# Teorija iger - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar
po predavanjih profesorja Sergia Cabella

2021/22

# Kazalo

# 1 Strateške igre s funkcijami preferenc

## 1.1 Uvod

**Definicija 1.1.** Naj bo $\mathcal{A}$ množica. *Funkcija preferenc* na množici $\mathcal{A}$ je preslikava $u : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ funkcija preferenc. Intuicija: $\forall a, a' \in \mathcal{A}, a \neq a'$:

- $u(a) > u(a')$ " $\iff$ " $a$ je boljše kot $a'$
- $u(a) < u(a')$ " $\iff$ " $a$ je slabše kot $a'$
- $u(a) = u(a')$ " $\iff$ " med $a$ in $a'$ smo indiferentni

**Opomba.**

- Različne funkcije lahko določijo iste preference.
- Obravnavali bomo tudi več funkcij preferenc na isti množici (vsak igralec ima lahko svojo funkcijo).
- Preverence določimo kvalitativno, ne kvantitativno - pomemben je le vrstni red, same vrednosti ne.
- Namesto $\mathbb{R}$ bi lahko uporabili poljubno drugo linearno urejeno množico.

**Definicija 1.2.** *Strateška igra s funkcijami preferenc* je trojica

$$(N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}),$$

pri čemer:

- $N$ je končna množica *igralcev.*
- Za vsakega igralca $i \in N$ je $A_i$ neprazna množica *akcij* za $i \in N$. Naj bo

  $$\mathcal{A} := \prod_{i\in N} A_i$$

  množica *profilov akcij.*

- Za vsakega igralca $i \in N$ je $u_i : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ je funkcija preferenc na $\mathcal{A}$ za igralca $i$.

**Opomba.** Ponavadi: $N = [n] = \{1, \dots, n\}$. V tem primeru imamo trojico

$$([n], (A_1, \dots, A_n), (u_1, \dots, u_n)),$$

$\mathcal{A} = A_1 \times \ldots \times A_n$ ter $u_i : A_1 \times \ldots \times A_n \to \mathbb{R}$.

## 1.2 Čisto Nashevo ravnotežje

**Notacija.**

$$(x_\alpha, x_\beta, x_\gamma \mid y; \beta) \;=\; (x_{-\beta}, y) \;=\; (x_\alpha, y, x_\gamma)$$

Za funkcije preferenc:

$$u_i(x_1, \dots, x_m \mid y) \;=\; u_i(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

**Definicija 1.3.** Naj bo $\Gamma = (N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ strateška igra s funkcijami preferenc. Naj bo

$$\mathcal{A} \;=\; \prod_{i \in N} A_i.$$

Profil akcij $a^* \in \mathcal{A}$ je *čisto Nashevo ravnovesje* $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$\forall i \in N,\ \forall b \in A_i :\ u_i(a^*) \geq u_i(a^* \mid b).$$

Tak $a^* \in \mathcal{A}$ je *strogo čisto Nashevo ravnovesje* $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$\forall i \in N,\ \forall b \in A_i \setminus \{a_i^*\} :\ u_i(a^*) > u_i(a^* \mid b).$$

**Definicija 1.4.** Naj bo $\Gamma = (N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ strateška igra s funkcijami preferenc. Označimo

$$\mathcal{A} \;=\; \prod_{n\in N} A_i.$$

*Najboljši odgovor* igralca $i \in N$ je

$$\begin{aligned} B_i :\; \mathcal{A} &\to 2^{A_i} \;=\; \{B \mid B \subseteq A_i\} \\ a &\mapsto \{b \in A_i \mid \forall c \in A_i : u_i(a \mid b) \geq u_i(a \mid c)\} \\ &= \{b \in A_i \mid u_i(a \mid b) \;=\; \max_{c\in A_i}(a \mid c)\}. \end{aligned}$$

Za $N = [n] = \{1, \ldots, n\}$ je formula v definiciji za igralca $i = 1$ :

$$B_1(a_1, \ldots, a_n) \;=\; \{b \in A_1 \mid u_1(b, a_2, \ldots, a_n) = \max_{c\in A_1} u_1(c, a_2, \ldots, a_n)\},$$

analogno za $i = 2, \ldots, n$.

**Opomba.**

- Bolj pravilno bi bilo reči "*množica najboljših odgovorov*".
- Večkrat velja $|B_i(a)| = 1$ (le en najboljši odgovor). V tem primeru pišemo brez $\{\}$.
- Pri definiciji $B_i$ nima $a_i$ nobene vloge. Za dva igralca bomo ponavadi napisali

$$\begin{aligned} B_1(a_2) &\equiv B_1(*, a_2) \\ B_2(a_1) &\equiv B_2(a_1, *). \end{aligned}$$

**Trditev 1.1.** Profil akcij $a^* = (a_i^*)_{i\in N}$ je čisto Nashevo ravnovesje $\iff$

$$\forall i \in N :\; a_i^* \in B_i(a^*).$$

**Trditev 1.2.** Profil akcij $a^* = (a_i^*)_{i \in N}$ je strogo čisto Nashevo ravnovesje $\iff$

$$\forall i \in N : \; a_i^* \in B_i^{\text{str}}(a^*),$$

kjer $B_i^{\text{str}}$ definiramo kot

$$\begin{aligned} B_i^{\text{str}} : \mathcal{A} &\to 2^{A_i} \\ a &\mapsto \{b \in A_i \mid \forall c \in A_i \setminus \{b\} : u_i(a^* \mid b) > u_i(a^* \mid c)\} \\ &= \begin{cases} \text{edini max;} & \text{če obstaja,} \\ \emptyset; & \text{sicer.} \end{cases} \end{aligned}$$

## 1.3 Dominacije

**Definicija 1.5.** Naj bo $\Gamma = (N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ strateška igra s funkcijo preferenc. Označimo

$$\mathcal{A} = \prod_{i \in N} A_i.$$

Akcija $b \in A_i$ *šibko dominira* akcijo $c \in A_i$, če velja

$$\forall a \in \mathcal{A} : \; u_i(a \mid b) \geq u_i(a \mid c).$$

Akcija $b \in A_i$ *strogo dominira* akcijo $c \in A_i$, če velja

$$\forall a \in \mathcal{A} : \; u_i(a \mid b) > u_i(a \mid c).$$

**Trditev 1.3.** Če $b \in A_i$ strogo dominira $c \in A_i$, potem ne obstaja čisto Nashevo ravnovesje $a^* = (a_i^*)_{i \in N}$ z $a_i^* = c$. Če $b \in A_i$ dominira $c \in A_i$, potem obstaja strogo čisto Nashevo ravnovesje $a^* = (a_i^*)_{i \in N}$ z $a_i^* = c$.