

Verjetnost 1 - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar

2020/21

Kazalo

1	DEFINICIJA VERJETNOSTI	3
1.1	Neformalni uvod v verjetnost	3
1.2	Aksiomična definicija verjetnosti	3
2	POGOJNA VERJETNOST	7
3	ZAPOREDJA NEODVISNIH PONOVI TEV POSKUSA	9

1 DEFINICIJA VERJETNOSTI

1.1 Neformalni uvod v verjetnost

Definicija 1.1 (Verjetnost). Izvajamo poskus. Opazujemo določen pojav, ki ga imenujemo *dogodek*. Poskus ponovimo n - krat.

Definirajmo *frekvenco dogodka* $k_n(A)$ kot število ponovitev, pri katerih se dogodek zgodi.

Relativna frekvenca je definirana kot $f_n(A) = \frac{k_n(A)}{n}$. Zaporedje $\{f_n(A)\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira k nekemu številu $p \in [0, 1]$.

STATISTIČNA DEFINICIJA VERJETNOSTI je definirana kot

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{f_n(A)\}.$$

KLASIČNA DEFINICIJA VERJETNOSTI je definirana kot

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{št. ugodnih izidov } A}{\text{št. vseh izidov } A}.$$

Če je izidov neskončno mnogo uporabimo geometrijsko definicijo verjetnosti.

1.2 Aksiomična definicija verjetnosti

Definicija 1.2. Imamo *prostor vseh izidov* oz. *vzorčni prostor* Ω . *Dogodki* so nekatere (ne nujno vse) podmnožice Ω .

Definicija 1.3 (Operacije na dogodkih).

1. VSOTA oz. UNIJA dogodkov:

$$A + B = A \cup B$$

je dogodek, ki se zgodi, če se zgodi vsaj eden od dogodkov A in B .

2. PRODUKT oz. PRESEK dogodkov:

$$A \cdot B = A \cap B$$

je dogodek, ki se zgodi, če se zgodita oba dogodka A in B hkrati.

3. NASPROTNI dogodek oz. KOMPLEMENT dogodkov:

$$\bar{A} = A^C$$

je dogodek, ki se zgodi, če se dogodek A ne zgodi.

Opomba. Pravila za računanje z dogodki:

1. Idempotentnost:

$$A \cup A = A = A \cap A$$

2. Komutativnost:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

3. Asociativnost:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

4. Distributivnost:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

5. de Morganova zakona:

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

Še več:

$$\left(\bigcup_i A_i \right)^C = \bigcap_i A_i^C$$

$$\left(\bigcap_i A_i \right)^C = \bigcup_i A_i^C$$

Opomba. V splošnem ni vsaka podmnožica $A \subset \Omega$ dogodek.

Definicija 1.4 (σ -algebra). *Neprazna družina podmnožic (dogodkov) \mathcal{F} v Ω je σ -algebra, če velja:*

1. *Zaprtoost komponente:*

$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F}$$

2. *Zaprtoost števne unije:*

$$A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

Opomba. Če v (2) zahtevamo manj:

$$A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F},$$

je \mathcal{F} algebra. V algebri imamo torej zaprtost za končne unije in končne preseke, medtem ko je σ -algebra zaprta celo za števne preseke.

Definicija 1.5. Naj bo \mathcal{F} σ -algebra, Ω vzorčni prostor. *Verjetnostna mera* na (\mathcal{F}, Ω) , je preslikava $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ za katero velja:

1. $\mathbb{P} \geq 0$, za $\forall A \in \mathcal{F}$
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
3. Za poljubne paroma nerazdružljive dogodke velja

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

Trojico $(\mathcal{F}, \Omega, \mathbb{P})$ imenujemo *verjetnostni prostor*.

Posledica (Posledice verjetnostnih aksiomov).

- (a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

Dokaz: v (3.) vzamemo $A_i = \emptyset$: $\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) + \dots$

- (b) \mathbb{P} je končno aditivna, torej za končno mnogo paroma nerazdružljivih dogodkov velja:

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_n)$$

Dokaz: v (3.) vzamemo $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset$ in uporabimo (a)

- (c) \mathbb{P} je *monotona*, torej $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \subseteq \mathbb{P}(B)$

Še več: $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$

Dokaz: ker je $B = A \cup (B - A)$, $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, zaradi (b) velja $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B - A)$

- (d) $\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$

Dokaz: v (c) vzamemo $B = \Omega$

- (e) \mathbb{P} je zvezna:

$$(i) \quad A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$$

$$(ii) \quad B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n)$$

Dokaz:

- (i) Definiramo: $C_i = A_i \setminus A_{i-1}$ za $i = 2, 3, \dots$, $C_1 = A_1$
Potem je $A_n = C_1 \cup \dots \cup C_n$, $C_i \cap C_j = \emptyset$ za $i \neq j$,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$$

Torej je

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(C_i) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(C_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n C_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) \end{aligned}$$

- (ii) Ker je $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots$, sledi $B_1^C \subseteq B_2^C \subseteq B_3^C \subseteq \dots$

Po (i) je $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^C) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_i^C)$, toda $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^C = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right)^C$.

Zato je $1 - \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} (1 - \mathbb{P}(B_i))$, od koder sledi zelena neenakost.

2 POGOJNA VERJETNOST

Definicija 2.1 (Pogojna verjetnost). *Pogojna verjetnost* dogodka A glede na dogodek B , $\mathbb{P}(A|B)$, je verjetnost dogodka A če vemo, da se je zgodil dogodek B . Posplošimo:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Posledica. Iz definicije sledi

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Če posplošimo na n dogodkov dobimo

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Če velja $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)$, sta dogodka neodvisna.

Izrek 2.1 (Izrek o popolni verjetnosti). Naj bo $(H_i)_i$ popoln sistem dogodkov. Potem je

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_i H_i \right) = \bigcup_i A \cap H_i$$

in iz tega sledi

$$\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(A \cap H_i) = \sum_i \mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A|H_i).$$

To je formula za *popolno verjetnost*.

Posledica (Bayesova formula). Iz definicije pogojne verjetnosti vemo

$$\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(H_i \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A|H_i)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Če v imenovalce vstavimo izrek o popolni verjetnosti, dobimo *Bayesovo formulo*:

$$\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A|H_i)}{\mathbb{P}(H_1) \cdot \mathbb{P}(A|H_1) + \dots + \mathbb{P}(H_n) \cdot \mathbb{P}(A|H_n)} = \frac{\mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A|H_i)}{\sum_i \mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A|H_i)}$$

Definicija 2.2 (Neodvisnost 2 dogodkov). Dogodka A in B sta *neodvisna*, če je

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Če je $\mathbb{P}(B) > 0$ to enakost lahko zapišemo kot

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A|B).$$

Definicija 2.3 (Neodvisnost k dogodkov). Dogodki $(A_i)_i$ so *neodvisni*, če za poljuben končen nabor različnih dogodkov $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$ velja

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \mathbb{P}(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Če zahtevamo le za $k = 2$, torej A_i in A_j sta neodvisna le za $i \neq j$, potem rečemo, da so dogodki *paroma neodvisni*. To je šibkejši pogoj kot neodvisnost.

Trditev 2.1. Če sta dogodka A in B neodvisna, potem sta neodvisna tudi dogodka A^C in B , A in B^C ter A^C in B^C .

3 ZAPOREDJA NEODVISNIH PONOVI TEV POSKUSA

Definicija 3.1 (Bernoullijeva formula). Imejmo zaporedje n neodvisnih ponovitev poskusa, določenega z verjetnostnim prostorom (Ω, \mathcal{F}, p) , v katerem je možen dogodek A s

$\mathbb{P}(A) = p$. Z $A_n(k)$ označimo dogodek, da se A zgodi natanko k -krat, $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

$A_n(k)$ je *disjunktivna unija* $\binom{n}{k}$ dogodkov, da se A zgodi na predpisanih k mestih; na ostalih pa A^C . Verjetnost le teh dogodkov je $p^k \cdot q^{n-k}$. Zato velja *Bernoullijeva formula*

$$\mathbb{P}_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

Trditev 3.1 (Aproksimativni formuli za $\mathbb{P}_n(k)$).

a) POISSONOVA FORMULA: če je p blizu 0 in n velik, potem je

$$\mathbb{P}_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \text{ kjer je } \lambda = n \cdot p$$

b) LAPLACEOVA FORMULA: za velike n velja

$$\mathbb{P}_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}$$