

Verjetnost 1 - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar
po predavanjih profesorja Romana Drnovška

2020/21

Kazalo

1	DEFINICIJA VERJETNOSTI	3
1.1	Neformalni uvod v verjetnost	3
1.2	Aksiomična definicija verjetnosti	3
2	POGOJNA VERJETNOST	7
3	ZAPOREDJA NEODVISNIH PONOVIJEV POSKUSA	9
4	SLUČAJNE SPREMENLJIVKE	10
5	SLUČAJNI VEKTOR IN NEODVISNOST	15
6	MATEMATIČNO UPANJE oz. pričakovana vrednost	17
7	DISPERZIJA, KOVARIANCA IN KORELACIJSKI KOE- FICIENT	20
8	POGOJNA PORAZDELITEV IN POGOJNO MATEMATIČNO UPANJE	24
9	RODOVNE FUNKCIJE	26
10	VIŠJI MOMENTI in VRSTILNE KARAKTERISTIKE	28
11	MOMENTNO RODOVNE FUNKCIJE	31

1 DEFINICIJA VERJETNOSTI

1.1 Neformalni uvod v verjetnost

Definicija 1.1 (Verjetnost). Izvajamo poskus. Opazujemo določen pojav, ki ga imenujemo *dogodek*. Poskus ponovimo n - krat.

Definirajmo *frekvenco dogodka* $k_n(A)$ kot število ponovitev, pri katerih se dogodek zgodi.

Relativna frekvenca je definirana kot $f_n(A) = \frac{k_n(A)}{n}$. Zaporedje $\{f_n(A)\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira k nekemu številu $p \in [0, 1]$.

STATISTIČNA DEFINICIJA VERJETNOSTI je definirana kot

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{f_n(A)\}.$$

KLASIČNA DEFINICIJA VERJETNOSTI je definirana kot

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{št. ugodnih izidov } A}{\text{št. vseh izidov } A}.$$

Če je izidov neskončno mnogo uporabimo geometrijsko definicijo verjetnosti.

1.2 Aksiomična definicija verjetnosti

Definicija 1.2. Imamo *prostor vseh izidov* oz. *vzorčni prostor* Ω . *Dogodki* so nekatere (ne nujno vse) podmnožice Ω .

Definicija 1.3 (Operacije na dogodkih).

1. VSOTA oz. UNIJA dogodkov:

$$A + B = A \cup B$$

je dogodek, ki se zgodi, če se zgodi vsaj eden od dogodkov A in B .

2. PRODUKT oz. PRESEK dogodkov:

$$A \cdot B = A \cap B$$

je dogodek, ki se zgodi, če se zgodita oba dogodka A in B hkrati.

3. NASPROTNI dogodek oz. KOMPLEMENT dogodkov:

$$\bar{A} = A^C$$

je dogodek, ki se zgodi, če se dogodek A ne zgodi.

Opomba. Pravila za računanje z dogodki:

1. Idempotentnost:

$$A \cup A = A = A \cap A$$

2. Komutativnost:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

3. Asociativnost:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

4. Distributivnost:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

5. de Morganova zakona:

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

Še več:

$$\left(\bigcup_i A_i \right)^C = \bigcap_i A_i^C$$

$$\left(\bigcap_i A_i \right)^C = \bigcup_i A_i^C$$

Opomba. V splošnem ni vsaka podmnožica $A \subset \Omega$ dogodek.

Definicija 1.4 (σ -algebra). *Neprazna družina podmnožic (dogodkov) \mathcal{F} v Ω je σ -algebra, če velja:*

1. *Zaprtoost komponente:*

$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F}$$

2. *Zaprtoost števne unije:*

$$A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

Opomba. Če v (2) zahtevamo manj:

$$A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F},$$

je \mathcal{F} algebra. V algebri imamo torej zaprtost za končne unije in končne preseke, medtem ko je σ -algebra zaprta celo za števne preseke.

Definicija 1.5. Naj bo \mathcal{F} σ -algebra, Ω vzorčni prostor. *Verjetnostna mera na (\mathcal{F}, Ω) , je preslikava $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ za katero velja:*

1. $\mathbb{P} \geq 0$, za $\forall A \in \mathcal{F}$
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
3. Za poljubne paroma nerazdružljive dogodke velja

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

Trojico $(\mathcal{F}, \Omega, \mathbb{P})$ imenujemo *verjetnostni prostor*.

Posledica (Posledice verjetnostnih aksiomov).

- (a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

Dokaz: v (3.) vzamemo $A_i = \emptyset$: $\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) + \dots$

- (b) \mathbb{P} je končno aditivna, torej za končno mnogo paroma nerazdružljivih dogodkov velja:

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_n)$$

Dokaz: v (3.) vzamemo $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset$ in uporabimo (a)

- (c) \mathbb{P} je *monotona*, torej $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

Še več: $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$

Dokaz: ker je $B = A \cup (B - A)$, $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, zaradi (b) velja $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B - A)$

- (d) $\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$

Dokaz: v (c) vzamemo $B = \Omega$

- (e) \mathbb{P} je zvezna:

$$(i) \quad A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$$

$$(ii) \quad B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n)$$

Dokaz:

- (i) Definiramo: $C_i = A_i \setminus A_{i-1}$ za $i = 2, 3, \dots$, $C_1 = A_1$
Potem je $A_n = C_1 \cup \dots \cup C_n$, $C_i \cap C_j = \emptyset$ za $i \neq j$,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$$

Torej je

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(C_i) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(C_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n C_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) \end{aligned}$$

- (ii) Ker je $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots$, sledi $B_1^C \subseteq B_2^C \subseteq B_3^C \subseteq \dots$

Po (i) je $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^C) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_i^C)$, toda $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^C = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right)^C$.

Zato je $1 - \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} (1 - \mathbb{P}(B_i))$, od koder sledi zelena neenakost.

2 POGOJNA VERJETNOST

Definicija 2.1 (Pogojna verjetnost). *Pogojna verjetnost* dogodka A glede na dogodek B , $\mathbb{P}(A|B)$, je verjetnost dogodka A če vemo, da se je zgodil dogodek B . Posplošimo:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Posledica. Iz definicije sledi

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Če posplošimo na n dogodkov dobimo

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Če velja $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)$, sta dogodka neodvisna.

Izrek 2.1 (Izrek o popolni verjetnosti). Naj bo $(H_i)_i$ popoln sistem dogodkov. Potem je

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_i H_i \right) = \bigcup_i A \cap H_i$$

in iz tega sledi

$$\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(A \cap H_i) = \sum_i \mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A|H_i).$$

To je formula za *popolno verjetnost*.

Posledica (Bayesova formula). Iz definicije pogojne verjetnosti vemo

$$\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(H_i \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A|H_i)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Če v imenovalce vstavimo izrek o popolni verjetnosti, dobimo *Bayesovo formulo*:

$$\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A|H_i)}{\mathbb{P}(H_1) \cdot \mathbb{P}(A|H_1) + \dots + \mathbb{P}(H_n) \cdot \mathbb{P}(A|H_n)} = \frac{\mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A|H_i)}{\sum_i \mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A|H_i)}$$

Definicija 2.2 (Neodvisnost 2 dogodkov). Dogodka A in B sta *neodvisna*, če je

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Če je $\mathbb{P}(B) > 0$ to enakost lahko zapišemo kot

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A|B).$$

Definicija 2.3 (Neodvisnost k dogodkov). Dogodki $(A_i)_i$ so *neodvisni*, če za poljuben končen nabor različnih dogodkov $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$ velja

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \mathbb{P}(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Če zahtevamo le za $k = 2$, torej A_i in A_j sta neodvisna le za $i \neq j$, potem rečemo, da so dogodki *paroma neodvisni*. To je šibkejši pogoj kot neodvisnost.

Trditev 2.1. Če sta dogodka A in B neodvisna, potem sta neodvisna tudi dogodka A^C in B , A in B^C ter A^C in B^C .

3 ZAPOREDJA NEODVISNIH PONOVI TEV POSKUSA

Definicija 3.1 (Bernoullijeva formula). Imejmo zaporedje n neodvisnih ponovitev poskusa, določenega z verjetnostnim prostorom (Ω, \mathcal{F}, p) , v katerem je možen dogodek A s

$\mathbb{P}(A) = p$. Z $A_n(k)$ označimo dogodek, da se A zgodi natanko k -krat, $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

$A_n(k)$ je *disjunktivna unija* $\binom{n}{k}$ dogodkov, da se A zgodi na predpisanih k mestih; na ostalih pa A^C . Verjetnost le teh dogodkov je $p^k \cdot q^{n-k}$. Zato velja *Bernoullijeva formula*

$$\mathbb{P}_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

Trditev 3.1 (Aproksimativni formuli za $\mathbb{P}_n(k)$).

a) POISSONOVA FORMULA: če je p blizu 0 in n velik, potem je

$$\mathbb{P}_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad \text{kjer je } \lambda = n \cdot p$$

b) LAPLACEOVA LOKALNA FORMULA: za velike n velja

$$\mathbb{P}_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}$$

4 SLUČAJNE SPREMENLJIVKE

Definicija 4.1. *Realna slučajna spremenljivka* na verjetnostnem prostoru (Ω, \mathcal{F}, p) je funkcija $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ z lastnostjo, da je za $\forall x \in \mathbb{R}$ množica $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}$ v \mathcal{F} , se pravi je dogodek.

Oznaka:

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \equiv X^{-1}((-\infty, x]) \equiv (X \leq x)$$

Definicija 4.2 (Porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke). Funkcija $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definirana s $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ se imenuje *porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke* x .

Trditev 4.1 (Lastnosti porazdelitvene funkcije $F = F_X$).

1. $0 \leq F(x) \leq 1$ za $\forall x \in \mathbb{R}$
2. F je naraščajoča funkcija:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
4. F je z *desne zvezna*, torej $F(x+) = F(x)$ za $\forall x \in \mathbb{R}$, kjer je $F(x+) = \lim_{h \searrow 0} F(x+h)$ desna limita.
5. $F(x-) = \mathbb{P}(X < x)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(x_1 < X \leq x_2) &= F(x_2) - F(x_1) \\ \mathbb{P}(x_1 < X < x_2) &= F(x_2-) - F(x_1) \\ \mathbb{P}(x_1 \leq X \leq x_2) &= F(x_2) - F(x_1-) \\ \mathbb{P}(x_1 \leq X < x_2) &= F(x_2-) - F(x_1-)\end{aligned}$$

Definicija 4.3 (Diskretne slučajne spremenljivke). Slučajna spremenljivka je *diskretno porazdeljena*, če je njena zaloga vrednosti *končna* ali *števna končna* množica. Naj bo $\{x_1, x_2, \dots\}$ zaloga vrednosti. Vpeljemo verjetnostno funkcijo $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Ker so $\{(X = x_k)\}_k$ poln sistem dogodkov, je

$$\sum_k p_k = 1.$$

X lahko zapišemo s shemo $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$. Porazdelitvena funkcija:

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k: x_k \leq x} (X = x_k)\right) = \sum_{k: x_k \leq x} p_k.$$

Pogoste diskretne porazdelitve:

1. ENAKOMERNA PORAZDELITEV na n točkah x_1, \dots, x_n :

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

2. BERNOULLIJEVA PORAZDELITEV, $Ber(p)$, $p \in (0, 1)$:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$$

Indikatorska funkcija:

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1; & \omega \in A \\ 0; & \omega \notin A \end{cases}$$

3. BINOMSKA PORAZDELITEV, $Bin(n, p)$, $n \in \mathbb{R}$, $p \in (0, 1)$:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix},$$

kjer za $k = 0, 1, \dots, n$ velja

$$p_k = \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

4. POISSONNOVA PORAZDELITEV, $Poi(\lambda)$:

$$p_k = \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Sledi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

5. GEOMETRIJSKA PORAZDELITEV: $Geo(p)$, $p \in (0, 1)$.

$(X = k)$ je dogodek, da se A zgodi prvič v k -ti ponovitvi:

$$p_k = \mathbb{P}(X = k) = p \cdot q^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Torej $\underbrace{A^C \cdot \dots \cdot A^C}_{k-1} \cdot A = \underbrace{q \cdot \dots \cdot q}_{k-1} \cdot p = p \cdot q^{k-1}$. Velja:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = p \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \frac{p}{1-q} = 1$$

6. PASCALOVA PORAZDELITEV: $Pas(m, p)$, $m \in \mathbb{N}$, $p \in (0, 1)$.

$(X = k)$ je dogodek, da se A zgodi m -tič pri k -ti ponovitvi:

$$p_k = \binom{k-1}{m-1} \cdot p^m \cdot q^{k-m}, \quad k = m, m+1, \dots$$

7. HIPERGEOMETRIJSKA PORAZDELITEV: $Hip(n; M, N)$, $n \leq \min\{M, N - M\}$

V posodi je M belih in $(N - M)$ črnih kroglic. Slučajno izvlečemo n kroglic. X naj pomeni število belih kroglic med izvlečenimi, kjer za $k = 0, 1, \dots, n$ velja:

$$p_k = \mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Ker je $[(X = k)]_{k=0}^n$ popoln sistem dogodkov je $\sum_{k=0}^n p_k = 1$, torej je

$$\sum_{k=0}^n \binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k} = \binom{N}{n}.$$

Definicija 4.4 (Zvezno porazdeljene slučajne spremenljivke). Slučajna spremenljivka X je *zvezno porazdeljena*, če obstaja *nenegativna integrabilna* funkcija p_x , imenovana *gostota verjetnosti*, da za $\forall x \in \mathbb{R}$ velja

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_x(t) dt.$$

Tedaj je $F_X = F$ *zvezna* funkcija, toda obstajajo zvezno porazdeljene funkcije, ki nimajo gostote (torej jih ni mogoče zapisati s tistim integralom).

Ker je $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x) = 1$, je $\int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt = 1$. Če je p *zvezna* v točki x , potem je F *odvedljiva* v x in velja $F'(x) = p(x)$.

Za $\forall x \in \mathbb{R}$ velja $\mathbb{P}(X = x) = F(x) - F(x-) = 0$. Če je $x_1 < x_2$, potem je

$$\mathbb{P}(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1-) = \int_{x_1}^{x_2} p(t) dt.$$

Nekatere pomembnejše zvezne porazdelitve:

1. ENAKOMERNA ZVEZNA PORAZDELITEV na $[a, b]$:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & ; \text{ če } a \leq x \leq b \\ 0 & ; \text{ sicer} \end{cases}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt = \begin{cases} 0 & ; \text{ če } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & ; \text{ če } a \leq x \leq b \\ 1 & ; \text{ če } x \geq b \end{cases}$$

2. NORMALNA ALI GAUSSOVA PORAZDELITEV: $N(\mu, \sigma)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

V vseh primerih je ploščina pod grafom enaka 1.

$N(0, 1)$: standardna normalna porazdelitev

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Laplaceova formula: za velike n je $\text{Bin}(n, p) \approx N(np, \sqrt{npq})$

3. EKSPONENTNA PORAZDELITEV: $Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$

$$p(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & ; \text{ če } x \geq 0 \\ 0 & ; \text{ sicer} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & ; \text{ če } x \geq 0 \\ 0 & ; \text{ sicer} \end{cases}$$

4. CAUCHYJEVA PORAZDELITEV:

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

5 SLUČAJNI VEKTOR IN NEODVISNOST

Definicija 5.1. *Slučajni vektor* je n -terica slučajnih spremenljivk

$X = (X_1, X_2, \dots, X_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, z lastnostjo, da je množica

$(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) := \{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \leq x_1, \dots, X_n(\omega) \leq x_n\}$ dogodek za vsako n -terico $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Definicija 5.2. *Porazdelitvena funkcija* $F_X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je definirana s predpisom $F_X(x) = F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$. Za $\forall x \in \mathbb{R}^n$ je $F(x) \in [0, 1]$; glede na vsako spremenljivko je F naraščajoča in z desne zvezna;

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow \infty \\ \dots \\ x_n \rightarrow \infty}} F(x_1, \dots, x_n) = 1, \quad \lim_{\substack{x_1 \rightarrow \infty \\ \dots \\ x_n \rightarrow \infty}} F(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Če pošljemo proti ∞ samo nekatere spremenljivke, dobimo porazdelitveno funkcijo pod vektorjem, npr.

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} F(x_1, \dots, x_n) = F_{(X_1, \dots, X_{n-1})}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}).$$

Robna porazdelitve funkcija X_1 , *robna (marginalna)* porazdelitev:

$$\lim_{\substack{x_2 \rightarrow \infty \\ \dots \\ x_n \rightarrow \infty}} F(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1)$$

Definicija 5.3. Slučajne spremenljivke X_1, \dots, X_n v slučajnem vektorju $X = (X_1, \dots, X_n)$ so *neodvisne*, če za $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ velja

$$F_X(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n).$$

Drugače:

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(X_n \leq x_n),$$

$(X_1 \leq x_1), \dots, (X_n \leq x_n)$ so neodvisne.

Trditev 5.1. Naj bo (X, Y) diskreten slučajni vektor;
 $p_{i,j} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$, $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$, $q_j = \mathbb{P}(Y = y_j)$, $i = 1, 2, \dots$,
 $j = 1, 2, \dots$

X in Y sta neodvisni slučajni spremenljivki $\Leftrightarrow p_{i,j} = p_i \cdot q_j$, $\forall i, \forall j$

6 MATEMATIČNO UPANJE oz. pričakovana vrednost

Definicija 6.1. Za končno slučajno spremenljivko $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$ je matematično upanje definirano kot

$$\mathbb{E}(x) = \sum_{k=1}^n x_k \cdot p_k.$$

Naj ima sada X neskončno zalogo vrednosti. Če je X *diskretna* s $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$, $k \in \mathbb{N}$, potem X ima matematično upanje, če je

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \cdot p_k < \infty \quad (\text{je končno});$$

tedaj je matematično upanje definirano kot vsota vrste

$$\mathbb{E}(x) := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p_k.$$

Če je X *zvezna* z gostoto $p(x)$, potem rečemo, da X ima matematično upanje, če je

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot p_k(x) \, dx < \infty;$$

tedaj je matematično upanje definirano kot

$$\mathbb{E}(x) := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) \, dx.$$

Trditev 6.1. Naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija.

a) Če je $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix}$, potem je

$$\mathbb{E}(f \circ X) = \sum_k f(x_k) \cdot p_k,$$

če matematično upanje obstaja, torej je vrsta *absolutno kovvergentna*.

b) Če je X zvezno porazdeljena z gostoto $p(x)$, potem je

$$\mathbb{E}(f \circ X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot p(x) \, dx,$$

če je integral *absolutno konvergenten*.

Posledica. Slučajna spremenljivka X ima matematično upanje \Leftrightarrow ko ga ima slučajna spremenljivka $|X|$. Teda j velja

$$|\mathbb{E}(x)| \leq \mathbb{E}(|x|).$$

Posledica. Za $a \in \mathbb{R}$ in slučajno spremenljivko X z matematičnim upanjem velja

$$\mathbb{E}(a \cdot X) = a \cdot \mathbb{E}(x).$$

Trditev 6.2. Naj bo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija, (X, Y) diskretno porazdeljen slučajni vektor:

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j), \quad i, j = 1, 2, \dots$$

Potem je $f(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ slučajna spremenljivka in velja

$$\mathbb{E}(f(X, Y)) = \sum_i \sum_j f(x_i, y_j) \cdot p_{ij},$$

če le vrsta absolutno konvergira.

Trditev 6.3. Če imata X in Y matematično upanje, ga ima tudi $X + Y$ in velja

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

Posledica. Za slučajne spremenljivke X_1, X_2, \dots, X_n , ki imajo matematično upanje velja:

$$\mathbb{E}(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n) = a_1 \cdot \mathbb{E}(X_1) + \dots + a_n \cdot \mathbb{E}(X_n),$$

kjer so $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Trditev 6.4. Če obstaja $\mathbb{E}(X^2)$ in $\mathbb{E}(Y^2)$, potem obstaja tudi $\mathbb{E}(|XY|)$ in velja

$$\mathbb{E}(|XY|) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2) \cdot \mathbb{E}(Y^2)} \quad (\text{Cauchy-Schwarzova neenakost})$$

Enakost velja $\Leftrightarrow |Y| = \sqrt{\frac{\mathbb{E}(Y^2)}{\mathbb{E}(X^2)}} \cdot |X|$ z verjetnostjo 1.

Posledica. Če obstaja $\mathbb{E}(X^2)$, potem obstaja tudi $\mathbb{E}(|X|)$ in velja

$$(\mathbb{E}(|X|))^2 \leq \mathbb{E}(X^2).$$

Trditev 6.5. Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki, ki imata matematično upanje. Potem obstaja tudi matematično upanje $X \cdot Y$ in velja

$$\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y).$$

Če to velja, sta X in Y nekorelirana, obratno ne velja.

7 DISPERZIJA, KOVARIANCA IN KORELACIJSKI KOEFICIENT

Definicija 7.1. Naj obstaja $\mathbb{E}(X^2)$. *Disperzija* oz. *varianca* je definirana kot

$$D(X) \equiv \text{Var}(X) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2).$$

$D(X)$ meri razpršenost okoli $\mathbb{E}(X)$. Velja

$$D(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Trditev 7.1 (Lastnosti $D(X)$).

1. $D(X) \geq 0$
 $D(X) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)) = 1$
2. $D(a \cdot X) = a^2 \cdot D(X), \quad a \in \mathbb{R}$
3. Za $\forall a \in \mathbb{R}$ je

$$\mathbb{E}((X - a)^2) \geq D(X)$$

Enačaja velja $\Leftrightarrow a = \mathbb{E}(X)$.

Definicija 7.2. *Standardna deviacija* oz. *standardni odklon* je definiran kot

$$\sigma(X) := \sqrt{D(X)}.$$

Zanjo velja

$$\sigma(a \cdot X) = |a| \cdot \sigma(X), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Trditev 7.2 (Nekatere $\mathbb{E}(X)$ in $D(X)$).

1. ENAKOMERNA PORAZDELITEV:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \\ D(X) &= \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n} - \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)^2 \end{aligned}$$

2. BINOMSKA PORAZDELITEV, $Bin(n, p)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= n \cdot p \\ D(X) &= n \cdot p \cdot q \\ \sigma(X) &= \sqrt{n \cdot p \cdot q}\end{aligned}$$

3. POISSONOVA PORAZDELITEV, $Poi(\lambda)$:

$$\mathbb{E}(X) = D(X) = \lambda$$

4. GEOMETRIJSKA PORAZDELITEV, $Geo(p)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{p} \\ D(X) &= \frac{q}{p^2}\end{aligned}$$

5. PASCALOVA PORAZDELITEV, $Pas(m, p)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \frac{m}{p} \\ D(x) &= \frac{m \cdot q}{p}\end{aligned}$$

6. ENAKOMERNA ZVEZNA PORAZDELITEV na $[a, b]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \frac{a+b}{2} \\ D(X) &= \frac{(b-a)^2}{12}\end{aligned}$$

7. NORMALNA PORAZDELITEV, $N(\mu, \sigma)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \mu \\ D(X) &= \sigma^2 \\ \sigma(X) &= \sigma\end{aligned}$$

8. EKSPONENTNA PORAZDELITEV, $Exp(\lambda)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{\lambda} \\ D(X) &= \frac{1}{\lambda^2}\end{aligned}$$

Definicija 7.3. Kovarianca slučajnih spremenljivk X in Y je definirana kot

$$\begin{aligned} K(X, Y) &\equiv \text{Cov}(X, Y) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X)) \cdot (Y - \mathbb{E}(Y))) \\ &= \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y). \end{aligned}$$

Trditev 7.3 (Lastnostni kovariance).

1. $K(X, X) = D(X)$
2. X in Y sta nekorelirana $\Leftrightarrow K(X, Y) = 0$
3. K je simetrična in linearna:

$$K(Y, X) = K(X, Y)$$

$$K(aX + bY, Z) = a \cdot K(X, Z) + b \cdot K(Y, Z), \quad \text{za } a, b \in \mathbb{R}$$

4. Kovarianca obstaja, če obstajata obe disperziji $D(X)$ in $D(Y)$. Tedaj velja

$$|K(X, Y)| \leq \sqrt{D(X) \cdot D(Y)} = \sigma(X) \cdot \sigma(Y)$$

Enakost velja $\Leftrightarrow Y - \mathbb{E}(Y) = \pm \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)} \cdot (X - \mathbb{E}(X))$ z verjetnostjo 1

5. Če X in Y imata disperzijo, potem jo ima tudi $X + Y$ in velja

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2K(X, Y)$$

Če sta X in Y nekorelirani, potem je

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y)$$

6. Posplošitev zadnje lastnosti:

$$D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sum_{k=1}^n D(X_k) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n K(X_i, X_j)$$

Posebej: če so X_1, \dots, X_n paroma nekorelirane, potem je

$$D(X_1, \dots, X_n) = D(X_1) + \dots + D(X_n)$$

Definicija 7.4. *Standardizacija* slučajne spremenljivke X je slučajna spremenljivka

$$X_s = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}.$$

Tedaj je $\mathbb{E}(X_s) = 0$, $D(X_s) = 1$, saj je

$$D(X_s) = \frac{1}{\sigma(X)^2} \cdot D(X - \mathbb{E}(X)) = 1.$$

Definicija 7.5. *Korelacijski koeficient* slučajnih spremenljivk X in Y je

$$r(X, Y) = \frac{K(X, Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)} = \frac{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X)) \cdot (Y - \mathbb{E}(Y)))}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)} = \mathbb{E}(X_s \cdot Y_s)$$

Trditev 7.4 (Lastnosti korelacijskih koeficientov).

1. $r(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X$ in Y sta nekorelirani
2. $-1 \leq r(X, Y) \leq 1$ sledi iz 4. lastnosti kovariance
3. $r(X, Y) = \pm 1 \Leftrightarrow Y = \pm \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)} \cdot (X - \mathbb{E}(X)) + \mathbb{E}(Y)$ z verjetnostjo 1

8 POGOJNA PORAZDELITEV IN POGOJNO MATEMATIČNO UPANJE

Definicija 8.1. Fiksirajmo dogodek B s $\mathbb{P}(B) > 0$. *Pogojna porazdelitvena funkcija* slučajne spremenljivke X glede na pogoj B je

$$F_X(x|B) = \mathbb{P}(X \leq x|B) = \frac{\mathbb{P}((X \leq x) \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

in ima enake lastnosti kot porazdelitvena funkcija.

Naj bo (X, Y) diskreten slučajni vektor:

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

$$B := (Y = y_j), \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(Y = y_j) = q_j$$

Potem je *pogojna porazdelitvena funkcija* slučajne spremenljivke X glede na $Y = y_j$:

$$\begin{aligned} F_X(x|y_j) &= F_X(x|Y = y_j) = \mathbb{P}(X \leq x|Y = y_j) = \\ &= \frac{1}{q_j} \mathbb{P}((X \leq x) \cap (Y = y_j)) = \frac{1}{q_j} \sum_{i: x_i \leq x} p_{ij} \end{aligned}$$

Vpeljimo *pogojno verjetnostno funkcijo*:

$$p_{i|j} = \mathbb{P}(X = x_i|Y = y_j) = \frac{\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)}{\mathbb{P}(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{q_j}.$$

Tedaj je

$$F_X(x|Y = y_j) = \sum_{i: x_i \leq x} p_{i|j}.$$

Definicija 8.2. *Pogojno matematično upanje* slučajne spremenljivke X glede na $Y = y_j$ je matematično upanje te porazdelitve:

$$\mathbb{E}(X|y_j) \equiv \mathbb{E}(X|Y = y_j) = \sum_i x_i \cdot p_{i|j} = \frac{1}{q_j} \sum_i x_i \cdot p_{ij}$$

Tako dobimo novo slučajno spremenljivko:

$$\mathbb{E}(X|Y) : \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X|y_1) & \mathbb{E}(X|y_2) & \dots \\ q_1 & q_2 & \dots \end{pmatrix}$$

Označimo $\varphi(y_j) := \mathbb{E}(X|y_j)$ za $\forall j$:

$$\mathbb{E}(X|Y) := \varphi(Y) : \begin{pmatrix} \varphi(y_1) & \varphi(y_2) & \cdots \\ q_1 & q_2 & \cdots \end{pmatrix}$$

φ je *regresijska funkcija*.

9 RODOVNE FUNKCIJE

Definicija 9.1. Naj bo X slučajna spremenljivka z vrednostmi v $\mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$\begin{aligned} p_k &= \mathbb{P}(X = k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ p_k &\leq 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1. \end{aligned}$$

Rodovna funkcija slučajne spremenljivke X je

$$G_X(s) := p_0 + p_1 \cdot s + p_2 \cdot s^2 + p_3 \cdot s^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot s^k$$

za $\forall s \in \mathbb{R}$, za katere vrsta *absolutno konvergira*.

Očitno je $G_X(0) = p_0$, $G_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, $G_X(s) = \mathbb{E}(s^X)$, saj je

$$s^X : \begin{pmatrix} s^0 & s^1 & s^2 & s^3 & \dots \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}$$

Za $s \in [-1, 1]$ velja $|p_k \cdot s^k| \leq p_k$ in $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, zato vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} |p_k \cdot s^k|$ konvergira. Torej je konvergenčni radij vrste vsaj 1.

Izrek 9.1 (Izrek o enoličnosti). Naj imata X in Y rodovni funkciji G_X in G_Y . Potem je

$$G_X(s) = G_Y(s) \text{ za } \forall s \in [-1, 1] \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) \text{ za } \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

Tedaj velja

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{k!} \cdot G_X^{(k)}(0).$$

Izrek 9.2. Naj ima X rodovno funkcijo G_X in $n \in \mathbb{N}$. Potem je

$$G_X^{(n)}(1-) = \mathbb{E}(X(X-1)(X-2)\dots(X-n+1)),$$

kjer je

$$G_X^{(n)}(1-) = \lim_{s \nearrow 1} G_X^{(n)}(s).$$

Posledica.

$$\mathbb{E}(X) = G'_X(1-)$$

$$\begin{aligned} D(X) &= \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - (\mathbb{E}(X))^2 = \\ &= G''_X(1-) + G'_X(1-) - (G'_X(1-))^2 \end{aligned}$$

Izrek 9.3. Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki z rodovnimi funkcijami G_X in G_Y . Potem je

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s) \cdot G_Y(s) \quad \text{za } s \in [-1, 1].$$

Posplošitev. Če je $S_n = X_1 + \dots + X_n$ vsota neodvisnih slučajnih spremenljivk z vrednostmi v $\mathbb{N} \cup \{0\}$, potem je za $s \in [-1, 1]$

$$G_{S_n}(s) = G_{X_1}(s) \cdot G_{X_2}(s) \cdot \dots \cdot G_{X_n}(s).$$

Posebej: če so X_1, X_2, \dots, X_n enako porazdeljene, potem je

$$G_{S_n}(s) = (G_X(s))^n.$$

Izrek 9.4. Naj bodo za $\forall n \in \mathbb{N}$ slučajne spremenljivke N, X_1, X_2, \dots, X_n neodvisne. Naj ima N rodovno funkcijo G_N , X_n pa rodovno funkcijo G_X za $\forall n \in \mathbb{N}$. Potem ima slučajna spremenljivka $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ rodovno funkcijo

$$G_S(s) = G_N(G_X(s)), \quad s \in [-1, 1].$$

Posledica (Waldova enakost).

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N) \cdot \mathbb{E}(X)$$

10 VIŠJI MOMENTI in VRSTILNE KARAKTERISTIKE

Definicija 10.1. Naj bo $k \in \mathbb{N}$ in $a \in \mathbb{R}$. *Moment reda k glede na a* je

$$m_k(a) = \mathbb{E}((X - a)^k),$$

če obstaja. Za a občajno vzamemo:

1. *začetni moment:*

$$a = 0:$$

$$z_k = m_k(0) = \mathbb{E}(X^k)$$

2. *centralni moment reda k :*

$$a = \mathbb{E}(X):$$

$$m_k = m_k(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^k)$$

Očitno je $z_1 = \mathbb{E}(X)$ in $m_2 = D(X)$.

Trditev 10.1. Če obstaja $m_n(a)$, potem obstaja tudi $m_k(a)$ za $\forall k < n$.

Trditev 10.2. Če obstaja začetni moment z_n , potem obstaja tudi $m_n(a)$ za $\forall a \in \mathbb{R}$.

Definicija 10.2. *Asimetrija* slučajne spremenljivke X je

$$A(X) := \mathbb{E}(X_s^3) = \mathbb{E}\left(\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}\right)^3\right) = \frac{m_3}{(m_2)^{\frac{3}{2}}}$$

Velja:

- $A(N(\mu, \sigma)) = 0$
- $A(\lambda X) = A(X)$ za $\lambda > 0$.

Definicija 10.3. *Sploščenost (kurtozis)* slučajne spremenljivke X je

$$K(X) = \frac{m_4}{(m_2)^2} = \mathbb{E}(X_s^4) = \mathbb{E}\left(\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}\right)^4\right)$$

Velja:

- $K(N(\mu, \sigma)) = 3$
- $K(\lambda X) = K(X)$ za $\lambda > 0$.

Opomba. Nekateri definirajo sploščenost kot $K(X) - 3$, torej je v primeru $N(\mu, \sigma)$ enako 0.

Definicija 10.4. *Mediana* slučajne spremenljivke X je vsaka vrednost $x \in \mathbb{R}$, za katere velja

$$\mathbb{P}(X \leq x) \geq \frac{1}{2} \quad \text{in} \quad \mathbb{P}(X \geq x) \geq \frac{1}{2}.$$

Ker je

$$\mathbb{P}(X \geq x) = 1 - \mathbb{P}(X < x) = 1 - F(x-),$$

lahko pogoj za mediano zapišemo takole

$$F(x-) \leq \frac{1}{2} \leq F(x).$$

Če je X zvezno porazdeljena, je pogoj enak $F(x) = \frac{1}{2}$. Te vrednosti označimo z $x_{\frac{1}{2}}$.

Definicija 10.5. *Kvantil reda p* je vsaka vrednost x_p , za katero velja

$$\mathbb{P}(X \leq x_p) \geq p \quad \text{in} \quad \mathbb{P}(X \geq x_p) \geq 1 - p$$

oziroma ekvivalentno:

$$F(x_p-) \leq p \leq F(x_p), \quad 0 < p < 1.$$

Če je X zvezno porazdeljena, je pogoj za kvantil:

$$F(x_p) = p \quad \text{ozroma} \quad \int_{-\infty}^{x_p} p_X(t) dt = p.$$

(Semiinter)kvartilni razmik je

$$s = \frac{1}{2}(x_{\frac{3}{4}} - x_{\frac{1}{4}})$$

in je nadomestek za standardno deviacijo.

11 MOMENTNO RODOVNE FUNKCIJE

Definicija 11.1.

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$$

az $t \in \mathbb{R}$ za katere obstaja matematično upanje, torej $\mathbb{E}(e^{tX}) < \infty$.

Kadar ima X vrednosti $\mathbb{N} \cup \{0\}$, je

$$M_X(t) = \mathbb{E}((e^t)^X) = G_X(e^t),$$

torej gre za posplošitev rodovne funkcije.

Če je X zvezno porazdeljeno z gostoto $p(x)$, je

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} p(x) dx. \quad (\text{Laplaceova transformacija funkcije } p)$$

Izrek 11.1. Naj obstaja $\delta > 0$, da je $M_X(t) < \infty$ za $\forall \in (-\delta, \delta)$. Potem je porazdelitev za X natanko določena z M_X , vsi začetni momenti obstajajo,

$$z_k = \mathbb{E}(X^k) = M_X^{(k)}(0)$$

za $\forall k \in \mathbb{N}$ in

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_k}{k!} t^k$$

za $\forall t \in (-\delta, \delta)$.

Trditev 11.1.

$$M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at), \quad a \neq 0, \quad b \in \mathbb{R}$$

Trditev 11.2. Za $X \sim N(\mu, \sigma)$ velja

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Izrek 11.2. Če sta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki, potem je

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t).$$

Trditev 11.3. Imejmo $X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ in $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$ neodvisni slučajni spremenljivki. Potem je

$$X + Y \sim N\left(\mu_x + \mu_y, \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}\right).$$

Opomba.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X + Y) &= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \mu_x + \mu_y \\ D(X + Y) &= D(X) + D(Y) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2.\end{aligned}$$