Slučajni procesi 1 - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar
po predavanjih profesorja Janeza Bernika

2021/22

Kazalo

Oznake.

- $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor
- $\Lambda \neq \emptyset$ indeksna množica
- $(E, \mathscr{E})$ prostor stanj

1 Uvod v procese štetja

Definicija 1.1. *Slučajni proces*, parametriziran z Λ in prostorom stanj E, je nabor slučajnih spremenljivk $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, kjer je $\Omega \to E$ $\mathscr{F}$-merljiva slučajna spremenljivka za vsak $\lambda \in \Lambda$.

Definicija 1.2. *Trajektorija* za $\omega \in \Omega$ je funkcija $t \mapsto X_t(\omega)$, si sliko $[0,\infty) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ (oz. $[0,\infty) \to (E, \mathscr{E})$).

Definicija 1.3. Naj bo $(X_t)_{t\geq 0}$ slučajni proces na $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ za vrednostmi v $(E, \mathscr{E})$. Za vsak nabor $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ ima k-razsežni slučajni vektor $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_k})$ skupno porazdelitev. Takim porazdelitvam pravimo *končno razsežne robne porazdelitve.*

Posledica. Naj bosta $(X_t)_{t\geq 0}$ in $(Y_t)_{t\geq 0}$ dva različna procesa. Če velja

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_k}) \stackrel{(d)}{=} (Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_k}),$$

$\forall 0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_k$, $\forall k \geq 1$, potem za $\forall A \in \mathscr{F}_\infty$ in $\forall \tilde{A} \in \tilde{\mathscr{F}}_\infty$ ($\tilde{\mathscr{F}}_\infty := \sigma\{(Y_t)_{t\geq 0}\}$), ki sta določeni "na enak način", potem

$$\mathbb{P}\{A\} = \mathbb{P}\{\tilde{A}\}.$$

Rečemo $(X_t)_{t\geq 0} \stackrel{(d)}{=} (Y_t)_{t\geq 0}$. Če za enak nabor t_i velja

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_k}) \perp\!\!\!\perp (Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_k}),$$

potem $\forall A \in \mathscr{F}_\infty$, $\forall B \in \tilde{\mathscr{F}}_\infty$ velja

$$\mathbb{P}\{A \cap B\} = \mathbb{P}\{A\}\mathbb{P}\{B\},$$

procesa sta *neodvisna*.

Definicija 1.4. Naj bo $(E, \mathscr{E}) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_k$:

$$X_{t_1} - X_{t_0},\ X_{t_2} - X_{t_1},\ \ldots\ ,\ X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$$

so *prirastki.*

Definicija 1.5. Proces $(X_t)_{t \geq 0}$ ima *neodvisne prirastke*, če so za vsak nabor $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ slučajne spremenljivke/vektorji $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$ neodvisni. Prirastki prek neprekrivajočih intervalov takega procesa so neodvisni.

Definicija 1.6. Proces $(X_t)_{t \geq 0}$ ima *stacionarne prirastke*, če za vsak $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_k$, velja

$$(X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) \stackrel{(d)}{=} (X_{t_1+h} - X_{t_0+h}, \ldots, X_{t_k+h} - X_{t_{k-1}+h}), \quad \forall h \geq 0.$$

Definicija 1.7. *Lévyjevi procesi* so slučajni procesi z neodvisnimi, stacionarnimi ter càdlàg trajektorijami.

Definicija 1.8.

- $\mathscr{F}_t := \sigma\{X_s \mid 0 \leq s \leq t\}$
- $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}, (\mathscr{F}_t)_{t \geq 0})$ filtriran verjetnostni prostor
- $T : \Omega \to [0, \infty]$ je čas ustavljanja, če $\{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t$, $\forall t \geq 0$
- $\mathscr{F}_T := \{A \in \mathscr{F} \mid A \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t, \forall t \geq 0\}$ σ-algebra zgodovine časa T

Če je proces càdlàg, je T merljiva glede na $\mathscr{F}_T$ in X_T na $\{T < \infty\}$ merljiva glede na $\mathscr{F}_T$.

Definicija 1.9. *Proces štetja* $(N_t)_{t \geq 0}$ je slučajni proces s prostorom stanj $(\mathbb{N}_0, 2^{\mathbb{N}_0}) \subseteq (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, pri katerem so trajektorije $t \mapsto N_t(\omega)$, $t \geq 0$ nepadajoče, zvezne z desne in z vrednostmi v $\mathbb{N}_0$. Iz same definicije sledi, da je proces càdlàg.

Definicija 1.10. *Zaporedni časi skokov*:

- $S_1 := \inf\{t \mid N_t \neq N_0\}$
- $S_{n+1} := \inf\{t > S_n \mid N_t \neq N_{S_n}\}\mathbb{1}_{\{S_n \infty\}} + \infty \mathbb{1}_{\{S_n = \infty\}}$

Časi skokov so časi ustavljanja.

Definicija 1.11. Definiramo *višino n-tega skoka* $\Delta(S_n) := N_{S_n} - N_{S_n^-}$, kjer je $N_{S_n^-} := \lim_{s \nearrow S_n} N_s$. Proces štetja je *enostaven*, če je $\Delta(S_n) = 1$, kadarkoli je definirana. V takem primeru velja

$$N_t \;=\; N_0 + \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n \leq t\}}.$$

2 Homogeni Poissonov proces (Poissonov tok)

Definicija 2.1. Naj bo $\lambda > 0$ dano realno število. *Enostavni proces štetja* $(N_t)_{t \geq 0}$, za katerega je $N_0 = 0$, je HPP(λ), če zanj velja ena od naslednjih trditev:

1. Proces $t \geq 0$ ima neodvisne in stacionarne prirastke in za $\forall t \geq 0$ je
$$N_t \overset{(d)}{=} \mathrm{Pois}(\lambda t).$$
Če to velja, potem:
   - $N_{t+s} - N_t \overset{(d)}{=} N_s - \underbrace{N_0}_{=0} = N_s \overset{(d)}{=} \mathrm{Pois}(\lambda s)$
   - za "porazdelitev proces" potrebujemo (načeloma) pokazati
   $$\begin{aligned}(N_{t_0}, N_{t_1}, \dots, N_{t_k}) &\overset{(d)}{=} (N_{t_0}, N_{t_0} + (N_{t_1} - N_{t_0}), \dots, N_{t_0} + (N_{t_1} - N_{t_0}) + (N_{t_k} - N_{t_{k-1}}) \\ &= \varphi(N_{t_0}, N_{t_1} - N_{t_0}, \dots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}})\end{aligned}$$
2. *Infinetzimalna karakterizacija*: proces $(N_t)_{t \geq 0}$ ima neodvisne in stacionarne prirastke in velja
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{N_t = 1\} &= \lambda t + o(t) \\ \mathbb{P}\{N_t \geq 2\} &= o(t),\end{aligned}$$
kjer je $o(t) \in \{g(t) \mid \lim_{t \searrow 0} \frac{g(t)}{t} = 0\}$.
3. *Lastnost medprihodnih časov*: zaporedni časi skokov S_n so končni s.g., t.j. $\mathbb{P}\{S_n < \infty\} = 1 \ \forall n$. $S_0 = 0$. Potem je zaporedje *medprihodnih časov*
$$T_i := S_i - S_{i-1}, \ i \geq 1,$$
dobro definirano in porazdeljeno kot zaporedje n.e.p. Exp(λ) slučajnih spremenljivk. Ta pogoj nam da tudi eksistenco HPP(λ). $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, $(E_i)_{i \geq 1}$ n.e.p. s Exp(λ), $W_n := \sum_{i=1}^n E_i$. Potem je
$$N_t := \sum_{k \geq 1} \mathbb{1}_{\{W_k \leq t\}}$$
HPP(λ).

4. *Lastnost vrstilnih statistik*: za $\forall t \geq 0$ je $N_t \overset{(d)}{=} \mathrm{Pois}(\lambda t)$ in pogojno na $\{N_t = k\}, k \geq 1$, je vektor

$$(S_1, \ldots, S_n) \mid \{N_t = k\} \overset{(d)}{=} (U_{(1)}, \ldots, U_{(k)}),$$

kjer je $(U_{(1)}, \ldots, U_{(k)})$ vektor vrstilnih statistik za vektor $(U_1, \ldots, U_k)$ z n.e.p. $\mathcal{U}([0, t])$ porazdeljenimi komponentami.

Trditev 2.1 (Zakon redkih dogodkov; osnovna verzija)**.** Naj bo $(Y_n)_{n \geq 0}$ zaporedje slučajnih $Y_n \overset{(d)}{=} \mathrm{Ber}(n, p_n)$ in obstaja $\lim_{n\to\infty} n\, p_n = c > 0$. Potem

$$Y_n \xrightarrow{(d)} \mathrm{Pois}(c).$$

Lema 1 (Lema Slutskega)**.** Naj bosta $(X_n)_{n \geq 0}$ in $(Y_n)_{n \geq 0}$ taka, da $X_n \xrightarrow{(d)} X$ in $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c \in \mathbb{R}$. Potem velja

$$X_n + Y_n \xrightarrow{(d)} X + c.$$

Lema 2. Dana so števila $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$, $\lambda := \sum_{i=1}^n \lambda_i$, $p_i := \frac{\lambda_i}{\lambda}$. Za nabor $Z_1, \ldots, Z_n$, slučajne spremenljivke z vrednostmi v $\mathbb{N}_0$ sta ekvivalentni trditvi:

1. $Z_1, \ldots, Z_n$ so neodvisne in $Z_i \overset{(d)}{=} \mathrm{Pois}(\lambda_i)$

2. $Z := Z_1 + \ldots + Z_n \overset{(d)}{=} \mathrm{Pois}(\lambda)$ in, pogojno na $\{Z = k\}$, $k \geq 1$, je slučajni vektor $(Z_1, \ldots, Z_n)$ porazdeljen z $\mathrm{Mult}(k; p_1, \ldots, p_n)$, tj.

$$\mathbb{P}\{Z_1 = j_1, \ldots, Z_n = j_n \mid Z = k\} = \frac{k!}{j_1! \cdot \ldots \cdot j_n!} p_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{j_n},$$

kjer $j_1 + \ldots + j_n = k$.

Opomba. V literaturi bomo pogosto zasledili naslednjo definicijo HPP(λ):

$$(\triangle)\begin{cases} N_0 = 0 \text{ s.g.} \\ \text{prirastki neodvisni, stacionarni in } N_t \overset{(d)}{=} \text{Pois}(\lambda t),\ \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Ta definicija želi $N_0 = 0$ le do s.g.-enakosti in ne zahteva, da je proces štetja enostaven. Da se zlahka videti, da je proces, ki zadošča ($\triangle$), skoraj gotovo enostaven.

Trditev 2.2 (Enostavna lastnost Markova za HPP)**.** Naj bo $(N_t)_{t\geq 0}$ HPP(λ). Za $t > 0$ definiramo

$$\tilde{N}_s \;:=\; N_{t+s} - N_t, \quad s \geq 0.$$

$(\tilde{N}_s)_{s\geq 0}$ je tudi HPP(λ) in neodvisna od $\mathscr{F}_t = \sigma\left(\{N_u \mid 0 \leq u \leq t\}\right)$.

Posledica.

- $S_2 \mid \{N_t = 1\} \overset{(d)}{=} t + \text{Exp}(\lambda)$
- $S_{N_t+1} \overset{(d)}{=} t + \text{Exp}(\lambda)$
- $\mathbb{E}[S_{N_t+1}] = t + \frac{1}{\lambda}$

Trditev 2.3 (Krepka lastnost Markova za HPP)**.** Naj bo $(N_t)_{t\geq 0}$ HPP(λ), $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ naravna filtracija in T čas ustavljanja za $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$. Na $\{T < \infty\}$ definiramo

$$\tilde{N}_s \;:=\; N_{T+s} - N_T.$$

Potem je $(\tilde{N}_s)_{s\geq 0}$, pogojno na $\{T < \infty\}$, HPP(λ) in neodvisen od

$$\mathscr{F}_T \;=\; \{A \in \mathscr{F}_\infty \mid A \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t,\ \forall t \geq 0\}.$$

Posledica. Na dogodku $\{S_1 < \infty\}$ je $(N_{S_1+t} - N_{S_1})_{t\geq 0}$ HPP(λ) in neodvisen od $\mathscr{F}_{S_1}$.

Definicija 2.2 (Starost in presežek)**.** Za $t \geq 0$ definiramo

- presežek (excess): $E_t = S_{N_t+1} - t$
- starost (age): $A_t = t - S_{N_t}$, ki je merljiva glede na $\mathscr{F}_t$

Trditev 2.4 (Enostavna lastnost Markova za $(E_t)_{t\geq 0}$ in $(A_t)_{t\geq 0}$)**.** $E_t \stackrel{(d)}{=} \text{Exp}(\lambda)$ in neodvisen od $\mathscr{F}_t$ (torej tudi od A_t). Za U, V neodvisni $\text{Exp}(\lambda)$-porazdeljeni slučajni spremenljivki je $(E_t, A_t) \stackrel{(d)}{=} (U, V \wedge t)$. Če definiramo L_t, dolžino medprihodnega časa, ki zaobjema čas t, velja

$$\begin{aligned} L_t &= S_{N_t+1} - S_t \\ &= A_t + E_t \end{aligned}$$

Za L_t velja *paradoks medprihodnega časa*:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[L_t] = \frac{2}{\lambda},$$

medtem ko je upanje dolžin drugih medprihodnih časov $\frac{1}{\lambda}$.

Markiranje HPP(λ)

Definicija 2.3 (Markiranje HPP)**.** Naj bo $(N_t)_{t\geq 0}$ HPP(λ), $(S_i)_{i\geq 1}$ zaporedje prihodov ter $(X_n)_{n\geq 1}$ zaporedje n.e.p. (d-razsežnih) slučajnih vektorjev, neodvisno od $(N_t)_{t\geq 0}$. Zaporedju $(S_i, X_i)_{i\geq 1}$ pravimo *markiranje* HPP(λ) z zaporedjem oznak (markacij) $(X_n)_{n\geq 1}$. Za $i \in \mathbb{N}$ je $(S_i, X_i) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^d$.

Oznake.

- μ ... skupni zakon $(X_n)_{n\geq 1}$ na $\mathbb{R}^d$
  - μ je mera na $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$
  - $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$
  - $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$: $\mu(B) = \mathbb{P}\{X \in B\}$

- ν ... produktna mera na $\big([0,\infty)\times\mathbb{R}^d, \mathscr{B}\big([0,\infty)\times\mathbb{R}^d\big)\big)$, kjer je 1. faktor λ-večkratnik Lebesgueove mere na $([0,\infty), \mathscr{B}([0,\infty)))$, 2. faktor pa μ na $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$:

  $$\nu(ds, dx) \;=\; \lambda \mathbb{1}_{\{s>0\}} ds \otimes d\mu(x),$$

  tj. za produktno množico oblike $A = [a,b]\times C$, $0 \le a \le b$, $C \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$,

  $$\nu(A) \;=\; \lambda(b-a)\cdot\mu(C).$$

Izrek 2.1. Naj bodo $A_1,\dots,A_m \subset [0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ Borelovo merljive paroma disjunktne množice, kjer je $\forall i\ A_i$ omejena v časovni komponentni, tj. $\exists T>0$ tak, da $A_i \subset [0,T]\times\mathbb{R}^d$, $i\in\{1,\dots,m\}$. Postavimo

$$N(A) \;=\; \sum_{i\ge 1} \mathbb{1}_{\{(S_i,X_i)\in A\}}.$$

Pri teh predpostavkah so komponente $(N(A_1),\dots,N(A_m))$ neodvisne, pri čemer je

$$N(A_i) \;\overset{(d)}{=}\; \mathrm{Pois}(\nu(A_i)).$$

Trditev 2.5 (Redčenje HPP(λ))**.** Naj bo $(N_t)_{t\ge0}$ HPP(λ) in $(X_i)_{i\ge1}$ zaporedje Ber(p)-porazdeljenih slučajnih spremenljivk, neodvisnih od $(N_t)_{t\ge0}$. Postavimo

$$N_t^1 \;=\; \sum_{i\ge1} \mathbb{1}_{\{S_i\le t, X_i=1\}},$$
$$N_t^0 \;=\; \sum_{i\ge1} \mathbb{1}_{\{S_i\le t, X_i=0\}}.$$

Očitno,

$$N_t^0 + N_t^1 \;=\; N_t, \quad t\ge 0.$$

Procesa $(N_t^0)_{t\ge0}$, $(N_t^1)_{t\ge0}$ sta neodvisna HPP, prvi z intenzivnostjo $\lambda_0 = (1-p)\lambda$, drugi pa z $\lambda_1 = p\lambda$. Tukaj je $\mu = p\delta_{\{1\}} + (1-p)\delta_{\{0\}}$.

Trditev 2.6 (Superpozicija HPP)**.** Naj bo

$$X_i \ := \ \mathbb{1}_{\{S_i = S_k^1, \text{ za nek } k\}} \ = \ \sum_{k \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_i = S_k^1\}}.$$

X_i je Bernoullijeva slučajna spremenljivka, ki pokaže 1, če je bil i-ti prihod združenega procesa $(N_t)_{t \geq 0}$ prihod, ki je prišel oz. iz $(N_t^1)_{t \geq 0}$. $(X_i)_{i \geq 1}$ ke zaporedje n.e.p. slučajnih spremenljivk, porazdeljenih s $\mathrm{Ber}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0 + \lambda_1}\right)$. Še več, to zaporedje je neodvisno od $(N_t)_{t \geq 0}$.

3 Nehomogeni Poissonov proces

Definicija 3.1 (Sprememba ure)**.** Naj bo $R : [0, \infty) \to [0, \infty)$ nepadajoča funkcija, càdlàg (zaradi enostavnosti lahko predpostavimo $\mathbb{R}(x) = 0$, $x < 0$) in $(\tilde{N}_t)_{t \geq 0}$ homogen Poissonov proces na $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ z intenzivnostjo 1. Definirajmo

$$N_t \; = \; \tilde{N}_{R(t)}, \quad t \geq 0.$$

Zlahka se prepričamo, da velja:

- proces $(N_t)_{t \geq 0}$ ima neodvisne prirastke,
- za $0 \leq s < t$ je $N_t - N_s \overset{(d)}{=} \text{Pois}\,(R(t) - R(s))$.

Procesu $(N_t)_{t \geq 0}$ rečemo nehomogen Poissonov proces z intenzivnostno mero μ, kjer je μ σ-končna mera na $(\mathbb{R}^+, \mathscr{B}(\mathbb{R}^+))$, ki jo porodi R s predpisom

$$\mu\,([0, a]) \; = \; R(a), \quad a \geq 0.$$

Definicija 3.2 (Nehomogen Poissonov proces)**.** Naj bo μ mera na $(\mathbb{R}^+, \mathscr{B}(\mathbb{R}^+))$, kjer $\mu\,([0, a]) < \infty$ za vse $a \geq 0$. Definirajmo $R(t) = \mu\,([0, t])$, $t \geq 0$, ki je nepadajoča funkcija, zvezna z desne. Procesu štetja $(N_t)_{t \geq 0}$, ki ima neodvisne prirastke in za katerega velja, da je za poljubno $0 \leq s < t$

$$N_t - N_s \; \overset{(d)}{=} \; \text{Pois}\,(\mu\,((s, t])) \; = \; \text{Pois}\,(R(t) - R(s))$$

rečemo *nehomogeni Poissonov proces* z intenzivnostno mero μ.

Definicija 3.3 (Trenutna intenzivnost)**.** Naj bo μ absolutno zvezna glede na Lebesgueovo mero, $\mu \ll \mathscr{L}$. Po Radon-Nikodymovem izreku, $\frac{d\mu(s)}{d\mathscr{L}(s)} = \rho(s)$, kjer je $\rho \in L^1_{\text{loc}}\,(\mathbb{R}^+, \mathscr{L})$ lokalno integrabilna[1]. Očitno je $\rho \geq 0$ s.p. V tem primeru je

$$R(t) \; = \; \int_0^t \rho(s)\, ds$$

in za $0 \leq u < v$ je

$$N_v - N_u \; \overset{(d)}{=} \; \text{Pois}\left(\int_u^v \rho(s)\, ds\right).$$

[1]absolutno integrabilna na vsakem končnem intervalu

V posebnem primeru, ko je $\rho(t) = \lambda > 0$ in $R(t) = \lambda t$ na privede nazaj do HPP(λ).

Trditev 3.1 (Nehomogena lastnost Markova)**.** Naj bo $\mathscr{F}_t := \sigma\left(\{N_s \mid 0 \leq s \leq t\}\right)$, $t \geq 0$, naravna filtracija za $(N_t)_{t\geq 0}$ z intenzivnostjo μ. Proces $(N_{t+s} - N_t)_{s\geq 0}$ je neodvisen od $\mathscr{F}_t$ in je nehomogen Poissonov proces, z intezivnostno mero, porojeno z

$$R(s) \;=\; R(t+s) - R(t) \;=\; \mu\left((0,s]\right), \quad s \geq 0.$$

Če je $\frac{dR}{dt} = \rho(t)$ trenutna intenzivnost za $(N_t)_{t\geq 0}$, je za $(N_{t+s} - N_t)_{s\geq 0}$ trenutna intenzivnost $\rho_1(s) = \rho(t+s)$, $s \geq 0$.

Trditev 3.2 (Krepka nehomogena lastnost Markova)**.** Naj bo T čas ustavljanja glede na naravno filtracijo $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$, je na dogodku $\{T < \infty\}$ proces $(N_{T+s} - N_T)_{s\geq 0}$, pogojno na $\{T < \infty\}$ in $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$, nehomogen Poissonov proces z intenzivnostno funkcijo,

$$\begin{aligned} R_1(s) &= R(T+s), \\ \rho_1(s) &= \rho(T+s), \quad s \geq 0, \end{aligned}$$

če ρ obstaja.

Trditev 3.3. Lastnost vrstilnih statistik]Naj bo $(N_t)_{t\geq 0}$ nehomogen Poissonov proces, $R(t)$, $0 \leq s \leq t$ taka, da je $R(t) - R(s) > 0$. Potem je

$$(S_{N_s+1}, \ldots, S_{N_s+k}) \mid \{N_t - N_s = k\} \stackrel{(d)}{=} \left(Y_{(1)}, \ldots, Y_{(k)}\right).$$

V posebnem, če obstaja trenutna intenzivnost ρ, imajo $Y_1, \ldots, Y_k$ gostoto

$$\frac{\rho(u)}{R(t) - R(s)} \mathbb{1}_{(s,t]}(u).$$

Komentar.

- Pogojna porazdelitev za $(S_{N_s+1}, \ldots, S_{N_s+k})$ in $\left(Y_{(1)}, \ldots, Y_{(k)}\right)$ se ujemata na družini

$$\mathcal{U} \;=\; \{(s_1, t_1] \times \ldots \times (s_k, t_k] \mid s < s_1 \leq t_1 < \ldots < s_k \leq t_k \leq t\}.$$

  $\mathcal{U}$ je zaprta za neskončne preseke in generira Borelovo σ-algebro

$$\mathcal{V} \;=\; \{(x_1, \ldots, x_k) \mid s < x_1 \leq \ldots \leq x_k \leq t\}.$$

  Če je $\mathcal{U}$ π-sistem, po Dynkinovem π-λ izreku sledi

$$(S_{N_s+1}, \ldots, S_{N_s+k}) \;\stackrel{(d)}{=}\; \left(Y_{(1)}, \ldots, Y_{(k)}\right).$$

- μ je Radonova mera na $([0,\infty), \mathscr{B}([0,\infty))) \iff R : [0,\infty) \to [0,\infty)$ je nepadajoča in zvezna z desne.

Trditev 3.4 (Infinetzimalna karakterizacija[2]). Imamo proces štetja $(N_t)_{t\geq 0}$, ki ima neodvisne prirastke, skoke velikosti 1 in zvezno nenegativno funkcijo $\rho : [0,\infty) \to [0,\infty)$,

- $\mathbb{P}\{N_{t+h} - N_t = 1\} = \rho(t)h + o_t^1(h)$,
- $\mathbb{P}\{N_{t+h} - N_t \geq 2\} = o_t^2(h)$,

pri čemer je $\lim_{h\searrow 0} \frac{o_t^i(h)}{h} = 0$, $i \in \{1,2\}$, enakomerno za $t \in [0,T]$, $\forall T \geq 0$. Potem je za $\forall s < t$

$$N_t - N_s \;\stackrel{(d)}{=}\; \mathrm{Pois}\left(R(t) - R(s)\right) \;=\; \mathrm{Pois}\left(\int_s^t \rho(u)\, du\right).$$

Izrek 3.1. Naj bo $(N_t)_{t\geq 0}$ nehomogen Poissonov proces na $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ z intenzivnostno mero μ. Denimo, da je $R(t) = \mu([0,t])$ strogo naraščajoča zvezna funkcija in $R(0) = 0$. Potem na morda razširjenem[3] verjetnostnem prostoru $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ obstaja homogen Poissonov proces $(\tilde{N}_t)_{t\geq 0}$ z intenzivnostjo 1, da velja

$$N_t \;=\; \tilde{N}_{R(t)}, \quad t \geq 0.$$

[2] za primer, ko je ρ zvezna

[3] v zapiskih piše na istem???

4 Prenovitveni procesi

Definicija 4.1 (Prenovitveni proces)**.** Naj bo $(T_i)_{t\geq 1}$ zaporedje neodvisnih in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk, $T_i \sim F$. Predpostavke so:

- $F(0) = \mathbb{P}\{T_i = 0\} < 1$ (T_i niso s.g. enake 0),
- $\mu = \mathbb{E}[T_i] = \int_{[0,\infty)} x\, dF(x) \leq \infty$ označuje pričakovan medprihodni čas, pri čemer dopuščamo $\mu = \infty$. Velja pa tudi $\mu > 0$.

Definiramo zaporedne čase prihodov oz. prenovitvene trenutno

$$\begin{aligned} S_0 &= 0, \\ S_k &= \sum_{i=1}^{k} T_i, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Potem je *prenovitveni proces* $(N_t)_{t\geq 0}$ definiran z

$$N_t = \sum_{k\geq 1} \mathbb{1}_{\{S_k \leq t\}} = \sup\{k \mid S_k \leq t\}.$$

Komentar. Za porazdelitev N_0 velja

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{N_0 = k\} &= \mathbb{P}\{S_k = 0, S_{k+1} > 0\} \\ &= \mathbb{P}\{T_1 = 0, \ldots, T_k = 0, T_{k+1} > 0\} \\ &= F(0)^k(1 - F(0)) \end{aligned}$$

Torej $N_0 \overset{(d)}{=} \text{Geom}\,(1 - F(0)) - 1$ in $\mathbb{P}\{N_0 = 0\} = 1$.

Trditev 4.1 (Lastnosti)**.**

- Proces $(N_t)_{t\geq 0}$ je nepadajoč in zvezen z desne. Verjetnost eksplozije je enaka 0.
- $\mathbb{P}\{N_t = \infty\} = \mathbb{P}\{S_k \leq t, \forall k \geq 1\} = 0$ za vsak $t \geq 0$.
- $S_k \leq t$ le za končno mnogo k s.g.
- Na $\{t \geq S_k\}$ je $N_t \geq k$.

- Ker je s.g. $S_k < \infty$ za vsak k, je torej $\lim_{t\to\infty} N_t = \infty$ s.g.

Vidimo, da na dogodku z verjetnostjo 1 proces $(N_t)_{t\geq 0}$ zadošča zahtevam procesa štetja.

Definicija 4.2. Slučajn spremenljivka T je *aritmetična*, če $\exists a > 0$ tak, da

$$\mathbb{P}\{T \in \mathbb{Z}a\} \;=\; 1,$$

torej T s.g. pokaže le večkratnike števila a.

Definicija 4.3 (Prenovitvena mera)**.** Na bo $(N_t)_{t\geq 0}$ prenovitveni proces. Za $t \geq 0$ definiramo *prenovitveno mero*

$$M(t) \;=\; \mathbb{E}[N_t].$$

Za $t < 0$ lahko postavimo $M(t) = 0$.

Definicija 4.4 (k-ta konvolucija)**.** Za porazdelitveno funkcijo F, kjer $T_i \sim F$, definiramo k-to konvolucijo kot

$$F^{k*}(x) \;=\; \mathbb{P}\{S_k \leq x\} \;=\; \mathbb{P}\{T_1 + \ldots + T_k \leq x\}.$$

V posebnem je $F^{0*} = \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$ Heavisideova funkcija, tore je porazdelitev s.g. enaka konstanti 0. Ker je $S_{k+1} = S_k + T_{k+1}$ velja rekurzivna zveza

$$F^{(k+1)*}(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}} F^{k*}(x-s)\, dF(s) \;=\; F^{k*} * F.$$

Komentar. Izkaže se, da za neodvisni slučajni spremenljivki $U \sim F$ in $V \sim G$ velja

$$U + V \;\sim\; F * G,$$

kjer

$$F * G(t) \;=\; \begin{cases} 0\,; & t < 0, \\ \int_{[0,t]} F(t-s)\, dG(s) = \int_{[0,t]} G(t-s)\, dF(s)\,; & t \geq 0. \end{cases}$$

Trditev 4.2. Vsaka nepadajoča, zvezna iz desne funkcija $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ porodi mero oz. zakon μ na $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ s predpisom

$$\mu\left((a,b]\right) \;=\; H(b) - H(a) \;=\; \int_{(a,b]} dH(x),$$

ki ga lahko enolično razširimo na celotno Borelovo σ-algebro.

Trditev 4.3 (Lastnosti)**.** Za prenovitveni proces $(N_t)_{t\geq 0}$ z medprihodno porazdelitvijo F velja naslednje.

- Za vsak $t \geq 0$ in $r \geq 0$ je $\mathbb{E}[N_t^r] < \infty$. V posebnem je $M(t)$ dobro definirana.
- Velja
$$M(t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} F^{k*}(t).$$
Pri tem je $M(t)$ nepadajoča in zvezna z desne. Velja še $\lim_{t\to\infty} M(t) = \infty$.
- Za Laplace-Stieltjesevo transformacijo $\hat{M}(s)$ prenovitvene mere M velja
$$\hat{M}(s) \;=\; \int_{[0,\infty)} e^{-sx}\, dM(x) \;=\; \frac{\hat{F}(s)}{1-\hat{F}(s)}, \quad s \geq 0,$$
pri čemer je $\hat{F}(s) = \int_{[0,\infty)} e^{-sx}\, dF(x) = \mathbb{E}[e^{-sT}]$ Laplace-Stieltjesova transformacija porazdelitvene funkcije F oz. Laplaceova transformacija slučajne spremenljivke T.

Izrek 4.1 (Elementarni prenovitveni izrek)**.** Za prenovitveno mero M velja

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} \;=\; \frac{1}{\mu} \;=\; \frac{1}{\mathbb{E}[T]} \in [0,\infty).$$

Trditev 4.4 (Asimptotske lastnosti)**.**

- KZVŠ:
$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mu} \quad \text{s.g.}$$

- CLI: pod pogojem $\sigma^2 = \mathrm{Var}[T] < \infty$ velja
$$\frac{N_t - \frac{t}{\mu}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0,1).$$

Definicija 4.5 (Prenovitev z zaostankom)**.** Naj bo zaporedje medprihodnih časov $(T_i)_{t\geq 0}$ zaporedje neodvisnih nenegativnih slučajnih spremenljivk, pri čemer

- $T_1 \sim G$,
- $T_2, T_3, \ldots \sim F$,

kjer $\mu = \mathbb{E}[T_2] = \int_{[0,\infty)} x\, dF(x)$, $F(0) = \mathbb{P}\{T_2 = 0\} < 1$. Kot prej naj bo (za $t \geq 0$)

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{i=1}^{k} T_i, \\ N_t &= \sum_{k\geq 1} \mathbb{1}_{\{S_k \leq t\}}, \\ M(t) &= \mathbb{E}[N_t]. \end{aligned}$$

Trditev 4.5 (Lastnosti)**.**

- Proces $(N_t)_{t\geq 0}$ ima s.g. nepadajoče, z desne zvezne trajektorije, nima eksplozije in $\lim_{t\to\infty} N_t = \infty$.
- $\mathbb{E}[N_t^r] < \infty$, $\forall \{t, r\} \subset \mathbb{R}_0^+$. V posebnem je $M(t)$ dobro definirana, z desne zvezna funkcija.

- Velja
$$M(t) \;=\; \sum_{k\geq 0} G * F^{k*}(t) \;=\; \sum_{k\geq 1} G * F^{(k-1)*}(t),$$
kjer je
$$G * F^{k*}(t) \;=\; \int_{[0,t]} G(t-s)\, dF^{k*}(s), \quad k \geq 0, t \geq 0.$$
- $\hat{M}(s) = \frac{\hat{G}(s)}{1-\hat{F}(s)}$
- $\lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mathbb{E}[T_2]}$
- $\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mu}$ s.g.

Zadnji dve lastnosti pomenita, da na dolgi rok vpliv drugačne porazdelitve T_1 izzveni.

Trditev 4.6. Naj bo $(N_t)_{t\geq 0}$ prenovitveni proces z zaostankom (ali brez). Za $t \geq 0$ definiramo
$$\tilde{N}_s \;:=\; N_{t+s} - N_t, \quad s \geq 0.$$
Potem je $(\tilde{N}_s)_{s\geq 0}$ prenovitveni proces z zaostankom $\tilde{T}_1 = S_{N_t+1} - t$. $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \ldots$ so neodvisni od $\tilde{T}_1$, enako porazdeljene kot T_2.

Definicija 4.6 (Porazdelitev integriranega repa)**.** Naj bo $(N_t)_{t\geq 0}$ prenovitveni proces z zamikom tak, da
$$\mu \;=\; \mathbb{E}[T_2] \;=\; \int_{[0,\infty)} x\, dF(x) < \infty.$$
Porazdelitev integriranega repa G_* za F je potem podana z
$$G_*(x) \;=\; \frac{1}{\mu} \int_0^x (1 - F(u))\; du \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x).$$

Komentar. $G_*(0) = 0$, $\lim_{x\to\infty} G_*(x) = 1$

Trditev 4.7. Naj bodo $T_2, T_3, \ldots \sim F$, $\mu < \infty$ in $T_1 \sim G_*$. Potem velja

$$M(t) \;=\; \mathbb{E}[N_t] \;=\; \frac{t}{\mu}.$$

Definicija 4.7 (Stacionarnost)**.** Za proces štetka $(N_t)_{t\geq 0}$ rečemo, da je stacionaren, če za vsak $t \geq 0$ velja

$$(N_{t+s} - N_t)_{s\geq 0} \;\overset{(d)}{=}\; (N_s)_{s\geq 0},$$

t.j., da statistične ne moremo ugotoviti, ali spremljamo proces od začetka, ali pa šele od nekega časa t naprej.

Trditev 4.8. Za prenovitveni proces z zaostankom $(N_t)_{t\geq 0}$ vela, da je stacionaren natanko tedaj, ko je $\mu = \mathbb{E}[T_2] < \infty$ in ima T_1 porazdelitev integriranega repa glede na T_2.

Izrek 4.2 (Blackwellov prenovitveni izrek)**.** Naj bo $(N_t)_{t\geq 0}$ prenovitveni proces z medprihodno porazdelitvijo F, ki ni aritmetičn, $M(t) = \mathbb{E}[N_t]$, $\mu = \mathbb{E}[T] = \int_{[0,\infty)} x\, dF(x) \leq \infty$. Potem velja

$$\lim_{t\to\infty} \left(M(t+h) - M(t)\right) \;=\; \frac{h}{\mu}, \quad h \geq 0.$$

Opomba. Zgornji izrek velja tudi v primeru, ko je medprihodna porazdelitev aritmetična, a v tem primeru le za take h, ki so večkratniki razpona F.

5 Prenovitvene enačbe

Definicija 5.1 (Prenovitvena enačba)**.** Naj bo $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ merljiva, lokalno omejena funkcija in F porazdelitvena funkcija nenegativne slučajne spremenljivke T, ki ni s.g. enaka 0, t.j. $F(0) < 1$. Iščemo funkcio g, ki je konstantna 0 na $(-\infty, 0)$ in $g(t - \cdot) \in L^1(dF)$ $\forall t \geq 0$, in za katero velja

$$g(t) \;=\; h(t) + \int_{[0,t]} g(t-s)\, dF(s), \quad t \geq 0,$$

oz. na krajše

$$g \;=\; h + g * F.$$

Taki enačbi pravimo (h, F)-prenovitvena enačba.

Trditev 5.1. Prenovitvena mera $M(t)$ prenovitvenega procesa z medprihodno porazdelitvijo F zadošča (F, F)-prenovitveni enačbi

$$M \;=\; F + M * F.$$

Trditev 5.2. Prenovitvena mera $M(t)$ prenovitvenega procesa z zaostankom, kjer $T_1 \sim G$, $T_2, T_3, \ldots \sim F$, zadošča (G, F)-prenovitveni enačbi

$$M \;=\; G + M * F.$$

Posledica.

- $M = G + M * F$ sledi

$$\begin{aligned} \hat{M} \;&=\; \hat{G} + \widehat{M * F} \\ &=\; \hat{G} + \hat{M} \cdot \hat{F} \implies \hat{M} = \frac{\hat{G}}{1 - \hat{F}}. \end{aligned}$$

Definicija 5.2 (Porazdelitev starosti in presežka)**.** Naj bosta $A_t = t - S_{N_t}$ startost in $E_t = S_{N_t+1} - t$ presežek prenovitvenega procesa $(N_t)_{t\geq 0}$ z medprehodno porazdelitvijo F ob času t. Definiramo

$$
\begin{aligned}
a_x(t) &= \mathbb{P}\{A_t \leq x\}, \\
e_x(t) &= \mathbb{P}\{E_t \leq x\}.
\end{aligned}
$$

Pri fiksnem t sta to točno porazdelitveni funkciji starosti in preseška, lahko pa ju gledamo tudi kot funkciji t pri fiksnem x. V tem primeru dobimo prenovitveni enačbi

$$
\begin{aligned}
a_x(t) &= (1 - F(t))\mathbb{1}_{\{t \leq x\}} + \int_{[0,t]} a_x(t-s)\, dF(s), \\
e_x(t) &= F(t+x) - F(t) + \int_{[0,t]} e_x(t-s)\, dF(s).
\end{aligned}
$$

Funkcija $a_x(t)$ torej reši $\big((1-F)\mathbb{1}_{\{t\leq x\}}, F\big)$-prenovitveno enačbo, $e_x(t)$ pa $(F(\cdot + x) - F(\cdot), F)$-prenovitveno enačbo.

Izrek 5.1 (Obstoj in enoličnost rešitev prenovitvenih enačb)**.** Naj bo $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ merljiva, lokalno omejena funkcija, $h(x) = 0$ na $(-\infty, 0)$, in F porazdelitvena funkcija nenegativne slučajne spremenljivke T, ki ni s.g. enaka 0, t.j. $F(0) < 1$. Potem obstaja ena sama merljiva in lokalno omejena funkcija g, $g(x) = 0$ na $(-\infty, 0)$, ki reši (h, F)-prenovitveno enačbo $g = h + g * F$ in sicer je

$$
g = h + h * M
$$

oz.

$$
\begin{aligned}
g(t) &= h(t) + \int_{[0,t]} h(t-s)\, dM(s) \\
&= h(t) \sum_{k\geq 1} \int_{[0,t]} h(t-s)\, dF^{k*}(s),
\end{aligned}
$$

kjer je $M(t) = \sum_{k\geq 1} F^{k*}(t)$ prenovitvena mera procesa $(N_t)_{t\geq 0}$ z medprihodno porazdelitvijo F.

Definicija 5.3 (Direktni Riemannov integral)**.** Naj bo $h : [0,\infty) \to [0,\infty)$ nenegativna merljiva funkcija. Pravimo, da je h *direktno Riemannovo integrabilna* (*d.R.i.*), če zadošča naslednjima pogojema:

- $\forall \Delta > 0$:
$$\sum_{k \geq 0} \left(\sup_{t \in [k\Delta, (k+1)\Delta)} h(t) \right) \; < \; \infty,$$

-
$$\lim_{\Delta \searrow 0} \Delta \sum_{k \geq 0} \left(\sup_{t \in [k\Delta, (k+1)\Delta)} h(t) \right) \; = \; \lim_{\Delta \searrow 0} \Delta \sum_{k \geq 0} \left(\inf_{t \in [k\Delta, (k+1)\Delta)} h(t) \right).$$

Če h zadošča navedenima zahtevama, potem je limita v drugi zahtevi točno vrednost direktnega Riemannovega integrala $\int_0^\infty h(u)\, du$. Funkcija h poljubnega predznaka je d.R.i., če sta le-taki $h^+ = h \wedge 0$ in $h^- = (-h) \wedge 0$, pri čemer je $\int_0^\infty h(u)\, du = \int_0^\infty h^+(u)\, du + \int_0^\infty h^-(u)\, du$.

Trditev 5.3 (Kriteriji za d.R.i.)**.**

- Če je nenegativna funkcija $h \geq 0$ d.R.i., potem je h omejena, zvezna s.p. na $[0, \infty)$ in $\lim_{t \to \infty} h(t) = 0$.
- Če je h merljiva in omejena funkcija na $[0, \infty)$ za katero obstaja $T \geq 0$ tak, da je $h(t) = 0 \; \forall t \geq T$ in je h zvezna s.p. na $[0, \infty)$, potem je h d.R.i.
- Če je $h \geq 0$ nenaraščajoča posplošeno Riemannovo integrabilna funkcija potem je d.R.i. in je njen direktni Riemannov integral enak posplošenemu $\int_0^\infty h(u)\, du$.
- Če velja $0 \leq h \leq H$, kjer je H d.R.i., h pa merljiva in zvezna skoraj povsod, potem je h d.R.i.

Izrek 5.2 (Smithov ključni prenovitveni izrek)**.** Naj bo $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ d.R.i. funkcija in F porazdelitvena funkcija nearitmetične nenegativne slučajne spremenljivke T. Potem za edino merljivo, lokalno omejeno funkcijo g, ki reši enačbp $g = h + g * F$ velja

$$\lim_{t \to \infty} g(t) \; = \; \frac{1}{\mu} \int_0^\infty h(u)\, du,$$

kjer je $\mu = \int_{[0,\infty)} x\, dF(x) = \mathbb{E}[T] \in (0,\infty]$.

Trditev 5.4 (Asimptotična porazdelitev starosti in presežka)**.** Naj bo $(N_t)_{t\geq 0}$ prenovitveni proces in A_t, E_t starost in presežek s porazdelitvenima funkcijama $a_x(t), e_x(t)$. Smithov izrek nam pove

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\{A_t \leq x\} &= \lim_{t\to\infty} a_x(t)\\ &= \frac{\int_0^\infty (1-F(u))\, \mathbb{1}_{[0,x]}(u)\, du}{\mu}\\ &= \frac{\int_0^x (1-F(u))\ du}{\mu}\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\{E_t \leq x\} &= \lim_{t\to\infty} e_x(t)\\ &= \frac{\int_0^\infty (1-F(u))\ du - \int_x^\infty (1-F(u))\ du}{\mu}\\ &= \frac{\int_0^x (1-F(u))\ du}{\mu}.\end{aligned}$$

Za $\mu < \infty$ torej v obeh primerih dobimo, da je asimptotična porazdelitev enaka porazdelitvi integriranega repa.

Definicija 5.4 (Prenovitev z defektom)**.** Naj bo $(T_i)_{i\geq 1}$ zaporedje neodvisnih nenegativnih, F-porazdeljenih slučajnih spremenljivk. Pravimo, da so te defektne, če velja

$$\mathbb{P}\{T=\infty\} = 1 - \mathbb{P}\{T<\infty\} \ = \ 1 - F(\infty) \ > \ 0.$$

Da se izognemo trivialnosti, lahko predpostavimo še $F(\infty) > 0$. Za porazdelitev $N_\infty = \lim_{t\to\infty} N_t$ velja

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{N_\infty = k\} &= \mathbb{P}\{S_k < \infty, S_{k+1} = \infty\}\\ &= \mathbb{P}\{T_1 < \infty, \ldots, T_k < \infty, T_{k+1} = \infty\}\\ &= F(\infty)^k\,(1-F(\infty))\,,\end{aligned}$$

torej $N_\infty \overset{(d)}{=} \mathrm{Geom}\,(1-F(\infty)) - 1$, torej je neizrojena. Velja tudi

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[N_t] \ = \ \lim_{t\to\infty} M(t) \ = \ \frac{F(\infty)}{1-F(\infty)}.$$

Komentar. V praksi imamo najpogosteje prenovitveno enačbo oblike

$$g \;=\; h + \gamma g * F,$$

kjer je F porazdelitvena funkcija neizrojene nenegativne slučajne spremenljivke ($F(\infty) = 1$) in $\gamma \in (0, 1)$.

Izrek 5.3 (Obstoj in enoličnost rešitev)**.** Naj bo $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ merljiva in lokalno omejena, $h(x) = 0$ na $(-\infty, 0)$. Potem obstaja natanko ena merljiva in lokalno omejena funkcija g, $g(x) = 0$ na $(-\infty, 0)$, ki reši prenovitveno enačbo z defektom $g = h + g * F$. Dana je z

$$g \;=\; h + h * M$$

oz.

$$g(t) \;=\; h(t) + \int_{[0,\infty]} h(t-s)\, dM(s), \quad t \geq 0.$$

Trditev 5.5 (Asimptotika rešitev)**.** Naj bo $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ merljiva in lokalno omejena, $h(x) = 0$ na $(-\infty, 0)$ in naj obstaja $h(\infty) = \lim_{t\to\infty} h(t)$. Če je $h(\infty) \in \overline{R}$ (iz česar sledi omejenost h), potem za edino lokalno omejeno merljivo rešitev (h, F)-prenovitvene enačbe z defektom g velja

$$\lim_{t\to\infty} g(t) \;=\; \frac{h(\infty)}{1 - F(\infty)}.$$