

Teorija iger - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar
po predavanjih profesorja Sergia Cabella

2021/22

Kazalo

1	Strateške igre s funkcijami preferenc	3
1.1	Uvod	3
1.2	Čisto Nashevo ravnotežje	4
1.3	Dominacije	6
2	Strateške igre s funkcijami koristnosti	7
2.1	Uvod	7
2.2	Igre koristnosti	8
2.3	Nasheva ravnovesja	8

1 Strateške igre s funkcijami preferenc

1.1 Uvod

Definicija 1.1. Naj bo \mathcal{A} množica. *Funkcija preferenc* na množici \mathcal{A} je preslikava $u : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija preferenc. Intuicija: $\forall a, a' \in \mathcal{A}, a \neq a'$:

- $u(a) > u(a')$ “ \iff ” a je boljše kot a'
- $u(a) < u(a')$ “ \iff ” a je slabše kot a'
- $u(a) = u(a')$ “ \iff ” med a in a' smo indiferentni

Opomba.

- Različne funkcije lahko določijo iste preference.
- Obravnavali bomo tudi več funkcij preferenc na isti množici (vsak igralec ima lahko svojo funkcijo).
- Preference določimo kvalitativno, ne kvantitativno - pomemben je le vrstni red, same vrednosti ne.
- Namesto \mathbb{R} bi lahko uporabili poljubno drugo linearno urejeno množico.

Definicija 1.2. *Strateška igra s funkcijami preferenc* je trojica

$$(N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}),$$

pri čemer:

- N je končna množica igralcev.
- Za vsakega igralca $i \in N$ je A_i neprazna množica *akcij* za $i \in N$. Naj bo

$$\mathcal{A} := \prod_{i \in N} A_i$$

množica *profilov akcij*.

- Za vsakega igralca $i \in N$ je $u_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcija preferenc na \mathcal{A} za igralca i .

Opomba. Ponavadi: $N = [n] = \{1, \dots, n\}$. V tem primeru imamo trojico

$$([n], (A_1, \dots, A_n), (u_1, \dots, u_n)),$$

$\mathcal{A} = A_1 \times \dots \times A_n$ ter $u_i : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow \mathbb{R}$.

1.2 Čisto Nashevo ravnotežje

Notacija.

$$(x_\alpha, x_\beta, x_\gamma \mid y; \beta) = (x_{-\beta}, y) = (x_\alpha, y, x_\gamma)$$

Za funkcije preferenc:

$$u_i(x_1, \dots, x_m \mid y) = u_i(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Definicija 1.3. Naj bo $\Gamma = (N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ strateška igra s funkcijami preferenc. Naj bo

$$\mathcal{A} = \prod_{i \in N} A_i.$$

Profil akcij $a^* \in \mathcal{A}$ je *čisto Nashevo ravnovesje* $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$\forall i \in N, \forall b \in A_i : u_i(a^*) \geq u_i(a^* \mid b).$$

Tak $a^* \in \mathcal{A}$ je *strogo čisto Nashevo ravnovesje* $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$\forall i \in N, \forall b \in A_i \setminus \{a_i^*\} : u_i(a^*) > u_i(a^* \mid b).$$

Definicija 1.4. Naj bo $\Gamma = (N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ strateška igra s funkcijami preferenc. Označimo

$$\mathcal{A} = \prod_{n \in N} A_i.$$

Najboljši odgovor igralca $i \in N$ je

$$\begin{aligned} B_i : \mathcal{A} &\rightarrow 2^{A_i} = \{B \mid B \subseteq A_i\} \\ a &\mapsto \{b \in A_i \mid \forall c \in A_i : u_i(a \mid b) \geq u_i(a \mid c)\} \\ &= \{b \in A_i \mid u_i(a \mid b) = \max_{c \in A_i} u_i(a \mid c)\}. \end{aligned}$$

Za $N = [n] = \{1, \dots, n\}$ je formula v definiciji za igralca $i = 1$:

$$B_1(a_1, \dots, a_n) = \{b \in A_1 \mid u_1(b, a_2, \dots, a_n) = \max_{c \in A_1} u_1(c, a_2, \dots, a_n)\},$$

analogno za $i = 2, \dots, n$.

Opomba.

- Bolj pravilno bi bilo reči “*množica najboljših odgovorov*”.
- Večkrat velja $|B_i(a)| = 1$ (le en najboljši odgovor). V tem primeru pišemo brez $\{\}$.
- Pri definiciji B_i nima a_i nobene vloge. Za dva igralca bomo ponavadi napisali

$$\begin{aligned} B_1(a_2) &\equiv B_1(*, a_2) \\ B_2(a_1) &\equiv B_2(a_1, *). \end{aligned}$$

Trditev 1.1. Profil akcij $a^* = (a_i^*)_{i \in N}$ je čisto Nashevo ravnovesje \iff

$$\forall i \in N : a_i^* \in B_i(a^*).$$

Trditev 1.2. Profil akcij $a^* = (a_i^*)_{i \in N}$ je strogo čisto Nashevo ravnovesje \iff

$$\forall i \in N : a_i^* \in B_i^{\text{str}}(a^*),$$

kjer B_i^{str} definiramo kot

$$\begin{aligned} B_i^{\text{str}} : \mathcal{A} &\rightarrow 2^{A_i} \\ a &\mapsto \{b \in A_i \mid \forall c \in A_i \setminus \{b\} : u_i(a^* \mid b) > u_i(a^* \mid c)\} \\ &= \begin{cases} \text{edini max;} & \text{če obstaja,} \\ \emptyset; & \text{sicer.} \end{cases} \end{aligned}$$

1.3 Dominacije

Definicija 1.5. Naj bo $\Gamma = (N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ strateška igra s funkcijo preferenc. Označimo

$$\mathcal{A} = \prod_{i \in N} A_i.$$

Akcija $b \in A_i$ *šibko dominira* akcijo $c \in A_i$, če velja

$$\forall a \in \mathcal{A} : u_i(a \mid b) \geq u_i(a \mid c).$$

Akcija $b \in A_i$ *strogo dominira* akcijo $c \in A_i$, če velja

$$\forall a \in \mathcal{A} : u_i(a \mid b) > u_i(a \mid c).$$

Trditev 1.3. Če $b \in A_i$ strogo dominira $c \in A_i$, potem ne obstaja čisto Nashevo ravnovesje $a^* = (a_i^*)_{i \in N}$ z $a_i^* = c$. Če $b \in A_i$ dominira $c \in A_i$, potem obstaja strogo čisto Nashevo ravnovesje $a^* = (a_i^*)_{i \in N}$ z $a_i^* = c$.

2 Strateške igre s funkcijami koristnosti

2.1 Uvod

Definicija 2.1. Naj bo $A = (a_1, \dots, a_\Pi)$ končna množica in π funkcija verjetnosti:

$$\pi \sim \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_\Pi \\ \pi(a_1) & \dots & \pi(a_\Pi) \end{pmatrix}.$$

Množica $\pi(A)$, definirana kot

$$\pi(A) = \{((\pi(a_i))_{a_i \in A} \mid \forall a_i \in A : \pi(a_i) \geq 0, \sum_{a_i \in A} \pi(a_i) = 1\}$$

je množica loterij na A .

Definicija 2.2. Naj bo A končna. *Funkcija koristnosti* na A je prelikava $u : A \rightarrow \mathbb{R}$, ki določa preference na množici $\pi(A)$ in sicer

$$\begin{aligned} \hat{u} : \pi(A) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \pi = (\pi(a))_{a \in A} &\mapsto \sum_{a \in A} \pi(a) u(a), \end{aligned}$$

če je \hat{u} razširitev funkcije u . Osnovni princip bo:

$$\hat{u}(\pi) \geq \hat{u}(\pi') \iff \pi \text{ ni slabše od } \pi'.$$

Opomba. Lahko imamo različni funkciji koristnosti, ki določata iste preference na $\pi(A)$. En del teorije koristnosti se ukvaraja z obratno smerjo, in sicer za katere preference nad $\pi(A)$ obstaja funkcija koristnosti $u : A \rightarrow \mathbb{R}$, za katero imamo razširitev iste preference $\pi(A)$.

2.2 Igre koristnosti

Definicija 2.3. *Strateška igra s funkcijami koristnosti* je trojica

$$\Gamma = (N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}),$$

pri čemer:

- je N neprazna in končna množica igralcev.
- je A_i neprazna in končna množica akcij za igralca $i \in N$. Naj bo $A = \prod_{i \in N} A_i$ množica profilov akcij.
- je $u_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija koristnosti za igralca $i \in N$.

Množica strategij za igralca $i \in N$ je $S_i = \pi(A_i)$. Strategija $\pi \in S_i$ meša akcije $\{a \in A_i \mid \pi_i(a) > 0\}$. Strategija $\pi \in S_i$ je čista, če je $\pi = S(a)$ za nek $a \in A_i$. Množica profilov strategij je $S = \prod_{i \in N} S_i$.

Trditev 2.1. Definiramo:

$$u_i : S = \prod_{j \in N} S_j \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\pi = (\pi_j)_{j \in N} \mapsto \sum_{a \in A} \left(\prod_{j \in N} \pi_j(a_j) \right) u_i(a).$$

Velja:

$$u_i(\pi) = \sum_{a_i \in A} \pi_i(a_i) [u_i(\pi \mid \delta(a_i))].$$

2.3 Nasheva ravnovesja

Definicija 2.4. Naj bo $\Gamma(N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ strateška igra s funkcijami koristnosti. Profil strategij

$$\Pi^* = (\pi_i^*) \in S = \prod_{i \in N} S_i$$

je Nashevo ravnovesje $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$\forall i \in N, \forall \pi'_i \in S_i, \pi'_i \neq \pi_i^* : u_i^*(\pi^*) > u_i(\pi^* \mid \pi'_i).$$

Imamo preslikavo

$$\begin{aligned} \phi_{\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{D}} : \{\text{igra s funkcijami koristnosti}\} &\rightarrow \{\text{igra s funkcijami preferenc}\} \\ (N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}) &\mapsto (N, (S_i = \pi(A_i))_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}). \end{aligned}$$

$\phi_{\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{D}}$ je *mešana razširitev* igre Γ .

Trditev 2.2. Naj bo Γ strateška igra s funkcijami koristnosti in naj bo π profil strategij v Γ . π je Nashevo ravnovesje v $\Gamma \iff \pi$ je čisto Nashevo ravnovesje v $\phi_{\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{D}}(\Gamma)$.