Teorija iger - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar
po predavanjih profesorja Sergia Cabella

2021/22

Kazalo

1 Strateške igre s funkcijami preferenc

1.1 Uvod

Definicija 1.1. Naj bo $\mathcal{A}$ množica. *Funkcija preferenc* na množici $\mathcal{A}$ je preslikava $u : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ funkcija preferenc. Intuicija: $\forall a, a' \in \mathcal{A}, a \neq a'$:

- $u(a) > u(a')$ " $\iff$ " a je boljše kot a'
- $u(a) < u(a')$ " $\iff$ " a je slabše kot a'
- $u(a) = u(a')$ " $\iff$ " med a in a' smo indiferentni

Opomba.

- Različne funkcije lahko določijo iste preference.
- Obravnavali bomo tudi več funkcij preferenc na isti množici (vsak igralec ima lahko svojo funkcijo).
- Preverence določimo kvalitativno, ne kvantitativno - pomemben je le vrstni red, same vrednosti ne.
- Namesto $\mathbb{R}$ bi lahko uporabili poljubno drugo linearno urejeno množico.

Definicija 1.2. *Strateška igra s funkcijami preferenc* je trojica

$$(N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}),$$

pri čemer:

- N je končna množica *igralcev.*
- Za vsakega igralca $i \in N$ je A_i neprazna množica *akcij* za $i \in N$. Naj bo
$$\mathcal{A} := \prod_{i\in N} A_i$$
množica *profilov akcij.*

- Za vsakega igralca $i \in N$ je $u_i : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ je funkcija preferenc na $\mathcal{A}$ za igralca i.

Opomba. Ponavadi: $N = [n] = \{1, \ldots, n\}$. V tem primeru imamo trojico

$$([n], (A_1, \ldots, A_n), (u_1, \ldots, u_n)),$$

$\mathcal{A} = A_1 \times \ldots \times A_n$ ter $u_i : A_1 \times \ldots \times A_n \to \mathbb{R}$.

1.2 Čisto Nashevo ravnotežje

Notacija.

$$(x_\alpha, x_\beta, x_\gamma \mid y; \beta) \;=\; (x_{-\beta}, y) \;=\; (x_\alpha, y, x_\gamma)$$

Za funkcije preferenc:

$$u_i(x_1, \ldots, x_m \mid y) \;=\; u_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Definicija 1.3. Naj bo $\Gamma = (N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ strateška igra s funkcijami preferenc. Naj bo

$$\mathcal{A} \;=\; \prod_{i\in N} A_i.$$

Profil akcij $a^* \in \mathcal{A}$ je *čisto Nashevo ravnovesje* $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$\forall i \in N,\ \forall b \in A_i :\ u_i(a^*) \geq u_i(a^* \mid b).$$

Tak $a^* \in \mathcal{A}$ je *strogo čisto Nashevo ravnovesje* $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$\forall i \in N,\ \forall b \in A_i \setminus \{a_i^*\} :\ u_i(a^*) > u_i(a^* \mid b).$$

Definicija 1.4. Naj bo $\Gamma = (N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ strateška igra s funkcijami preferenc. Označimo

$$\mathcal{A} \;=\; \prod_{n\in N} A_i.$$

Najboljši odgovor igralca $i \in N$ je

$$\begin{aligned} B_i :\; \mathcal{A} &\to 2^{A_i} \;=\; \{B \mid B \subseteq A_i\} \\ a &\mapsto \{b \in A_i \mid \forall c \in A_i : u_i(a \mid b) \geq u_i(a \mid c)\} \\ &= \{b \in A_i \mid u_i(a \mid b) \;=\; \max_{c\in A_i}(a \mid c)\}. \end{aligned}$$

Za $N = [n] = \{1, \ldots, n\}$ je formula v definiciji za igralca $i = 1$:

$$B_1(a_1, \ldots, a_n) \;=\; \{b \in A_1 \mid u_1(b, a_2, \ldots, a_n) = \max_{c\in A_1} u_1(c, a_2, \ldots, a_n)\},$$

analogno za $i = 2, \ldots, n$.

Opomba.

- Bolj pravilno bi bilo reči "*množica najboljših odgovorov*".
- Večkrat velja $|B_i(a)| = 1$ (le en najboljši odgovor). V tem primeru pišemo brez $\{\}$.
- Pri definiciji B_i nima a_i nobene vloge. Za dva igralca bomo ponavadi napisali

$$\begin{aligned} B_1(a_2) &\equiv B_1(*, a_2) \\ B_2(a_1) &\equiv B_2(a_1, *). \end{aligned}$$

Trditev 1.1. Profil akcij $a^* = (a_i^*)_{i\in N}$ je čisto Nashevo ravnovesje $\iff$

$$\forall i \in N :\; a_i^* \in B_i(a^*).$$

Trditev 1.2. Profil akcij $a^* = (a_i^*)_{i \in N}$ je strogo čisto Nashevo ravnovesje $\iff$

$$\forall i \in N: \ a_i^* \in B_i^{\text{str}}(a^*),$$

kjer B_i^{str} definiramo kot

$$\begin{aligned} B_i^{\text{str}} : \mathcal{A} &\to 2^{A_i} \\ a &\mapsto \{b \in A_i \mid \forall c \in A_i \setminus \{b\} : u_i(a^* \mid b) > u_i(a^* \mid c)\} \\ &= \begin{cases} \text{edini max;} & \text{če obstaja,} \\ \emptyset; & \text{sicer.} \end{cases} \end{aligned}$$

1.3 Dominacije

Definicija 1.5. Naj bo $\Gamma = (N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ strateška igra s funkcijo preferenc. Označimo

$$\mathcal{A} = \prod_{i \in N} A_i.$$

Akcija $b \in A_i$ *šibko dominira* akcijo $c \in A_i$, če velja

$$\forall a \in \mathcal{A}: \ u_i(a \mid b) \geq u_i(a \mid c).$$

Akcija $b \in A_i$ *strogo dominira* akcijo $c \in A_i$, če velja

$$\forall a \in \mathcal{A}: \ u_i(a \mid b) > u_i(a \mid c).$$

Trditev 1.3. Če $b \in A_i$ strogo dominira $c \in A_i$, potem ne obstaja čisto Nashevo ravnovesje $a^* = (a_i^*)_{i \in N}$ z $a_i^* = c$. Če $b \in A_i$ dominira $c \in A_i$, potem obstaja strogo čisto Nashevo ravnovesje $a^* = (a_i^*)_{i \in N}$ z $a_i^* = c$.

2 Strateške igre s funkcijami koristnosti

2.1 Uvod

Definicija 2.1. Naj bo $A = (a_1, \ldots, a_\Pi)$ končna množica in π funkcija verjetnosti:

$$\pi \sim \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_\Pi \\ \pi(a_1) & \ldots & \pi(a_\Pi) \end{pmatrix}.$$

Množica $\pi(A)$, definirana kot

$$\pi(A) \;=\; \{((\pi(a_i))_{a_i \in A} \mid \forall a_i \in A_i : \pi(a_i) \geq 0, \sum_{a_i \in A} \pi(a_i) = 1\}$$

je *množica loterij* na A.

Definicija 2.2. Naj bo A končna. *Funkcija koristnosti* na A je prelikava $u : A \to \mathbb{R}$, ki določa preference na množici $\pi(A)$ in sicer

$$\begin{aligned} \hat{u} : \pi(A) &\to \mathbb{R} \\ \pi = (\pi(a))_{a \in A} &\mapsto \sum_{a \in A} \pi(a) u(a), \end{aligned}$$

če je $\hat{u}$ razširitev funkcije u. Osnovni princip bo:

$$\hat{u}(\pi) \geq \hat{u}(\pi') \quad \iff \quad \pi \text{ ni slabše od } \pi'.$$

Opomba. Lahko imamo različni funkciji koristnosti, ki določata iste preference na $\pi(A)$. En del teorije koristnosti se ukvaraja z obratno smerjo, in sicer za katere preference nad $\pi(A)$ obstaja funkcija koristnosti $u : A \to \mathbb{R}$, za katero imamo razširitev iste preference $\pi(A)$.

2.2 Igre koristnosti

Definicija 2.3. *Strateška igra s funkcijami koristnosti* je trojica

$$\Gamma \;=\; (N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}),$$

pri čemer:

- je N neprazna in končna množica igralcev.
- je A_i neprazna in končna množica akcij za igralca $i \in N$. Naj bo $A = \prod_{i\in N} A_i$ množica profilov akcij.
- je $u_i : A \to \mathbb{R}$ funkcija koristnosti za igralca $i \in N$.

Množica strategij za igralca $i \in N$ je $S_i = \pi(A_i)$. Strategija $\pi \in S_i$ meša akcije $\{a \in A_i \mid \pi_i(a) > 0\}$. Strategija $\pi \in S_i$ je čista, če je $\pi = S(a)$ za nek $a \in A_i$. Množica profilov strategij je $S = \prod_{i\in N} S_i$.

Trditev 2.1. Definiramo:

$$\begin{aligned} u_i : S = \prod_{j\in N} S_j \;&\to\; \mathbb{R} \\ \pi = (\pi_j)_{j\in N} \;&\mapsto\; \sum_{a\in A}\left(\prod_{j\in N} \pi_j(a_j)\right) u_i(a). \end{aligned}$$

Velja:

$$u_i(\pi) \;=\; \sum_{a_i\in A} \pi_i(a_i)\,[u_i(\pi \mid \delta(a_i)]\,.$$

2.3 Nasheva ravnovesja

Definicija 2.4. Naj bo $\Gamma(N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ strateška igra s funkcijami koristnosti. Profil strategij

$$\Pi^* = (\pi_i^*) \;\in\; S = \prod_{i\in N} S_i$$

je Nashevo ravnovesje $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$\forall i \in N,\ \forall \pi_i' \in S_i,\ \pi_i' \neq \pi_i^* :\ u_i^*(\pi^*)\ >\ u_i(\pi^* \mid \pi_i').$$

Imamo preslikavo

$$\begin{aligned} \phi_{\mathscr{K}\to\mathscr{P}} : \{\text{igra s funkcijami koristnosti}\} &\to \{\text{igra s funkcijami preferenc}\} \\ (N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}) &\mapsto (N, (S_i = \pi(A_i))_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}). \end{aligned}$$

$\phi_{\mathscr{K}\to\mathscr{P}}$ je *mešana razširitev* igre Γ.

Trditev 2.2. Naj bo Γ strateška igra s funkcijami koristnosti in naj bo π profil strategij v Γ. π je Nashevo ravnovesje v $\Gamma \iff \pi$ je čisto Nashevo ravnovesje v $\phi_{\mathscr{K}\to\mathscr{P}}(\Gamma)$.

Izrek 2.1 (Nash, 1949)**.** Vsaka strateška igra s funkcijami koristnosti ima vsaj eno Nashevo ravnovesje.

Opomba.

- Dokaz je nekonstruktiven, nič ne pove kako Nashevo ravnovesje najti.
- Pomembno je, da ima vsak igralec končno množico akcij. Obstajajo sicer tudi posplošitve za neskončno mnogo akcij.
- Če je igra generična, potem je število Nashevih ravnovesij liho.

Trditev 2.3. Profil strategij $\pi^* = (\pi_i^*)_{i\in N}$ je Nashevo ravnovesje

$$\iff \forall i \in N\ \forall a_i \in A_i :\ u_i(\pi^*) \geq u_i(\pi^* \mid \delta(a_i)).$$

Trditev 2.4 (Princip indiferentnosti)**.** Če je $\pi^* = (\pi_i^*)_{i\in N}$ Nashevo ravnovesje, potem velja

$$\forall i \in N\ \forall a_i \in A_i :\ (\pi_i^*(a_i) > 0\ \Rightarrow\ u_i(\pi^*) = u_i(\pi^* \mid \delta(a))).$$

Opomba.

- Uporabna, ker imamo enačbe.
- To ni karakterizacija. Uporabimo za iskanje kandidatov.
- Ko ima igralec i $|A_i| = 2$, potem, ko velja

$$u_i(\pi^* \mid \delta(a_i)) \;=\; u_i(\pi^* \mid \delta(b_i)) \;=\; u_i(\pi^*)$$

  avtomatično velja pogoj sistema neenačb za igralca i:

$$\begin{aligned} u_i(\pi^* \mid \delta(a_i)) \;&\leq\; u_i(\pi^*) \\ u_i(\pi^* \mid \delta(b_i)) \;&\leq\; u_i(\pi^*) \end{aligned}$$

2.4 Dominacije

Definicija 2.5. Strategija $\alpha_i \in S_i$ *(šibko) dominira* strategijo $\beta_i \in S_i$, če velja

$$\forall \pi \in S: \; u_i(\pi \mid \alpha_i) \;\geq\; u_i(\pi \mid \beta_i).$$

Strategija $\alpha_i \in S_i$ *strogo dominira* $\beta_i \in S_i$, če velja

$$\forall \pi \in S: \; u_i(\pi \mid \alpha_i) \;>\; u_i(\pi \mid \beta_i).$$

Trditev 2.5. Naj bo $\pi^* = (\pi_i^*)_{i \in N}$ Nashevo ravnovesje. Če strategija $\alpha_i \in S_i$ strogo dominira $\delta(b_i)$, potem

$$\pi_i^*(b_i) \;=\; 0.$$

2.5 Dokaz Nashevega izreka (dokaz je v zapiskih, tu le potrebno "orodje")

Izrek 2.2 (Brouwerjev izrek)**.** Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}^d$ konveksna in kompaktna množica ter $T : X \to X$ zvezna preslikava. Potem $\exists x \in X$, da velja $T(x) = x$.

2.6 Bimatrične in matrične igre

Definicija 2.6. *Bimatrična igra* je igra s funkcijami koristnosti za 2 igralca, $N = \{1, 2\}$, pri katerih je

$$\begin{aligned} A_1 &= [m] = \{1, \ldots, m\} \\ A_2 &= [n] = \{1, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

Igro predstavimo z bimatriko.

Trditev 2.6. Profil $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \in \pi_1 \times \pi_2$ je Nashevo ravnovesje $\iff$

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{p} \in \pi_1 : \ (\mathbf{p}^*)^\mathsf{T} \mathbf{A} \mathbf{q}^* &\geq \mathbf{p}^\mathsf{T} \mathbf{A} \mathbf{q}^* \\ \forall \mathbf{q} \in \pi_2 : \ (\mathbf{p}^*)^\mathsf{T} \mathbf{B} \mathbf{q}^* &\geq (\mathbf{p}^*)^\mathsf{T} \mathbf{B} \mathbf{q} \end{aligned}$$

Trditev 2.7 (Sistem neenačb)**.** Profil $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ je Nashevo ravnovesje $\iff$

$$\begin{aligned} \forall i \in [m] : \ (\mathbf{p}^*)^\mathsf{T} \mathbf{A} \mathbf{q}^* &\geq [\mathbf{A} \mathbf{q}^*]_i \\ \forall j \in [n] : \ (\mathbf{p}^*)^\mathsf{T} \mathbf{B} \mathbf{q}^* &\geq [(\mathbf{p}^*)^\mathsf{T} \mathbf{B}]_j \end{aligned}$$

Trditev 2.8 (Princip indiferentnosti)**.** Če je profil $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ Nashevo ravnovesje, potem

$$\begin{aligned} \forall i \in [m] : \ (p_i^* > 0) &\Rightarrow (\mathbf{p}^*)^\mathsf{T} \mathbf{A} \mathbf{q}^* = [\mathbf{A} \mathbf{q}^*]_i \\ \forall j \in [n] : \ (q_j^* > 0) &\Rightarrow (\mathbf{p}^*)^\mathsf{T} \mathbf{A} \mathbf{q}^* = [(\mathbf{p}^*)^\mathsf{T} \mathbf{A}]_j. \end{aligned}$$