

Verjetnost 1 - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar

2020/21

Kazalo

1	DEFINICIJA VERJETNOSTI	3
1.1	Neformalni uvod v verjetnost	3
1.2	Aksiomična definicija verjetnosti	3

1 DEFINICIJA VERJETNOSTI

1.1 Neformalni uvod v verjetnost

Definicija 1.1 (Verjetnost). Izvajamo poskus. Opazujemo določen pojav, ki ga imenujemo *dogodek*. Poskus ponovimo n - krat.

Definirajmo *frekvenco dogodka* $k_n(A)$ kot število ponovitev, pri katerih se dogodek zgodi.

Relativna frekvenca je definirana kot $f_n(A) = \frac{k_n(A)}{n}$. Zaporedje $\{f_n(A)\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira k nekemu številu $p \in [0, 1]$.

STATISTIČNA DEFINICIJA VERJETNOSTI je definirana kot

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{f_n(A)\}.$$

KLASIČNA DEFINICIJA VERJETNOSTI je definirana kot

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{št. ugodnih izidov } A}{\text{št. vseh izidov } A}.$$

Če je izidov neskončno mnogo uporabimo geometrijsko definicijo verjetnosti.

1.2 Aksiomična definicija verjetnosti

Definicija 1.2. Imamo *prostor vseh izidov oz. vzorčni prostor* Ω . *Dogodki* so nekatere (ne nujno vse) podmnožice Ω .

Definicija 1.3 (Operacije na dogodkih).

1. VSOTA oz. UNIJA dogodkov:

$$A + B = A \cup B$$

je dogodek, ki se zgodi, če se zgodi vsaj eden od dogodkov A in B .

2. PRODUKT oz. PRESEK dogodkov:

$$A \cdot B = A \cap B$$

je dogodek, ki se zgodi, če se zgodita oba dogodka A in B hkrati.

3. NASPROTNI dogodek oz. KOMPLEMENT dogodkov:

$$\bar{A} = A^C$$

je dogodek, ki se zgodi, če se dogodek A ne zgodi.

Opomba. *Pravila za računanje z dogodki:*

1. *Idempotentnost:*

$$A \cup A = A = A \cap A$$

2. *Komutativnost:*

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

3. *Asociativnost:*

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

4. *Distributivnost:*

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

5. *de Morganova zakona:*

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

Še več:

$$\left(\bigcup_i A_i \right)^C = \bigcap_i A_i^C$$

$$\left(\bigcap_i A_i \right)^C = \bigcup_i A_i^C$$

Opomba. *V splošnem ni vsaka podmnožica $A \subset \Omega$ dogodek.*

Definicija 1.4 (σ -algebra). *Neprazna družina podmnožic (dogodkov) \mathcal{F} v Ω je σ -algebra, če velja:*

1. *Zaprtoost komponente:*

$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F}$$

2. *Zaprtoost števne unije:*

$$A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

Opomba. Če v (2) zahtevamo manj:

$$A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F},$$

je \mathcal{F} algebra. V algebri imamo torej zaprtoost za končne unije in končne preseke, medtem ko je σ -algebra zaprta celo za števne preseke.

Definicija 1.5. Naj bo \mathcal{F} σ -algebra, Ω vzorčni prostor. Verjetnostna mera na (\mathcal{F}, Ω) , je preslikava $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ za katero velja:

1. $\mathbb{P} \geq 0$, za $\forall A \in \mathcal{F}$
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
3. Za poljubne paroma nerazdružljive dogodke velja

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

Trojico $(\mathcal{F}, \Omega, \mathbb{P})$ imenujemo *verjetnostni prostor*.

Posledica (Posledice verjetnostnih aksiomov).

$$(a) \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

Dokaz: v (3.) vzamemo $A_i = \emptyset$: $\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) + \dots$

(b) \mathbb{P} je končno aditivna, torej za končno mnogo paroma nerazdružljivih dogodkov velja:

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_n)$$

Dokaz: v (3.) vzamemo $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset$ in uporabimo (a)

(c) \mathbb{P} je monotona, torej $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \subseteq \mathbb{P}(B)$

Še več: $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$

Dokaz: ker je $B = A \cup (B - A)$, $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, zaradi (b) velja $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B - A)$

(d) $\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$

Dokaz: v (c) vzamemo $B = \Omega$

(e) \mathbb{P} je zvezna:

(i) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$

(ii) $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n)$

Dokaz:

(i) Definiramo: $C_i = A_i \setminus A_{i-1}$ za $i = 2, 3, \dots$, $C_1 = A_1$

Potem je $A_n = C_1 \cup \dots \cup C_n$, $C_i \cap C_j = \emptyset$ za $i \neq j$,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$$

Torej je

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(C_i) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(C_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n C_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) \end{aligned}$$

(ii) Ker je $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots$, sledi $B_1^C \subseteq B_2^C \subseteq B_3^C \subseteq \dots$

Po (i) je $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^C) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_i^C)$, toda $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^C = (\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i)^C$.

Zato je $1 - \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} (1 - \mathbb{P}(B_i))$, od koder sledi zelena neenakost.