Statistika 1 - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar
po predavanjih profesorja Jaka Smrekarja

2021/22

Kazalo

1 Zadostnost in sorodne teme

1.1 Uvod

Definicija 1.1. *Statistični model* je množica dopustnih porazdelitvenih zakonov za slučajni vektor X. Označimo jo $\mathscr{P}$. Zanjo a priori privzamemo, da velja $\mathbb{P}_X \in \mathscr{P}$. Tu je $\mathbb{P}_X$ porazdelitveni zakon slučajnega vektorja X, torej verjetnostna mera definirana s predpisom

$$\mathbb{P}_X(B) \;=\; \mathbb{P}(X \in B)$$

za $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. Torej je $\mathscr{P}$ množica verjetnostnih mer na $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$.

Opomba. Če so X_i n.e.p., torej $X_i \overset{\text{NEP}}{\sim} X_1$, je $\mathbb{P}_X$ produktna verjetnost

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_X \;&=\; \mathbb{P}_{X_1} \times \mathbb{P}_{X_2} \times \ldots \times \mathbb{P}_{X_n} \\ &=\; \mathbb{P}_{X_1} \times \mathbb{P}_{X_1} \times \ldots \times \mathbb{P}_{X_1},\end{aligned}$$

in $\mathscr{P}$ lahko nadomestimo z množico dopustnih porazdelitev za X_1.

Definicija 1.2. Model $\mathscr{P}$ je *parametričen*, če ga je mogoče parametrizirati kot

$$\mathscr{P} \;=\; \{\mathbb{P}_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\},$$

kjer je Θ podmnožica nekega $\mathbb{R}^d$ za primerno število d.[1] Običajno na Θ zahtevamo dodatne pogoje, kot npr. da je diskretna, ali da je odprta ali, splošneje, da je gladka podmnogoterost brez roba. Množici Θ pravimo *prostor parametrov*. Če model ni parametričen, je *neparametričen*.

Definicija 1.3 (?)**.** Naj bo $\mathscr{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$ model, kjer je Θ neka indeksna množica, in naj bo ν neka fiksna σ-končna mera na $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$. Če za $\forall\vartheta \in \Theta$ velja $\mathbb{P}_\vartheta \ll \nu$, pravimo, da je $\mathscr{P}$ *dominiran* z ν. Tedaj model označimo z gostotami

$$f(\,\cdot\,;\vartheta) \;=\; \frac{d\mathbb{P}_\vartheta}{d\nu}.$$

Tedaj velja

$$\mathbb{P}_\vartheta(B) \;=\; \mathbb{P}_\vartheta(X \in B) \;=\; \int_B f(x;\vartheta)\, d\nu(x).$$

[1] Tedaj je vsaka dopustna porazdelitev določena z d realnoštevilskimi parametri.

1.2 Zadostnost

Definicija 1.4. Naj bo $\mathscr{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$ model za X z vrednostmi v $\mathbb{R}^n$ in naj bo $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (Borelova) preslikava. Pravimo, da je T *zadostna* za $\mathscr{P}$ (ali zadostna za "ϑ"), če so pogojne porazdelitve $\mathbb{P}_\vartheta(X \in \cdot \mid TX = t)$ "neodvisne od ϑ" za "vse t".

Opomba. Za vsako Borelovo množico $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ in $\forall \vartheta \in \Theta$ so verjetnosti $\mathbb{P}_\vartheta(X \in B \mid TX = t)$ neodvisne od ϑ za $\mathbb{P}_{\vartheta,T}$-skoraj vse t.

Definicija 1.5. Naj bosta X in Y slučajna vektorja z vrednostmi v $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$. *Pogojne porazdelitve* $\mathbb{P}(X \in B \mid Y = y)$ so Borelove mere[2] za vsak $y \in \mathbb{R}^m$ po ena, za katere velja

$$\mathbb{E}[\phi(X,Y)] \;=\; \int_{\mathbb{R}^m} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x,y)\, d\mathbb{P}_{(X|Y=y)}(x) \right] dP_Y(y)$$

za vse ϕ z vrednostmi v $[0,\infty]$ in za vse $\phi \in L^1$. Če imamo dano družino pogojnih porazdelitev $\{\mathbb{P}(X \in \cdot \mid Y = y) \mid y \in \mathbb{R}^n\}$, potem za $\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ velja

$$\mathbb{P}(X \in B \mid Y = y) \;=\; \lim_{s \searrow 0} \mathbb{P}(X \in B \mid Y \in \underbrace{B(y,s)}_{\text{metrična krogla}})$$

za skoraj vse y: obstaja množica $N_B \subset \mathbb{R}^m$, $\mathbb{P}(Y \in N_B) = 0$, da velja zgornja enakost za $\forall y \notin N_B$.

Definicija 1.6. Privzemimo, da ima vektor (X,Y) gostoto $f_{X,Y}$ glede na produktno σ-končno mero $\mu \times \nu$, kjer sta μ, ν σ-končni meri na $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n), \mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$. Izkaže se, da sta

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}^m} f_{(X,Y)}(x,y)\, d\nu(y) \\ f_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} f_{(X,Y)}(x,y)\, d\mu(x) \end{aligned}$$

robni gostoti glede na μ, ν. Če definiramo

$$f_{(X|Y)}(x \mid y) \;:=\; \begin{cases} \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)}\,; & f_Y(y) \neq 0, \\ \phi_0(x)\,; & f_Y(y) = 0, \end{cases}$$

[2]Mere na $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.

kjer je ϕ_0 gostota neke fiksne verjetnosti glede na μ, je s predpisom

$$\mathbb{P}(X \in B \mid Y = y) \;=\; \int_B f_{(X|Y)}(x \mid y)\, d\mu(x)$$

definirana družina pogojnih porazdelitev $(X \mid Y)$.

Izrek 1.1 (Fisher-Neymanov faktorizacijski izrek)**.** Naj bo $\mathscr{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$ model za X z vrednostmi v $\mathbb{R}^n$, ki je dominiran s σ-končno mero ν, in naj bo $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ statistika. Tedaj je T zadostna za $\mathscr{P}$ *čee* obstaja družina Borelovih funkcij $g(t; \vartheta)$ za $t \in \mathbb{R}^m$ in Borelova funkcija $h : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, tako da velja

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\nu}(x) \;=\; g(Tx; \vartheta) \cdot h(x), \quad \forall \vartheta \in \Theta.$$

Eksplicitno: $\forall \vartheta \in \Theta, \forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathbb{P}_\vartheta(B) \;=\; \mathbb{P}_\vartheta(X \in B) \;=\; \int_B g(Tx; \vartheta) h(x)\, d\nu(x).$$

To pomeni: dopustni porazdelitveni zakoni imajo gostote glede na "ν", ki so od x odvisne le preko vrednosti statistike T na njem.

Komentar.

- T je zadostna statistika *čee* imajo $\mathbb{P}_\vartheta$ gostote, ki so od x odvisne le preko Tx.
- Če velja faktorizacija iz zgornjega izreka, lahko mero ν nadomestimo s
$$\nu_h(B) \;=\; \int_B h(x)\, d\nu(x);$$
očitno še vedno $\mathscr{P} \ll \nu_h$ in $\frac{d\mathbb{P}_\vartheta}{d\nu_h}(x) = g(Tx; \vartheta)$.

Opomba. Vsaka bijektivna transformacija zadostne statistike je tudi zadostna. Če je ϕ, definirana na sliki T, bijektivna, je

$$g(Tx; \vartheta) \;=\; g\left(\phi^{-1}(\phi T)x; \vartheta\right) \;=\; \tilde{g}\left(\phi T(x); \vartheta\right).$$

Definicija 1.7. Model $\mathscr{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$ za X z vrednostmi v $\mathbb{R}^n$ je *eksponentna*, če velja:

$$\forall\vartheta \in \Theta: \ \frac{d\mathbb{P}_\vartheta}{d\nu}(x) \ = \ C(\vartheta) \cdot e^{\langle Q(\vartheta), Tx\rangle} h(x)$$

za neko σ-končno mero ν na $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ (tako, da $\mathscr{P} \ll \nu$) ter funkciji $C : \Theta \to (0,\infty)$, $Q : \Theta \to \mathbb{R}^m$, statistiko $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ter merljivo funkcijo $h : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$. Tu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ označuje skalarni produkt na $\mathbb{R}^m$. Ta predstavitev ni enolična.

1.3 Kompletnost (polnost) in optimalne nepristranske cenilke

Definicija 1.8. Naj bo $\mathscr{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$ model za X z vrednostmi v $\mathbb{R}^n$. Statistika $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je *kompletna* (ali *polna*), če za vsako merljivo funkcijo $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ iz privzatke

$$\forall\vartheta \in \Theta: \ \mathbb{E}_\vartheta\left[\phi(TX)\right] = 0$$

sledi

$$\phi(TX) \ = \ 0 \quad \mathbb{P}\text{-s.g.}$$

Torej $\exists N \in \mathbb{R}^n$, za katero je $\mathbb{P}_\vartheta(N) = \mathbb{P}_\vartheta(X \in N) = 0 \ \forall\vartheta \in \Theta$ in $\forall\vartheta \in \Theta, \forall x \notin N : \phi(Tx) = 0.$[3]

Definicija 1.9. Eksponentna družina

$$f(x;\vartheta) \ = \ \frac{d\mathbb{P}_\vartheta}{d\nu}(x) \ = \ C(\vartheta) e^{\langle Q(\vartheta), T(x)\rangle} h(x) \tag{1}$$

za $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ in $Q : \Theta \to \mathbb{R}^m$ ima *poln rang*, če slika $\mathrm{im}Q = \{Q(\vartheta) \mid \vartheta \in \Theta\}$ preslikave Q vsebuje vsaj eno odprto kroglo, torej ima $\mathrm{im}Q$ neprazno notranjost v $\mathbb{R}^m$.

Izrek 1.2. Če ima eksponentna družina (1) poln rang, je T kompletna (in zadostna) statistika.

[3] Del privzetka: $\phi \in L^1(\mathbb{P}_{\vartheta,T}) \ \forall\vartheta \in \Theta$.

Definicija 1.10. Naj bo $\mathscr{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$ model za X z vrednostmi v $\mathbb{R}^n$. Statistika $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ je *postranska* za $\mathscr{P}$ (oz. za ϑ), če verjetnostni $\mathbb{P}_\vartheta(VX \in D)$ za $D \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^r)$ niso odvisne od ϑ. Bolj formalno: obstaja verjetnost S na $(\mathbb{R}^r, \mathscr{B}(\mathbb{R}^r))$, za katere velja:

$$\forall \vartheta \in \Theta,\ \forall D \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^r) :\ \mathbb{P}_\vartheta(VX \in D) \ = \ S(D).$$

Izrek 1.3 (Basu)**.** Naj bosta v modelu $\mathscr{P}$ $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kompletna zadostna in $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ postranska statistika. Tedaj sta T in V neodvisni glede na $\mathscr{P}$:

$$\begin{aligned}&\forall \vartheta \in \Theta,\ \forall C \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^m),\ \forall D \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^r) :\\ &\qquad\qquad \mathbb{P}_\vartheta(TX \in C, VX \in D) \ = \ \mathbb{P}_\vartheta(TX \in C)\mathbb{P}(VX \in D).\end{aligned}$$

Definicija 1.11. Naj bo e ocenjevana funkcija v $\mathscr{P}$ in naj bosta U, U^* dve nepristranski cenilki za e. Tedaj ima U *enakomerno manjšo disperzijo* od U^*, če velja

$$\forall \vartheta \in \Theta :\ \mathrm{Var}_\vartheta[U(X)] \ \leq \ \mathrm{Var}_\vartheta[U^*(X)] \tag{2}$$

Tu je

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_\vartheta[U(X)] \ &= \ \mathbb{E}_\vartheta\left[(U(X) - e(\vartheta))\,(U(X) - e(\vartheta))^\mathsf{T}\right]\\ &= \ \int_{\mathbb{R}^n} (U(x) - e(\vartheta))\,(U(x) - e(\vartheta))^\mathsf{T}\, d\mathbb{P}_\vartheta(x),\end{aligned}$$

matrika razsežnosti $r \times r$. Zahtevo (2) v primeru $r \geq 2$ razumemo matrično:

$$\begin{aligned}A \leq B \quad &\Longleftrightarrow \quad B - A \geq 0\\ &\Longleftrightarrow \quad \forall x : \langle (B-A)x, x\rangle \geq 0\\ &\Longleftrightarrow \quad \text{vse lastne vrednosti } B - A \text{ so } \geq 0\end{aligned}$$

Izrek 1.4 (Rao-Blackwell)**.** Naj bo $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kompletna zadostna statistika za $\mathscr{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$ in naj bo $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ nepristranska cenilka za $e : \Theta \to \mathbb{R}^r$. Tedaj je

$$U(X) \;=\; \mathbb{E}_\vartheta[WX \mid TX]\,^4$$

nepristranska cenilka za e, ki ima med vsemi nepristranskimi cenilkami za e enakomerno najmanjšo disperzijo: če je U^* poljubna druga nepristranska cenilka za e, ima U enakomerno manjšo disperzijo od U^*.

Komentar.

- Ker je T zadostna statistika, so vrednosti $\mathbb{E}_\vartheta[WX \mid TX = Tx]$ neodvisne od ϑ, torej je $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ dobro definirana.
- Seveda je $E_\vartheta[U(X)] = \mathbb{E}_\vartheta\left[\mathbb{E}_\vartheta[WX \mid TX]\right] = \mathbb{E}_\vartheta[WX] = e(\vartheta)$.
- Dokaz naredimo z uporabo pogojne Jensenove neenakosti.

Posledica (Lehman-Scheffe)**.** Naj bo nepristranska cenilka $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ za $e : \Theta \to \mathbb{R}^r$ odvisna od vzorca le preko kompletne zadostne statistike $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (torej $U(x) = V(Tx)$ za neko Borelovo merljivo $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^r$). Tedaj je U avtomatično NCEND (Rao-Blackwellov izrek iz U vrne nazaj U).

1.4 Informacija in informacijska neenakost

Definicija 1.12. Funkciji $V_\vartheta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} V_\vartheta(x) \;&=\; \left(\frac{\partial}{\partial\vartheta_1}\ln f(x;\vartheta), \ldots, \frac{\partial}{\partial\vartheta_d}\ln f(x;\vartheta)\right) \\ &=\; \operatorname{grad}_\vartheta\left(\ln f(x;\vartheta)\right) \end{aligned}$$

pravimo *funkcija Zbira.* Pri predavanjih smo izpeljali neenakost $\mathbb{E}_\vartheta[V_\vartheta(X)] = \underbrace{(0, \ldots, 0)}_{d}$. Sledi

$$\operatorname{Var}_\vartheta[V_\vartheta(X)] \;=\; \mathbb{E}\left[V_\vartheta(X)V_\vartheta(X)^\mathsf{T}\right] - 0.$$

[4] Za $\omega \in \Omega$ je $U(X(\omega)) = \mathbb{E}[WX \mid TX = TX(\omega)]$.

Tej matrični funkciji parametra ϑ pravimo *Fisherjeva informacija* tega modela. Formalno: $\mathrm{FI} : \Theta \to \mathbb{R}^{d\times d}$, $\mathrm{FI}(\vartheta) = \mathrm{Var}_\vartheta[V_\vartheta(X)]$. Vrednosti Fisherjeve informacije so pozitivne simetrične matrike. Pravimo, da $\mathrm{FI}(\vartheta)$ meri količino informacije, ki jo o parametru ϑ nosi vektor X.

Trditev 1.1 (Cramér-Rao/informacijska neenakost)**.** Privzemimo, da je Θ odprta v $\mathbb{R}$(interval) in da je $e : \Theta \to \mathbb{R}$ ocenjevana funkcija. Naj veljajo regulativni privzetki za obstoj FI in naj bo $U : \mathbb{R}^n \to R$ nepristranska cenilka za e. Dalje, naj bo e odvedljiva in naj velja

$$\begin{aligned} e'(\vartheta) &= \frac{d}{d\vartheta}\int U(x) f(x;\vartheta)\, d\nu(x) \\ &= \int U(x)\frac{\partial f}{\partial\vartheta}(x;\vartheta)\, d\nu(x). \end{aligned}$$

Če za neki ϑ velja $\mathrm{FI}(\vartheta) > 0$, velja ocena

$$\mathrm{Var}_\vartheta[U(X)] \;\geq\; \frac{(e'(\vartheta))^2}{\mathrm{FI}(\vartheta)}.$$

Komentar. Če gre za vzorec $X = (X_1, \ldots, X_n)$ NEP komponent, je $\mathrm{FI}(\vartheta) = n \cdot \mathrm{FI}^{(1)}(\vartheta)$ in se Cramér-Raova neenakost glasi

$$\mathrm{Var}_\vartheta[U(X)] \;\geq\; \frac{1}{n}\frac{(e'(\vartheta))^2}{\mathrm{FI}^{(1)}(\vartheta)}.$$

Posledica. Če je za neko nepristransko cenilko U v Cramér-Rau dosežena enakost za vse ϑ, je U avtomatično NCEND.

Lema 1. Če je simetrična matrika $\begin{bmatrix} A & C \\ C^\mathsf{T} & B \end{bmatrix}$ pozitivna in B obrnljiva, je $A - CB^{-1}C^\mathsf{T}$ tudi pozitivna.

Izrek 1.5 (Posplošena Cramér-Raova neenakost)**.** Naj za parametrični model $\mathscr{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\} \ll \nu$ veljajo regulativni privzetki iz začetka razdelka in smiselne posplošitve reg. privzetkov iz eno-parametrične Cramér-Raove ocene. Če je U nepristranska cenilka za diferenciabilno $e : \Theta \to \mathbb{R}^r$, tedaj

$$\forall \vartheta : \mathrm{FI}(\vartheta) \text{ obrnljiva} \implies \mathrm{Var}_\vartheta[U(X)] \geq \mathbf{J}_e(\vartheta) \cdot \mathrm{FI}^{-1}(\vartheta) \cdot \mathbf{J}_e(\vartheta)^\mathsf{T}.$$

2 Preizkušanje domnev

2.1 Uvod

Definicija 2.1. Naj bo $\mathscr{P}$ model za X z vrednostmi v $\mathbb{R}^n$. $\mathscr{P}$ razdelimo na disjunktno unijo $\mathscr{P} = \mathscr{H} \sqcup \mathscr{A}$, kjer

$$\begin{aligned} \mathscr{H} &= \{\mathbb{P}_\vartheta \mid \text{domneva je pravilna pri } \mathbb{P}_\vartheta\} \\ \mathscr{A} &= \{\mathbb{P}_\vartheta \mid \text{domneva je nepravilna pri } \mathbb{P}_\vartheta\}. \end{aligned}$$

V indeksiranih modelih enačimo $\mathscr{H}$ in $\mathscr{A}$ z ustreznima podmnožicama

$$\begin{aligned} H &= \{\vartheta \in \Theta \mid \mathbb{P}_\vartheta \in \mathscr{H}\} \\ A &= \{\vartheta \in \Theta \mid \mathbb{P}_\vartheta \in \mathscr{A}\} \end{aligned}$$

indeksne parametrične množice Θ.

Definicija 2.2. *Nerandomiziran preizkus* domneve $\mathscr{H}$ (proti alternativi $\mathscr{A}$) je odločitveno pravilo, po katerem na podlagi ene realizacije $x \in \mathbb{R}^n$ slučajnega vektorja X domnevo $\mathscr{H}$ zavrnemo (in s tem sprejmemo $\mathscr{A}$) ali pa ne zavrnemo (in jo s tem "sprejmemo"). Tretje možnosti ni. To pomeni, da za neko množico $B \subset \mathbb{R}^n$, ki ji pravimo zavrnitveno območje, za vse $x \in B^\mathsf{c}$ pa ne zavrnemo. V tem smislu preizkus enačimo z $\mathbb{1}_B$.

Definicija 2.3. *Velikost preizkusa* je $\sup\{\beta(\vartheta) \mid \vartheta \in H\}$, interpretiramo kot "največjo" možno verjetnost napake 1. vrste, Preizkus je pri stropnji značilnosti $\alpha \in (0,1)$, če je velikost $\leq \alpha$.

2.2 Enakomerno najmočnejši preizkus

Definicija 2.4. Recimo, da sta $\mathbb{1}_{B_1}$ in $\mathbb{1}_{B_2}$ preizkusa iste domneve pri dani stopnji značilnosti α. Med njima bi izbrali tistega, ki ima manjšo napako 2. vrste, torej tistega, ki ima na alternativi (na A) večjo moč. Rečemo, da je $\mathbb{1}_{B_1}$ *enakomerno močnejši* od $\mathbb{1}_{B_2}$, če velja

$$\forall\vartheta \in A: \ \beta_1(\vartheta) \geq \beta_2(\vartheta),$$

kjer $\beta_i(\vartheta) = \mathbb{P}_\vartheta(B_i)$, $i \in \{1, 2\}$.

Definicija 2.5. Preizkus, je *enakomerno najmočnejši* med vsemi preizkusi stopnje značilnosti α (velikosti $\leq \alpha$), če je enakomerno močnejši od vsakega drugega preizkusa stopnje značilnosti α. Naj bo $K \subset \mathbb{R}^n$ končna množica; najmočnejši preizkus stopnje značilnosti α je podan z množico $B^* \subset K$, za katero je

$$\mathbb{P}_1(B^*) \ = \ \max\{\mathbb{P}_1(B) \mid B \subset K, \ \mathbb{P}_0(B) \leq \alpha\}.$$

2.3 Randomizirani preizkusi

Definicija 2.6. *Randomiziran preizkus* domneve $\mathscr{H} \subset \mathscr{P}$ je Borelova funkcija $\phi : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ z naslednjo interpretacijo:

(i) $\phi(x) = \phi(x_1, \ldots, x_n) = 1 \Rightarrow \mathscr{H}$ zavrnemo

(ii) $\phi(x) = 0 \Rightarrow \mathscr{H}$ ne zavrnemo

(iii) $\phi(x) = y \in (0, 1) \Rightarrow \mathscr{H}$ zavrnemo z verjetnostjo γ[5]

Indeksirajmo $\mathscr{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$. Funkcija preizkusa ϕ je $\beta_\phi : \Theta \to [0, 1]$,

$$\beta_\phi \ = \ \mathbb{E}_\vartheta[\phi(X)].^6$$

[5] vzorčimo $U \sim \mathcal{U}[0, 1]$, zavrnemo $\mathscr{H}$, če $U \leq \gamma$

[6] Pripomnimo, da je $\mathbb{E}_\vartheta[\mathbb{1}_B(X)] = \mathbb{P}_\vartheta(X \in B)$.

Komentar. Preizkus ϕ je enakomerno močnejši od preizkusa ψ, če je

$$\forall \vartheta \in A: \ \beta_\phi(\vartheta) \geq \beta_\psi(\vartheta).$$

Trditev 2.1. Naj bo T zadostna statistika za model $\mathscr{P}$ (za slučajni vektor razsežnosti n) in naj bo $\phi : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ neki preizkus. Definirajmo[7] $\tilde{\phi} : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ s predpisom

$$\tilde{\phi}(x) \ := \ \mathbb{E}_\vartheta[\phi(X) \mid T = Tx].$$

To je preizkus z *isto* funkcijo moči kot ϕ.

Komentar. Pri preizkusih se lahko omejimo na take, ki imajo za testno statistiko ravno zadostno statistiko (če jo imamo). Natančneje, za dani preizkus ϕ lahko privzamemo $\phi = \phi(Tx)$.

Izrek 2.1 (Neyman-Pearson)**.** Preizkušamo enostavno domnevo $\mathscr{H} = \{\mathbb{P}_0\}$ proti enostavni alternativi $\mathscr{A} = \{\mathbb{P}_1\}$. Naj bosta f_0 in f_1 gostoti $\mathbb{P}_0$ in $\mathbb{P}_1$ glede na primerno σ-končno mero ν na $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ (lahko vzamemo npr. $\nu = \mathbb{P}_0 + \mathbb{P}_1$. Naj bo podana stopnja značilnosti $\alpha \in (0,1)$. Obstaja v bistvu enoličen preizkus domneve $\mathscr{H}$ proti $\mathscr{A}$ velikosti α oblike

$$\phi(x) \ = \ \begin{cases} 1\,; & f_1(x) > D \cdot f_0(x), \\ \gamma\,; & f_1(x) = D \cdot f_0(x), \\ 0\,; & f_1(x) < D \cdot f_0(x), \end{cases}$$

ki je najmočnejši med vsemi preizkusi $\mathscr{H}$ proti $\mathscr{A}$ stopnje značilnosti α. Za ϕ zgornje oblike sta $D \geq 0$ in $\gamma \in [0,1]$ v bistvu enolično določeni z zahtevo, da je velikost enaka α, torej

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_0}[\phi(X)] \ &= \ \mathbb{P}_0\left(\{f_1(X) > D \cdot f_0(X)\}\right) + \gamma \mathbb{P}_0\left(\{f_1(X) = D \cdot f_0(X)\}\right) \\ &= \ \alpha. \end{aligned}$$

[7] Zaradi zadostnosti je to dobro definirana funkcija.

Komentar.

1. ϕ (**pozor, tukaj ima ϕ drug pomen**) je odvisen od razmerja $\frac{f_1(x)}{f_0(x)}$, ki mu pravimo *razmerje verjetij*, zato mu pravimo *preizkus na podlagi razmerja verjetij*.

2. Privzemimo zadostno statistiko T. Tedaj lahko zapišemo

$$\begin{aligned}\frac{f_1(x)}{f_0(x)} &= \frac{f(x;\vartheta_1)}{f(x;\vartheta_0)} \\ &= \frac{g(Tx;\vartheta_1)h(x)}{g(Tx;\vartheta_0)h(x)} \\ &= \frac{g(Tx;\vartheta_1)}{g(Tx;\vartheta_0)}\end{aligned}$$

2.4 Najmočnejši preizkusi v enoparametričnih eksponentnih modelih

Izrek 2.2. Privzemimo eksponentni model z gostotami oblike

$$f(x;\vartheta) \;=\; e^{-\psi(\vartheta)}e^{Q(\vartheta)\cdot Tx}h(x)$$

za $x \in \mathbb{R}^n$ glede na neko σ-končno mero ν. Dalje privzemimo, da je $\Theta \subset \mathbb{R}$ interval in da je Q strogo monotona. Naj bo $\vartheta_0 \in \Theta$ in naj bo $\alpha \in (0,1)$. Za domnevo $\vartheta \leq \vartheta_0$ proti $\vartheta > \vartheta_0$ obstaja[8] preizkus oblike

$$\phi(x) \;=\; \begin{cases} 1\,; & Tx > C, \\ \gamma\,; & Tx = C,\ ^{9} \\ 0\,; & Tx < C, \end{cases}$$

kjer sta C in γ v bistvu enolično določeni z zahtevo

$$\mathbb{E}_{\vartheta_0}[\phi(X)] \;=\; \mathbb{P}_{\vartheta_0}(TX > C) + \gamma\mathbb{P}_{\vartheta_0}(TX = C) \;=\; \alpha.$$

Ta preizkus ima velikost α in je najmočnejši med vsemi preizkusi stopnje značilnosti α za $\vartheta \leq \vartheta_0$ proti $\vartheta > \vartheta_0$.

[8] V primeru, ko je Q naraščajoča oz. z obrnjenimi relacijami, ko je Q padajoča.

[9] Za $x = (x_1, \ldots, x_n)$ je $Tx = \sum_{i=1}^n x_i$.

Definicija 2.7. Preizkus ϕ domneve $H \in \mathscr{H}$ proti alternativi $A \in \mathscr{A}$ je nepristranski preizkus stopnje značilnosti α, če je stopnje značilnosti α in velja

$$\forall \vartheta \in A: \; \beta_\phi(\vartheta) = \mathbb{E}_\vartheta[\phi(X)] \geq \alpha.$$

Izrek 2.3. Naj veljajo privzetki prejšnjega izrek, naj bo $\vartheta_0 \in \mathrm{int}(\Theta)$ in naj bo Q zvezno odvedljiva v ϑ_0 s $Q'(\vartheta_0) \neq 0$ (im$Q$ vsebuje odprt interval). Naj bo še $\alpha \in (0,1)$. Za domnevo $\vartheta = \vartheta_0$ proti $\vartheta \neq \vartheta_0$ obstaja preizkus oblike

$$\phi(x) \;=\; \begin{cases} 1\,; & Tx < C_1 \text{ ali } Tx > C_2, \\ \gamma_i\,; & Tx = C_i,\; i \in \{1,2\}, \\ 0\,; & Tx \in (C_1, C_2), \end{cases}$$

kjer so konstantne enolično določene z zahtevama

- $\mathbb{E}_{\vartheta_0}[\phi(X)] = \alpha$,
- $\beta'(\vartheta_0) = \frac{d}{d\vartheta_0}\mathbb{E}_\vartheta[\phi(X)]\Big|_{\vartheta=\vartheta_0} = 0$.

Ta preizkus je nepristranski in enakomerno najmočnejši med vsemi nepristranskimi preizkusi $\vartheta = \vartheta_0$ proti $\vartheta \neq \vartheta_0$ stopnje značilnosti α.

2.5 Necentralne Studentove porazdelitve

Definicija 2.8. Naj bosta Z, H neodvisni slučajni spremenljivki, $Z \sim \mathcal{N}(\lambda, 1), H \sim \chi^2_h$. Tedaj pravimo, da ima

$$\mathbb{t} \;=\; \frac{Z}{\sqrt{\frac{H}{h}}}$$

(necentralno) Studentovo porazdelitev s h prostorskimi stopnjami in necentralnostnim parametrom λ. Pišemo $\mathbb{t} \sim t_h(\lambda)$.