

- $x_0, x_1, \dots, x_n$
- $d_0, x_1, \dots, d_n$
- $x$

```

vn = dn
for i = n-1 : -1 : 0
    vi = di + (x-xi)·vi+1
end

```

Izhod:  $v_0$

**Definicija 4.3.** Pravimo, da se polinom  $p$  z  $f$  ujema v točki  $x_i$   $(k+1)$ -kratno, če se ujema v vrednosti in v prvih  $k$  odvodih:

$$p(x_i) = f(x_i), \quad p'(x_i) = f'(x_i), \quad \dots \quad p^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i).$$

Tak polinom  $p$  stopnje  $k$  je Taylorjev polinom:

$$p(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2}(x - x_i)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}(x - x_i)^k.$$

Posplošitev rekurzivne formule: recimo<sup>6</sup>, da je  $x_i \leq x_{i+1} \leq \dots \leq x_{i+k}$ :

$$[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]f = \begin{cases} \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}; & x_i = x_{i+1} = \dots = x_{i+k} \\ \frac{[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]f - [x_i, \dots, x_i]}{x_{i+k} - x_i}, & x_i \neq x_{i+k} \end{cases}$$

---

<sup>6</sup>Vrstni red točk v diferenci ni pomemben.

## 5 Numerično odvajanje

**Problem 5.1.** Iščemo približek za vrednost odvoda funkcije  $f$  pri nekem izbranem  $x$ . Približek bi radi izrazili s kombinacijo vrednosti funkcije  $f$  v bližnjih točkah  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .

**Metoda** (Ideja za izpeljavo aproksimacijskih formul). Kot približek za odvod funkcije  $f$  v izbranem  $x$  vzamemo vrednost odvoda interpolacijskega polinoma (ki se z  $f$  ujema v točkah  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ) pri izbranem  $x$ . Vemo že:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{i=0}^n f(x_i) \ell_{i,n}(x)}_{p(x)} + \omega(x)[x_0, x_1, \dots, x_n, x], f$$

kjer je

$$\omega(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

Odvajamo to formulo:

$$f'(x) = \underbrace{\sum_{i=0}^n f(x_i) (\ell_{i,n}(x))'}_{\text{aproksimacijska formula}} + \underbrace{(\omega(x)[x_0, x_1, \dots, x_n, x] f')'}_{\text{napaka: } R(f) \text{ ali } \mathcal{R}f}$$

**Opomba** (Odvod deljene difference).

$$\frac{d}{dx}[x_0, x_1, \dots, x_n, x]f = [x_0, x_1, \dots, x_n, x, x]f$$

**Trditev 5.1** (?).

$$f'(x_k) = p'(x_k) + \omega'(x_k)[x_0, x_1, \dots, x_n, x_k]f + \underbrace{\omega(x_k)}_0[x_0, x_1, \dots, x_n, x_k, x_k]f$$

$$f'(x_k) = p'(x_k) + \omega'(x_k) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \xi \in (x_0, x_n)$$

## 6 Numerično integriranje

**Problem 6.1.** Radi bi izračunal približek za integral

$$\mathcal{S}f = \int_a^b f(x) dx.$$

Približek bi radi izrazili s kombinacijo vrednosti funkcije  $f$  v izbranih točkah iz intervala  $[a, b]$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : \mathcal{C}([a, b]) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

Funkcional  $\mathcal{S}$  je *linearen*:

$$\mathcal{S}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{S}f + \beta \mathcal{S}g, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad f, g \in \mathcal{C}([a, b]).$$

**Metoda** (Ideja za izpeljavo formul). Namesto funkcije  $f$  integriramo interpolacijski polinom za  $f$  na točkah  $x_0, x_1, \dots, x_n$  iz intervala  $[a, b]$ ,  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ . Vemo:

$$\begin{aligned} f(x) &= p(x) + \omega(x)[x_0, x_1, \dots, x_n]f \\ p(x) &= \sum_{i=0}^n f(x_i) \ell_{i,n}(x) \\ \ell_{i,n}(x) &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \end{aligned}$$

Integriramo prvo enačbo in dobimo

$$\underbrace{\int_a^b f(x) dx}_{\mathcal{S}f} = \underbrace{\int_a^b p(x) dx}_{\text{približek za integral } \mathcal{F}f} + \underbrace{\int_a^b \omega(x)[x_0, x_1, \dots, x_n, x]f dx}_{\text{napaka } \mathcal{R}f}$$

**Trditev 6.1** (Kvadratura formula oz. integracijsko pravilo).

$$\begin{aligned} Sf &= \mathcal{F}f + \mathcal{R}f \\ \mathcal{F}f &= \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i) \ell_{i,n}(x) dx = \underbrace{\sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b \ell_{i,n}(x) dx}_{A_i} \\ \mathcal{F}f &= \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) \end{aligned}$$

- $A_i$  ... uteži integracijskega pravila
- $x_0, x_1, \dots, x_n$  ... vozli integracijskega pravila

**Definicija 6.1.** Red oziroma stopnja integracijskega pravila je enaka  $m$ , če je pravilo točno za vse polinome stopnje  $\leq m$ , to je

$$\mathcal{R}p = 0 \quad \forall p \in \mathbb{P}_m \quad \text{in} \quad \mathcal{R}x^{m+1} \neq 0.$$

Glede na izbiro vozlov ločimo:

- *Newton-Cotesova* pravila:  
vozle izberemo ekvidistantno:

$$\begin{aligned} h &= \frac{b-a}{n}, \quad x_0 = a \\ x_i &= x_0 + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Ločimo:

- Pravila odprtega tipa (upoštevamo krajišča):

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) + \mathcal{R}f$$

- Pravila zaprtega tipa (ne upoštevamo krajišč):

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^{n-1} A_i f(x_i) + \mathcal{R}f$$

- *Gaussova pravila*:  
vozle in uteži določimo tako, da je pravilo največjega možnega reda

**Pravilo** (Trapezno pravilo). Naj velja  $n = 1$ ,  $a = x_0$  in  $b = x_1 = x_0 + h$ . Potem sledi

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) - \frac{h^3}{2}f''(\xi), \quad \xi \in [x_0, x_1].$$

Za *trapezno pravilo* velja

$$\mathcal{R}1 = 0, \quad \mathcal{R}(x - x_0) = 0 \quad \text{ter} \quad \mathcal{R}(x - x_0)^2 = \frac{h^3}{6} \neq 0,$$

torej je pravilo reda 1.

**Pravilo** (Simpsonovo pravilo). Naj velja  $n = 2$ ,  $a = x_0$ ,  $x_1 = x_0 + h$  ter  $x_2 = x_0 + 2h = b$ , torej  $h = \frac{b-a}{2}$ . Potem sledi

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [x_0, x_2],$$

kjer je  $f \in \mathcal{C}^4([x_0, x_2])$ . *Simpsonovo pravilo* je reda 3.

**Trditev 6.2** (Napaka aritmetike pri Newton-Cotesovih pravilih). Recimo, da velja  $|f(x_i) - \hat{f}(x_i)| < \varepsilon$ . Ocena za napako aritmetike:

$$D_a = \left| \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) - \sum_{i=0}^n A_i \hat{f}(x_i) \right| \leq \sum_{i=0}^n |A_i| |f(x_i) - \hat{f}(x_i)| \leq \varepsilon \sum_{i=0}^n |A_i|.$$

Ker so pravila točna za konstante velja

$$\int_a^b 1 dx = \sum_{i=0}^n A_i \cdot 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^n A_i = b - a.$$

Če so vse uteži pozitivne, potem  $D_a \leq \varepsilon(b-a)$  in ni numeričnih težav.



## 6.1 Sestavljena integracijska pravila

**Ideja.** Interval  $[a, b]$  razdelimo na manjše podintervale in na vsakem podintervalu uporabimo integracijsko pravilo nizkega reda in rezultate seštejemo.

**Pravilo** (Sestavljeno trapezno pravilo).  $h = \frac{b-a}{m}$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \left( f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + f(x_m) \right) - \frac{h^2}{12} (b-a) f''(\mu)$$

**Pravilo** (Sestavljeno Simpsonovo pravilo).  $n = 2$ ,  $h = \frac{b-a}{2m}$ ,  $x_i = a + ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, 2m$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \left( f(x_0) + 4 \sum_{i=0}^{m-1} f(x_{2i+1}) + 2 \sum_{i=0}^{m-1} f(x_{2i}) + f(x_{2m}) \right) - \frac{h^4}{180} (b-a) f^{(4)}(\mu)$$

## 6.2 Ocena napake in Richardsonova ekstrapolacija

**Metoda.** Označimo z  $F_n$  približek za  $I$ , ki ga dobimo, o računamo s korakom  $h$ . Predpostavimo, da velja

$$I = F_n + c_0 \cdot h^p + \mathcal{O}(h^{p+1}),$$

kjer je  $c_0$  konstanta neodvisna od  $h$ . Z nekaj vragolijami dobimo

$$I = F_{\frac{h}{2}} + \underbrace{\frac{F_{\frac{h}{2}} - F_h}{2^p - 1}}_{\text{Ocena za napako približka } F_{\frac{h}{2}}} + \mathcal{O}(h^{p+1}) = F_h + 2^p \underbrace{\frac{F_{\frac{h}{2}} - F_h}{2^p - 1}}_{\text{Ocena za napako približka } F_h} + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

### 6.3 Gaussova pravila

**Ideja.** Vozle in uteži v integracijskem pravilu izračunamo tako, da bo pravilo čim višjega reda.

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) + \mathcal{R}f, \quad \text{neznanke : } A_i \text{ in vozli } x_i$$

Če vozle izberemo tako, da bo  $\omega \perp \mathbb{P}_n$ , potem je red pravila enak  $2n + 1$ . Velja tudi obratno.

**Opomba** (Drug način). Iz baze  $\{1, x, x^2, \dots, x^n, x^{n+1}\}$  izračunamo ON bazo polinomov  $p_0, p_1, \dots, p_n, p_{n+1}$ . Iz pogoja  $\omega \perp \mathbb{P}_n$  vidimo, da za vozle  $x_0, x_1, \dots, x_n$  izberemo ničle polinoma  $p_{n+1}$ .

**Izrek 6.1.** Naj bo  $\mathcal{F}f = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$  Gaussovo integracijsko pravilo reda  $2n + 1$ . Uteži

$$A_i = \int_a^b \ell_{i,n}(x) dx$$

so pozitivne. Za  $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a, b])$  je napaka oblike

$$\mathcal{R}f = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_a^b \omega^2(x) dx, \quad \xi \in [a, b].$$

V integral, ki ga izračunamo, lahko vstavimo še pozitivno utež  $\rho(x) > 0$ .

## 7 Numerično reševanje NDE

**Problem 7.1** (Začetni problem).

Začetni problem reda 1:

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y), \quad f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\y(a) &= y_a\end{aligned}$$

Začetni problem reda  $p$ :

$$\begin{aligned}y^{(p)} &= f(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}) \\y(a) &= y_a, \quad y'(a) = y_{a,1}, \quad y''(a) = y_{a,2}, \quad \dots, \quad y^{(p-1)}(a) = y_{a,p-1}\end{aligned}$$

**Problem 7.2** (Robni primer).

$$\begin{aligned}y^{(4)} + xy &= 0 \\y(a) &= y_a, \quad y'(a) = y_{a,1} \\y(b) &= y_b, \quad y'(b) = y_{b,1}\end{aligned}$$

**Metoda** (Eksplisitna Eulerjeva metoda).

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad x_{n+1} = x_n + h$$

**Metoda** (Implicitna Eulerjeva metoda).

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= g(y_{n+1}) \quad (g(y_{n+1}) = y_n + h \cdot f(x_{n+1}, y_{n+1})) \\y_{n+1}^{(0)} &= y_n \\ \text{while } |y_{n+1}^{(k)} - y_{n+1}^{(k-1)}| &\geq \text{tol} \cdot |y_{n+1}^{(k)}| \\y_{n+1}^{(k)} &= g(y_{n+1}^{(k)}), \quad k = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

**Metoda** (Trapezna metoda).  $x_n = a + nh$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$$

## 7.1 Globalna in lokalna napaka

**Definicija 7.1.** Metoda je *konvergentna*, če za vse DE, ki zadoščajo pogojem eksistenčnega izreka, velja:

$$\|y - y_n\|_{\infty, [a, b]} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

oziroma:

$$\max_{0 \leq n \leq m} |y(x_n) - y_n| \xrightarrow{h \rightarrow 0 \text{ oz. } m \rightarrow \infty} 0.$$

**Definicija 7.2** (Globalna napaka).

$$\max_{0 \leq n \leq m} |y(x_n) - y_n|$$

Globalna točka v točki  $x_n$ :

$$|y(x_n) - y_n|$$

**Definicija 7.3.** Metoda je reda  $r$ , če velja

$$\max_{0 \leq n \leq m} |y(x_n) - y_n| = C \cdot h^r + \mathcal{O}(h^{r+1}) = \mathcal{O}(h^r).$$

**Definicija 7.4.** *Lokalna napaka* v točki  $x_n$  je razlika med točno rešitvijo in njenim numeričnim približkom, ob predpostavki, da se ti dve rešitvi ujemata na vseh prejšnjih korakih.

$$\mathcal{T}_n(n) = y(x_n) - y_n, \quad \text{če } y(x_k) = y_k \quad \forall k < n.$$

## 7.2 Runge-Kutta metode

**Metoda** ( $s$ -stopenjska Runge-Kutta metoda). Izračunamo  $s$  koeficientov:

$$k_i = h \cdot f(x_i + \alpha_i \cdot h, y_n + \sum_{j=1}^s \beta_{ij} k_j), \quad i = 1, 2, \dots, s$$

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^s \gamma_i \cdot k_i$$

Pri tem so  $\alpha_i, \beta_{ij}, \gamma_i$  koeficienti, ki jih določimo tako, da je metoda čim višjega reda.

$$\alpha_i \in [0, 1]$$

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^s \beta_{ij}$$

Da bo R-K metoda reda vsaj 1, mora biti  $\sum_{i=1}^s \gamma_i = 1$ . R-K metode podamo v *Butcherjevi shemi*:

$\alpha_1$	$\beta_{11}$	$\beta_{12}$	$\dots$	$\beta_{1s}$
$\alpha_2$	$\beta_{21}$	$\beta_{22}$	$\dots$	$\beta_{2s}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\alpha_s$	$\beta_{s1}$	$\beta_{s2}$	$\dots$	$\beta_{ss}$
	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\dots$	$\gamma_s$

Če so  $\beta_{ij} = 0 \ \forall j \geq i$ , je metoda *eksplicitna*. Če so  $\beta_{ij} = 0 \ \forall j > i$  in je vsaj en  $\beta_{ii} \neq 0$ , je metoda *diagonalno implicitna*. Sicer je *implicitna*.

**Metoda** (Modificirana Eulerjeva metoda).

$0$	$0$	$0$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$0$
	$0$	$1$

Lokalna napaka je reda 3, oz. metoda je reda 2.

**Metoda** (Heunova metoda).

$0$	$0$	$0$
$1$	$1$	$0$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Lokalna napaka je reda 3.

**Metoda.**

$0$	$0$	$0$
$1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Lokalna napaka je reda 3. Metoda je *diagonalno implicitna*.

**Metoda** (4-stopenjska R-K metoda).

0	0			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0		
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	
1	0	0	1	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

Lokalna napaka je reda 5. Metoda je reda 4.

### 7.3 Sistemi DE 1. in višjega reda

**Problem 7.3.**

$$\begin{aligned}\underline{Y} &:= \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{bmatrix}, \quad \text{vektorska funkcija} \quad \underline{Y} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d \\ F &:= \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{bmatrix}, \quad \text{preslikava} \quad F : [a, b] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \\ \implies \underline{Y}' &= F(x, \underline{Y}), \quad \underline{Y}(a) = \underline{Y}_a = \begin{bmatrix} y_{1,a} \\ \vdots \\ y_{d,a} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Vse metode, ki smo jih spoznali, lahko direktno uporabimo za sisteme DE 1. reda.

Euler:

$$\underline{Y}_{n+1} = \underline{Y}_n + h \cdot F(x_n, \underline{Y}_n)$$

**Metoda** (Reševanje DE višjega reda). Začetni problem reda  $p$ :

$$\begin{aligned}y^{(p)} &= f(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}) \\ y(a) &= y_{a,0}, \quad y'(a) = y_{a,1}, \quad \dots, \quad y^{(p-1)}(a) = y_{a,p-1}\end{aligned}$$

Preko novih neznanih funkcij  $z_1, z_2, \dots, z_{p-1}$  prevedemo na sistem DE 1. reda:

$$\begin{aligned}
 z_1 &= y' \\
 z_2 &= z_1' = y'' \\
 z_3 &= z_2' = y''' \\
 &\vdots \\
 z_{p-1} &= z_{p-2}' = y^{(p-1)} \\
 z_{p-1}' &= y^{(p)} = f(x, y, z_1, z_2, \dots, z_{p-1})
 \end{aligned}$$

Dobimo:

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \begin{bmatrix} y \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{p-2} \\ z_{p-1} \end{bmatrix}' &= \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_{p-1} \\ f(x, y, z_1, \dots, z_{p-1}) \end{bmatrix} \\
 \underline{Y}' &= F(x, \underline{Y}) = \begin{bmatrix} \underline{Y}(2) \\ \underline{Y}(3) \\ \vdots \\ \underline{Y}(p) \\ f(x, \underline{Y}(1), \dots, \underline{Y}(p)) \end{bmatrix} \\
 \underline{Y}(a) &= \begin{bmatrix} y_{a,0} \\ y_{a,1} \\ \vdots \\ y_{a,p-1} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

## 8 Numerično računanje lastnih vrednosti

### 8.1 Potenčna metoda

**Problem 8.1.** Za dano matriko  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  iščemo dominantno lastno vrednost<sup>7</sup> in pripadajoč (dominantni) lastni vektor.

**Algoritem.**

```
z0 =  $\frac{z_0}{\|z_0\|}$   
for k = 0, 1, 2, ...  
    zk+1 =  $\frac{A z_k}{\|A z_k\|}$ 
```

Dobimo zaporedje vektorjev  $z_0, z_1, z_2, \dots$

**Izrek 8.1.** Naj bo  $\lambda_1$  *dominantna lastna vrednost*  $A$ ,

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Potem za poljuben začetni vektor  $z_0$ ,  $\|z_0\| = 1$ , zaporedje vektorjev  $(z_k)_k$ , ki jih tvori potenčna metoda, konvergira proti dominantnemu lastnemu vektorju.

**Opomba.** Predpostavka  $\alpha_1 \neq 0$  je v praksi izpolnjena zaradi zaokrožitvenih napak aritmetike.

**Metoda** (Od lastnega vektorja do lastne vrednosti). Označimo Reyleighov kvocient:

$$\rho(x, A) = \frac{x^T A x}{x^T x}$$

Ko izračunamo  $z_k$ , moramo izračunati še  $\rho_k = \rho(z_k, A) = z_k^T A z_k$ .  
Zaustavitveni kriterij:  $\|A z_k - \rho_k z_k\|_2 < tol$ .

---

<sup>7</sup>Največjo po absolutni vrednosti.



Vhodni podatki:  $A$ , toleranca  $\varepsilon$

```

z0
k = 0
y1 = A z0
s0 = z0T y1
while (||yk+1 - ρk zk|| > ε) & (k ≤ max_koraki)
    k = k+1
    zk =  $\frac{y_k}{\|y_k\|}$ 
    yk+1 = A zk
    ρk = zkT yk+1
end

```

Konvergenca je *linear*no, hitrost je odvisna od razmerja  $\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|$ .

## 8.2 Inverzna iteracija

**Problem 8.2.** Iz danega približka za lastno vrednost bi radi izračunali “točno” lastno vrednost in pripadajoč lastni vektor. Naj bo  $\sigma$  približek za  $\lambda_i$ :

$$\begin{aligned}
 |\sigma - \lambda_i| &< |\sigma - \lambda_j| \quad \forall j \neq i \\
 \frac{1}{|\sigma - \lambda_i|} &> \frac{1}{|\sigma - \lambda_j|} \quad \forall j \neq i
 \end{aligned}$$

Naj bo  $A = X\Lambda Y^{-1}$ ,  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ,  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$

$$\begin{aligned}
 (A - \sigma I)^{-1} &= (X\Lambda X^{-1} - \sigma X X^{-1})^{-1} = (X(\Lambda - \sigma I)X^{-1})^{-1} = \\
 &= (X^{-1})^{-1}(\Lambda - \sigma I)^{-1}X^{-1} = X \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1 - \sigma} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda_n - \sigma} \end{bmatrix} X^{-1}
 \end{aligned}$$

$\frac{1}{\lambda_i - \sigma}$  je dominantna lastna vrednost matrike  $(A - \sigma I)^{-1}$ , pripadajoč lastni vektor pa je kar  $x_i$ .

**Algoritem.** Vhodni podatki:  $A$ , približek  $\sigma$

```

 $z_0 = \frac{z_0}{\|z_0\|}$ 
for  $k = 0, 1, 2, \dots$ 
    resi sistem  $(A - \sigma I) y_{k+1} = z_k$ 
     $z_{k+1} = \frac{y_{k+1}}{\|y_{k+1}\|}$ 

```

### 8.3 QR iteracija

**Algoritem** (Osnovna verzija). Vhodni podatek:  $A$

```

 $A_0 = A$ 
for  $k = 0, 1, 2, \dots$ 
    izracunaj QR razcep matrike  $A_k = Q_k R_k$ 
     $A_{k+1} = R_k Q_k$ 
end

```

Dobimo zaporedje matrik  $A_0, A_1, A_2, \dots$

$$A_{k+1} = R_k Q_k = Q_k^T A_k Q_k = \dots = Q_k^T Q_{k-1}^T \dots Q_0^T A_0 Q_0 Q_1 \dots Q_k$$

**Izrek 8.2.** Naj za lastne vrednosti  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  velja  $|\lambda_1| > \dots > |\lambda_n|$ . Potem zaporedje matrik, ki ga tvori QR iteracija konvergira proti zgornje trikotni matriki iz Schurovega razcepa. Zaustavitveni kriterij:

$$\max_{1 \leq j < i \leq n} |A_k(i, j)| < \varepsilon.$$

**Algoritem** (Premiki). Vhodni podatki: zgornje Hessova matrika  $H$

```

 $A_0 = H$ 
for  $k = 0, 1, 2, \dots$ 
    izberi premik  $\sigma_k$ 
    izracunaj QR razcep matrike  $A_k - \sigma_k I = Q_k R_k$ 
     $A_{k+1} = R_k Q_k + \sigma_k I$ 
end

```

$$A_{k+1} = R_k Q_k + \sigma_k I = Q_k^T (A_k - \sigma_k I) Q_k + \sigma_k I = Q_k^T A_k Q_k$$