Teorija iger - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar
po predavanjih profesorja Sergia Cabella

2021/22

Kazalo

1 Strateške igre s funkcijami preferenc

1.1 Uvod

Definicija 1.1. Naj bo $\mathscr{A}$ množica. *Funkcija preferenc* na množici $\mathscr{A}$ je preslikava $u : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ funkcija preferenc. Intuicija: $\forall a, a' \in \mathscr{A}, a \neq a'$:

- $u(a) > u(a')$ " $\Longleftrightarrow$ " a je boljše kot a'
- $u(a) < u(a')$ " $\Longleftrightarrow$ " a je slabše kot a'
- $u(a) = u(a')$ " $\Longleftrightarrow$ " med a in a' smo indiferentni

Opomba.

- Različne funkcije lahko določijo iste preference.
- Obravnavali bomo tudi več funkcij preferenc na isti množici (vsak igralec ima lahko svojo funkcijo).
- Preverence določimo kvalitativno, ne kvantitativno - pomemben je le vrstni red, same vrednosti ne.
- Namesto $\mathbb{R}$ bi lahko uporabili poljubno drugo linearno urejeno množico.

Definicija 1.2. *Strateška igra s funkcijami preferenc* je trojica

$$(N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}),$$

pri čemer:

- N je končna množica *igralcev*.
- Za vsakega igralca $i \in N$ je A_i neprazna množica *akcij* za $i \in N$. Naj bo

  $$\mathscr{A} := \prod_{i \in N} A_i$$

  množica *profilov akcij*.

- Za vsakega igralca $i \in N$ je $u_i : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ je funkcija preferenc na $\mathscr{A}$ za igralca i.

Opomba. Ponavadi: $N = [n] = \{1, \ldots, n\}$. V tem primeru imamo trojico

$$([n], (A_1, \ldots, A_n), (u_1, \ldots, u_n)),$$

$\mathscr{A} = A_1 \times \ldots \times A_n$ ter $u_i : A_1 \times \ldots \times A_n \to \mathbb{R}$.

1.2 Čisto Nashevo ravnotežje

Notacija.

$$(x_\alpha, x_\beta, x_\gamma \mid y; \beta) \ = \ (x_{-\beta}, y) \ = \ (x_\alpha, y, x_\gamma)$$

Za funkcije preferenc:

$$u_i(x_1, \ldots, x_m \mid y) \ = \ u_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Definicija 1.3. Naj bo $\Gamma = (N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ strateška igra s funkcijami preferenc. Naj bo

$$\mathscr{A} \ = \ \prod_{i \in N} A_i.$$

Profil akcij $a^* \in \mathscr{A}$ je *čisto Nashevo ravnovesje* $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$\forall i \in N, \ \forall b \in A_i : \ u_i(a^*) \geq u_i(a^* \mid b).$$

Tak $a^* \in \mathscr{A}$ je *strogo čisto Nashevo ravnovesje* $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$\forall i \in N, \ \forall b \in A_i \setminus \{a_i^*\} : \ u_i(a^*) > u_i(a^* \mid b).$$

Definicija 1.4. Naj bo $\Gamma = (N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ strateška igra s funkcijami preferenc. Označimo

$$\mathscr{A} \;=\; \prod_{n\in N} A_i.$$

Najboljši odgovor igralca $i \in N$ je

$$\begin{aligned} B_i :\; \mathscr{A} \;&\to\; 2^{A_i} \;=\; \{B \mid B \subseteq A_i\} \\ a \;&\mapsto\; \{b \in A_i \mid \forall c \in A_i : u_i(a \mid b) \geq u_i(a \mid c)\} \\ &=\; \{b \in A_i \mid u_i(a \mid b) \;=\; \max_{c\in A_i}(a \mid c)\}. \end{aligned}$$

Za $N = [n] = \{1, \ldots, n\}$ je formula v definiciji za igralca $i = 1:$

$$B_1(a_1, \ldots, a_n) \;=\; \{b \in A_1 \mid u_1(b, a_2, \ldots, a_n) = \max_{c\in A_1} u_1(c, a_2, \ldots, a_n)\},$$

analogno za $i = 2, \ldots, n$.

Opomba.

- Bolj pravilno bi bilo reči "*množica najboljših odgovorov*".
- Večkrat velja $|B_i(a)| = 1$ (le en najboljši odgovor). V tem primeru pišemo brez $\{\}$.
- Pri definiciji B_i nima a_i nobene vloge. Za dva igralca bomo ponavadi napisali

$$\begin{aligned} B_1(a_2) \;&\equiv\; B_1(\cdot, a_2) \\ B_2(a_1) \;&\equiv\; B_2(a_1, \cdot). \end{aligned}$$

Trditev 1.1. Profil akcij $a^* = (a_i^*)_{i\in N}$ je čisto Nashevo ravnovesje $\iff$

$$\forall i \in N :\; a_i^* \in B_i(a^*).$$

Trditev 1.2. Profil akcij $a^* = (a_i^*)_{i\in N}$ je strogo čisto Nashevo ravnovesje $\iff$

$$\forall i \in N: \; a_i^* \in B_i^{\text{str}}(a^*),$$

kjer B_i^{str} definiramo kot

$$\begin{aligned} B_i^{\text{str}}: \mathscr{A} &\to 2^{A_i} \\ a &\mapsto \{b \in A_i \mid \forall c \in A_i \setminus \{b\} : u_i(a^* \mid b) > u_i(a^* \mid c)\} \\ &= \begin{cases} \text{edini max;} & \text{če obstaja,} \\ \emptyset; & \text{sicer.} \end{cases} \end{aligned}$$

1.3 Dominacije

Definicija 1.5. Naj bo $\Gamma = (N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ strateška igra s funkcijo preferenc. Označimo

$$\mathscr{A} = \prod_{i\in N} A_i.$$

Akcija $b \in A_i$ *šibko dominira* akcijo $c \in A_i$, če velja

$$\forall a \in \mathscr{A}: \; u_i(a \mid b) \geq u_i(a \mid c).$$

Akcija $b \in A_i$ *strogo dominira* akcijo $c \in A_i$, če velja

$$\forall a \in \mathscr{A}: \; u_i(a \mid b) > u_i(a \mid c).$$

Trditev 1.3. Če $b \in A_i$ strogo dominira $c \in A_i$, potem ne obstaja čisto Nashevo ravnovesje $a^* = (a_i^*)_{i\in N}$ z $a_i^* = c$. Če $b \in A_i$ dominira $c \in A_i$, potem obstaja strogo čisto Nashevo ravnovesje $a^* = (a_i^*)_{i\in N}$ z $a_i^* = c$.

2 Strateške igre s funkcijami koristnosti

2.1 Uvod

Definicija 2.1. Naj bo $A = (a_1, \dots, a_\Pi)$ končna množica in π funkcija verjetnosti:

$$\pi \sim \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_\Pi \\ \pi(a_1) & \dots & \pi(a_\Pi) \end{pmatrix}.$$

Množica $\pi(A)$, definirana kot

$$\pi(A) = \{((\pi(a_i))_{a_i \in A} \mid \forall a_i \in A : \pi(a_i) \geq 0, \sum_{a_i \in A} \pi(a_i) = 1\}$$

je *množica loterij* na A.

Definicija 2.2. Naj bo A končna. *Funkcija koristnosti* na A je prelikava $u : A \to \mathbb{R}$, ki določa preference na množici $\pi(A)$ in sicer

$$\begin{aligned} \hat{u} : \pi(A) &\to \mathbb{R} \\ \pi = (\pi(a))_{a \in A} &\mapsto \sum_{a \in A} \pi(a) u(a), \end{aligned}$$

če je $\hat{u}$ razširitev funkcije u. Osnovni princip bo:

$$\hat{u}(\pi) \geq \hat{u}(\pi') \quad \iff \quad \pi \text{ ni slabše od } \pi'.$$

Opomba. Lahko imamo različni funkciji koristnosti, ki določata iste preference na $\pi(A)$. En del teorije koristnosti se ukvaraja z obratno smerjo, in sicer za katere preference nad $\pi(A)$ obstaja funkcija koristnosti $u : A \to \mathbb{R}$, za katero imamo razširitev iste preference $\pi(A)$.

2.2 Igre koristnosti

Definicija 2.3. *Strateška igra s funkcijami koristnosti* je trojica

$$\Gamma \;=\; (N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}),$$

pri čemer:

- je N neprazna in končna množica igralcev.
- je A_i neprazna in končna množica akcij za igralca $i \in N$. Naj bo $\mathscr{A} = \prod_{i\in N} A_i$ množica profilov akcij.
- je $u_i : A \to \mathbb{R}$ funkcija koristnosti za igralca $i \in N$.

Množica strategij za igralca $i \in N$ je $S_i = \pi(A_i)$. Strategija $\pi \in S_i$ meša akcije $\{a \in A_i \mid \pi_i(a) > 0\}$. Strategija $\pi \in S_i$ je čista, če je $\pi = S(a)$ za nek $a \in A_i$. Množica profilov strategij je $\mathscr{S} = \prod_{i\in N} S_i$.

Trditev 2.1. Definiramo:

$$\begin{aligned} u_i : \mathscr{S} = \prod_{j\in N} S_j \;&\to\; \mathbb{R} \\ \pi = (\pi_j)_{j\in N} \;&\mapsto\; \sum_{a\in\mathscr{A}} \left(\prod_{j\in N} \pi_j(a_j) \right) u_i(a). \end{aligned}$$

Velja:

$$u_i(\pi) \;=\; \sum_{a_i\in A_i} \pi_i(a_i)\, [u_i(\pi \mid \delta(a_i)]\,.$$

2.3 Nasheva ravnovesja

Definicija 2.4. Naj bo $\Gamma(N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ strateška igra s funkcijami koristnosti. Profil strategij

$$\Pi^* = (\pi_i^*) \;\in\; \mathscr{S} = \prod_{i\in N} S_i$$

je Nashevo ravnovesje $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$\forall i \in N,\ \forall \pi_i' \in S_i,\ \pi_i' \neq \pi_i^* :\ u_i^*(\pi^*)\ >\ u_i(\pi^* \mid \pi_i').$$

Imamo preslikavo

$$\begin{aligned} \phi_{\mathscr{K}\to\mathscr{P}} : \{\text{igra s funkcijami koristnosti}\}\ &\to\ \{\text{igra s funkcijami preferenc}\} \\ (N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})\ &\mapsto\ (N, (S_i = \pi(A_i))_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}). \end{aligned}$$

$\phi_{\mathscr{K}\to\mathscr{P}}$ je *mešana razširitev* igre Γ.

Trditev 2.2. Naj bo Γ strateška igra s funkcijami koristnosti in naj bo π profil strategij v Γ. π je Nashevo ravnovesje v $\Gamma \iff \pi$ je čisto Nashevo ravnovesje v $\phi_{\mathscr{K}\to\mathscr{P}}(\Gamma)$.

Izrek 2.1 (Nash, 1949)**.** Vsaka strateška igra s funkcijami koristnosti ima vsaj eno Nashevo ravnovesje.

Opomba.

- Dokaz je nekonstruktiven, nič ne pove kako Nashevo ravnovesje najti.
- Pomembno je, da ima vsak igralec končno množico akcij. Obstajajo sicer tudi posplošitve za neskončno mnogo akcij.
- Če je igra generična, potem je število Nashevih ravnovesij liho.

Trditev 2.3. Profil strategij $\pi^* = (\pi_i^*)_{i\in N}$ je Nashevo ravnovesje

$$\iff\ \forall i \in N\ \forall a_i \in A_i :\ u_i(\pi^*) \geq u_i(\pi^* \mid \delta(a_i)).$$

Trditev 2.4 (Princip indiferentnosti)**.** Če je $\pi^* = (\pi_i^*)_{i\in N}$ Nashevo ravnovesje, potem velja

$$\forall i \in N\ \forall a_i \in A_i :\ (\pi_i^*(a_i) > 0\ \Rightarrow\ u_i(\pi^*) = u_i(\pi^* \mid \delta(a))).$$

Opomba.

- Uporabna, ker imamo enačbe.
- To ni karakterizacija. Uporabimo za iskanje kandidatov.
- Ko ima igralec i $|A_i| = 2$, potem, ko velja

$$u_i(\pi^* \mid \delta(a_i)) \;=\; u_i(\pi^* \mid \delta(b_i)) \;=\; u_i(\pi^*)$$

  avtomatično velja pogoj sistema neenačb za igralca i:

$$\begin{aligned} u_i(\pi^* \mid \delta(a_i)) &\leq u_i(\pi^*) \\ u_i(\pi^* \mid \delta(b_i)) &\leq u_i(\pi^*) \end{aligned}$$

2.4 Dominacije

Definicija 2.5. Strategija $\alpha_i \in S_i$ *(šibko) dominira* strategijo $\beta_i \in S_i$, če velja

$$\forall \pi \in S : \; u_i(\pi \mid \alpha_i) \;\geq\; u_i(\pi \mid \beta_i).$$

Strategija $\alpha_i \in S_i$ *strogo dominira* $\beta_i \in S_i$, če velja

$$\forall \pi \in S : \; u_i(\pi \mid \alpha_i) \;>\; u_i(\pi \mid \beta_i).$$

Trditev 2.5. Naj bo $\pi^* = (\pi_i^*)_{i \in N}$ Nashevo ravnovesje. Če strategija $\alpha_i \in S_i$ strogo dominira $\delta(b_i)$, potem

$$\pi_i^*(b_i) \;=\; 0.$$

2.5 Dokaz Nashevega izreka (dokaz je v zapiskih, tu le potrebno “orodje”)

Izrek 2.2 (Brouwerjev izrek)**.** Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}^d$ konveksna in kompaktna množica ter $T : X \to X$ zvezna preslikava. Potem $\exists x \in X$, da velja $T(x) = x$.

3 Bimatrične in matrične igre

3.1 Uvod

Definicija 3.1. *Bimatrična igra* je igra s funkcijami koristnosti za 2 igralca, $N = \{1, 2\}$, pri katerih je

$$\begin{aligned} A_1 &= [m] = \{1, \ldots, m\} \\ A_2 &= [n] = \{1, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

Igro predstavimo z bimatriko.

Trditev 3.1. Profil $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \in \pi_1 \times \pi_2$ je Nashevo ravnovesje $\iff$

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{p} \in \pi_1 : \ (\mathbf{p}^*)^\mathsf{T} \mathbf{A} \mathbf{q}^* &\geq \mathbf{p}^\mathsf{T} \mathbf{A} \mathbf{q}^* \\ \forall \mathbf{q} \in \pi_2 : \ (\mathbf{p}^*)^\mathsf{T} \mathbf{B} \mathbf{q}^* &\geq (\mathbf{p}^*)^\mathsf{T} \mathbf{B} \mathbf{q} \end{aligned}$$

Trditev 3.2 (Sistem neenačb)**.** Profil $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ je Nashevo ravnovesje $\iff$

$$\begin{aligned} \forall i \in [m] : \ (\mathbf{p}^*)^\mathsf{T} \mathbf{A} \mathbf{q}^* &\geq [\mathbf{A} \mathbf{q}^*]_i \\ \forall j \in [n] : \ (\mathbf{p}^*)^\mathsf{T} \mathbf{B} \mathbf{q}^* &\geq [(\mathbf{p}^*)^\mathsf{T} \mathbf{B}]_j \end{aligned}$$

Trditev 3.3 (Princip indiferentnosti)**.** Če je profil $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ Nashevo ravnovesje, potem

$$\begin{aligned} \forall i \in [m] : \ (p_i^* > 0) \ &\Rightarrow \ (\mathbf{p}^*)^\mathsf{T} \mathbf{A} \mathbf{q}^* = [\mathbf{A} \mathbf{q}^*]_i \\ \forall j \in [n] : \ (q_j^* > 0) \ &\Rightarrow \ (\mathbf{p}^*)^\mathsf{T} \mathbf{A} \mathbf{q}^* = [(\mathbf{p}^*)^\mathsf{T} \mathbf{A}]_j. \end{aligned}$$

3.2 Linearno programiranje

Definicija 3.2. Linearni program izgleda tako:

$$\begin{aligned} &\max \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ &\text{p.p } \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ &\quad \mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ &\quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n} \\ &\quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \\ &\quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \text{ ali } x_i \geq 0 \text{ za nekatere } i \end{aligned}$$

Linearni program je lahko:

- dopusten: $\exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$
  - neomejen: $\forall k \in \mathbb{R}\ \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \geq k,\ \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$
  - omejen: $\sup\{\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x};\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ obstaja in je max, torej $\exists \mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n : \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}^* = \sup \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x};\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, je optimalna rešitev, $\mathbf{A}\mathbf{x}^* \leq \mathbf{b}$
- nedopusten: $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n;\ \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\} = \emptyset$

Definicija 3.3. Dualnost:

- Originalen problem:

$$\begin{aligned} &\max\ \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ &\text{p.p. } [\mathbf{A}\mathbf{x}]_{i=1,\dots,j} \leq [\mathbf{b}]_{i=1,\dots,j} \\ &\quad [\mathbf{A}\mathbf{x}]_{i=j+1,\dots,m} = [\mathbf{b}]_{i=j+1,\dots,m} \\ &\quad x_1, \dots, x_k \geq 0 \\ &\quad x_{k+1}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Dualni problem:

$$\begin{aligned} &\max\ \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y} \\ &\text{p.p. } \left[\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y}\right]_{i=1,\dots,k} \leq [\mathbf{c}]_{i=1,\dots,k} \\ &\quad \left[\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y}\right]_{i=k+1,\dots,n} = [\mathbf{c}]_{i=k+1,\dots,n} \\ &\quad y_1, \dots, y_j \geq 0 \\ &\quad y_{j+1}, \dots, y_n \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Izrek 3.1. Če je originalni problem omejen in ima optimalno rešitev $\mathbf{x}^*$, potem je dualni problem omejen in za vsako rešitev dualnega problema $\mathbf{y}^*$ velja

$$\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}^* \;=\; \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}^*$$

(optimalni rešitvi sta isti, če je problem omejen.

3.3 Stopnja varnosti

Definicija 3.4. Naj bo $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ bimatrična igra. *Stopnja varnosti* za 1. igralca je

$$V_1 \;=\; \max_{\mathbf{p}\in\Pi_1}\min_{\mathbf{q}\in\Pi_2} \mathbf{p}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{q} \;=\; \max_{\mathbf{p}\in\Pi_1}\min_{\mathbf{q}\in\Pi_2} U_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}).$$

Maxmin strategija za 1. igralca je $\overline{\mathbf{p}} \in \Pi_1$, za katero velja $V_1 = \min_{\mathbf{q}\in\Pi_2} \overline{\mathbf{p}}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{q}$. Stopnja varnosti za 2. igralca je

$$V_2 \;=\; \max_{\mathbf{q}\in\Pi_2}\min_{\mathbf{p}\in\Pi_1} \mathbf{p}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{q}.$$

Maxmin strategija za 2. igralca je $\overline{\mathbf{q}} \in \Pi_2$, za katero je $V_2 = \min_{\mathbf{p}\in\Pi_1} \mathbf{p}^\mathsf{T}\mathbf{B}\overline{q}$. Bolj splošno:

$$\begin{aligned}
V_1 &= \max_{\mathbf{p}\in\Pi_1}\min_{\mathbf{q}\in\Pi_2} \sum_{j\in[n]} \left[\mathbf{p}^\mathsf{T}\mathbf{A}\right]_j \mathbf{q}_j \;=\; \max_{\mathbf{p}\in\Pi_1}\min_{j\in[n]} \left[\mathbf{p}^\mathsf{T}\mathbf{A}\right]_j \\
V_2 &= \max_{\mathbf{q}\in\Pi_2}\min_{i\in[m]} [\mathbf{B}\mathbf{q}]_i
\end{aligned}$$

Trditev 3.4. Če je $\mathbf{p} \in \Pi_1$ maxmin strategija, potem

$$\forall \mathbf{q} \in \Pi_2 : \; V_1 \leq \mathbf{p}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{q}.$$

Trditev 3.5. $\{\mathbf{p} \in \Pi_1;\; \mathbf{p} \text{ je maxmin}\}$ in $\{\mathbf{q} \in \Pi_2;\; \mathbf{q} \text{ je maxmin}\}$ sta konveksni.

Trditev 3.6. Računanje stopnje varnosti je linearni program.

3.4 Matrične igre

Definicija 3.5. *Matrična igra* je bimatrična igra $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ z $\mathbf{A} = -\mathbf{B}$. Torej:

- 2 igralca
- 1. izbere $\mathbf{A}_1 = [m]$
- 2. izbere $\mathbf{A}_2 = [n]$
- $\mathbf{A}_{i,j} = -\mathbf{B}_{i,j}$ nam pove koliko 2. igralec plača 1. igralcu
- $\mathbf{A}$ je izplačilna matrika

Izrek 3.2 (von Neumann; minimax izrek)**.** Za vsako matrično igro velja $V_1 = -V_2$ oziroma

$$\max_{\mathbf{p}} \min_{\mathbf{q}} \mathbf{p}^\mathsf{T} \mathbf{A} \mathbf{q} = \min_{\mathbf{q}} \max_{\mathbf{p}} \mathbf{p}^\mathsf{T} \mathbf{A} \mathbf{q}.$$

Opomba.

- V spločnem $\max \min \neq \min \max$.
- Uporabili bomo dualnost.

Posledica. Če igralca uporabita svoje maxmin strategije $\mathbf{p}$ in $\mathbf{q}$, potem $V_1 = \mathbf{p}^\mathsf{T} \mathbf{A} \mathbf{q}$.

Posledica.

- Če je $\mathbf{p}$ maxmin strategija 1. igralca, potem $\forall \mathbf{q} \in \Pi_2 : \mathbf{p}^\mathsf{T} \mathbf{A} \mathbf{q} \geq V_1$.
- Če je $\mathbf{q}$ maxmin strategija 2. igralca, potem $\forall \mathbf{p} \in \Pi_1 : \mathbf{p}^\mathsf{T} \mathbf{A} \mathbf{q} \leq V_1$.

Vrednost igre je $V_1(\mathbf{A}) =: V(\mathbf{A})$.

Definicija 3.6. Pravimo, da je igra *poštena*, če $V(\mathbf{A}) = 0$.

Posledica. Naj bo $\mathbf{A}$ matrična igra, $\mathbf{p} \in \Pi_1$, $\mathbf{q} \in \Pi_2$, $u \in \mathbb{R}$. Če velja $\mathbf{p}^\mathsf{T}\mathbf{A} \geq u \cdot \mathbb{1}_n^\mathsf{T}$ in $\mathbf{A}\mathbf{q} \leq u \cdot \mathbb{1}_m$, potem je $u = V(\mathbf{A})$ ter $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ maxmin strategiji.

Trditev 3.7. Če je $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \Pi_1 \times \Pi_2$ Nashevo ravnovesje, potem sta $\mathbf{p}$ in $\mathbf{q}$ maxmin strategiji.

Trditev 3.8. Če je $\mathbf{p}$ maxmin za 1. igralca in $\mathbf{q}$ maxmin za 2. igralca, potem je $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ Nashevo ravnovesje.

Izrek 3.3. $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ je Nashevo ravnovesje $\iff$ $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ maxmin strategiji.

Posledica. Za matrične igre je $\{(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \Pi_1 \times \Pi_2;\ (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \text{ je Nashevo ravnovesje}\}$ konveksna.

3.5 Posebne matrične igre

Definicija 3.7. Naj bo $\mathbf{A}$ matrična igra, $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i \in [m], j \in [n]}$. Položaj (i, j) je *sedlo*, če velja:

$$\forall i' \in [m] : a_{ij} \geq a_{i'j}$$
$$\forall j' \in [n] : a_{ij} \leq a_{ij'}.$$

Trditev 3.9. Če ima matrična igra $\mathbf{A}$ sedlo na (i, j), potem:

- $V(a) = a_{ij}$;
- $(\delta(i), \delta(j))$ je Nashevo ravnovesje;
- $\delta(i)$ je maxmin za 1. igralca;

- $\delta(j)$ je maxmin za 2. igralca.

Opomba. Ko obstaja sedlo, je lahko maxmin strategij več.

4 Bayesove igre

Definicija 4.1. *Bayesova igra* je 7-terica $(N, \Omega, (p_i)_{i\in N}, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in \mathcal{N}}, (T_i)_{i\in \mathcal{N}}, (\tau_i)_{i\in N})$, kjer:

- N ... končna, neprazna množica igralcev;
- Ω ... neprazna množica stanj; posamezno stanje označimo ω;
- $p_i : \Omega \to [0,1]$ ... funkcija verjetnosti za stanja igralca i ("predhodno prepričanje");
- A_i ... neprazna, končna množica akcija za igralca $i \in N$; profil akcij označimo s $\mathscr{A} = \prod_{i\in N} A_i$;
- $u_i : \Omega \times \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ ... funkcija koristnosti za igralca i;
- T_i ... neprazna množica signalov za igralca i;
- τ_i ... signalna funkcija za igralca i.

Definicija 4.2. Vsako stanje $\omega \in \Omega$ v Bayesovi igri Γ določi strateško igro s funkcijami koristnosti $\Gamma_\omega = (N, (A_i)_{i\in N}, (u_i(\omega, \cdot))_{i\in N})$.

Opomba. Posamezen $i \in N$ ima v vsaki Γ_ω na voljo iste akcije.

Definicija 4.3. Definiramo

$$\begin{aligned}\phi_{\mathscr{B}\to\mathscr{K}} : \{\text{Bayesove igre}\} &\to \{\text{igre s funkcijami koristnosti}\}\\ (N, \Omega, p_i, A_i, u_i, T_i, \tau_i) &\mapsto (\mathcal{T}, (A_{(i,t_i)} = A_i)_{(i,t_i)\in\mathcal{T}}, (\tilde{u}_{(i,t_i)})_{(i,t_i)\in\mathcal{T}})\end{aligned}$$

kjer je $\mathcal{T}$ množica tipov. Bayesovo ravnovesje v Bayesovi igri $\Gamma \equiv$ Nashevo ravnovesje v $\phi_{\mathscr{B}\to\mathscr{K}}(\Gamma)$ (čisto ali mešano). Bayesovo ravnovesje vedno obstaja, le so A_i končne $\forall i \in N$.

5 Ekstenzivne igre

Definicija 5.1. *Ekstenzivna igra* je 4-terica $(N, \mathcal{T}, \mathcal{P}, (u_i)_{i \in N})$, kjer:

- N ... končna množica igralcev
- $\mathcal{T}$ ... drevo s korenom r (brez neskončno poti)
  - $\mathscr{L}(\mathcal{T})$ ... množica listov
  - $\mathscr{V}(\mathcal{T})$ ... množica vozlišč
  - $\mathscr{E}(\mathcal{T})$ ... množica povezav
  - $\mathscr{E}_v$ ... množica povezav od v navzdol
- $\mathcal{P} : \mathscr{V}(\mathcal{T}) \setminus \mathscr{L}(\mathcal{T}) \to N$ ... določi, kdo je na vrsti
- $u_i : \mathscr{L}(\mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ je funkcija preferenc igralca i na $\mathscr{L}(\mathcal{T})$

Opomba.

- Če ima $\mathcal{T}$ neskončne poti, potem se igra na konča.
- u_i so lahko tudi funkcije koristnosti.
- Večkrat je "ime" vozlišča zgodovina akcij, da pridemo do tega stanja.
- Igra poteka od korena navzdol.
- Vsaka ekstenzivna igra $\Gamma = (N, \mathcal{T}, \mathcal{P}, (u_i)_{i \in N})$ določi za vsako vozlišče $v \in \mathscr{V}(\mathcal{T})$ podigro $\Gamma(v) = (N, \mathcal{T}(v), \mathcal{P}\big|_{\mathscr{V}(\mathcal{T}(v)) \setminus \mathscr{L}(\mathcal{T}(v))}, (u_i\big|_{\mathscr{L}(\mathcal{T}(v))})_{i \in N})$

Definicija 5.2. Definiramo preslikavo *izid*:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O} : \prod_{i \in N} S_i = \mathscr{S} &\to \mathscr{L}(\mathcal{T}) \\
(s_i)_{i \in N} &\mapsto \text{list drevesa, kjer se konča igra, če igralci uporabljajo strategije } (S_i)_{i \in N},
\end{aligned}
$$

torej dobimo edini list, za katerega obstaja pot v drevesu od korena, ki uporabi samo povezave v $\bigcup_{i \in N} S_i$.

Definicija 5.3. Definiramo

$$\begin{aligned}\phi_{\mathscr{E}\to\mathscr{P}}:\ \{\text{ekstenzivne igre}\} &\to \{\text{igre s funkcijami preferenc}\}\\ (N,\mathcal{T},\mathcal{P},u_i) &\mapsto (N,S_i,(u_i\circ\mathcal{O})_{i\in N})\end{aligned}$$

Nasheva ravnovesja v ekstenzivni igri Γ so Nasheva ravnovesja v strateški igri $\phi_{\mathscr{E}\to\mathscr{P}}(\Gamma)$.

Definicija 5.4. Definiramo funkcija *izida za vozlišče* v:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_v:\ \mathscr{S} &\to \mathscr{L}(\mathcal{T})\\ (s_i)_{i\in N} &\mapsto \text{list v } \mathcal{T}(v),\ \text{kjer se konča igra, če začnemo v vozlišču } v\end{aligned}$$

Definicija 5.5. Profil strategij $\mathbf{s}=(s_i)_{i\in N}$ je vgnezdeno Nashevo ravnovesje, če velja

$$\forall v\in\mathscr{V}(\mathcal{T}),\ \forall i\in N,\ \forall s_i'\in\mathbf{s}:\ (u_i\circ\mathcal{O}_v)(\mathbf{s})\ \geq\ (u_i\circ\mathcal{O}_v)(\mathbf{s}\mid s_i')$$

oz. $(u_i\circ\mathcal{O}_v)(s_1,\ldots,s_n)\geq(u_i\circ\mathcal{O}_v)(s_1,\ldots,s_{i-1},s_i',s_{i+1},\ldots,s_n)$.

Definicija 5.6. Ekstenzivna igra z nepopolno informacijo vsebuje:

- N ... neprazna množica igralcev
- $\mathcal{T}$ ... drevo s korenom brez neskončnih poti
  - $\mathscr{L}(\mathcal{T})$ ... listi
  - $\mathscr{E}_v$ ... povezave iz v navzdol
- $u_i:\mathscr{L}(\mathcal{T})\to\mathbb{R}$ funkcija koristnosti
- $I_1,\ldots,I_n$ ... razdelitev $\mathscr{V}(\mathcal{T})\setminus\mathscr{L}(\mathcal{T})$. Velja:

  $$\forall j,\ \forall u,v\in I_j:\ |\mathscr{E}_u|=|\mathscr{E}_v|$$

- $\mathcal{P}:\{I_1,\ldots,I_n\}\to\mathcal{N}\cup\{\text{slučaj}\}$ ... določi, kdo je na vrsti na vsaki informacijski množici

- Za vsako informacijsko množico I_j naredimo indentifikacije med povezavami v $\bigcup_{u\in I_i} \mathscr{E}_u$
- Na informacijski množici, kjer je slučaj na vrsti, funkcija verjetnosti na povezavah

Podigre morajo vsebovati bodisi celo informacijsko množico ali nič iz informacijske množice. $\Gamma(v)$ je podigra, če velja:

$$\forall I_j : \mathscr{V}(\mathcal{T}(v)) \supseteq I_j \quad \text{ali} \quad \mathscr{V}(\mathcal{T}(v)) \cap I_j = \emptyset.$$

6 Kooperativne igre

6.1 Nashev produkt

Trditev 6.1. Naj bo K konveksna in kompaktna množica v $\mathbb{R}^2$. Predpostavimo, da $\exists(x,y) \in K : x > x_0,\ y > y_0$. Potem obstaja enolična točka (x^*, y^*) znotraj K, $x^* \geq x_0$, $y^* \geq y_0$ in

$$\Phi(K, x_0, y_0) \ = \ (x^* - x_0)(y^* - y_0),$$

kjer je $\Phi(K, x_0, y_0) := \sup(x - x_0)(y - y_0)$. Definiramo to enolično točko kot $\mathcal{N}(K, x_0, y_0)$.

Trditev 6.2. Naj bo $\mathcal{T}$ trikotnik z oglišči $(0,0), (\alpha, 0), (0, \beta),\ \alpha, \beta > 0$. Potem

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}, 0, 0) \ = \ \left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right).$$

Trditev 6.3. Naj bosta $f_1(x) = \alpha_1 x + \beta_1,\ \alpha_1,\ f_2(y) = \alpha_2 y + \beta_2,\ \alpha_2 > 0$. Za vsak K definiramo $K_f = \{(f_1(x), f_2(x)) \mid (x,y) \in K\}$. Potem velja

$$\mathcal{N}\left(K_f, f_1(x_0), f_2(y_0)\right) \ = \ (f_1, f_2)\left(\mathcal{N}(K, x_0, y_0)\right).$$

6.2 Nashev model pogajanja

Definicija 6.1.

- 2 igralca
- $\mathcal{D}$ ... dopustni izidi sporazumov, konveksen
- $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ ... točka nesporazuma (*status quo*)

Če do sporazuma ne pride, potem bo (a_0, b_0) izid igre. Predpostavimo:

$$\exists(a,b) \in \mathcal{D} : \ a > a_0,\ b > b_0$$

Iščemo funkcijo

$$\varphi(\mathcal{D}, a_0, b_0) \;=\; (\varphi_1(\mathcal{D}, a_0, b_0), \varphi_2(\mathcal{D}, a_0, b_0)) \in \mathbb{R}^2,$$

ki bo "rešitev". Lastnosti funkcije φ:

(A1) (Dopustnost):

$$\varphi(\mathcal{D}, a_0, b_0) \in \mathcal{D}$$

(A2) (Individualno racionalnost):

$$\varphi_1(\mathcal{D}, a_0, b_0) \geq a_0,\;\; \varphi_2(\mathcal{D}, a_0, b_0) \geq b_0$$

(A3) (Paretova optimalnost):

$$\forall (a,b) \in \mathcal{D},\; (a,b) \neq \varphi(\mathcal{D}, a_0, b_0):\; a < \varphi_1(\mathcal{D}, a_0, b_0),\; b < \varphi_2(\mathcal{D}, a_0, b_0).$$

(A4) (Simetrija): Če je $\mathcal{D}$ simetrična glede na premico $a = b$ ($(a,b) \in \mathcal{D} \iff (b,a) \in \mathcal{D}$), potem

$$\varphi_1(\mathcal{D}, 0, 0) \;=\; \varphi_2(\mathcal{D}, 0, 0)$$

(A5) (Preoblikovanje koristnosti): Za poljubni funkciji $f_1(x) = \alpha_1 x + \beta_1$, $f_2(y) = \alpha_2 y + \beta_2$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ velja

$$\left(f_1\left(\varphi_1(\mathcal{D}, a_0, b_0)\right), f_2\left(\varphi(\mathcal{D}, a_0, b_0)\right)\right) \;=\; \varphi\left(\mathcal{D}_f, f_1(a_0), f_2(b_0)\right)$$

(A6) (Neodvisnost od irelevantnih možnosti)

$$\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}, \varphi(\mathcal{D}, a_0, b_0) \in \mathcal{D}' \;\Rightarrow\; \varphi(\mathcal{D}', a_0, b_0) = \varphi(\mathcal{D}, a_0, b_0)$$

Izrek 6.1 (Nash)**.** Obstaja enolična funkcija φ, ki zadošča lastnostim (A1)-(A6) in sicer

$$\varphi(\mathcal{D}, a_0, b_0) \;=\; \mathcal{N}(\mathcal{D}, a_0, b_0).$$

Posledica. $[A, B]$ bimatrična igra, prenosljiva koristnost. $\mathcal{D} := \mathcal{D}_{PK}(A, B)$

$$\varphi(\mathcal{D}, a_0, b_0) \;=\; \mathcal{N}(\mathcal{D}, a_0, b_0) \;=\; \left(\frac{a_0 - b_0 + \sigma}{2}, \frac{b_0 - a_0 + \sigma}{2}\right),$$

kjer je $\sigma = \max_{i,j}(a_{ij} + b_{ij})$.

6.3 Koalicijske igre

Definicija 6.2. Koaliciska igra je par (N, v), pri čemer je:

- N ... množica igralcev
- $v : 2^N \to \mathbb{R}$, $v(\emptyset) = 0$ ... karakteristična funkcija

Definicija 6.3. Naj bo $S \subseteq N$ koalicija. Definiramo:

- *Superaditivnost*:

$$\forall S, T \subseteq M,\ S \cap T = \emptyset :\ v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$$

- *Subaditivnost*:

$$\forall S, T \subseteq M,\ S \cap T = \emptyset :\ v(S) + v(T) \geq v(S \cup T)$$

Definicija 6.4. Naj bo $\Gamma = (N, v)$ koalicijska igra:

- vektor plačil: $(x_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}^N$
- vektor plačil je skupno racionalni, če

$$\sum_{i \in N} x_i \ = \ v(N)$$

- vektor plačil je individualno racionalen, če

$$\forall i \in N :\ x_i \geq v(\{i\})$$

- *imputacija* je plačilni vektor, ki je skupno in individualno racionalen. Množica imputacij:

$$I(\Gamma) \ = \ \left\{ (x_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}^N \mid \forall i \in N :\ x_i \geq v(\{i\}),\ \sum_{i \in N} x_i = v(N) \right\}$$

- *jedro* koalicijske igre $\Gamma = (N, v)$ je

$$J(\Gamma) \ = \ \left\{ (x_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i \in N} x_i = v(N),\ \forall S \subset N : \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \right\}$$

- imptuacija $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in N}$ je stabilna preko koalicije S, če velja

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(s)$$

- jedro je množica impuzacij, ki so skupno racionalne in stabilne preko vseh koalicij. Velja $J(\Gamma) \subseteq I(\Gamma)$.

Opomba. Če je Γ superaditivna, potem $I(\Gamma) \neq \emptyset$.

Definicija 6.5 (Shapleyeve vrednosti)**.** Naj bo $N = [n]$. Iščemo funkcijo $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n) : \{v : 2^{[n]} \to \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^n$, $v(\emptyset) = 0$, ki ima naslednje lastnosti:

(A1) (Učinkovitost/skupna racionalnost):

$$\forall v : \sum_{i \in [n]} \phi_i(v) \;=\; v([n])$$

(A2) (Simetrija):

$$\forall i, j \in [n],\ \forall v : \; ((\forall S \subseteq [n] \setminus \{i, j\} : v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})) \implies \phi_i(v) = \phi_j(v))$$

(A3) (Dummy player):

$$\forall i \in [n],\ \forall v : \; ((\forall S \subseteq [n] \setminus \{i\} : v(S) = v(S \cup \{i\})) \Longrightarrow \phi_i(v) = 0)$$

(A4) (Aditivnost):

$$\forall i \in [n],\ \forall v, v' : \; \phi_i(v + v') = \phi_i(v) + \phi_i(v')$$

Obstaja enolično določena funkcija ϕ, ki zadošča pogojem (A1)-(A4).

Trditev 6.4. Naj bo $\pi : [n] \to [n]$ permutacija.

$$N(\pi, i) = \{j \in [n] \mid \pi^{-1}(j) \leq \pi^{-1}(i)\}$$

je množica igralcev, ki pridejo pred i ter i. Naj bo

$$\Delta(\pi, i, v) \;=\; v\left(N(\pi, i)\right) - v\left(N(\pi, i) \setminus \{i\}\right).$$

Definiramo

$$\begin{aligned}
\phi_i(v) &= \mathbb{E}_\pi[\Delta(\pi, i, v)] \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \Delta(\pi, i, v)) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{S \subseteq N,\ i \notin S} |S|!(n - |S| - 1)!(v(S \cup \{I\}) - v(S))
\end{aligned}$$

Te $(\phi_i)_{i \in N}$ so Shapleyeve vrednosti in ustrezajo pogojem (A1)-(A4).

Izrek 6.2. $(\phi_i)_{i \in N}$ je enolična funkcija, ki zadošča aksiomom (A1)-(A4).