Verjetnost 1 - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar

2020/21

Kazalo

1 DEFINICIJA VERJETNOSTI

1.1 Neformalni uvod v verjetnost

Definicija 1.1 (Verjetnost)**.** Izvajamo poskus. Opazujemo določen pojav, ki ga imenujemo *dogodek*. Poskus ponovimo n - krat.
Definirajmo *frekvenco dogodka* $k_n(A)$ kot število ponovitev, pri katerih se dogodek zgodi.
Relativna frekvenca je definirana kot $f_n(A) = \frac{k_n(A)}{n}$. Zaporedje $\{f_n(A)\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira k nekem številu $p \in [0, 1]$.
STATISTIČNA DEFINICIJA VERJETNOSTI je definirana kot

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \to \infty} \{f_n(A)\}.$$

KLASIČNA DEFINICIJA VERJETNOSTI je definirana kot

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{št. ugodnih izidov A}}{\text{št. vseh izidov A}}.$$

Če je izidov neskončno mnogo uporabimo geometrijsko definicijo verjetnosti.

1.2 Aksiomična definicija verjetnosti

Definicija 1.2. Imamo *prostor vseh izidov* oz. *vzorčni prostor* Ω. *Dogodki* so nekatere (ne nujno vse) podmnožice Ω.

Definicija 1.3 (Operacije na dogodkih)**.**

1. VSOTA OZ. UNIJA dogodkov:

$$A + B = A \cup B$$

je dogodek, ki se zgodi, če se zgodi vsaj eden od dogodkov A in B.

2. PRODUKT OZ. PRESEK dogodkov:

$$A \cdot B = A \cap B$$

je dogodek, ki se zgodi, če se zgodita oba dogodka A in B hkrati.

3. Nasprotni dogodek oz. komplement dogodkov:

$$\bar{A} = A^C$$

je dogodek, ki se zgodi, če se dogodek A ne zgodi.

Opomba. Pravila za računanje z dogodki:

1. Idempotentnost:
$$A \cup A = A = A \cap A$$

2. Komutativnost:
$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

3. Asociativnost:
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

4. Distributivnost:
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

5. de Morganova zakona:
$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$
$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

Še več:
$$\left(\bigcup_i A_i\right)^C = \bigcap_i {A_i}^C$$
$$\left(\bigcap_i A_i\right)^C = \bigcup_i {A_i}^C$$

Opomba. V splošnem ni vsaka podmnožica $A \subset \Omega$ dogodek.

Definicija 1.4 (σ-algebra)**.** *Neprazna* družina podmnožic (dogodkov) $\mathcal{F}$ v Ω je σ-algebra, če velja:

1. *Zaprtost komponente*:
$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F}$$

2. *Zaprtost števne unije*:
$$A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

Opomba. Če v (2) zahtevamo manj:
$$A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F},$$
je $\mathcal{F}$ *algebra*. V algebri imamo torej zaprtost za končne unije in končne preseke, medtem ko je σ-algebra zaprta celo za števne preseke.

Definicija 1.5. Naj bo $\mathcal{F}$ σ-algebra, Ω vzorčni prostor. *Verjetnostna mera* na $(\mathcal{F}, \Omega)$, je preslikava $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ za katero velja:

1. $\mathbb{P} \geq 0$, za $\forall A \in \mathbb{F}$
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
3. Za poljubne paroma nerazdružljive dogodke velja
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

Trojico $(\mathcal{F}, \Omega, \mathbb{P})$ imenujemo *verjetnostni prostor.*

Posledica (Posledice verjetnostnih aksiomov)**.**

(a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
Dokaz: v (*3.*) vzamemo $A_i = \emptyset$: $\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) + \ldots$

(b) $\mathbb{P}$ je končno aditivna, torej za končno mnogo paroma nerazdružljivih dogodkov velja:
$\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \ldots + \mathbb{P}(A_n)$
Dokaz: v (*3.*) vzamemo $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \emptyset$ in uporabimo (a)

(c) $\mathbb{P}$ je *monotona*, torej $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \subseteq \mathbb{P}(B)$
Še več: $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$
Dokaz: ker je $B = A \cup (B - A)$, $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, zaradi (b) velja $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B - A)$

(d) $\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$
Dokaz: v (c) vzamemo $B = \Omega$

(e) $\mathbb{P}$ je zvezna:

(i) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$

(ii) $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \ldots \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n)$

Dokaz:

(i) Definiramo: $C_i = A_i \setminus A_{i-1}$ za $i = 2, 3, \ldots$, $C_1 = A_1$
Potem je $A_n = C_1 \cup \ldots \cup C_n$, $C_i \cap C_j = \emptyset$ za $i \neq j$,
$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i$
Torej je

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(C_i) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(C_i) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} C_i) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

(ii) Ker je $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \ldots$, sledi ${B_1}^C \subseteq {B_2}^C \subseteq {B_3}^C \subseteq \ldots$
Po (i) je $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} {B_i}^C) = \lim\limits_{i\to\infty} \mathbb{P}({D_i}^C)$, toda $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} {B_i}^C = \left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i\right)^C$.
Zato je $1 - \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i) = \lim\limits_{i\to\infty} (1 - \mathbb{P}(B_i))$, od koder sledi želena neenakost.

2 POGOJNA VERJETNOST

Definicija 2.1 (Pogojna verjetnost)**.** *Pogojna verjetnost* dogodka A glede na dogodek B, $\mathbb{P}(A|B)$, je verjetnost dogodka A če vemo, da se je zgodil dogodek B. Posplošimo:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Posledica. Iz definicije sledi

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Če posplošimo na n dogodkov dobimo

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Če velja $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)$, sta dogodka neodvisna.

Izrek 2.1 (Izrek o popolni verjetnosti)**.** Naj bo $(H_i)_i$ popoln sistem dogodkov. Potem je

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_i H_i \right) = \bigcup_i A \cap H_i$$

in iz tega sledi

$$\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(A \cap H_i) = \sum_i \mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A|H_i).$$

To je formula za *popolno verjetnost.*

Posledica (Bayesova formula)**.** Iz definicije pogojne verjetnosti vemo

$$\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(H_i \cap A}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A|H_i)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Če v imenovalec vstavimo izrek o popolni verjetnosti, dobimo *Bayesovo formulo*:

$$\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A|H_i)}{\mathbb{P}(H_1) \cdot \mathbb{P}(A|H_1) + \ldots + \mathbb{P}(H_n) \cdot \mathbb{P}(A|H_n)} = \frac{\mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A|H_i)}{\sum_i \mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A|H_i)}$$

Definicija 2.2 (Neodvisnost 2 dogodkov)**.** Dogodka A in B sta *neodvisna*, če je

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Če je $\mathbb{P}(B) > 0$ to enakost lahko zapišemo kot

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A|B).$$

Definicija 2.3 (Neodvisnost k dogodkov)**.** Dogodki $(A_i)_i$ so *neodvisni*, če za poljuben končen nabor različnih dogodkov $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ velja

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \mathbb{P}(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Če zahtevamo le za $k = 2$, torej A_i in A_j sta neodvisna le za $i \neq j$, potem rečemo, da so dogodki *paroma neodvisni.* To je šibkejši pogoj kot neodvisnost.

Trditev 2.1. Če sta dogodka A in B neodvisna, potem sta neodvisna tudi dogodka A^C in B, A in B^C ter A^C in B^C.

3 ZAPOREDJA NEODVISNIH PONOVITEV POSKUSA

Definicija 3.1 (Bernoullijeva formula)**.** Imejmo zaporedje n neodvisnih ponovitev poskusa, določenega z verjetnostnim prostorom $(\Omega, \mathcal{F}, p)$, v katerem je možen dogodek A s
$\mathbb{P}(A) = p$. Z $A_n(k)$ označimo dogodek, da se A zgodi natanko k-krat, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

$A_n(k)$ je *disjunktivna unija* $\binom{n}{k}$ dogodkov, da se A zgodi na predpisanih k mestih; na ostalih pa A^C. Verjetnost le teh dogodkov je $p^k \cdot q^{n-k}$. Zato velja *Bernoullijeva formula*

$$\mathbb{P}_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

Trditev 3.1 (Aproksimativni formuli za $\mathbb{P}_n(k)$)**.**

a) Poissonova formula: če je p blizu 0 in n velik, potem je

$$\mathbb{P}_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \text{ kjer je } \lambda = n \cdot p$$

b) Laplaceova formula: za velike n velja

$$\mathbb{P}_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}$$

4 SLUČAJNE SPREMENLJIVKE

Definicija 4.1. *Realna slučajna spremenljivka* na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ je funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ z lastnostjo, da je za $\forall x \in \mathbb{R}$ množica $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}$ v $\mathcal{F}$, se pravi je dogodek.

Oznaka:

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \;\equiv\; X^{-1}((-\infty, x]) \;\equiv\; (X \leq x)$$

Definicija 4.2 (Porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke)**.** Funkcija $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirana s $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ se imenuje *porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke x.*

Trditev 4.1 (Lastnosti porazdelitvene funkcije $F = F_X$)**.**

1. $0 \leq F(x) \leq 1$ za $\forall x \in \mathbb{R}$
2. F je naraščajoča funkcija:
$$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$$
3. $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1, \;\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$
4. F je *z desne zvezna*, torej $F(x+) = F(x)$ za $\forall x \in \mathbb{R}$, kjer je $F(x+) = \lim\limits_{h \searrow 0} F(x+h)$ desna limita.
5. $F(x-) = \mathbb{P}(X < x)$
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(x_1 < X \leq x_2) &= F(x_2) - F(x_1) \\
\mathbb{P}(x_1 < X < x_2) &= F(x_2-) - F(x_1) \\
\mathbb{P}(x_1 \leq X \leq x_2) &= F(x_2) - F(x_1-) \\
\mathbb{P}(x_1 \leq X < x_2) &= F(x_2-) - F(x_1-)
\end{aligned}$$

Definicija 4.3 (Diskretne slučajne spremenljivke)**.** Slučajna spremenljivka je *diskretno porazdeljena*, če je njena zaloga vrednosti *končna* ali *števna končna* množica. Naj bo $\{x_1, x_2, \ldots\}$ zaloga vrednosti. Vpeljemo verjetnostno funkcijo $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Ker so $\{(X = x_k)\}_k$ *poln* sistem dogodkov, je

$$\sum_k p_k = 1.$$

X lahko zapišemo s shemo $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$. Porazdelitvena funkcija:

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \mid x_k \leq x} (X = x_k)\right) = \sum_{k \mid x_k \leq x} p_k.$$

Pogoste diskretne porazdelitve:

1. Enakomerna porazdelitev na n točkah $x_1, \ldots, x_n$:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

2. Bernoullijeva porazdelitev, $Ber(p)$, $p \in (0, 1)$:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (1-p) & p \end{pmatrix}$$

Indikatorska funkcija:

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1; & \omega \in A \\ 0; & \omega \notin A \end{cases}$$

3. Binomska porazdelitev, $Bin(n, p)$, $n \in \mathbb{R}$, $p \in (0, 1)$:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix},$$

kjer za $k = 0, 1, \ldots, n$ velja

$$p_k = \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

4. POISONNOVA PORAZDELITEV, $Poi(\lambda)$, $\lambda = n \cdot p > 0$:

$$p_k \;=\; \mathbb{P}(X = k) \;=\; \mathbb{P}_n(k) \;=\; \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda},\; k = 0, 1, \ldots$$

Sledi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \;=\; e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \;=\; e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} \;=\; 1.$$