Verjetnost z mero - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar
po predavanjih profesorja Matija Vidmarja

2021/22

Kazalo

1 Merljivost in mera

1.1 Merljive množice

Definicija 1.1. Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ (t.j. $\mathcal{A} \in 2^{2^{\Omega}}$). Potem rečemo, da je $\mathcal{A}$ *zaprta* za:

- c^{Ω} (t.j. za komplement v Ω)
$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \quad \forall A : (A \in \Omega \;\Rightarrow\; \Omega \setminus A \in \mathcal{A});$$
- $\cap$ (t.j. za preseke)
$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \quad A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A} \;\text{ brž ko je } \{A_1, A_2\} \subset A;$$
- $\cup$ (t.j. za unije)
$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \quad A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A} \;\text{ brž ko je } \{A_1, A_2\} \subset A;$$
- $\setminus$ (t.j. za razlike)
$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \quad A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A} \;\text{ brž ko je } \{A_1, A_2\} \subset A;$$
- $\sigma\cap$ (t.j. za števne preseke)
$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \;\text{ za vsako zaporedje } (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ iz } \mathcal{A};$$
- $\sigma\cup$ (t.j. za števne unije)
$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \;\text{ za vsako zaporedje } (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ iz } \mathcal{A}.$$

Definicija 1.2. $\mathcal{A}$ je *σ-algebra* na Ω
$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \quad (\Omega, \mathcal{A}) \;\text{ je merljiv prostor}$$
$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \quad \emptyset \in \mathcal{A} \text{ in } \mathcal{A} \text{ je zaprt za } \mathsf{c}^{\Omega} \text{ in za } \sigma\cup .$$

V primeru, da $\mathcal{A}$ je σ-algebra na Ω:

- A je $\mathcal{A}$-merljiva $\overset{\text{def}}{\iff}$ $A \in \mathcal{A}$;
- $\mathcal{B}$ je pod-σ-algebra $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mathcal{B}$ je σ-algebra na Ω in $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

Trditev 1.1. Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ zaprta za c^Ω in naj bo $\emptyset \in \mathcal{A}$. Potem je $\mathcal{A}$ σ-algebra na Ω, če je $\mathcal{A}$ zaprta za števne preseke, in v tem primeru je $\mathcal{A}$ zaprta za $\cap$, $\cup$ in $\setminus$.

1.2 Mere

Definicija 1.3. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F})$ merljiv prostor in $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$. μ je *mera* na $(\Omega, \mathcal{F})$ $\overset{\text{def}}{\iff}$

- $\mu(\emptyset) \;=\; 0$;
- $\mu\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\right) \;=\; \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ za vsako zaporedje $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{F}$, ki sestoji iz paroma disjunktnih dogodkov.

Lastnosti:

- Mera μ na $(\Omega, \mathcal{F})$ je *končna* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mu(\Omega) < \infty$.
- Mera μ na $(\Omega, \mathcal{F})$ je *verjetnostna*[1] $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mu(\Omega) = 1$
- Mera μ na $(\Omega, \mathcal{F})$ je *σ-končna* $\overset{\text{def}}{\iff}$ obstaja zaporedje $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v $\mathcal{F}$, da je

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \;=\; \Omega \quad \text{in}$$
$$\mu(A_n) \;<\; \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ je prostor z mero $\overset{\text{def}}{\iff}$ μ je mera na $(\Omega, \mathcal{F})$. Če je μ mera na $(\Omega, \mathcal{F})$ potem je $\mu(\Omega)$ *masa* mere μ. Če je $A \in \mathcal{F}$, potem je:

- A je *μ-zanemarljiv* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mu(A) = 0$;

[1] Tudi: μ je *verjetnost*.

- A je *μ-trivialna* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ A ali $\Omega \setminus A$ je μ-zanemarljiva

Če imamo poleg tega še lastnost $P(\omega)$ v $\omega \in A$, potem

- $P(\omega)$ drži *μ-skoraj povsod* (μ-s.p.) v $\omega \in A$ $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$A_{\neg P} \ := \ \{\omega \in \Omega \mid \neg P(\omega) \in \mathcal{F} \text{ in } \mu(A_{\neg P}) = 0\};$$

- $P(\omega)$ drži *μ-skoraj gotovo* (μ-s.g.) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $P(\omega)$ drži μ-skoraj povsod in μ je verjetnostna.

P drži μ-skoraj povsod na A $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $P(\omega)$ drži μ-skoraj povsod v $\omega \in A$. Podobno za ostale.

Trditev 1.2. Naj bo μ mera na $(\Omega, \mathcal{F})$. Potem:

(i) μ je aditivna:
$$\mu(A \cup B) \ = \ \mu(A) + \mu(B)$$
za vsaki disjunktivni množici $A, B \in \mathcal{F}$.

(ii) μ je monotona:
$$\mu(A) \ \leq \ \mu(B),$$
če je $A \subset B$ in $A, B \in \mathcal{F}$

(iii) μ je zvezna od spodaj:
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \ = \ \uparrow\text{-}\lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$
za vsako zaporedje $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{F}$, ki je nepadajoče glede na inkluzijo: $A_n \subset A_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

(iv) μ je števno subaditivna:
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \ \leq \ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$
za vsako zaporedje $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{F}$.

(v) Naj bo μ končna:

$$\mu(\Omega \setminus A) \ = \ \mu(\Omega) - \mu(A) \ \forall A \in \mathcal{F}.$$

Naprej, μ je zvezna od zgoraj:

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \ = \ \downarrow\text{-}\lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

za vsako zaporedje $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{F}$, ki je nenaraščajoča glede na inkluzijo: $A_n \supset A_{n+1} \ \forall n \in N$.

(vi) Za vsak $A \in \mathcal{F}$ je

$$\mathcal{F}\big|_A \ := \ \{B \cap A \mid B \in \mathcal{F}\}$$

σ-algebra na A in $\mu_A := \mu\big|_{\mathcal{F}|_A}$ je mera na $(A, \mathcal{F}\big|_A)$.

Definicija 1.4. $\mu_A := \mu\big|_{\mathcal{F}|_A}$ rečemo *mera* μ *zožana na* A oz. *zožitev* μ *na* A.

1.3 Merljive preslikave in generirane σ-algebre

Definicija 1.5. Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$:

$$\sigma_\Omega(\mathcal{A}) \ := \ \bigcap\{\mathcal{F} \in 2^{2^\Omega} \mid \mathcal{F} \ \sigma\text{-algebra na } \Omega \text{ in } \mathcal{F} \supset \mathcal{A}\},$$

rečemo σ-algebra z A na Ω. Če sta $\mathcal{B}_1$ in $\mathcal{B}_2$ obe σ-algebri na Ω, potem definiramo

$$\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2 \ := \ \sigma_\Omega(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)$$

in ji rečemo skupek $\mathcal{B}_1$ in $\mathcal{B}_2$. Bolj splošno, če imamo družino σ-algebr $(B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ na Ω, potem postavimo

$$\bigvee_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{B}_\lambda \ := \ \sigma_\Omega\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{B}_\lambda\right).$$

Definicija 1.6. Naj bo $f : \Omega \to \Omega'$. Če je dana σ-algebra $\mathcal{F}'$ na Ω', potem definiramo

$$\sigma^{\mathcal{F}'}(f) \;:=\; \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{F}'\}.$$

Začetno strukturo f glede na $\mathcal{F}'$ (tudi, σ-algebra generirana s f glede na $\mathcal{F}'$). Če je dana σ-algebra $\mathcal{F}$ na Ω, potem definiramo

$$\sigma_{\mathcal{F}}^{\Omega'}(f) \;:=\; \{A' \in 2^{\Omega'} \mid f^{-1}(A') \in \mathcal{F}\}$$

končno strukturo f na Ω' glede na $\mathcal{F}$. Če sta dani σ-algebri $\mathcal{F}$ na Ω in σ-algebra $\mathcal{F}'$ na Ω, potem rečemo: f je $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$-merljiva $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$f^{-1}(A') \in \mathcal{F}, \quad \forall A' \in \mathcal{F}.$$

Definicija 1.7. Če je $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω in je $\mathcal{F}'$ σ-algebra na Ω', potem označimo

$$\mathcal{F}/\mathcal{F}' \;:=\; \{f \in \Omega'^{\Omega} \mid f \text{ je } \mathcal{F}/\mathcal{F}'\text{-merljiva}\}.$$

Definicija 1.8. Za $A \subset \Omega$ definiramo $\mathbb{1}_{A_\Omega} : \Omega \to \{0,1\}$,

$$\mathbb{1}_{A_\Omega}(x) \;:=\; \begin{cases} 1\,; & x \in A, \\ 0\,; & x \notin A, \end{cases}, \quad x \in \Omega,$$

ki ji rečemo *indikatorska funkcija A na ambientnem prostoru* Ω.[2]

Trditev 1.3. Za σ-algebre $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$, kjer $f \in \mathcal{F}/\mathcal{G}$ in $g \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$ je

$$g \circ f \;\in\; \mathcal{F}/\mathcal{H}.$$

Trditev 1.4. Naj bo $f : \Omega \to \Omega'$:

(i) Za σ-algebro $\mathcal{F}'$ na Ω' je $\sigma^{\mathcal{F}'}(f)$ σ-algebra na Ω; ona je najmanjša (glede na inkluzijo) σ-algebra $\mathcal{G}$ na Ω, da je $f \in \mathcal{G}/\mathcal{F}'$.

(ii) Za σ-algebro $\mathcal{F}$ na Ω je $\sigma_F^{\Omega'}(f)$ σ-algebra na Ω'; ona je največja (glede na inkluzijo) σ-algebra $\mathcal{G}'$ na Ω, da je $f \in \mathcal{F}/\mathcal{G}$.

[2] Ponavadi namesto $\mathbb{1}_{A_\Omega}$ pišemo le $\mathbb{1}_A$.

(iii) Za σ-algebro $\mathcal{F}$ na Ω in σ-algebro $\mathcal{F}'$ na Ω' je

$$f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}' \iff \sigma^{\mathcal{F}'}(f) \subset \mathcal{F} \iff \mathcal{F}' \subset \sigma_{\mathcal{F}}^{\Omega'}(f).$$

(iv) Naj bo $\mathcal{A}'\sigma 2^{\Omega'}$ ter $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω. Potem je

$$f \in \mathcal{F}/\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}') \iff (f^{-1}(A') \in \mathcal{F},\ \forall A' \in \mathcal{A}').$$

Velja tudi

$$\sigma^{\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}')}(f) \; = \; \sigma_{\Omega}(\{f^{-1}(A') \mid A' \in \mathcal{A}'\}).$$

Definicija 1.9. *Sled* $\mathcal{A}$ *na* A definiramo kot

$$\mathcal{A}\big|_A \; := \; \{B \cap A \mid B \in \mathcal{A}\}.^3$$

Trditev 1.5 (Sledi komutirajo v generirani σ-algebri)**.** Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ in $A \subset \Omega$. Potem je

$$\sigma_A(\mathcal{A}\big|_A) \; = \; \sigma_{\Omega}(\mathcal{A})\big|_A.$$

Trditev 1.6. Naj bo $f : \Omega \to \Omega'$ in naj bo $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω ter $\mathcal{F}'$ σ-algebra na Ω'.

(i) Če je $A' \subset \Omega'$ in $f : \Omega \to A'$, potem je

$$f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}' \iff f \in \mathcal{F}/(\mathcal{F}'\big|_{A'}).$$

(ii) Če je $A \in \Omega$ in $f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$, potem

$$f\big|_A \in (\mathcal{F}\big|_A)/\mathcal{F}'.$$

(iii) Če je $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ zaporedje v $\mathcal{F}$ in $\Omega = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ in je $f\big|_{A_i} \in (\mathcal{F}\big|_{A_i})/\mathcal{F}'$ $\forall i \in \mathbb{N}$, potem je

$$f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$$

.

[3] Zapis je isti kot za zožitev, vendar ne pomeni isto.

1.4 Borelove množice na razširjeni realni osi $[-\infty,\infty]$ in Borelova merljivost numeričnih funkcij

Definicija 1.10. Definirajmo *razširjeno realno os*:

$$\begin{aligned}[-\infty,\infty] &:= \mathbb{R}\cup\{\infty\}\cup\{-\infty\}\\ [-\infty,a] &:= \{-\infty\}\cup(-\infty,a] \quad \text{za } a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}\end{aligned}$$

Relacijo $\leq$ na $\mathbb{R}$ razširimo na $[-\infty,\infty]$ kot sledi:

$$-\infty\leq x\leq\infty \quad \forall x\in[-\infty,\infty].$$

Temu ustrezno imamo "$(<) \;:=\; (\leq)\setminus(=)$", itd.

Definicija 1.11. *Borelovo σ-algebro* na $[-\infty,\infty]$ definiramo kot

$$\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]} \;:=\; \sigma_{[-\infty,\infty]}(\{[-\infty,a]\mid a\in\mathbb{R}\}).$$

Za $A\subset[-\infty,\infty]$ je

$$\mathcal{B}_A \;:=\; \mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}\big|_A$$

Borelova σ-algebra na A. Elementom Borelovih σ-algebr pravimo *Borelove množice.*

Definicija 1.12. Funkcija f je *numerična*, če je $\mathcal{Z}_f\in[-\infty,\infty]$.

Definicija 1.13. Če je funkcija f numerična:

- $\sigma(f) \;:=\; \sigma^{\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}}(f)$;
- če je $\mathcal{F}$ σ-algebra na domeni f, je f $\mathcal{F}$-merljiva $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ f je $\mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$-merljiva;
- če je $g:\mathcal{D}_f\to[-\infty,\infty]$, je

  $$\begin{aligned}g\wedge f &:= \min\{g,f\}^4\\ g\vee f &:= \max\{g,f\}.\end{aligned}$$

  Definiramo *pozitivni* in *negativni del* f:

  $$\begin{aligned}f^+ &:= f\vee 0\\ f^- &:= (-f)\vee 0\end{aligned}$$

Opomba.

- $f \;=\; f^+ - f^-$
- $|f| \;=\; f^+ + f^-$

Definicija 1.14. Dogovorimo se

$$\begin{aligned} 0\cdot(\pm\infty) \;&:=\; 0 \;=:\; (\pm\infty)\cdot 0 \\ \infty + (-\infty) \;&:=\; 0 \;=:\; (-\infty)+\infty. \end{aligned}$$

Preostanek aritmetike na $[-\infty,\infty]$ definiramo na naraven način, npr.

$$\begin{aligned} a\cdot\infty \;&:=\; \operatorname{sgn}(a)\cdot\infty \quad \text{za } a\in[-\infty,\infty]\setminus\{0\} \\ a+\infty \;&:=\; \infty \quad \text{za } a\in(-\infty,\infty] \\ \infty-\infty \;&:=\; \infty+(-\infty) \;=\; 0 \\ & \mathit{itd.} \end{aligned}$$

Trditev 1.7. Če je $A\subset[-\infty,\infty]$ in je $f: A\to[-\infty,\infty]$ zvezna, potem je $f\in\mathcal{B}_A/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$. Če je $\{f,g\}\subset\mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$ za σ-algebro $\mathcal{F}$, potem je

$$\{f+g, f\cdot g\}\subset\mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$$

in

$$\{\{f\le g\},\{f=g\},\{f<g\}\}\subset\mathcal{F}$$

.

Trditev 1.8. Naj bo $\mathcal{F}$ σ-algebra in $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje v $\mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$. Potem je

$$\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n, \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n, \limsup_{n\to\infty} f_n, \liminf_{n\to\infty} f_n\} \;\subset\; \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}.$$

Če je $f_n\ge 0\ \forall n\in\mathbb{N}$, potem je

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \;\in\; \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[0,\infty]}.$$

Definicija 1.15. Naj bo $\mathcal{F}$ σ-algebra. Za $\{f, g\} \subset \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$ je

$$\{f \vee g, f \wedge g, f^+, f^-, |f|\} \ \subset \ \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}.$$

Za zaporedje $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v $\mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$ je

$$\{\{f_n \,\text{konverg., ko}\, n \to \infty\}, \{f_n \,\text{konverg. v}\, \mathbb{R}, \,\text{ko}\, n \to \infty\}, \{\lim_{n\to\infty} f_n = f_\infty\}\} \ \subset \ \mathcal{F}.$$

1.5 Argumenti monotonega razreda

Definicija 1.16. Naj bo $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω in $f : \Omega \to [0, \infty)$:

$$f \text{ je } \mathcal{F}\text{-enostavna} \ \overset{\text{def}}{\iff} \ f \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[0,\infty)} \text{ in } \mathcal{Z}_f \text{ je končna.}$$

Trditev 1.9. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F})$ merljiv prostor in $f : \Omega \to [0, \infty]$. Potem je f $\mathcal{F}$-enostavna $\iff$

$$f \ = \ \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{A_i},$$

za neke c_i, $i \in [n]$, iz $[0, \infty)$, neke A_i, $i \in [n]$, iz $\mathcal{F}$ in nek $n \in \mathbb{N}$. Naprej; če je $f \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[0,\infty]}$, potem je

$$\big((2^{-n}\lfloor 2^n f\rfloor) \wedge n\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

zaporedje $\mathcal{F}$-enostavnih funkcij, ki ne padajo k f (celo enakomerno na vsaki množici na kateri je f omejena).

Posledica (Izrek o monotonem razredu)**.** Naj bo $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω in $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[0,\infty]}$. Če je

$$\mathbb{1}_A \in \mathcal{M} \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

in je $\mathcal{M}$ zaprta za nenegativne linearne kombinacije (je stožec)[5] in je $\mathcal{M}$

[5]Pomeni:

$$\{m_1, m_2\} \subset \mathcal{M}, \ \{c_1, c_2\} \subset (0, \infty) \ \Rightarrow \ c_1 m_1 + c_2 m_2 \in \mathcal{M}$$

zaprta za nepadajoče limite[6] potem je

$$\mathcal{M} \ = \ \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[0,\infty]}.$$

Trditev 1.10 (Doob-Dynkinova faktorizacijska lema)**.** Naj bo $X : \Omega \to A$, $(A, \mathcal{A})$ merljiv prostor. Potem je

$$Y \in \sigma^{\mathcal{A}}(X)/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]} \iff \exists h \in \mathcal{A}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}, \text{ da je } Y = h \circ X = h(X).$$

Definicija 1.17. Naj bo $\mathcal{D} \subset 2^{\Omega}$. D je Dynkinov sistem (tudi λ-sistem) na $\Omega \overset{\text{def}}{\iff}$

- $\Omega \in \mathcal{D}$,
- $B \setminus A \in \mathcal{D}$ brž ko je $\mathcal{D} \ni A \subset B \in \mathcal{D}$,
- če je $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ je nepadajoče zaporedje v $\mathcal{D}$ je tudi $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$.

$\mathcal{D}$ je π-sistem $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mathcal{D}$ je zaprt za $\cap$.

Trditev 1.11. Naj bo $\mathcal{D} \subset 2^{\Omega}$. Potem je $\mathcal{D}$ Dynkinov sistem $\iff$

- $\Omega \in \mathcal{D}$,
- $\mathcal{D}$ zaprta za c^{Ω},
- $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ zaporedje iz $\mathcal{D}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$ iz $\mathbb{N} \implies \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{D}$.

$\mathcal{D}$ je σ-algebra na $\Omega \iff \mathcal{D}$ je λ-sistem na Ω in π-sistem.

Definicija 1.18. Za $\mathcal{L} \subset 2^{\Omega}$ postavimo

$$\lambda_{\Omega}(\mathcal{L}) \ := \ \bigcap \{\mathcal{D} \in 2^{2^{\Omega}} \mid \mathcal{D} \text{ je } \lambda\text{-sistem in } \mathcal{D} \supset \mathcal{L}\}.$$

[6] Pomeni: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nepadajoče zaporedje iz $\mathcal{M}$, potem je

$$\lim_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{M}$$

Trditev 1.12. Naj bo $\mathcal{L}$ π-sistem in $\mathcal{L} \subset 2^{\Omega}$. Potem je

$$\lambda_{\Omega}(\mathcal{L}) = \sigma_{\Omega}(\mathcal{L}).$$

Posledica (π-λ izrek/Dynkinova lema)**.** Naj bo $\mathcal{L}$ π-sistem in $\mathcal{D}$ λ-sistem na Ω, $\mathcal{L} \subset \mathcal{D}$. Potem je

$$\sigma_{\Omega}(\mathcal{L}) \subset \mathcal{D}.$$

Trditev 1.13. Naj bosta μ, ν meri na merljivem prostoru $(E, \mathcal{E})$, $\mathcal{L} \subset \mathcal{E}$ π-sistem, $\sigma_E(\mathcal{L}) = \mathcal{E}$. Predpostavimo, da je $\mu|_{\mathcal{L}} = \nu|_{\mathcal{L}}$ in da obstaja zaporedje $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{L}$, ki je nepadajoče ali sestoji iz paroma disjunktnih množic, in za katerega je

- $\mu(L_n) = \nu(L_n) < \infty$,
- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n = E$.

Potem je

$$\mu = \nu$$

.

1.6 Lebesque-Stieltjesova mera

Izrek 1.1 (Lebesque-Stieltjesov izrek)**.** Naj bo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nepadajoča in zvezna z desne (*ca'd*). Potem obstaja natanko ena mera μ na $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, da je

$$\mu([a, b]) = F(b) - F(a) \quad \forall a \leq b \in \mathbb{R}.$$

Definicija 1.19. μ iz prejšnjega izreka rečemo *mera prirejena F v Lebesque-Stieltjesovem smislu* in jo označimo z dF. V posebne primernu primeru, ko je $F = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ ji rečemo *Lebesqueva mera* in jo označimo

$$\mathscr{L} := d(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}).$$

Trditev 1.14. Naj bo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ca'd*, nepadajoča. Potem je dF:

- σ-končna $\iff$ je F omejena:

$$dF(\mathbb{R}) \;=\; \lim_{n\to\infty} dF((-n, n])$$

- verjetnostna $\iff$ $\lim_{\infty} F - \lim_{-\infty} F = 1$.

Za $x \in \mathbb{R}$ je

$$dF(\{x\}) \;=\; F(x) - F(x^-),$$

$\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(x - \frac{1}{n}, x]$.

2 Integracija na merljivih prostorih

2.1 Lebesgueov integral

Definicija 2.1. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero $f \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$.

(a) Za f, ki je $\mathcal{F}$-enostavna postavimo

$$\int f\,d\mu \;:=\; \sum_{a\in\mathcal{Z}_f} d\mu(\{f=a\}) \;=\; \sum_{a\in\mathcal{Z}_f} d\mu(f^{-1}(\{a\})).$$

(b) Za $f \geq 0$, ki ni $\mathcal{F}$-enostavna postavimo

$$\int f\,d\mu \;:=\; \sup\{\int g\,d\mu \mid g \leq f,\; g \text{ } \mathcal{F}\text{-enostavna}\}.$$

(c) Za $\neg(f \geq 0)$, ki ni $\mathcal{F}$-enostavna postavimo

$$\int f\,d\mu \;:=\; \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu.$$

Dogovor.

$$\mu[f] \;=\; \mu^x[f(x)] \;:=\; \int f(x)\,\mu(dx) \;:=\; \int f\,d\mu$$

Če je še $A \in \mathcal{F}$, potem označimo še

$$\mu[f;A] \;:=\; \mu^x[f(x); x\in A] \;:=\; \int_A f(x)\,\mu(dx) \;:=\; \int_A f\,d\mu \;:=\; \int f\mathbb{1}_A\,d\mu.$$

Integral f proti μ je *dobro definiran* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\int f^+\,d\mu \;\wedge \int f^-\,d\mu \;<\; \infty;$$

f je μ-integrabilna $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\int f^+\,d\mu \;\vee \int f^-\,d\mu \;<\; \infty.$$

Definicija 2.2. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero:

$$\mathcal{L}^1(\mu) \ := \ \{f \in \mathcal{F}/\mathcal{B} \mid f \text{ je } \mu\text{-integrabilna}\}.$$

Za $g : \Omega \to \mathbb{C}$ z $\{\Re(g), \Im(g)\} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ je

$$\int g\, d\mu \ := \ \int \Re(g)\, d\mu + i \int \Im(g)\, d\mu.$$

Izrek 2.1. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero. Integral ima naslednje lastnosti:

(i) Aditivnost:
$$\int f + g\, d\mu \ = \ \int f\, d\mu + \int g\, d\mu,$$
za $\{f, g\} \subset \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$ z $\mu[f^-] \vee \mu[g^-] < \infty$

(ii) Integral indikatorja:
$$\int \mathbb{1}_A\, d\mu \ = \ \mu(A), \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$
V posebnem primeru je $\mu[0] = 0$ in torej $\mu[f^+] - \mu[f^-] = \mu[f]$ $\forall f \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$.

(iii) Integrali, ki so 0 in so končni:
za $f \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[0,\infty]}$:
- $\mu[f] = 0 \iff f = 0$ s.p.-μ
- $\mu[f] < \infty \implies f < \infty$ s.p.-μ.

(iv) Trikotniška neenakost:
$$\left| \int f\, d\mu \right| \leq \int |f|\, d\mu, \quad \forall f \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}.$$

(v) Integral "ne vidi" množic z mero 0:
če je $\{f, g\} \subset \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$ in je $f = g$ s.p.-μ, potem je $\mu[f] = \mu[g]$ in je $\mu[f]$ d.d. $\iff$ $\mu[g]$ je d.d.

(vi) Monotonost: če je $\{f, g\} \subset \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$, $g \leq f$ in $\mu[g^-] < \infty$, potem je
$$\int g\, d\mu \ \leq \ \int f\, d\mu.$$

(vii) Homogenost:

$$\int cf\, d\mu \;=\; c\int f\, d\mu$$

za vse $f \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$ za katere je $\mu[cf^-] \wedge \mu[cf^+] < \infty$, za $\forall c \in [-\infty,\infty]$.

Vsi integrali v (i),(ii),(iii),(vi) so d.d. Enako velja za (vii), razen, ko je $c = 0$ in $\mu[f^+] = \mu[f^-] = \infty$.

Trditev 2.1. Naj bosta $a \leq b$ realni števili in $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Če je f zvezna, potem je $\mathscr{L}$-integrabilna in

$$\int_{[a,b]} f\, d\mathscr{L} \;=\; \int_a^b f(x)\, dx.$$

2.2 Konvergenčni izreki s posledicami

Izrek 2.2. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero in $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje iz $\mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$.

(i) Naj bo $g \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[0,\infty]}$ z $\mu[g] < \infty$ in $f_n^- \leq g$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Potem velja:

(a) Polzveznost od spodaj (Fatou):

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n\, d\mu \;\leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu$$

(b) Monotona konvergenca (Lévy):

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n\, d\mu \;= \uparrow\text{-} \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

(ii) Naj bo $g \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[0,\infty]}$ μ-integrabilna z $|f_n| \leq g$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Potem velja dominirana konvergenca (Lebesgue):

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - \lim_{m\to\infty} f_m|\, d\mu \;=\; 0$$

in v posebnem je

$$lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu \;=\; \int \lim_{n\to\infty} f_n\, d\mu,$$

če seveda $\exists \lim_{m\to\infty} f_m$ (povsod).

Posledica. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero in $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje iz $\mathcal{F}/\mathcal{B}_{[0,\infty]}$. Potem je

$$\int \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \, d\mu \;=\; \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \, d\mu,$$

kjer so integrali d.d.

Posledica. Naj bo $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje mer na merljivem prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$. Potem je $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n$ mera na $(\Omega, \mathcal{F})$:

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n\right)(A) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(A), \quad A \in \mathcal{F}.$$

Poleg tega je za $\forall f \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$:

$$\int f \, d(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n) \text{ je d.d.} \iff \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \int f^+ \, d\mu_n\right) \wedge \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \int f^- \, d\mu_n\right) < \infty$$

in tedaj je

$$\int f \, d(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f \, d\mu_n.$$

Definicija 2.3. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ porostor z mero, $(\Omega', \mathcal{F}')$ merljiv prostor, $f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$. Potem definiramo

$$f *_{\mathcal{F}'} \mu \quad \text{oz.} \quad \mu \circ_{\mathcal{F}'} f^{-1} \quad \text{oz.} \quad \mu_{f_{\mathcal{F}'}}$$

kot preslikavo $f *_{\mathcal{F}'} \mu : \mathcal{F}' \to [0, \infty]$, dano s predpisom

$$(f *_{\mathcal{F}'} \mu)(A') \;:=\; \mu(f^{-1}(A')), \quad A' \in \mathcal{F}'.$$

To preslikavo imenujemo *potisk mere μ naprej pod f glede na $\mathcal{F}'$*. Če je μ verjetnostna, rečemo temu *porazdelitev*.

Posledica (Izrek o sliki mer)**.** Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero, $(\Omega', \mathcal{F}')$ merljiv prostor, $f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$. Potem je $f * \mu$ mera na $\mathcal{F}'$, verjetnostna, če je μ verjetnostna. Če je $g \in \mathcal{F}'/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$, je

$$\int g \, d(f * \mu) \;=\; \int g \circ f \, d\mu,$$

pri čemer je integral na levi d.d. $\iff$ je to res za integral na desni.

Posledica (Odvajanje pod integralskim znakom)**.** Naj bo $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ prostor z mero, $\mathcal{O}$ odprt v $\mathbb{R}$. $F : \mathcal{X} \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ in naj velja:

- $\forall t \in \mathcal{O}$ je $\mathcal{F}(\cdot, t) \in \mathcal{L}^1(\mu)$;
- $\forall x \in \mathcal{X}$ je $\mathcal{F}(x, \cdot)$ odvedljiva.

Naj naprej $\exists g \in \Sigma/\mathcal{B}_{[0,\infty]}$ z $\mu[g] < \infty$ tako, da je

$$\left|\frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\right| \;\leq\; g(x), \quad \forall (x,t) \in \mathcal{X} \times \mathcal{O}.$$

Potem velja:

(a) $\forall t \in \mathcal{O}$ je $\big(\mathcal{X} \ni x \mapsto \frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\big) \in \mathcal{L}^1(\mu)$;

(b) $\big(\mathcal{O} \ni t \mapsto \int F(x,t)\,\mu(dx)\big)$ je odvedljiva;

(c) $t \in \mathcal{O}$:
$$\frac{d}{dt}\int F(x,t)\,\mu(dx) \;=\; \int \frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\,\mu(dx).$$

3 Rezultati, ki se tičejo menjave vrsrnega reda integracije

Definicija 3.1. Naj bosta $(\Omega, \mathcal{F})$ in $(\Omega', \mathcal{F}')$ merljiva prostora. Potem definiramo
$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}' \;:=\; \sigma_{\Omega\times\Omega'}\left(\{A \times A' \mid (A, A') \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}'\}\right),$$
in ji rečemo *produktna* σ*-algebra* $\mathcal{F}$ *in* $\mathcal{F}'$.

Trditev 3.1. Če je $A \subset \mathbb{R}^2$ in $f : A \to [-\infty, \infty]$ zvezna, potem je

$$f \in \mathcal{B}_A/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}.$$

Trditev 3.2. Naj bosta $(\Omega, \mathcal{F})$ in $(\Omega', \mathcal{F}')$ merljiva prostora. Potem je $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'$ najmanjša (glede na inkluzijo) σ-algebra na $\Omega \times \Omega'$ glede na katero sta merljivi kanonični projekciji, tj. $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'$ je najmanjša σ-algebra $\mathcal{G}$ na $\Omega \times \Omega'$, da je:

- $(\Omega \times \Omega' \ni (\omega, \omega') \mapsto \omega) \in \mathcal{G}/\mathcal{F}$;
- $(\Omega \times \Omega' \ni (\omega, \omega') \mapsto \omega') \in \mathcal{G}/\mathcal{F}'$.

Naprej, če je $f \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$, potem je $f(\omega, \cdot) \in \mathcal{F}'/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$, $\forall \omega \in \Omega$ in $f(\cdot, \omega') \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$, $\forall \omega' \in \Omega'$. Obratno, naj bo $(G, \mathcal{G})$ merljiv prostor; potem je

$$(f, f') \in \mathcal{G}/\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}' \iff f \in \mathcal{G}/\mathcal{F} \text{ in } f' \in \mathcal{G}/\mathcal{F}'.$$

Izrek 3.1. Naj bosta $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ in $(\Omega', \mathcal{F}', \mu')$ prostora z mero, μ in μ' σ-končni.

(i) Obstaja natanko ena mera ν na $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'$, ki jo označimo $\mu \times \mu'$, za katero velja

$$\nu(A \times A') = \mu(A)\mu'(A'), \quad \forall (A, A') \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}'.$$

(ii) Naj bo $f \in (\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}')/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$ in naj velja

(a) $f \geq 0$ *(Tonelli)* ali

(b) $\int |f| \, d(\mu \times \mu') < \infty$ *(Fubini)* ali

(c) $\iint f^-(\omega, \omega') \, \mu(d\omega) \, \mu'(d\omega') \, \wedge \, \iint f^-(\omega, \omega') \, \mu'(d\omega') \, \mu(d\omega) < \infty$

Potem je

- $\big(\Omega' \ni \omega' \mapsto \int f(\omega, \omega') \, \mu(d\omega)\big) \in \mathcal{F}'/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$;
- $\big(\Omega \ni \omega \mapsto \int f(\omega, \omega') \, \mu'(d\omega')\big) \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$;
- $\int f^-(\omega, \omega') \, \mu(d\omega) < \infty$ s.p.-μ' v ω';
- $\int f^-(\omega, \omega') \, \mu'(d\omega') < \infty$ s.p.-μ v ω;

in

$$\begin{aligned} \int f \, d(\mu \times \mu') &= \iint f(\omega, \omega') \, \mu(d\omega) \, \mu'(d\omega') \\ &= \iint f(\omega, \omega') \, \mu'(d\omega') \, \mu(d\omega). \end{aligned}$$

Vsi zunanji integrali zgoraj so d.d.

Definicija 3.2. Notacijo $\mu \times \mu'$ zadržimo, $\mu \times \mu'$ rečemo *produkt* μ *in* μ'.

Trditev 3.3. $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero, $(\Omega', \mathcal{F}')$ merljiv prostor, $X \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$, $(A, \mathcal{A})$ še en merljiv prostor, da je

$$D_A \;:=\; \{(x,x) \mid x \in A\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$$

in $\{f, g\} \subset \mathcal{F}'/\mathcal{A}$. Potem je $f(X) = g(X)$ s.p.-$\mu \iff f = g$ s.p.-$X_*\mu$.

3.1 Nedoločena integracija in absolutna zveznost

Definicija 3.3. Naj bosta $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero, $f \in \mathcal{F}'/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$ in naj bo integral f pod μ d.d. Potem preslikavi

$$f \cdot \mu \;:=\; \left(\mathcal{F} \in A \mapsto \int_A f\, d\mu\right)$$

rečemo *nedoločeni integral f proti μ*[7], ali tudi tudi *μ-nedoločeni integral f*.

Definicija 3.4. Naj bosta μ in ν dve meri na merljivem prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$. μ je absolutno zvezna glede na ν (pišemo $\mu \ll \nu$) $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$\nu(A) = 0 \;\Rightarrow\; \mu(A), \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

μ je ekvivalentna ν, (pišemo $\mu \sim \nu$) $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$\mu \ll \nu \quad \text{in} \quad \nu \ll \mu.$$

Trditev 3.4. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero in $f \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[0,\infty]}$. Potem je $f \cdot \mu$ mera, ki je absolutno zvezna glede na μ; naprej

$$\int g\, d(f \cdot \mu) \;=\; \int g\, f(d\mu)$$

za vse $g \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$, pri čemer je integral na levi d.d. $\iff$ je integral na desni d.d. in v slednjem primeru je

$$g \cdot (f \cdot \mu) \;=\; (gf) \cdot \mu.$$

Če je $f > 0$ s.p.-μ, potem je $f \cdot \mu \sim \mu$.

[7] Beri: glede na μ.