

# Verjetnost 1 - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar

2020/21

## Kazalo

<b>1</b>	<b>DEFINICIJA VERJETNOSTI</b>	<b>3</b>
1.1	Neformalni uvod v verjetnost . . . . .	3
1.2	Aksiomična definicija verjetnosti . . . . .	3
<b>2</b>	<b>POGOJNA VERJETNOST</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>ZAPOREDJA NEODVISNIH PONOVI- TEV POSKUSA</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>SLUČAJNE SPREMENLJIVKE</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b>SLUČAJNI VEKTOR IN NEODVISNOST</b>	<b>15</b>
<b>6</b>	<b>MATEMATIČNO UPANJE</b> oz. pričakovana vrednost	<b>16</b>
<b>7</b>	<b>DISPERZIJA, KOVARIANCA IN KORELACIJSKI KOE- FICIENT</b>	<b>19</b>

# 1 DEFINICIJA VERJETNOSTI

## 1.1 Neformalni uvod v verjetnost

**Definicija 1.1** (Verjetnost). Izvajamo poskus. Opazujemo določen pojav, ki ga imenujemo *dogodek*. Poskus ponovimo  $n$  - krat.

Definirajmo *frekvenco dogodka*  $k_n(A)$  kot število ponovitev, pri katerih se dogodek zgodi.

*Relativna frekvenca* je definirana kot  $f_n(A) = \frac{k_n(A)}{n}$ . Zaporedje  $\{f_n(A)\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergira k nekemu številu  $p \in [0, 1]$ .

STATISTIČNA DEFINICIJA VERJETNOSTI je definirana kot

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{f_n(A)\}.$$

KLASIČNA DEFINICIJA VERJETNOSTI je definirana kot

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{št. ugodnih izidov } A}{\text{št. vseh izidov } A}.$$

Če je izidov neskončno mnogo uporabimo geometrijsko definicijo verjetnosti.

## 1.2 Aksiomična definicija verjetnosti

**Definicija 1.2.** Imamo *prostor vseh izidov* oz. *vzorčni prostor*  $\Omega$ . *Dogodki* so nekatere (ne nujno vse) podmnožice  $\Omega$ .

**Definicija 1.3** (Operacije na dogodkih).

1. VSOTA oz. UNIJA dogodkov:

$$A + B = A \cup B$$

je dogodek, ki se zgodi, če se zgodi vsaj eden od dogodkov  $A$  in  $B$ .

2. PRODUKT oz. PRESEK dogodkov:

$$A \cdot B = A \cap B$$

je dogodek, ki se zgodi, če se zgodita oba dogodka  $A$  in  $B$  hkrati.

3. NASPROTNI dogodek oz. KOMPLEMENT dogodkov:

$$\bar{A} = A^C$$

je dogodek, ki se zgodi, če se dogodek  $A$  ne zgodi.

**Opomba.** Pravila za računanje z dogodki:

1. Idempotentnost:

$$A \cup A = A = A \cap A$$

2. Komutativnost:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

3. Asociativnost:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

4. Distributivnost:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

5. de Morganova zakona:

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

Še več:

$$\left( \bigcup_i A_i \right)^C = \bigcap_i A_i^C$$

$$\left( \bigcap_i A_i \right)^C = \bigcup_i A_i^C$$

**Opomba.** V splošnem ni vsaka podmnožica  $A \subset \Omega$  dogodek.

**Definicija 1.4** ( $\sigma$ -algebra). *Neprazna družina podmnožic (dogodkov)  $\mathcal{F}$  v  $\Omega$  je  $\sigma$ -algebra, če velja:*

1. *Zaprtaost komponente:*

$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F}$$

2. *Zaprtaost števne unije:*

$$A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

**Opomba.** Če v (2) zahtevamo manj:

$$A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F},$$

je  $\mathcal{F}$  algebra. V algebri imamo torej zaprtost za končne unije in končne preseke, medtem ko je  $\sigma$ -algebra zaprta celo za števne preseke.

**Definicija 1.5.** Naj bo  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra,  $\Omega$  vzorčni prostor. *Verjetnostna mera na  $(\mathcal{F}, \Omega)$ , je preslikava  $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  za katero velja:*

1.  $\mathbb{P} \geq 0$ , za  $\forall A \in \mathcal{F}$
2.  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
3. Za poljubne paroma nerazdružljive dogodke velja

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

Trojico  $(\mathcal{F}, \Omega, \mathbb{P})$  imenujemo *verjetnostni prostor*.

**Posledica** (Posledice verjetnostnih aksiomov).

- (a)  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

**Dokaz:** v (3.) vzamemo  $A_i = \emptyset$ :  $\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) + \dots$

- (b)  $\mathbb{P}$  je končno aditivna, torej za končno mnogo paroma nerazdružljivih dogodkov velja:

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_n)$$

**Dokaz:** v (3.) vzamemo  $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset$  in uporabimo (a)

- (c)  $\mathbb{P}$  je *monotona*, torej  $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \subseteq \mathbb{P}(B)$

Še več:  $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$

**Dokaz:** ker je  $B = A \cup (B - A)$ ,  $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ , zaradi (b) velja  $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B - A)$

- (d)  $\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$

**Dokaz:** v (c) vzamemo  $B = \Omega$

- (e)  $\mathbb{P}$  je zvezna:

$$(i) \quad A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$$

$$(ii) \quad B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n)$$

**Dokaz:**

- (i) Definiramo:  $C_i = A_i \setminus A_{i-1}$  za  $i = 2, 3, \dots$ ,  $C_1 = A_1$

Potem je  $A_n = C_1 \cup \dots \cup C_n$ ,  $C_i \cap C_j = \emptyset$  za  $i \neq j$ ,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$$

Torej je

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(C_i) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(C_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n C_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) \end{aligned}$$

- (ii) Ker je  $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots$ , sledi  $B_1^C \subseteq B_2^C \subseteq B_3^C \subseteq \dots$

Po (i) je  $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^C) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_i^C)$ , toda  $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^C = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right)^C$ .

Zato je  $1 - \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} (1 - \mathbb{P}(B_i))$ , od koder sledi zelena neenakost.

## 2 POGOJNA VERJETNOST

**Definicija 2.1** (Pogojna verjetnost). *Pogojna verjetnost* dogodka  $A$  glede na dogodek  $B$ ,  $\mathbb{P}(A|B)$ , je verjetnost dogodka  $A$  če vemo, da se je zgodil dogodek  $B$ . Posplošimo:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

**Posledica.** Iz definicije sledi

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Če posplošimo na  $n$  dogodkov dobimo

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Če velja  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)$ , sta dogodka neodvisna.

**Izrek 2.1** (Izrek o popolni verjetnosti). Naj bo  $(H_i)_i$  popoln sistem dogodkov. Potem je

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left( \bigcup_i H_i \right) = \bigcup_i A \cap H_i$$

in iz tega sledi

$$\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(A \cap H_i) = \sum_i \mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A|H_i).$$

To je formula za *popolno verjetnost*.

**Posledica** (Bayesova formula). Iz definicije pogojne verjetnosti vemo

$$\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(H_i \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A|H_i)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Če v imenovalce vstavimo izrek o popolni verjetnosti, dobimo *Bayesovo formulo*:

$$\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A|H_i)}{\mathbb{P}(H_1) \cdot \mathbb{P}(A|H_1) + \dots + \mathbb{P}(H_n) \cdot \mathbb{P}(A|H_n)} = \frac{\mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A|H_i)}{\sum_i \mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A|H_i)}$$

**Definicija 2.2** (Neodvisnost 2 dogodkov). Dogodka  $A$  in  $B$  sta *neodvisna*, če je

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Če je  $\mathbb{P}(B) > 0$  to enakost lahko zapišemo kot

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A|B).$$

**Definicija 2.3** (Neodvisnost  $k$  dogodkov). Dogodki  $(A_i)_i$  so *neodvisni*, če za poljuben končen nabor različnih dogodkov  $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$  velja

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \mathbb{P}(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Če zahtevamo le za  $k = 2$ , torej  $A_i$  in  $A_j$  sta neodvisna le za  $i \neq j$ , potem rečemo, da so dogodki *paroma neodvisni*. To je šibkejši pogoj kot neodvisnost.

**Trditev 2.1.** Če sta dogodka  $A$  in  $B$  neodvisna, potem sta neodvisna tudi dogodka  $A^C$  in  $B$ ,  $A$  in  $B^C$  ter  $A^C$  in  $B^C$ .



### 3 ZAPOREDJA NEODVISNIH PONOVI TEV POSKUSA

**Definicija 3.1** (Bernoullijeva formula). Imejmo zaporedje  $n$  neodvisnih ponovitev poskusa, določenega z verjetnostnim prostorom  $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ , v katerem je možen dogodek  $A$  s

$\mathbb{P}(A) = p$ . Z  $A_n(k)$  označimo dogodek, da se  $A$  zgodi natanko  $k$ -krat,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ .

$A_n(k)$  je *disjunktivna unija*  $\binom{n}{k}$  dogodkov, da se  $A$  zgodi na predpisanih  $k$  mestih; na ostalih pa  $A^C$ . Verjetnost le teh dogodkov je  $p^k \cdot q^{n-k}$ . Zato velja *Bernoullijeva formula*

$$\mathbb{P}_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

**Trditev 3.1** (Aproksimativni formuli za  $\mathbb{P}_n(k)$ ).

a) POISSONOVA FORMULA: če je  $p$  blizu 0 in  $n$  velik, potem je

$$\mathbb{P}_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \text{ kjer je } \lambda = n \cdot p$$

b) LAPLACEOVA FORMULA: za velike  $n$  velja

$$\mathbb{P}_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}$$

## 4 SLUČAJNE SPREMENLJIVKE

**Definicija 4.1.** *Realna slučajna spremenljivka* na verjetnostnem prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, p)$  je funkcija  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  z lastnostjo, da je za  $\forall x \in \mathbb{R}$  množica  $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}$  v  $\mathcal{F}$ , se pravi je dogodek.

Oznaka:

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \equiv X^{-1}((-\infty, x]) \equiv (X \leq x)$$

**Definicija 4.2** (Porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke). Funkcija  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definirana s  $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$  se imenuje *porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke*  $x$ .

**Trditev 4.1** (Lastnosti porazdelitvene funkcije  $F = F_X$ ).

1.  $0 \leq F(x) \leq 1$  za  $\forall x \in \mathbb{R}$
2.  $F$  je naraščajoča funkcija:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$$

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
4.  $F$  je z *desne zvezna*, torej  $F(x+) = F(x)$  za  $\forall x \in \mathbb{R}$ , kjer je  $F(x+) = \lim_{h \searrow 0} F(x+h)$  desna limita.
5.  $F(x-) = \mathbb{P}(X < x)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(x_1 < X \leq x_2) &= F(x_2) - F(x_1) \\ \mathbb{P}(x_1 < X < x_2) &= F(x_2-) - F(x_1) \\ \mathbb{P}(x_1 \leq X \leq x_2) &= F(x_2) - F(x_1-) \\ \mathbb{P}(x_1 \leq X < x_2) &= F(x_2-) - F(x_1-)\end{aligned}$$

**Definicija 4.3** (Diskretne slučajne spremenljivke). Slučajna spremenljivka je *diskretno porazdeljena*, če je njena zaloga vrednosti *končna* ali *števena končna* množica. Naj bo  $\{x_1, x_2, \dots\}$  zaloga vrednosti. Vpeljemo verjetnostno funkcijo  $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Ker so  $\{(X = x_k)\}_k$  *poln* sistem dogodkov, je

$$\sum_k p_k = 1.$$

$X$  lahko zapišemo s shemo  $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$ . Porazdelitvena funkcija:

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \mid x_k \leq x} (X = x_k)\right) = \sum_{k \mid x_k \leq x} p_k.$$

Pogoste diskretne porazdelitve:

1. ENAKOMERNA PORAZDELITEV na  $n$  točkah  $x_1, \dots, x_n$ :

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

2. BERNOULLIJEVA PORAZDELITEV,  $Ber(p)$ ,  $p \in (0, 1)$ :

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (1-p) & p \end{pmatrix}$$

Indikatorska funkcija:

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1; & \omega \in A \\ 0; & \omega \notin A \end{cases}$$

3. BINOMSKA PORAZDELITEV,  $Bin(n, p)$ ,  $n \in \mathbb{R}$ ,  $p \in (0, 1)$ :

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix},$$

kjer za  $k = 0, 1, \dots, n$  velja

$$p_k = \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

4. POISSONNOVA PORAZDELITEV,  $Poi(\lambda)$ ,  $\lambda = n \cdot p > 0$ :

$$p_k = \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Sledi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

5. GEOMETRIJSKA PORAZDELITEV:  $Geo(p)$ ,  $p \in (0, 1)$ .  
 $(X = k)$  je dogodek, da se  $A$  zgodi prvič v  $k$ -ti ponovitvi:

$$p_k = \mathbb{P}(X = k) = p \cdot q^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Torej  $\underbrace{A^C \cdot \dots \cdot A^C}_{k-1} \cdot A = \underbrace{q \cdot \dots \cdot q}_{k-1} \cdot p = p \cdot q^{k-1}$ . Velja:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = p \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \frac{p}{1-q} = 1$$

6. PASCALOVA PORAZDELITEV:  $Pas(m, p)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $p \in (0, 1)$ .  
 $(X = k)$  je dogodek, da se  $A$  zgodi  $m$ -tič pri  $k$ -ti ponovitvi:

$$p_k = \binom{k-1}{m-1} \cdot p^m \cdot q^{k-m}, \quad k = m, m+1, \dots$$

7. HIPERGEOMETRIJSKA PORAZDELITEV:  $Hip(n; M, N)$ ,  $n \leq \min\{M, N - M\}$   
V posodi je  $M$  belih in  $(N - M)$  črnih kroglic. Slučajno izvlečemo  $n$  kroglic.  $X$  naj pomeni število belih kroglic med izvlečenimi, kjer za  $k = 0, 1, \dots, n$  velja:

$$p_k = \mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Ker je  $[(X = k)]_{k=0}^n$  popoln sistem dogodkov je  $\sum_{k=0}^n p_k = 1$ , torej je

$$\sum_{k=0}^n \binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k} = \binom{N}{n}.$$

**Definicija 4.4** (Zvezno porazdeljene slučajne spremenljivke). Slučajna spremenljivka  $X$  je *zvezno porazdeljena*, če obstaja *nenegativna integrabilna* funkcija  $p_x$ , imenovana *gostota verjetnosti*, da za  $\forall x \in \mathbb{R}$  velja

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_x(t) dt.$$

Tedaj je  $F_X = F$  *zvezna* funkcija, toda obstajajo zvezno porazdeljene funkcije, ki nimajo gostote (torej jih ni mogoče zapisati s tistim integralom).

Ker je  $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x) = 1$ , je  $\int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt = 1$ . Če je  $p$  *zvezna* v točki  $x$ , potem je  $F$  *odvedljiva* v  $x$  in velja  $F'(x) = p(x)$ .

Za  $\forall x \in \mathbb{R}$  velja  $\mathbb{P}(X = x) = F(x) - F(x-) = 0$ . Če je  $x_1 < x_2$ , potem je

$$\mathbb{P}(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1-) = \int_{x_1}^{x_2} p(t) dt.$$

Nekatere pomembnejše zvezne porazdelitve:

1. ENAKOMERNA ZVEZNA PORAZDELITEV na  $[a, b]$ :

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & ; \text{ če } a \leq x \leq b \\ 0 & ; \text{ sicer} \end{cases}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt = \begin{cases} 0 & ; \text{ če } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & ; \text{ če } a \leq x \leq b \\ 1 & ; \text{ če } x \geq b \end{cases}$$

2. NORMALNA ALI GAUSSOVA PORAZDELITEV:  $N(\mu, \sigma)$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

V vseh primerih je ploščina pod grafom enaka 1.

$N(0, 1)$ : standardna normalna porazdelitev

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Laplaceova formula: za velike  $n$  je  $\text{Bin}(n, p) \approx N(np, \sqrt{npq})$

3. EKSPONENTNA PORAZDELITEV:  $Exp(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$

$$p(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & ; \text{ če } x \geq 0 \\ 0 & ; \text{ sicer} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & ; \text{ če } x \leq 0 \\ 0 & ; \text{ sicer} \end{cases}$$

4. CAUCHYJEVA PORAZDELITEV:

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

## 5 SLUČAJNI VEKTOR IN NEODVISNOST

**Definicija 5.1.** *Slučajni vektor* je  $n$ -terica slučajnih spremenljivk

$X = (X_1, X_2, \dots, X_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , z lastnostjo, da je množica

$(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) := \{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \leq x_1, \dots, X_n(\omega) \leq x_n\}$  dogodek za vsako  $n$ -terico  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .

**Definicija 5.2.** *Porazdelitvena funkcija*  $F_X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je definirana s predpisom  $F_X(x) = F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$ . Za  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  je  $F(x) \in [0, 1]$ ; glede na vsako spremenljivko je  $F$  naraščajoča in z desne zvezna;

$$\lim_{x_i \rightarrow \infty, \forall i} F(x_1, \dots, x_n) = 1, \quad \lim_{x_i \rightarrow -\infty, \forall i} F(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Če pošljemo proti  $\infty$  samo nekatere spremenljivke, dobimo porazdelitveno funkcijo pod vektorjem, npr.

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} F(x_1, \dots, x_n) = F_{(X_1, \dots, X_{n-1})}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}).$$

Robna porazdelitve funkcija  $X_1$ , *robna (marginalna)* porazdelitev:

$$\lim_{\substack{x_2 \rightarrow \infty \\ \dots \\ x_n \rightarrow \infty}} F = F_{X_1}(x_1)$$

**Definicija 5.3.** Slučajne spremenljivke  $X_1, \dots, X_n$  v slučajnem vektorju  $X = (X_1, \dots, X_n)$  so *neodvisne*, če za  $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  velja

$$F_X(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n).$$

Drugače:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) &= \mathbb{P}(X_1 \leq x_1) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(X_n \leq x_n) \\ &= (X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \text{ so neodvisne.} \end{aligned}$$

**Trditev 5.1.** Naj bo  $(X, Y)$  diskreten slučajni vektor;

$p_{i,j} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$ ,  $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$ ,  $q_j = \mathbb{P}(Y = y_j)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ ,  $j = 1, 2, \dots$

$X$  in  $Y$  sta neodvisni slučajni spremenljivki  $\Leftrightarrow p_{i,j} = p_i \cdot q_j, \forall i, \forall j$

## 6 MATEMATIČNO UPANJE oz. pričakovana vrednost

**Definicija 6.1.** Za končno slučajno spremenljivko  $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$  je matematično upanje definirano kot

$$E(x) = \sum_{k=1}^n x_k \cdot p_k.$$

Naj ima sada  $X$  neskončno zalogo vrednosti. Če je  $X$  *diskretna* s  $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), potem  $X$  ima matematično upanje, če je

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \cdot p_k < \infty \quad (\text{je končno});$$

tedaj je matematično upanje definirano kot vsota vrste

$$E(x) := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p_k.$$

Če je  $X$  *zvezna* z gostoto  $p(x)$ , potem rečemo, da  $X$  ima matematično upanje, če je

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot p_k(x) \, dx < \infty;$$

tedaj je matematično upanje definirano kot

$$E(x) := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) \, dx.$$

**Trditev 6.1.** Naj bo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija.

a) Če je  $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix}$ , potem je

$$E(f \circ X) = \sum_k f(x_k) \cdot p_k,$$

če matematično upanje obstaja, torej je vrsta *absolutno kovvergentna*.



b) Če je  $X$  zvezno porazdeljena z gostoto  $p(x)$ , potem je

$$E(f \circ X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot p(x) \, dx,$$

če je integral *absolutno konvergenten*.

**Posledica.** Slučajna spremenljivka  $X$  ima matematično upanje  $\Leftrightarrow$  ko ga ima slučajna spremenljivka  $(X)$ . Tedaj velja

$$|E(x)| \leq E(|x|).$$

**Posledica.** Za  $a \in \mathbb{R}$  in slučajno spremenljivko  $X$  z matematičnim upanjem velja

$$E(a \cdot X) = a \cdot E(x).$$

**Trditev 6.2.** Naj bo  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija,  $(X, Y)$  diskretno porazdeljen slučajni vektor:

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j), \quad i, j = 1, 2, \dots$$

Potem je  $f(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  slučajna spremenljivka in velja

$$E(f(X, Y)) = \sum_i \sum_j f(x_i, y_j) \cdot p_{ij},$$

če le vrsta absolutno konvergira.

**Trditev 6.3.** Če imata  $X$  in  $Y$  matematično upanje, ga ima tudi  $X + Y$  in velja

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

**Posledica.** Za slučajne spremenljivke  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , ki imajo matematično upanje velja:

$$E(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n) = a_1 \cdot E(X_1) + \dots + a_n \cdot E(X_n),$$

kjer so  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ .

**Trditev 6.4.** Če obstaja  $E(X^2)$  in  $E(Y^2)$ , potem obstaja tudi  $E(|XY|)$  in velja

$$E(|XY|) \leq \sqrt{E(X^2) \cdot E(Y^2)} \quad (\text{Cauchy-Schwarzova neenakost})$$

Enakost velja  $\Leftrightarrow |Y| = \sqrt{\frac{E(Y^2)}{E(X^2)}} \cdot |X|$  z verjetnostjo 1.

**Posledica.** Če obstaja  $E(X^2)$ , potem obstaja tudi  $E(|X|)$  in velja

$$(E(|X|))^2 \leq E(X^2).$$

**Trditev 6.5.** Naj bosta  $X$  in  $Y$  *neodvisni* slučajni spremenljivki, ki imata matematično upanje. Potem obstaja tudi matematično upanje  $X \cdot Y$  in velja

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y).$$

## 7 DISPERZIJA, KOVARIANCA IN KORELACIJSKI KOEFICIENT

**Definicija 7.1.** Naj obstaja  $E(X^2)$ . *Disperzija* oz. *varianca* je definirana kot

$$D(X) \equiv \text{Var}(X) := E((X - E(X))^2).$$

$D(X)$  meri razpršenost okoli  $E(X)$ . Velja

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

**Trditev 7.1.** Lastnosti  $D(X)$ :

1.

$$D(X) \geq 0$$

$$D(X) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = E(X)) = 1$$

2.  $D(a \cdot X) = a^2 \cdot D(X)$ ,  $a \in \mathbb{R}$

3. Za  $\forall a \in \mathbb{R}$  je

$$E((X - a)^2) \geq D(X)$$

Enačaj velje  $\Leftrightarrow a = E(X)$ .

**Definicija 7.2.** *Standardna deviacija* oz. *standardni odklon* je definiran kot

$$\sigma(X) := \sqrt{D(X)}.$$

Zanjo velja

$$\sigma(a \cdot X) = |a| \cdot \sigma(X), \quad a \in \mathbb{R}.$$

**Trditev 7.2** (Nekatere  $E(X)$  in  $D(X)$ ).

1. ENAKOMERNA PORAZDELITEV:

$$E(X) = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

$$D(X) = \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n} - \left( \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)^2$$

2. BINOMSKA PORAZDELITEV,  $Bin(n, p)$ :

$$E(X) = n \cdot p$$

$$D(X) = n \cdot p \cdot q$$

$$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

3. POISSONOVA PORAZDELITEV,  $Poi(\lambda)$ :

$$E(X) = D(X) = \lambda$$

4. GEOMETRIJSKA PORAZDELITEV,  $Geo(p)$ :

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$D(X) = \frac{q}{p^2}, \quad q = 1 - p$$

5. PASCALOVA PORAZDELITEV,  $Pas(m, p)$ :

$$E(X) = \frac{m}{p}$$

$$D(x) = \frac{m \cdot q}{p}$$

6. ENAKOMERNA ZVEZNA PORAZDELITEV na  $[a, b]$ :

$$E(X) = \frac{a + b}{2}$$

$$D(X) = \frac{(b - a)^2}{12}$$

7. NORMALNA PORAZDELITEV,  $N(\mu, \sigma)$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$ :

$$E(X) = \mu$$

$$D(X) = \sigma^2$$

$$\sigma(X) = \sigma$$

8. EKSPONENTNA PORAZDELITEV,  $Exp(\lambda)$ :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

**Definicija 7.3.** *Kovarianca* slučajnih spremenljivk  $X$  in  $Y$  je definirana kot

$$\begin{aligned} K(X, Y) &\equiv Cov(X, Y) := E((X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))) \\ &= E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y). \end{aligned}$$