

Verjetnost z mero - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar
po predavanjih profesorja Matija Vidmarja

2021/22

Kazalo

1	Merljivost in mera	3
1.1	Merljive množice	3
1.2	Mere	4
1.3	Merljive preslikave in generirane σ -algebre	6

1 Merljivost in mera

1.1 Merljive množice

Definicija 1.1. Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ (t.j. $\mathcal{A} \in 2^{2^\Omega}$). Potem rečemo, da je \mathcal{A} *zaprta* za:

- c^Ω (t.j. za komplement v Ω)

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \quad \forall A : (A \in \Omega \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A});$$

- \cap (t.j. za preseke)

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \quad A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A} \text{ brž ko je } \{A_1, A_2\} \subset \mathcal{A};$$

- \cup (t.j. za unije)

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \quad A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A} \text{ brž ko je } \{A_1, A_2\} \subset \mathcal{A};$$

- \setminus (t.j. za razlike)

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \quad A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A} \text{ brž ko je } \{A_1, A_2\} \subset \mathcal{A};$$

- $\sigma\cap$ (t.j. za števne preseke)

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \text{ za vsako zaporedje } (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ iz } \mathcal{A};$$

- $\sigma\cup$ (t.j. za števne unije)

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \text{ za vsako zaporedje } (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ iz } \mathcal{A}.$$

Definicija 1.2. \mathcal{A} je σ -algebra na Ω

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \quad (\Omega, \mathcal{A}) \text{ je merljiv prostor}$$

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \quad \emptyset \in \mathcal{A} \text{ in } \mathcal{A} \text{ je zaprt za } c^\Omega \text{ in za } \sigma\cup.$$

V primeru, da \mathcal{A} je σ -algebra na Ω :

- A je \mathcal{A} -merljiva $\stackrel{\text{def}}{\iff} A \in \mathcal{A}$;
- \mathcal{B} je pod- σ -algebra $\stackrel{\text{def}}{\iff} \mathcal{B}$ je σ -algebra na Ω in $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

Trditev 1.1. Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ zaprta za \complement^Ω in naj bo $\emptyset \in \mathcal{A}$. Potem je \mathcal{A} σ -algebra na Ω , če je \mathcal{A} zaprta za števne preseke, in v tem primeru je \mathcal{A} zaprta za \cap , \cup in \setminus .

1.2 Mere

Definicija 1.3. Naj bo (Ω, \mathcal{F}) merljiv prostor in $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$. μ je *mera* na (Ω, \mathcal{F}) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ za vsako zaporedje $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iz \mathcal{F} , ki sestoji iz paroma disjunktnih dogodkov.

Lastnosti:

- Mera μ na (Ω, \mathcal{F}) je *končna* $\stackrel{\text{def}}{\iff} \mu(\Omega) < \infty$.
- Mera μ na (Ω, \mathcal{F}) je *verjetnostna*¹ $\stackrel{\text{def}}{\iff} \mu(\Omega) = 1$
- Mera μ na (Ω, \mathcal{F}) je *σ -končna* $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ obstaja zaporedje $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ v \mathcal{F} , da je

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega \quad \text{in} \\ \mu(A_n) < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ je prostor z mero $\stackrel{\text{def}}{\iff} \mu$ je mera na (Ω, \mathcal{F}) . Če je μ mera na (Ω, \mathcal{F}) potem je $\mu(\Omega)$ *masa* mere μ . Če je $A \in \mathcal{F}$, potem je:

- A je μ -zanemarljiv $\stackrel{\text{def}}{\iff} \mu(A) = 0$;

¹Tudi: μ je *verjetnost*.

- A je μ -trivialna $\stackrel{\text{def}}{\iff} A$ ali $\Omega \setminus A$ je μ -zanemarljiva

Če imamo poleg tega še lastnost $P(\omega)$ v $\omega \in A$, potem

- $P(\omega)$ drži μ -skoraj povsod (μ -s.p.) v $\omega \in A \stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$A_{\neg P} := \{\omega \in \Omega \mid \neg P(\omega) \in \mathcal{F} \text{ in } \mu(A_{\neg P}) = 0\};$$

- $P(\omega)$ drži μ -skoraj gotovo (μ -s.g.) $\stackrel{\text{def}}{\iff} P(\omega)$ drži μ -skoraj povsod in μ je verjetnostna.

P drži μ -skoraj povsod na $A \stackrel{\text{def}}{\iff} P(\omega)$ drži μ -skoraj povsod v $\omega \in A$. Podobno za ostale.

Trditev 1.2. Naj bo μ mera na (Ω, \mathcal{F}) . Potem:

- (i) μ je aditivna:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

za vsaki disjunktivni množici $A, B \in \mathcal{F}$.

- (ii) μ je monotona:

$$\mu(A) \leq \mu(B),$$

če je $A \subset B$ in $A, B \in \mathcal{F}$

- (iii) μ je zvezna od spodaj:

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \uparrow - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

za vsako zaporedje $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iz \mathcal{F} , ki je nepadajoče glede na inkluzijo:
 $A_n \subset A_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

- (iv) μ je števno subaditivna:

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

za vsako zaporedje $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iz \mathcal{F} .

(v) Naj bo μ končna:

$$\mu(\Omega \setminus A) = \mu(\Omega) - \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Naprej, μ je zvezna od zgoraj:

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \downarrow\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

za vsako zaporedje $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iz \mathcal{F} , ki je nenaraščajoča glede na inkluzijo:
 $A_n \supset A_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(vi) Za vsak $A \in \mathcal{F}$ je

$$\mathcal{F}|_A := \{B \cap A \mid B \in \mathcal{F}\}$$

σ -algebra na A in $\mu_A := \mu|_{\mathcal{F}|_A}$ je mera na $(A, \mathcal{F}|_A)$.

Definicija 1.4. $\mu_A := \mu|_{\mathcal{F}|_A}$ rečemo *mera μ zožana na A oz. zožitev μ na A* .

1.3 Merljive preslikave in generirane σ -algebre

Definicija 1.5. Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$:

$$\sigma_\Omega(\mathcal{A}) := \bigcap \{\mathcal{F} \in 2^{2^\Omega} \mid \mathcal{F} \text{ } \sigma\text{-algebra na } \Omega \text{ in } \mathcal{F} \supset \mathcal{A}\},$$

rečemo σ -algebra z \mathcal{A} na Ω . Če sta \mathcal{B}_1 in \mathcal{B}_2 obe σ -algebri na Ω , potem definiramo

$$\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2 := \sigma_\Omega(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)$$

in ji rečemo skupek \mathcal{B}_1 in \mathcal{B}_2 . Bolj splošno, če imamo družino σ -algebr $(\mathcal{B}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ na Ω , potem postavimo

$$\bigvee_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{B}_\lambda := \sigma_\Omega\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{B}_\lambda\right).$$

Definicija 1.6. Naj bo $f : \Omega \rightarrow \Omega'$. Če je dana σ -algebra \mathcal{F}' na Ω' , potem definiramo

$$\sigma^{\mathcal{F}'}(f) := \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{F}'\}.$$

Začetno strukturo f glede na \mathcal{F}' (tudi, σ -algebra generirana s f glede na \mathcal{F}'). Če je dana σ -algebra \mathcal{F} na Ω , potem definiramo

$$\sigma_{\mathcal{F}}^{\Omega'}(f) := \{A' \in 2^{\Omega'} \mid f^{-1}(A') \in \mathcal{F}\}$$

končno strukturo f na Ω' glede na \mathcal{F} . Če sta dani σ -algebri \mathcal{F} na Ω in σ -algebra \mathcal{F}' na Ω , potem rečemo: f je \mathcal{F}/\mathcal{F}' -merljiva $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$f^{-1}(A') \in \mathcal{F}, \quad \forall A' \in \mathcal{F}.$$

Definicija 1.7. Če je \mathcal{F} σ -algebra na Ω in je \mathcal{F}' σ -algebra na Ω' , potem označimo

$$\mathcal{F}/\mathcal{F}' := \{f \in \Omega'^{\Omega} \mid f \text{ je } \mathcal{F}/\mathcal{F}'\text{-merljiva}\}.$$

Definicija 1.8. Za $A \subset \Omega$ definiramo $\mathbb{1}_{A\Omega} : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$,

$$\mathbb{1}_{A\Omega}(x) := \begin{cases} 1; & x \in A, \\ 0; & x \notin A, \end{cases}, \quad x \in \Omega,$$

ki ji rečemo *indikatorska funkcija A na ambientnem prostoru Ω* .²

Trditev 1.3. Za σ -algebri $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$, kjer $f \in \mathcal{F}/\mathcal{G}$ in $g \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$ je

$$g \circ f \in \mathcal{F}/\mathcal{H}.$$

Trditev 1.4. Naj bo $f : \Omega \rightarrow \Omega'$:

- (i) Za σ -algebro \mathcal{F}' na Ω' je $\sigma^{\mathcal{F}'}(f)$ σ -algebra na Ω ; ona je najmanjša (glede na inkluzijo) σ -algebra \mathcal{G} na Ω , da je $f \in \mathcal{G}/\mathcal{F}'$.
- (ii) Za σ -algebro \mathcal{F} na Ω je $\sigma_{\mathcal{F}}^{\Omega'}(f)$ σ -algebra na Ω' ; ona je največja (glede na inkluzijo) σ -algebra \mathcal{G}' na Ω , da je $f \in \mathcal{F}/\mathcal{G}'$.

²Ponavadi namesto $\mathbb{1}_{A\Omega}$ pišemo le $\mathbb{1}_A$.

(iii) Za σ -algebro \mathcal{F} na Ω in σ -algebro \mathcal{F}' na Ω' je

$$f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}' \iff \sigma^{\mathcal{F}'}(f) \subset \mathcal{F} \iff \mathcal{F}' \subset \sigma_{\mathcal{F}}^{\Omega'}(f).$$

(iv) Naj bo $\mathcal{A}' \sigma 2^{\Omega'}$ ter \mathcal{F} σ -algebra na Ω . Potem je

$$f \in \mathcal{F}/\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}') \iff (f^{-1}(A') \in \mathcal{F}, \forall A' \in \mathcal{A}').$$

Velja tudi

$$\sigma^{\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}')} (f) = \sigma_{\Omega}(\{f^{-1}(A') \mid A' \in \mathcal{A}'\}).$$

Definicija 1.9. Sled \mathcal{A} na A definiramo kot

$$\mathcal{A}|_A := \{B \cap A \mid B \in \mathcal{A}\}.^3$$

Trditev 1.5 (Sledi komutirajo v generirani σ -algebri). Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ in $A \subset \Omega$. Potem je

$$\sigma_A(\mathcal{A}|_A) = \sigma_{\Omega}(\mathcal{A})|_A.$$

³Zapis je isti kot za zožitve, vendar ne pomeni isto.