Verjetnost 1 - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar

2020/21

Kazalo

1 DEFINICIJA VERJETNOSTI

1.1 Neformalni uvod v verjetnost

Definicija 1.1 (Verjetnost)**.** Izvajamo poskus. Opazujemo določen pojav, ki ga imenujemo *dogodek*. Poskus ponovimo n - krat.
Definirajmo *frekvenco dogodka* $k_n(A)$ kot število ponovitev, pri katerih se dogodek zgodi.
Relativna frekvenca je definirana kot $f_n(A) = \frac{k_n(A)}{n}$. Zaporedje $\{f_n(A)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira k nekem številu $p \in [0, 1]$.
Statistična definicija verjetnosti je definirana kot

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty}\{f_n(A)\}.$$

Klasična definicija verjetnosti je definirana kot

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{št. ugodnih izidov A}}{\text{št. vseh izidov A}}.$$

Če je izidov neskončno mnogo uporabimo geometrijsko definicijo verjetnosti.

1.2 Aksiomična definicija verjetnosti

Definicija 1.2. Imamo *prostor vseh izidov* oz. *vzorčni prostor* Ω. *Dogodki* so nekatere (ne nujno vse) podmnožice Ω.

Definicija 1.3 (Operacije na dogodkih)**.**

1. Vsota oz. unija dogodkov:

$$A + B = A \cup B$$

je dogodek, ki se zgodi, če se zgodi vsaj eden od dogodkov A in B.

2. Produkt oz. presek dogodkov:

$$A \cdot B = A \cap B$$

je dogodek, ki se zgodi, če se zgodita oba dogodka A in B hkrati.

3. Nasprotni dogodek oz. komplement dogodkov:

$$\bar{A} = A^C$$

je dogodek, ki se zgodi, če se dogodek A ne zgodi.

Opomba. Pravila za računanje z dogodki:

1. Idempotentnost:
$$A \cup A = A = A \cap A$$

2. Komutativnost:
$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

3. Asociativnost:
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

4. Distributivnost:
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

5. de Morganova zakona:
$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$
$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

Še več:
$$\left(\bigcup_i A_i\right)^C = \bigcap_i A_i{}^C$$
$$\left(\bigcap_i A_i\right)^C = \bigcup_i A_i{}^C$$

Opomba. V splošnem ni vsaka podmnožica $A \subset \Omega$ dogodek.

Definicija 1.4 (σ-algebra)**.** *Neprazna* družina podmnožic (dogodkov) $\mathcal{F}$ v Ω je σ-algebra, če velja:

1. *Zaprtost komponente*:

$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F}$$

2. *Zaprtost števne unije*:

$$A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

Opomba. Če v (2) zahtevamo manj:

$$A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F},$$

je $\mathcal{F}$ *algebra.* V algebri imamo torej zaprtost za končne unije in končne preseke, medtem ko je σ-algebra zaprta celo za števne preseke.

Definicija 1.5. Naj bo $\mathcal{F}$ σ-algebra, Ω vzorčni prostor. *Verjetnostna mera* na $(\mathcal{F}, \Omega)$, je preslikava $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ za katero velja:

1. $\mathbb{P} \geq 0$, za $\forall A \in \mathbb{F}$
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
3. Za poljubne paroma nerazdružljive dogodke velja

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

Trojico $(\mathcal{F}, \Omega, \mathbb{P})$ imenujemo *verjetnostni prostor.*

Posledica (Posledice verjetnostnih aksiomov)**.**

(a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
Dokaz: v (*3.*) vzamemo $A_i = \emptyset$: $\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) + \ldots$

(b) $\mathbb{P}$ je končno aditivna, torej za končno mnogo paroma nerazdružljivih dogodkov velja:
$\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \ldots + \mathbb{P}(A_n)$
Dokaz: v *(3.)* vzamemo $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \emptyset$ in uporabimo (a)

(c) $\mathbb{P}$ je *monotona*, torej $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \subseteq \mathbb{P}(B)$
Še več: $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$
Dokaz: ker je $B = A \cup (B - A)$, $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, zaradi (b) velja $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B - A)$

(d) $\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$
Dokaz: v (c) vzamemo $B = \Omega$

(e) $\mathbb{P}$ je zvezna:

(i) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$

(ii) $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \ldots \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n)$

Dokaz:

(i) Definiramo: $C_i = A_i \setminus A_{i-1}$ za $i = 2, 3, \ldots$, $C_1 = A_1$
Potem je $A_n = C_1 \cup \ldots \cup C_n$, $C_i \cap C_j = \emptyset$ za $i \neq j$,
$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i$
Torej je

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(C_i) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(C_i) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} C_i) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

(ii) Ker je $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \ldots$, sledi ${B_1}^C \subseteq {B_2}^C \subseteq {B_3}^C \subseteq \ldots$
Po (i) je $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} {B_i}^C) = \lim\limits_{i\to\infty} \mathbb{P}({D_i}^C)$, toda $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} {B_i}^C = \left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i\right)^C$.
Zato je $1 - \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i) = \lim\limits_{i\to\infty}(1 - \mathbb{P}(B_i))$, od koder sledi želena neenakost.

2 POGOJNA VERJETNOST

Definicija 2.1 (Pogojna verjetnost)**.** *Pogojna verjetnost* dogodka A glede na dogodek B, $\mathbb{P}(A|B)$, je verjetnost dogodka A če vemo, da se je zgodil dogodek B. Posplošimo:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Posledica. Iz definicije sledi

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Če posplošimo na n dogodkov dobimo

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Če velja $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)$, sta dogodka neodvisna.

Izrek 2.1 (Izrek o popolni verjetnosti)**.** Naj bo $(H_i)_i$ popoln sistem dogodkov. Potem je

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_i H_i \right) = \bigcup_i A \cap H_i$$

in iz tega sledi

$$\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(A \cap H_i) = \sum_i \mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A|H_i).$$

To je formula za *popolno verjetnost*.

Posledica (Bayesova formula)**.** Iz definicije pogojne verjetnosti vemo

$$\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(H_i \cap A}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A|H_i)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Če v imenovalec vstavimo izrek o popolni verjetnosti, dobimo *Bayesovo formulo*:

$$\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A|H_i)}{\mathbb{P}(H_1) \cdot \mathbb{P}(A|H_1) + \ldots + \mathbb{P}(H_n) \cdot \mathbb{P}(A|H_n)} = \frac{\mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A|H_i)}{\sum_i \mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A|H_i)}$$

Definicija 2.2 (Neodvisnost 2 dogodkov)**.** Dogodka A in B sta *neodvisna*, če je

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Če je $\mathbb{P}(B) > 0$ to enakost lahko zapišemo kot

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A|B).$$

Definicija 2.3 (Neodvisnost k dogodkov)**.** Dogodki $(A_i)_i$ so *neodvisni*, če za poljuben končen nabor različnih dogodkov $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ velja

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \mathbb{P}(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Če zahtevamo le za $k = 2$, torej A_i in A_j sta neodvisna le za $i \neq j$, potem rečemo, da so dogodki *paroma neodvisni.* To je šibkejši pogoj kot neodvisnost.

Trditev 2.1. Če sta dogodka A in B neodvisna, potem sta neodvisna tudi dogodka A^C in B, A in B^C ter A^C in B^C.

3 ZAPOREDJA NEODVISNIH PONOVITEV POSKUSA

Definicija 3.1 (Bernoullijeva formula)**.** Imejmo zaporedje n neodvisnih ponovitev poskusa, določenega z verjetnostnim prostorom $(\Omega, \mathcal{F}, p)$, v katerem je možen dogodek A s
$\mathbb{P}(A) = p$. Z $A_n(k)$ označimo dogodek, da se A zgodi natanko k-krat, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

$A_n(k)$ je *disjunktivna unija* $\binom{n}{k}$ dogodkov, da se A zgodi na predpisanih k mestih; na ostalih pa A^C. Verjetnost le teh dogodkov je $p^k \cdot q^{n-k}$. Zato velja *Bernoullijeva formula*

$$\mathbb{P}_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

Trditev 3.1 (Aproksimativni formuli za $\mathbb{P}_n(k)$)**.**

a) Poissonova formula: če je p blizu 0 in n velik, potem je

$$\mathbb{P}_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \text{ kjer je } \lambda = n \cdot p$$

b) Laplaceova formula: za velike n velja

$$\mathbb{P}_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}$$

4 SLUČAJNE SPREMENLJIVKE

Definicija 4.1. *Realna slučajna spremenljivka* na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ je funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ z lastnostjo, da je za $\forall x \in \mathbb{R}$ množica $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}$ v $\mathcal{F}$, se pravi je dogodek.

Oznaka:

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \ \equiv \ X^{-1}((-\infty, x]) \ \equiv \ (X \leq x)$$

Definicija 4.2 (Porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke)**.** Funkcija $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirana s $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ se imenuje *porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke x*.

Trditev 4.1 (Lastnosti porazdelitvene funkcije $F = F_X$)**.**

1. $0 \leq F(x) \leq 1$ za $\forall x \in \mathbb{R}$
2. F je naraščajoča funkcija:
$$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1, \ \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$
4. F je *z desne zvezna*, torej $F(x+) = F(x)$ za $\forall x \in \mathbb{R}$, kjer je $F(x+) = \lim\limits_{h \searrow 0} F(x+h)$ desna limita.
5. $F(x-) = \mathbb{P}(X < x)$
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(x_1 < X \leq x_2) &= F(x_2) - F(x_1)\\ \mathbb{P}(x_1 < X < x_2) &= F(x_2-) - F(x_1)\\ \mathbb{P}(x_1 \leq X \leq x_2) &= F(x_2) - F(x_1-)\\ \mathbb{P}(x_1 \leq X < x_2) &= F(x_2-) - F(x_1-)\end{aligned}$$

Definicija 4.3 (Diskretne slučajne spremenljivke)**.** Slučajna spremenljivka je *diskretno porazdeljena*, če je njena zaloga vrednosti *končna* ali *števna končna* množica. Naj bo $\{x_1, x_2, \ldots\}$ zaloga vrednosti. Vpeljemo verjetnostno funkcijo $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Ker so $\{(X = x_k)\}_k$ *poln* sistem dogodkov, je

$$\sum_k p_k = 1.$$

X lahko zapišemo s shemo $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$. Porazdelitvena funkcija:

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \mid x_k \leq x} (X = x_k) \right) = \sum_{k \mid x_k \leq x} p_k.$$

Pogoste diskretne porazdelitve:

1. Enakomerna porazdelitev na n točkah $x_1, \ldots, x_n$:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

2. Bernoullijeva porazdelitev, $Ber(p)$, $p \in (0, 1)$:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (1-p) & p \end{pmatrix}$$

Indikatorska funkcija:

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1; \ \omega \in A \\ 0; \ \omega \notin A \end{cases}$$

3. Binomska porazdelitev, $Bin(n, p)$, $n \in \mathbb{R}$, $p \in (0, 1)$:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix},$$

kjer za $k = 0, 1, \ldots, n$ velja

$$p_k \ = \ \mathbb{P}(X = k) \ = \ \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

4. Poisonnova porazdelitev, $Poi(\lambda)$, $\lambda = n \cdot p > 0$:

$$p_k \;=\; \mathbb{P}(X = k) \;=\; \mathbb{P}_n(k) \;=\; \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda},\; k = 0, 1, \dots$$

Sledi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \;=\; e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \;=\; e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} \;=\; 1.$$

5. Geometrijska porazdelitev: $Geo(p)$, $p \in (0, 1)$.
$(X = k)$ je dogodek, da se A zgodi prvič v k-ti ponovitvi:

$$p_k \;=\; \mathbb{P}(X = k) \;=\; p \cdot q^{k-1},\; k = 1, 2, 3, \dots$$

Torej $\underbrace{A^C \cdot \ldots \cdot A^C}_{k-1} \cdot A = \underbrace{q \cdot \ldots \cdot q}_{k-1} \cdot p = p \cdot q^{k-1}$. Velja:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k \;=\; p \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} \;=\; \frac{p}{1-q} = 1$$

6. Pascalova porazdelitev: $Pas(m, p)$, $m \in \mathbb{N}$, $p \in (0, 1)$.
$(X = k)$ je dogodek, da se A zgodi m-tič pri k-ti ponovitvi:

$$p_k \;=\; \binom{k-1}{m-1} \cdot p^m \cdot q^{k-m}, \quad k = m, m+1, \dots$$

7. Hipergeometrijska porazdelitev: $Hip(n; M, N)$, $n \leq \min\{M, N - M\}$
V posodi je M belih in $(N - M)$ črnih kroglic. Slučajno izvlečemo n kroglic. X naj pomeni število belih kroglic med izvlečenimi, kjer za $k = 0, 1, \dots, n$ velja:

$$p_k \;=\; \mathbb{P}(X = k) \;=\; \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Ker je $[(X = k)]_{k=0}^{n}$ popoln sistem dogodkov je $\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$, torej je

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{M}{n} \cdot \binom{N-M}{n-k} = \binom{N}{n}.$$

Definicija 4.4 (Zvezno porazdeljene slučajne spremenljivke)**.** Slučajna spremenljivka X je *zvezno porazdleljena*, če obstaja *nenegativna integrabilna* funkcija p_x, imenovana *gostota verjetnosti*, da za $\forall x \in \mathbb{R}$ velja

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_x(t)\ dt.$$

Tedaj je $F_X = F$ *zvezna* funckija, toda obstajajo zvezno porazdeljene funkcije, ki nimajo gostote (torej jih ni mogoče zapisati s tistim integralom).

Ker je $\lim_{n\to\infty} F(x) = 1$, je $\int_{-\infty}^{\infty} p(t) = 1$. Če je p *zvezna* v točki x, potem je F *odvedljiva* v x in velja $F'(x) = p(x)$.

Za $\forall x \in \mathbb{R}$ velja $\mathbb{P}(X = x) = F(x) - F(x-) = 0$. Če je $x_1 < x_2$, potem je

$$\mathbb{P}(x_1 \leq X \leq x_2) \ = \ F(x_2) - F(x_1-) \ = \ \int_{x_1}^{x_2} p(t)\ dt.$$

Nekatere pomembnejše zvezne porazdelitve:

1. Enakomerna zvezna porazdelitev na $[a, b]$:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & ;\text{ če } a \leq x \leq b \\ 0 & ;\text{ sicer} \end{cases}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\ dt = \begin{cases} 0 & ;\text{ če } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & ;\text{ če } a \leq x \leq b \\ 1 & ;\text{ če } x \geq b \end{cases}$$

2. Normalna ali Gaussova porazdelitev: $N(\mu, \sigma),\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

V vseh primerih je ploščina pod grafom enaka 1.

$N(0, 1)$: standardna normalna porazdelitev

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Laplaceova formula: za velike n je $Bin(n, p) \approx N(np, \sqrt{npq})$

3. Eksponentna porazdelitev: $Exp(\lambda),\ \lambda > 0$

$$p(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & ; \text{ če } x \geq 0 \\ 0 & ; \text{ sicer} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & ; \text{ če } x \leq 0 \\ 0 & ; \text{ sicer} \end{cases}$$

4. Cauchyjeva porazdelitev:

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

5 SLUČAJNI VEKTOR IN NEODVISNOST

Definicija 5.1. *Slučajni vektor* je n-terica slučajnih spremenljivk $X = (X_1, X_2, \dots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$, z lastnostjo, da je množica $(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) := \{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \leq x_1, \dots, X_n(\omega) \leq x_n\}$ dogodek za vsako n-terico $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Definicija 5.2. *Porazdelitvena funkcija* $F_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je definirana s predpisom $F_X(x) = F_{(X_1,\dots,X_n)}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$. Za $\forall x \in \mathbb{R}^n$ je $F(x) \in [0, 1]$; glede na vsako spremenljivko je F naraščajoča in z desne zvezna;

$$\lim_{x_i \to \infty,\ \forall i} F(x_1, \dots, x_n) = 1, \quad \lim_{x_i \to -\infty,\ \forall i} F(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Če pošljemo proti ∞ samo nekatere spremenljivke, dobimo porazdelitveno funkcijo pod vektorjem, npr.

$$\lim_{x_n \to \infty} F(x_1, \dots, x_n) = F_{(X_1,\dots,X_{n-1})}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}).$$

Robna porazdelitve funkcija X_1, *robna (marginalna)* porazdelitev:

$$\lim_{\substack{x_2 \to \infty \\ \dots \\ x_n \to \infty}} = F_{X_1}(x_1)$$

Definicija 5.3. Slučajne spremenljivke $X_1, \dots, X_n$ v slučajnem vektorju $X = (X_1, \dots, X_n)$ so *neodvisne*, če za $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ velja

$$F_X(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n).$$

Drugače:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) &= \mathbb{P}(X_1 \leq x_1) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(X_n \leq x_n) \\ &= (X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \ \text{ so neodvisne.}\end{aligned}$$

Trditev 5.1. Naj bo (X, Y) diskreten slučajni vektor; $p_{i,j} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$, $p_i = \mathbb{P}(X = x_i), q_j = \mathbb{P}(Y = y_j)$, $i = 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, \dots$.

$$X \text{ in } Y \text{ sta neodvisni slučajni spremenljivki } \Leftrightarrow \ p_{i,j} = p_i \cdot q_j, \quad \forall i,\ \forall j$$

6 MATEMATIČNO UPANJE oz. pričakovana vrednost

Definicija 6.1. Za končno slučajno spremenljivko $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$ je matematično upanje definirano kot

$$E(x) \;=\; \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot p_k.$$

Naj ima seda X neskončno zalogo vrednosti. Če je X *diskretna* s $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$ $(k \in \mathbb{N})$, potem X ima matematično upanje, če je

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \cdot p_k < \infty \quad \text{(je končno)};$$

tedaj je matematično upanje definirano kot vsota vrste

$$E(x) := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p_k.$$

Če je X *zvezna* z gostoto $p(x)$, potem rečemo, da X ima matematično upanje, če je

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot p_k(x)\; dx < \infty;$$

tedaj je matematično upanje definirano kot

$$E(x) := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x)\; dx.$$

Trditev 6.1. Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija.

a) Če je $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix}$, potem je

$$E(f \circ X) \;=\; \sum_{k} f(x_k) \cdot p_k,$$

če matematično upanje obstaja, torej je vrsta *absolutno kovnergentna.*

b) Če je X zvezno porazdeljena z gostoto $p(x)$, potem je

$$E(f \circ X) \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot p(x) \ dx,$$

če je integral *absolutno konvergenten.*

Posledica. Slučajna spremenljivka X ima matematično upanje $\Leftrightarrow$ ko ga ima slučajna spremenljivka (X). Tedaj velja

$$|E(x)| \leq E(|x|).$$

Posledica. Za $a \in \mathbb{R}$ in slučajno spremenljivko X z matematičnim upanjem velja

$$E(a \cdot X) \ = \ a \cdot E(x).$$

Trditev 6.2. Naj bo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija, (X, Y) diskretno porazdeljen slučajni vektor:

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_i), \quad i, j = 1, 2, \ldots$$

Potem je $f(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna spremenljivka in velja

$$E(f(X, Y)) \ = \ \sum_i \sum_j f(x_i, y_j) \cdot p_{ij},$$

če le vrsta absolutno konvergira.

Trditev 6.3. Če imata X in Y matematično upanje, ga ima tudi $X + Y$ in velja

$$E(X + Y) \ = \ E(X) + E(Y).$$

Posledica. Za slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_n$, ki imajo matematično upanje velja:

$$E(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n) \ = \ a_1 \cdot E(X_1) + \ldots + a_n \cdot E(X_n),$$

kjer so $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Trditev 6.4. Če obstaja $E(X^2)$ in $E(Y^2)$, potem obstaja tudi $E(|XY|)$ in velja

$$E(|XY|) \leq \sqrt{E(X^2) \cdot E(Y^2)} \quad (\textit{Cauchy-Schwarzova neenakost})$$

Enakost velja $\Leftrightarrow |Y| = \sqrt{\dfrac{E(Y^2)}{E(X^2)}} \cdot |X|$ z verjetnostjo 1.

Posledica. Če obstaja $E(X^2)$, potem obstaja tudi $E(|X|)$ in velja

$$(E(|X|))^2 \leq E(X^2).$$

Trditev 6.5. Naj bosta X in Y *neodvisni* slučajni spremenljivki, ki imata matematično upanje. Potem obstaja tudi matematično upanje $X \cdot Y$ in velja

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y).$$

7 DISPERZIJA, KOVARIANCA IN KORELACIJSKI KOEFICIENT

Definicija 7.1. Naj obstaja $E(X^2)$. *Disperzija* oz. *varianca* je definirana kot

$$D(X) \equiv Var(X) := E((X - E(X))^2).$$

$D(X)$ meri razpršenost okoli $E(X)$. Velja

$$D(X) = E(X^2) - (E(X)^2)$$

Trditev 7.1 (Lastnosti $D(X)$)**.**

1. $D(X) \geq 0$
   $D(X) = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbb{P}(X = E(X)) = 1$
2. $D(a \cdot X) = a^2 \cdot D(X), \quad a \in \mathbb{R}$
3. Za $\forall a \in \mathbb{R}$ je
   $$E((X - a)^2) \geq D(X)$$
   Enačaj velje $\Leftrightarrow a = E(X)$.

Definicija 7.2. *Standardna deviacija* oz. *standardni odklon* je definiran kot

$$\sigma(X) := \sqrt{D(X)}.$$

Zanjo velja

$$\sigma(a \cdot X) = |a| \cdot \sigma(X), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Trditev 7.2 (Nekatere $E(X)$ in $D(X)$)**.**

1. Enakomerna porazdelitev:
   $$E(X) = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$
   $$D(X) = \frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n} - \left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)^2$$

2. Binomska porazdelitev, $Bin(n,p)$:

$$E(X) = n \cdot p$$

$$D(X) = n \cdot p \cdot q$$

$$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

3. Poissonova porazdelitev, $Poi(\lambda)$:

$$E(X) = D(X) = \lambda$$

4. Geometrijska porazdelitev, $Geo(p)$:

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$D(X) = \frac{q}{p^2}, \quad q = 1 - p$$

5. Pascalova porazdelitev, $Pas(m,p)$:

$$E(X) = \frac{m}{p}$$

$$D(x) = \frac{m \cdot q}{p}$$

6. Enakomerna zvezna porazdelitev na $[a,b]$:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

7. Normalna porazdelitev, $N(\mu,\sigma)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$:

$$E(X) = \mu$$

$$D(X) = \sigma^2$$

$$\sigma(X) = \sigma$$

8. Eksponentna porazdelitev, $Exp(\lambda)$:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Definicija 7.3. *Kovarianca* slučajnih spremenljivk X in Y je definirana kot

$$\begin{aligned} K(X,Y) \equiv Cov(X,Y) &:= E((X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))) \\ &= E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y). \end{aligned}$$

Trditev 7.3 (Lastnostni kovariance)**.**

1. $K(X,X) = D(X$
2. X in Y sta *nekorelirana* $\Leftrightarrow$ $K(X,Y) = 0$
3. K je *simetrična* in *linearna*:

$$K(Y,X) \;=\; K(X,Y)$$

$$K(aX + bY, Z) \;=\; a \cdot K(X,Z) + b \cdot K(Y,Z), \quad \text{za} \;\; a,b \in \mathbb{R}$$

4. Kovarianca obstaja, če obstajata obe disperziji $D(X)$ in $D(Y)$. Tedaj velja

$$|K(X,Y)| \;\leq\; \sqrt{D(X) \cdot D(Y)} \;=\; \sigma(x) \cdot \sigma(y)$$

Enakost velja $\Leftrightarrow$ $Y - \mathbb{E}(Y) \;=\; \pm\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)} \cdot (X - \mathbb{E}(X))$ z verjetnostjo 1

5. Če X in Y imata disperzijo, potem jo ima tudi $X + Y$ in velja

$$D(X+Y) \;=\; D(X) + D(Y) + 2K(X,Y)$$

Če sta X in Y nekorelirani, potem je

$$D(X+Y) \;=\; D(X) + D(Y)$$

6. Posplošitev zadnje lastnosti:

$$D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \;=\; \sum_{k=1}^{n} D(X_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} K(X_i, X_j)$$

Posebej: če so $X_1, \ldots, X_n$ paroma nekorelirane, potem je

$$D(X_1, \ldots, X_n) \;=\; D(X_1) + \ldots + D(X_n)$$

Definicija 7.4. *Standardizacija* slučajne spremenljivke X je slučajna spremenljvka

$$X_s \;=\; \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}.$$

Tedaj je $\mathbb{E}(X_s) = 0$, $D(X_s) = 1$, saj je

$$D(X_s) \;=\; \frac{1}{\sigma(X)^2} \cdot D(X - \mathbb{E}(X)) \;=\; 1.$$

Definicija 7.5. *Korelacijski koeficient* slučajnih spremenljivk X in Y je

$$r(X, Y) \;=\; \frac{K(X, Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)} \;=\; \frac{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X)) \cdot (Y - \mathbb{E}(Y)))}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)} \;=\; \mathbb{E}(X_s \cdot Y_s)$$

Trditev 7.4 (Lastnosti korelacijskih koeficientov)**.**

1. $r(X, Y) = 0 \;\Leftrightarrow\; X$ in Y sta nekorelirani
2. $-1 \leq r(X, Y) \leq 1$ sledi iz 4. lastnosti kovariance
3. $r(X, Y) = \pm 1 \;\Leftrightarrow\; Y = \pm\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)} \cdot (X - \mathbb{E}(X)) + \mathbb{E}(Y)$ z verjetnostjo 1

8 POGOJNA PORAZDELITEV IN POGOJNO MATEMATIČNO UPANJE

Definicija 8.1. Fiksirajmo dogodek B s $\mathbb{P}(B) > 0$. *Pogojna porazdelitvena funkcija* slučajne spremenljivke X glede na pogoj B je

$$F_X(x|B) \;=\; \mathbb{P}(X \leq x|B) \;=\; \frac{\mathbb{P}((X \leq x) \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

in ima enake lastnosti kot porazdelitvena funkcija.

Naj bo (X, Y) diskreten slučajni vektor:

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

$$B := (Y = y_j), \;\; \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(Y = y_j) = q_j$$

Potem je *pogojna porazdelitvena funkcija* slučajne spremenljivke X glede na $Y = y_j$:

$$\begin{aligned} F_X(x|y_j) \;&=\; F_X(x|Y = y_j) \;=\; \mathbb{P}(X \leq y|Y = y_j) \;= \\ &=\; \frac{1}{q_j}\mathbb{P}((X \leq x) \cap (Y = y_j)) \;=\; \frac{1}{q_j}\sum_{i:x_1 \leq x} p_{ij} \end{aligned}$$

Vpeljimo *pogojno verjetnostno funkcijo*:

$$p_{i|j} \;=\; \mathbb{P}(X = x_i|Y = y_j) \;=\; \frac{\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)}{\mathbb{P}(Y = y_j)} \;=\; \frac{p_{ij}}{q_j}.$$

Tedaj je

$$F_X(x|Y = y_j) \;=\; \sum_{i:x_i \leq x} p_{i|j}.$$

Definicija 8.2. *Pogojno matematično upanje* slučajne spremenljivke X glede na $Y = y_j$ je matematično upanje te porazdelitve:

$$\mathbb{E}(X|y_j) \;\equiv\; \mathbb{E}(X|Y = y_j) \;=\; \sum_i x_i \cdot p_{i|j} \;=\; \frac{1}{q_j}\sum_i x_i \cdot p_{ij}$$

Tako dobimo novo slučajno spremenljivko:

$$\mathbb{E}(X|Y) : \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X|y_1) & \mathbb{E}(X|y_2) & \dots \\ q_1 & q_2 & \dots \end{pmatrix}$$

Označimo $\varphi(y_j) := \mathbb{E}(X|y_j)$ za $\forall j$:

$$\mathbb{E}(X|Y) \ := \ \varphi(Y) : \ \begin{pmatrix} \varphi(y_1) & \varphi(y_2) & \dots \\ q_1 & q_2 & \dots \end{pmatrix}$$

φ je *regresijska funkcija.*

9 RODOVNE FUNKICJE

Definicija 9.1. Naj bo X slučajna spremenljivka z vrednostmi v $\mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$\begin{aligned} p_k &= \mathbb{P}(X=k), & k &= 0,1,2,\dots, \\ p_k &\leq 0, & \sum_{k=0}^{\infty} p_k &= 1. \end{aligned}$$

Rodovna funkcija slučajne spremenljivke X je

$$G_X(s) \;:=\; p_0 + p_1 \cdot s + p_2 \cdot s^2 + p_3 \cdot s^3 + \dots \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot s^k$$

za $\forall s \in \mathbb{R}$, za katere vrsta *absolutno konvergira.*

Očitno je $G_X(0) = p_0$, $G_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, $G_X(s) = \mathbb{E}(s^X)$, saj je

$$s^X : \begin{pmatrix} s^0 & s^1 & s^2 & s^3 & \dots \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}$$

Za $s \in [-1,1]$ velja $|p_k \cdot s^k| \leq p_k$ in $\sum_{k=0}^{\infty} = 1$, zato vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} |p_k \cdot s^k|$ konvergira. Torej je konvergenčni radij vrste vsaj 1.

Izrek 9.1 (Izrek o enoličnosti)**.** Naj imata X in Y rodovni funkciji G_X in G_Y. Potem je

$G_X(s) = G_Y(s)$ za $\forall s \in [-1,1] \;\Leftrightarrow\; \mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(Y=k)$ za $\forall k = 0,1,2,\dots$

Tedaj velja

$$\mathbb{P}(X=k) \;=\; \frac{1}{k!} \cdot G_X^{(k)}(0).$$

Izrek 9.2. Naj ima X ima rodovno funkcijo G_X in $n \in \mathbb{N}$. Potem je

$$G_X^{(n)}(1-) \;=\; \mathbb{E}(X(X-1)(X-2)\dots(X-n+1)),$$

kjer je

$$G_X^{(n)}(1-) \;=\; \lim_{s \nearrow 1} G_X^{(n)}(s).$$

Posledica.

$$\mathbb{E}(X) \;=\; G'_X(1-)$$

$$\begin{aligned} D(X) &= \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - (\mathbb{E}(X))^2 = \\ &= G''_X(1-) + G'_X(1-) - (G'_X(1-))^2 \end{aligned}$$

Izrek 9.3. Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki z rodovnimi funkcijami G_X in G_Y. Potem je

$$G_{X+Y}(s) \;=\; G_X(s) \cdot G_Y(s) \quad \text{za } s \in [-1, 1].$$

Posplošitev. Če je $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ vsota neodvisnih slučajnih spremenljivk z vrednostmi v $\mathbb{N} \cup \{0\}$, potem je za $s \in [-1, 1]$

$$G_{S_n}(s) \;=\; G_{X_1}(s) \cdot G_{X_2}(s) \cdot \ldots \cdot G_{X_n}(s).$$

Posebej: če so $X_1, X_2, \ldots, X_n$ enako porazdeljene, potem je

$$G_{S_n}(s) \;=\; (G_X(s))^n.$$

Izrek 9.4. Naj bodo za $\forall n \in \mathbb{N}$ slučajne spremenljivke $N, X_1, X_2, \ldots, X_n$ neodvisne. Naj ima N rodovno funkcijo G_N, X_n pa rodovno funkcijo G_X za $\forall n \in \mathbb{N}$. Potem ima slučajna spremenljivka $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$ rodovno funkcijo

$$G_S(s) \;=\; G_N(G_X(s)), \quad s \in [-1, 1].$$

Posledica (Waldova enakost)**.**

$$\mathbb{E}(S) \;=\; \mathbb{E}(N) \cdot \mathbb{E}(X)$$

10 VIŠJI MOMENTI in VRSTILNE KARAKTERISTIKE

Definicija 10.1. Naj bo $k \in \mathbb{N}$ in $a \in \mathbb{R}$. *Moment reda k glede na a* je

$$m_k(a) \; = \; \mathbb{E}((X-a)^k),$$

če obstaja. Za a običajno vzamemo:

1. *začetni moment*:
   $a = 0$:
   $$z_k = m_k(0) = \mathbb{E}(X^k)$$
2. *centralni moment reda k*:
   $a = \mathbb{E}(X)$:
   $$m_k = m_k(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^k)$$

Očitno je $z_1 = \mathbb{E}(X)$ in $m_2 = D(X)$.

Trditev 10.1. Če obstaja $m_n(a)$, potem obstaja tudi $m_k(a)$ za $\forall k < n$.

Trditev 10.2. Če obstaja začetni moment z_n, potem obstaja tudi $m_n(a)$ za $\forall a \in \mathbb{R}$.

Definicija 10.2. *Asimetrija* slučajne spremenljivke X je

$$A(X) \; := \; \mathbb{E}({X_s}^3) \; = \; \mathbb{E}\left(\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}\right)^3\right) \; = \; \frac{m_3}{(m_2)^{\frac{3}{2}}}$$

Velja:

- $A(N(\mu, \sigma)) = 0$
- $A(\lambda X) = A(X)$ za $\lambda > 0$.

Definicija 10.3. *Sploščenost (kurtozis)* slučajne spremenljivke X je

$$K(X) \;=\; \frac{m_4}{(m_2)^2} \;=\; \mathbb{E}({X_s}^4) \;=\; \mathbb{E}\left(\left(\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}\right)^4\right)$$

Velja:

- $K(N(\mu,\sigma)) = 3$
- $K(\lambda X) = K(X)$ za $\lambda > 0$.

Opomba. Nekateri definirajo sploščenost kot $K(X) - 3$, torej je v primeru $N(\mu,\sigma)$ enako 0.

Definicija 10.4. *Mediana* slučajne spremenljivke X je vsaka vrednost $x \in \mathbb{R}$, za katere velja

$$\mathbb{P}(X \le x) \;\ge\; \frac{1}{2} \quad \text{in} \quad \mathbb{P}(X \ge x) \;\ge\; \frac{1}{2}.$$

Ker je

$$\mathbb{P}(X \ge x) \;=\; 1 - \mathbb{P}(X < x) \;=\; 1 - F(x-),$$

lahko pogoj za mediano zapišemo takole

$$F(x-) \;\le\; \frac{1}{2} \;\le\; F(x).$$

Če je X zvezno porazdeljena, je pogoj enak $F(x) = \frac{1}{2}$. Te vrednosti označimo z $x_{\frac{1}{2}}$.

Definicija 10.5. *Kvantil reda* p je vsaka vrednost x_p, za katero velja

$$\mathbb{P}(X \le x_p) \;\ge\; p \quad \text{in} \quad \mathbb{P}(X \ge x_p) \;\ge\; 1-p$$

oziroma ekvivalentno:

$$F(x_p-) \;\le\; p \;\le\; F(x_p), \quad 0 < p < 1.$$

Če je X zvezno porazdeljena, je pogoj za kvantil:

$$F(x_p) \;=\; p \quad \text{oziroma} \quad \int_{-\infty}^{x_p} p_X(t)dt \;=\; p.$$