Verjetnost 1 - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar

2020/21

Kazalo

1 DEFINICIJA VERJETNOSTI

1.1 Neformalni uvod v verjetnost

Definicija 1.1 (Verjetnost)**.** Izvajamo poskus. Opazujemo določen pojav, ki ga imenujemo *dogodek*. Poskus ponovimo n - krat.
Definirajmo *frekvenco dogodka* $k_n(A)$ kot število ponovitev, pri katerih se dogodek zgodi.
Relativna frekvenca je definirana kot $f_n(A) = \frac{k_n(A)}{n}$. Zaporedje $\{f_n(A)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira k nekem številu $p \in [0, 1]$.
Statistična definicija verjetnosti je definirana kot

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty}\{f_n(A)\}.$$

Klasična definicija verjetnosti je definirana kot

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{št. ugodnih izidov A}}{\text{št. vseh izidov A}}.$$

Če je izidov neskončno mnogo uporabimo geometrijsko definicijo verjetnosti.

1.2 Aksiomična definicija verjetnosti

Definicija 1.2. Imamo *prostor vseh izidov* oz. *vzorčni prostor* Ω. *Dogodki* so nekatere (ne nujno vse) podmnožice Ω.

Definicija 1.3 (Operacije na dogodkih)**.**

1. Vsota oz. unija dogodkov:

$$A + B = A \cup B$$

   je dogodek, ki se zgodi, če se zgodi vsaj eden od dogodkov A in B.

2. Produkt oz. presek dogodkov:

$$A \cdot B = A \cap B$$

   je dogodek, ki se zgodi, če se zgodita oba dogodka A in B hkrati.

3. NASPROTNI dogodek oz. KOMPLEMENT dogodkov:

$$\bar{A} = A^C$$

je dogodek, ki se zgodi, če se dogodek A ne zgodi.

Opomba. Pravila za računanje z dogodki:

1. Idempotentnost:
$$A \cup A = A = A \cap A$$

2. Komutativnost:
$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

3. Asociativnost:
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

4. Distributivnost:
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

5. de Morganova zakona:
$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$
$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

Še več:
$$\left(\bigcup_i A_i\right)^C = \bigcap_i {A_i}^C$$
$$\left(\bigcap_i A_i\right)^C = \bigcup_i {A_i}^C$$

Opomba. V splošnem ni vsaka podmnožica $A \subset \Omega$ dogodek.

Definicija 1.4 (σ-algebra)**.** *Neprazna* družina podmnožic (dogodkov) $\mathcal{F}$ v Ω je σ-algebra, če velja:

1. *Zaprtost komponente*:

$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F}$$

2. *Zaprtost števne unije*:

$$A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

Opomba. Če v (2) zahtevamo manj:

$$A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F},$$

je $\mathcal{F}$ *algebra.* V algebri imamo torej zaprtost za končne unije in končne preseke, medtem ko je σ-algebra zaprta celo za števne preseke.

Definicija 1.5. Naj bo $\mathcal{F}$ σ-algebra, Ω vzorčni prostor. *Verjetnostna mera* na $(\mathcal{F}, \Omega)$, je preslikava $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ za katero velja:

1. $\mathbb{P} \geq 0$, za $\forall A \in \mathbb{F}$
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
3. Za poljubne paroma nerazdružljive dogodke velja

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

Trojico $(\mathcal{F}, \Omega, \mathbb{P})$ imenujemo *verjetnostni prostor.*

Posledica (Posledice verjetnostnih aksiomov)**.**

(a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
Dokaz: v (*3.*) vzamemo $A_i = \emptyset$: $\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) + \ldots$

(b) $\mathbb{P}$ je končno aditivna, torej za končno mnogo paroma nerazdružljivih dogodkov velja:
$\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \ldots + \mathbb{P}(A_n)$
Dokaz: v (*3.*) vzamemo $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \emptyset$ in uporabimo (a)

(c) $\mathbb{P}$ je *monotona*, torej $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \subseteq \mathbb{P}(B)$
Še več: $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$
Dokaz: ker je $B = A \cup (B - A)$, $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, zaradi (b) velja $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B - A)$

(d) $\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$
Dokaz: v (c) vzamemo $B = \Omega$

(e) $\mathbb{P}$ je zvezna:

(i) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$

(ii) $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \ldots \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n)$

Dokaz:

(i) Definiramo: $C_i = A_i \setminus A_{i-1}$ za $i = 2, 3, \ldots$, $C_1 = A_1$
Potem je $A_n = C_1 \cup \ldots \cup C_n$, $C_i \cap C_j = \emptyset$ za $i \neq j$,
$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i$
Torej je

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(C_i) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(C_i) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} C_i) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

(ii) Ker je $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \ldots$, sledi ${B_1}^C \subseteq {B_2}^C \subseteq {B_3}^C \subseteq \ldots$
Po (i) je $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} {B_i}^C) = \lim\limits_{i\to\infty} \mathbb{P}({D_i}^C)$, toda $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} {B_i}^C = \left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i\right)^C$.
Zato je $1 - \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i) = \lim\limits_{i\to\infty} (1 - \mathbb{P}(B_i))$, od koder sledi želena neenakost.

2 POGOJNA VERJETNOST

Definicija 2.1 (Pogojna verjetnost)**.** *Pogojna verjetnost* dogodka A glede na dogodek B, $\mathbb{P}(A|B)$, je verjetnost dogodka A če vemo, da se je zgodil dogodek B. Posplošimo:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Posledica. Iz definicije sledi

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Če posplošimo na n dogodkov dobimo

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Če velja $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)$, sta dogodka neodvisna.

Izrek 2.1 (Izrek o popolni verjetnosti)**.** Naj bo $(H_i)_i$ popoln sistem dogodkov. Potem je

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_i H_i \right) = \bigcup_i A \cap H_i$$

in iz tega sledi

$$\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(A \cap H_i) = \sum_i \mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A|H_i).$$

To je formula za *popolno verjetnost*.

Posledica (Bayesova formula)**.** Iz definicije pogojne verjetnosti vemo

$$\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(H_i \cap A}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A|H_i)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Če v imenovalec vstavimo izrek o popolni verjetnosti, dobimo *Bayesovo formulo*:

$$\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A|H_i)}{\mathbb{P}(H_1) \cdot \mathbb{P}(A|H_1) + \ldots + \mathbb{P}(H_n) \cdot \mathbb{P}(A|H_n)} = \frac{\mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A|H_i)}{\sum_i \mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A|H_i)}$$

Definicija 2.2 (Neodvisnost dogodkov)**.** Dogodka A in B sta *neodvisna*, če je

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Če je $\mathbb{P}(B) > 0$ to enakost lahko zapišemo kot

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A|B).$$