Verjetnost in statistika - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar
po predavanjih profesorja Jaka Smrekarja

2020/21

Kazalo

1 SLUČAJNI VEKTORJI

Definicija 1.1 (Komulativna porazdelitvena funkcija)**.** Slučajni vektor je taka funkcija/preslikava $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$, kjer je Ω verjetnostni prostor, za katero so množice

$$\begin{aligned}
\{X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n\} &= \{X_1 \in (-\infty, x_1], \ldots, X_n \in (-\infty, x_n]\} \\
&= \{\vec{X} \in (-\infty, x_1] \times \ldots \times (-\infty, x_n]\} \\
&= \vec{X}^{-1}\left((-\infty, x_1] \times \ldots \times (-\infty, x_n]\right)
\end{aligned}$$

dogodki za vse *realne* n-terice $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Komulativna porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja $\vec{X}$ je funkcija $F_X : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ s predpisom

$$F_{\vec{X}}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n).$$

Trditev 1.1 (Lastnosti KPF)**.**

(1)

$$\begin{aligned}
\lim_{x_i \to -\infty} F_{\vec{X}}(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\
\lim_{\substack{x_1 \to \infty \\ \cdots \\ x_n \to \infty}} F_{\vec{X}}(x_1, \ldots, x_n) &= 1
\end{aligned}$$

(2) Monotonost:
Če je $x_i \leq y_i$ za $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, je

$$F_{\vec{X}}(x_1, \ldots, x_n) = F_{\vec{X}}(\vec{x}) \leq F_{\vec{X}}(y).$$

To sledi iz monotonosti $\mathbb{P}$.

(3) Zveznost z desne:

$$\lim_{\vec{y} \searrow \vec{x}} F_{\vec{X}(\vec{y})} = F_{\vec{X}}(\vec{x})$$

Tu $\vec{y} \searrow \vec{x}$ interpretiramo kot $\vec{y_i} \searrow \vec{x_i}$ za $\forall i$.

Opomba. Lastnosti (1), (2) in (3) karakterizirajo družino abstraktnih komulativnih porazdelitvenih funkcij v primeru slučajnih spremeljivk ($n = 1$). V večrazsežnem prostoru to ne drži.

Izrek 1.1. Če je $F : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$ zadošča (1), (2), (3) in (4):

$$F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c) \ \geq \ 0$$

za vse četverice $a < b$ in $c < d$, je F *komulativna porazdelitvena funkcija* nekega slučajnega vektorja $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$.

Definicija 1.2 ('Zvezni' slučajni vektorj)**.** Slučajni vektor $\vec{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ima (*zvezno*) gostoto, če obstaja taka *zvezna* funkcija $f_{\vec{X}} : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, da zanjo velja

$$\mathbb{P}(\vec{x} \in \mathcal{B}) \ = \ \int_{\mathcal{B}} f_{\vec{X}}(x_1, \ldots, x_n) \ dx_1 \ldots dx_n,$$

za vsako Borelovo množico $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$.

Posplošitev. Pravimo, da ima vektor $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ n-razsežno normalno porazdelitev s parametrom $\vec{\mu} \in \mathbb{R}$ in $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (*simetrična* in *pozitivno definitna*), če ima gostoto:

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) \ = \ (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\det \Sigma)^{-1} e^{-\frac{1}{2} \langle \ \Sigma^{-1}(\vec{x} - \vec{\mu}) \ , \ (\vec{x} - \vec{\mu}) \ \rangle}$$

2 NEODVISNOST

Definicija 2.1. Komponente $X_1, \dots, X_n$ slučajnega vektorja $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ so *neodvisne*, če velja

$$F_{\vec{X}}(x_1, \dots, x_n) \;=\; F_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(x_n)$$

za vse n-terice $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Opomba. Enakost lahko prepišemo v

$$\mathbb{P}\left(\vec{X} \in (-\infty, x_1] \times \ldots \times (-\infty, x_n]\right) \;=\; \mathbb{P}\left(X_1 \in (-\infty, x_1]\right) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}\left(X_n \in (-\infty, x_n]\right)$$

Trditev 2.1. Naj ima (X, Y) *'zvezno'* gostoto $f(X, Y)$ in naj bosta f_X in f_Y robni gostoti. Tedaj sta X in Y *neodvisni* natanko takrat, ko

$$f_{(X,Y)}(x, y) \;=\; f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

za skoraj vse pare x in y.

Trditev 2.2 (Posledica prejšnje trditve)**.** Naj ima (X, Y) *'zvezno'* gostoto $f_{(X,Y)}(x, y)$. Tedaj sta X in Y neodvisni natanko takrat, ko velja

$$f_{(X,Y)}(x, y) \;=\; \Phi(x)\Psi(y)$$

za skoraj vse x in y, za neki *nenegativni* integralski funkciji.

3 FUNKCIJE in TRANSFORMACIJE slučajnih spremenljivk in vektorjev

3.1 Slučajne spremenljivke

Trditev 3.1 (Diskretni primer)**.** Če je X *diskretna slučajna spremenljivka* z vrednostmi $\{x_i \mid i \in I\}$ in je g funkcija, ki preslika množico $\{x_i \mid i \in I\}$ na množico $\{y_j \mid j \in J\}$, je $g \circ X = g(X)$ *diskretna slučajna spremenljivka* z verjetnostno funkcijo

$$\mathbb{P}(g(X) = y_j) \; = \sum_{i:\; g(x:i)=y_j} \mathbb{P}(X = x_i)$$

Trditev 3.2 (Zvezni primer)**.** Naj ima slučajna spremenljivka X *'zvezno'* gostoto f_X, ki je različna od 0 natanko na intervalu (a, b), kjer $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$.

Naj bo $g : (a, b) \to (c, d)$ *zvezna bijekcija.* Zanima nas funkcija $g(X)$ slučajne spremenljivke X.

Velja tudi

$$\mathbb{P}(X \in (a, b)) \; = \; \int_a^b f_X(x)\; dx \; = \; \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\; dx \; = \; 1.$$

Velja $\{g(X) \leq z\} = \{X \leq g^{-1}(z)\}$. Ker je X slučajna spremenljivka, so $\{X \leq g^{-1}(z)\}$ dogodki za $z \in (c, d)$. Sledi, da je $g(X)$ slučajna spremenljivka in velja:

$$F_{g(X)}(z) \; = \; \mathbb{P}(g(X) \leq z) \; = \; \begin{cases} 1 & ; \quad z \geq d \\ F_X(g^{-1}(z)) \; ; & z \in (c, d) \\ 0 & ; \quad z \leq c \end{cases}$$

Če je g *odvedljiva*, sledi:

$$f_{g(X)}(z) \; = \; \frac{d}{dz} F_{g(X)}(z) \; = \; \begin{cases} \frac{f_X(g^{-1}(z))}{g'(g^{-1}(z))} \; ; & z \in (c, d) \\ 0 & ; \; \text{sicer} \end{cases}$$

Za splošno *odvedljivo bijekcijo* $g : (a, b) \to (c, d)$ velja t.i. *transformacijska formula*:

$$f_{g(X)}(z) \; = \; \frac{f_X(g^{-1}(z))}{|g'(g^{-1}(z))|}, \quad \text{za } z \in (c, d).$$

3.2 Slučajni vektorji

Trditev 3.3. Naj bo $\vec{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ slučajni vektor in naj bo $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *zvezna* funkcija. Tedaj je $h(\vec{X}) = h(X_1, \dots, X_n)$ *slučajna spremenljivka.*

Trditev 3.4. Naj bo $\vec{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ slučajni vektor z gostoto $f_{\vec{X}}$. Dalje naj bo $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (ali $g : D \to E$ za primerni množici $D, E \subset \mathbb{R}^n$, kjer $\mathbb{P}(\vec{X} \in D) = 1$) *zvezno diferenciabilna bijekcija.* Tedaj ima slučajni vektor $g(\vec{X})$ gostoto

$$f_{g(\vec{X})}(\vec{z}) \;=\; f_{\vec{X}}(g^{-1}(\vec{z})) \cdot |\det Jg^{-1}(\vec{z})|$$

v točkah $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$ (oz. $\vec{z} \in E$).

Za dvorazsežne vektorje, kjer je $\vec{z} = (u, v)$ in $(U, V) = g(X, Y)$ ter posledično $(X, Y) = g^{-1}(U, V)$ se transformacijska formula glasi

$$f_{(U,V)}(u, v) \;=\; f_{(X,Y)}(g^{-1}(u, v)) \cdot |\det Jg^{-1}(u, v)|$$

oziroma

$$f_{(U,V)}(u, v) \;=\; f_{(X,Y)}(x(u, v), y(u, v)) \cdot \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \right|.$$

Upoštevaje $g \circ g^{-1} = \mathrm{id}$ in posledično

$$Jg(g^{-1}(u, v)) \cdot Jg^{-1}(u, v) \;=\; I$$

zgornje prepišemo v

$$f_{(U,V)}(u, v) \;=\; \frac{f_{(X,Y))}(g^{-1}(u, v)}{|\det Jg(g^{-1}(u, v))|} \;=\; \frac{f_{(X,Y)}(x(u, v), y(u, v))}{\left| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \Big|_{(x(u,v),\; y(u,v))} \right|}.$$

Trditev 3.5. Naj za $\vec{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ velja $\vec{X} \sim N(\vec{\mu}, \Sigma)$ in naj bo $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *obrnljiva* matrika. Dalje naj bo $\vec{\nu} \in \mathbb{R}^n$. Tedaj

$$A\vec{x} + \vec{\nu} \sim N(A\vec{\mu} + \vec{\nu}, A\Sigma A^T).$$