Verjetnost z mero - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar
po predavanjih profesorja Matija Vidmarja

2021/22

Kazalo

1 Merljivost in mera

1.1 Merljive množice

Definicija 1.1. Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ (t.j. $\mathcal{A} \in 2^{2^{\Omega}}$). Potem rečemo, da je $\mathcal{A}$ *zaprta* za:

- c^{Ω} (t.j. za komplement v Ω)

$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall A : (A \in \Omega \;\Rightarrow\; \Omega \setminus A \in \mathcal{A});$$

- $\cap$ (t.j. za preseke)

$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A} \;\text{ brž ko je } \{A_1, A_2\} \subset A;$$

- $\cup$ (t.j. za unije)

$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A} \;\text{ brž ko je } \{A_1, A_2\} \subset A;$$

- $\setminus$ (t.j. za razlike)

$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A} \;\text{ brž ko je } \{A_1, A_2\} \subset A;$$

- $\sigma\cap$ (t.j. za števne preseke)

$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \;\text{ za vsako zaporedje } (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ iz } \mathcal{A};$$

- $\sigma\cup$ (t.j. za števne unije)

$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \;\text{ za vsako zaporedje } (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ iz } \mathcal{A}.$$

Definicija 1.2. $\mathcal{A}$ je *σ-algebra* na Ω

$$\begin{aligned} &\overset{\text{def}}{\iff} \quad (\Omega, \mathcal{A}) \;\text{ je merljiv prostor} \\ &\overset{\text{def}}{\iff} \quad \emptyset \in \mathcal{A} \text{ in } \mathcal{A} \text{ je zaprt za } \mathsf{c}^{\Omega} \text{ in za } \sigma\cup. \end{aligned}$$

V primeru, da $\mathcal{A}$ je σ-algebra na Ω:

- A je $\mathcal{A}$-merljiva $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ $A \in \mathcal{A}$;
- $\mathcal{B}$ je pod-σ-algebra $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ $\mathcal{B}$ je σ-algebra na Ω in $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

Trditev 1.1. Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ zaprta za c^Ω in naj bo $\emptyset \in \mathcal{A}$. Potem je $\mathcal{A}$ σ-algebra na Ω, če je $\mathcal{A}$ zaprta za števne preseke, in v tem primeru je $\mathcal{A}$ zaprta za $\cap$, $\cup$ in $\setminus$.

1.2 Mere

Definicija 1.3. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F})$ merljiv prostor in $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$. μ je *mera* na $(\Omega, \mathcal{F})$ $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

- $\mu(\emptyset) \;=\; 0$;
- $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\right) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ za vsako zaporedje $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{F}$, ki sestoji iz paroma disjunktnih dogodkov.

Lastnosti:

- Mera μ na $(\Omega, \mathcal{F})$ je *končna* $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ $\mu(\Omega) < \infty$.
- Mera μ na $(\Omega, \mathcal{F})$ je *verjetnostna*[1] $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ $\mu(\Omega) = 1$
- Mera μ na $(\Omega, \mathcal{F})$ je *σ-končna* $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ obstaja zaporedje $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v $\mathcal{F}$, da je

$$\begin{aligned} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \;&=\; \Omega \quad \text{in} \\ \mu(A_n) \;&<\; \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ je prostor z mero $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ μ je mera na $(\Omega, \mathcal{F})$. Če je μ mera na $(\Omega, \mathcal{F})$ potem je $\mu(\Omega)$ *masa* mere μ. Če je $A \in \mathcal{F}$, potem je:

- A je *μ-zanemarljiv* $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ $\mu(A) = 0$;

[1]Tudi: μ je *verjetnost*.

- A je μ-*trivialna* $\overset{\text{def}}{\iff}$ A ali $\Omega \setminus A$ je μ-zanemarljiva

Če imamo poleg tega še lastnost $P(\omega)$ v $\omega \in A$, potem

- $P(\omega)$ drži μ-*skoraj povsod* (μ-s.p.) v $\omega \in A$ $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$A_{\neg P} \;:=\; \{\omega \in \Omega \mid \neg P(\omega) \in \mathcal{F} \text{ in } \mu(A_{\neg P}) = 0\};$$

- $P(\omega)$ drži μ-*skoraj gotovo* (μ-s.g.) $\overset{\text{def}}{\iff}$ $P(\omega)$ drži μ-skoraj povsod in μ je verjetnostna.

P drži μ-skoraj povsod na A $\overset{\text{def}}{\iff}$ $P(\omega)$ drži μ-skoraj povsod v $\omega \in A$. Podobno za ostale.

Trditev 1.2. Naj bo μ mera na $(\Omega, \mathcal{F})$. Potem:

(i) μ je aditivna:
$$\mu(A \cup B) \;=\; \mu(A) + \mu(B)$$
za vsaki disjunktivni množici $A, B \in \mathcal{F}$.

(ii) μ je monotona:
$$\mu(A) \;\leq\; \mu(B),$$
če je $A \subset B$ in $A, B \in \mathcal{F}$

(iii) μ je zvezna od spodaj:
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \;=\; \uparrow\text{-}\lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$
za vsako zaporedje $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{F}$, ki je nepadajoče glede na inkluzijo: $A_n \subset A_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

(iv) μ je števno subaditivna:
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \;\leq\; \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$
za vsako zaporedje $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{F}$.

(v) Naj bo μ končna:

$$\mu(\Omega \setminus A) \;=\; \mu(\Omega) - \mu(A) \;\forall A \in \mathcal{F}.$$

Naprej, μ je zvezna od zgoraj:

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \;=\; \downarrow\text{-}\lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

za vsako zaporedje $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{F}$, ki je nenaraščajoča glede na inkluzijo: $A_n \supset A_{n+1} \;\forall n \in N$.

(vi) Za vsak $A \in \mathcal{F}$ je

$$\mathcal{F}\big|_A \;:=\; \{B \cap A \mid B \in \mathcal{F}\}$$

σ-algebra na A in $\mu_A := \mu\big|_{\mathcal{F}|_A}$ je mera na $(A, \mathcal{F}\big|_A)$.

Definicija 1.4. $\mu_A := \mu\big|_{\mathcal{F}|_A}$ rečemo *mera μ zožana na A* oz. *zožitev μ na A*.

1.3 Merljive preslikave in generirane σ-algebre

Definicija 1.5. Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$:

$$\sigma_\Omega(\mathcal{A}) \;:=\; \bigcap\{\mathcal{F} \in 2^{2^\Omega} \mid \mathcal{F} \;\sigma\text{-algebra na } \Omega \text{ in } \mathcal{F} \supset \mathcal{A}\},$$

rečemo σ-algebra z A na Ω. Če sta $\mathcal{B}_1$ in $\mathcal{B}_2$ obe σ-algebri na Ω, potem definiramo

$$\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2 \;:=\; \sigma_\Omega(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)$$

in ji rečemo skupek $\mathcal{B}_1$ in $\mathcal{B}_2$. Bolj splošno, če imamo družino σ-algebr $(B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ na Ω, potem postavimo

$$\bigvee_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{B}_\lambda \;:=\; \sigma_\Omega\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{B}_\lambda\right).$$

Definicija 1.6. Naj bo $f : \Omega \to \Omega'$. Če je dana σ-algebra $\mathcal{F}'$ na Ω', potem definiramo

$$\sigma^{\mathcal{F}'}(f) \ := \ \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{F}\}.$$

Začetno strukturo f glede na $\mathcal{F}'$ (tudi, σ-algebra generirana s f glede na $\mathcal{F}'$). Če je dana σ-algebra $\mathcal{F}$ na Ω, potem definiramo

$$\sigma_{\mathcal{F}}^{\Omega'}(f) \ := \ \{A' \in 2^{\Omega'} \mid f^{-1}(A') \in \mathcal{F}\}$$

končno strukturo f na Ω' glede na $\mathcal{F}$. Če sta dani σ-algebri $\mathcal{F}$ na Ω in σ-algebra $\mathcal{F}'$ na Ω, potem rečemo: f je $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$-merljiva $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$f^{-1}(A') \in \mathcal{F}, \quad \forall A' \in \mathcal{F}.$$