

Verjetnost z mero - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar
po predavanjih profesorja Matija Vidmarja

2021/22

Kazalo

1	Merljivost in mera	3
1.1	Merljive množice	3
1.2	Mere	4
1.3	Merljive preslikave in generirane σ -algebre	6
1.4	Borelove množice na razširjeni realni osi $[-\infty, \infty]$ in Borelova merljivost numeričnih funkcij	9
1.5	Argumenti monotonega razreda	11
1.6	Lebesgue-Stieltjesova mera	13
2	Integracija na merljivih prostorih	15
2.1	Lebesgueov integral	15
2.2	Konvergenčni izreki s posledicami	17
2.3	Rezultati, ki se tičejo menjave vrstnega reda integracije	19
2.4	Nedoločena integracija in absolutna zveznost	21
2.5	Prostori L in nekaj integralskih neenakosti	23
3	Verjetnost kot normalizirana mera	25
3.1	Osnovni pojmi	25
3.2	Neodvisnost	27
3.3	Pogojevanje	30

1 Merljivost in mera

1.1 Merljive množice

Definicija 1.1. Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ (t.j. $\mathcal{A} \in 2^{2^\Omega}$). Potem rečemo, da je \mathcal{A} *zaprta* za:

- c^Ω (t.j. za komplemente v Ω)

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \quad \forall A : (A \in \Omega \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A});$$

- \cap (t.j. za preseke)

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \quad A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A} \text{ brž ko je } \{A_1, A_2\} \subset \mathcal{A};$$

- \cup (t.j. za unije)

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \quad A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A} \text{ brž ko je } \{A_1, A_2\} \subset \mathcal{A};$$

- \setminus (t.j. za razlike)

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \quad A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A} \text{ brž ko je } \{A_1, A_2\} \subset \mathcal{A};$$

- $\sigma \cap$ (t.j. za števne preseke)

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \text{ za vsako zaporedje } (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ iz } \mathcal{A};$$

- $\sigma \cup$ (t.j. za števne unije)

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \text{ za vsako zaporedje } (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ iz } \mathcal{A}.$$

Definicija 1.2. \mathcal{A} je σ -algebra na Ω

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \quad (\Omega, \mathcal{A}) \text{ je merljiv prostor}$$

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \quad \emptyset \in \mathcal{A} \text{ in } \mathcal{A} \text{ je zaprt za } c^\Omega \text{ in za } \sigma \cup.$$

V primeru, da \mathcal{A} je σ -algebra na Ω :

- A je \mathcal{A} -merljiva $\stackrel{\text{def}}{\iff} A \in \mathcal{A}$;
- \mathcal{B} je pod- σ -algebra $\stackrel{\text{def}}{\iff} \mathcal{B}$ je σ -algebra na Ω in $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

Trditev 1.1. Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ zaprta za \complement^Ω in naj bo $\emptyset \in \mathcal{A}$. Potem je \mathcal{A} σ -algebra na Ω , če je \mathcal{A} zaprta za števne preseke, in v tem primeru je \mathcal{A} zaprta za \cap , \cup in \setminus .

1.2 Mere

Definicija 1.3. Naj bo (Ω, \mathcal{F}) merljiv prostor in $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$. μ je *mera* na (Ω, \mathcal{F}) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ za vsako zaporedje $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iz \mathcal{F} , ki sestoji iz paroma disjunktnih dogodkov.

Lastnosti:

- Mera μ na (Ω, \mathcal{F}) je *končna* $\stackrel{\text{def}}{\iff} \mu(\Omega) < \infty$.
- Mera μ na (Ω, \mathcal{F}) je *verjetnostna*¹ $\stackrel{\text{def}}{\iff} \mu(\Omega) = 1$
- Mera μ na (Ω, \mathcal{F}) je *σ -končna* $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ obstaja zaporedje $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ v \mathcal{F} , da je

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega \quad \text{in} \\ \mu(A_n) < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ je prostor z mero $\stackrel{\text{def}}{\iff} \mu$ je mera na (Ω, \mathcal{F}) . Če je μ mera na (Ω, \mathcal{F}) potem je $\mu(\Omega)$ *masa* mere μ . Če je $A \in \mathcal{F}$, potem je:

- A je μ -zanemarljiv $\stackrel{\text{def}}{\iff} \mu(A) = 0$;

¹Tudi: μ je *verjetnost*.

- A je μ -trivialna $\stackrel{\text{def}}{\iff} A$ ali $\Omega \setminus A$ je μ -zanemarljiva

Če imamo poleg tega še lastnost $P(\omega)$ v $\omega \in A$, potem

- $P(\omega)$ drži μ -skoraj povsod (μ -s.p.) v $\omega \in A \stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$A_{\neg P} := \{\omega \in \Omega \mid \neg P(\omega)\} \in \mathcal{F}$$

$$\text{in } \mu(A_{\neg P}) = 0;$$

- $P(\omega)$ drži μ -skoraj gotovo (μ -s.g.) $\stackrel{\text{def}}{\iff} P(\omega)$ drži μ -skoraj povsod in μ je verjetnostna.

P drži μ -skoraj povsod na $A \stackrel{\text{def}}{\iff} P(\omega)$ drži μ -skoraj povsod v $\omega \in A$.
Podobno za ostale.

Trditev 1.2. Naj bo μ mera na (Ω, \mathcal{F}) . Potem:

- (i) μ je aditivna:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

za vsaki disjunktni množici $A, B \in \mathcal{F}$.

- (ii) μ je monotona:

$$\mu(A) \leq \mu(B),$$

če je $A \subset B$ in $A, B \in \mathcal{F}$

- (iii) μ je zvezna od spodaj:

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \uparrow - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

za vsako zaporedje $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iz \mathcal{F} , ki je nepadajoče glede na inkluzijo:
 $A_n \subset A_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$.

- (iv) μ je števno subaditivna:

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

za vsako zaporedje $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iz \mathcal{F} .

(v) Naj bo μ končna:

$$\mu(\Omega \setminus A) = \mu(\Omega) - \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Naprej, μ je zvezna od zgoraj:

$$\mu \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \downarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

za vsako zaporedje $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iz \mathcal{F} , ki je nenaraščajoča glede na inkluzijo:
 $A_n \supset A_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(vi) Za vsak $A \in \mathcal{F}$ je

$$\mathcal{F}|_A := \{B \cap A \mid B \in \mathcal{F}\}$$

σ -algebra na A in $\mu_A := \mu|_{\mathcal{F}|_A}$ je mera na $(A, \mathcal{F}|_A)$.

Definicija 1.4. $\mu_A := \mu|_{\mathcal{F}|_A}$ rečemo *mera μ zožana na A oz. zožitev μ na A* .

1.3 Merljive preslikave in generirane σ -algebre

Definicija 1.5. Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$:

$$\sigma_\Omega(\mathcal{A}) := \bigcap \{ \mathcal{F} \in 2^{2^\Omega} \mid \mathcal{F} \text{ } \sigma\text{-algebra na } \Omega \text{ in } \mathcal{F} \supset \mathcal{A} \},$$

rečemo σ -algebra z \mathcal{A} na Ω . Če sta \mathcal{B}_1 in \mathcal{B}_2 obe σ -algebri na Ω , potem definiramo

$$\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2 := \sigma_\Omega(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)$$

in ji rečemo skupek \mathcal{B}_1 in \mathcal{B}_2 . Bolj splošno, če imamo družino σ -algebr $(\mathcal{B}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ na Ω , potem postavimo

$$\bigvee_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{B}_\lambda := \sigma_\Omega \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{B}_\lambda \right).$$

Definicija 1.6. Naj bo $f : \Omega \rightarrow \Omega'$. Če je dana σ -algebra \mathcal{F}' na Ω' , potem definiramo

$$\sigma^{\mathcal{F}'}(f) := \{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{F}'\},$$

začetno strukturo f glede na \mathcal{F}' (tudi, σ -algebra generirana s f glede na \mathcal{F}'). Če je dana σ -algebra \mathcal{F} na Ω , potem definiramo

$$\sigma_{\mathcal{F}}^{\Omega'}(f) := \{A' \in 2^{\Omega'} \mid f^{-1}(A') \in \mathcal{F}\},$$

končno strukturo f na Ω' glede na \mathcal{F} . Če sta dani σ -algebri \mathcal{F} na Ω in σ -algebra \mathcal{F}' na Ω , potem rečemo: f je \mathcal{F}/\mathcal{F}' -merljiva $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$f^{-1}(A') \in \mathcal{F}, \quad \forall A' \in \mathcal{F}'.$$

Definicija 1.7. Če je \mathcal{F} σ -algebra na Ω in je \mathcal{F}' σ -algebra na Ω' , potem označimo

$$\mathcal{F}/\mathcal{F}' := \{f \in \Omega'^{\Omega} \mid f \text{ je } \mathcal{F}/\mathcal{F}'\text{-merljiva}\}.$$

Definicija 1.8. Za $A \subset \Omega$ definiramo $\mathbb{1}_{A\Omega} : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$,

$$\mathbb{1}_{A\Omega}(x) := \begin{cases} 1; & x \in A, \\ 0; & x \notin A, \end{cases}, \quad x \in \Omega,$$

ki ji rečemo *indikatorska funkcija A na ambientnem prostoru Ω* .²

Trditev 1.3. Za σ -algebri $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$, kjer $f \in \mathcal{F}/\mathcal{G}$ in $g \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$ je

$$g \circ f \in \mathcal{F}/\mathcal{H}.$$

Trditev 1.4. Naj bo $f : \Omega \rightarrow \Omega'$:

- (i) Za σ -algebro \mathcal{F}' na Ω' je $\sigma^{\mathcal{F}'}(f)$ σ -algebra na Ω ; ona je najmanjša (glede na inkluzijo) σ -algebra \mathcal{G} na Ω , da je $f \in \mathcal{G}/\mathcal{F}'$.

²Ponavadi namesto $\mathbb{1}_{A\Omega}$ pišemo le $\mathbb{1}_A$.

(ii) Za σ -algebro \mathcal{F} na Ω je $\sigma_F^{\Omega'}(f)$ σ -algebra na Ω' ; ona je največja (glede na inkluzijo) σ -algebra \mathcal{G}' na Ω , da je $f \in \mathcal{F}/\mathcal{G}'$.

(iii) Za σ -algebro \mathcal{F} na Ω in σ -algebro \mathcal{F}' na Ω' je

$$f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}' \iff \sigma^{\mathcal{F}'}(f) \subset \mathcal{F} \iff \mathcal{F}' \subset \sigma_{\mathcal{F}}^{\Omega'}(f).$$

(iv) Naj bo $\mathcal{A}' \subset 2^{\Omega'}$ ter \mathcal{F} σ -algebra na Ω . Potem je

$$f \in \mathcal{F}/\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}') \iff (f^{-1}(A') \in \mathcal{F}, \forall A' \in \mathcal{A}').$$

Velja tudi

$$\sigma^{\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}')} (f) = \sigma_{\Omega}(\{f^{-1}(A') \mid A' \in \mathcal{A}'\}).$$

Definicija 1.9. Sled \mathcal{A} na A definiramo kot

$$\mathcal{A}|_A := \{B \cap A \mid B \in \mathcal{A}\}.^3$$

Trditev 1.5 (Sledi komutirajo v generirani σ -algebri). Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ in $A \subset \Omega$. Potem je

$$\sigma_A(\mathcal{A}|_A) = \sigma_{\Omega}(\mathcal{A})|_A.$$

Trditev 1.6. Naj bo $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ in naj bo \mathcal{F} σ -algebra na Ω ter \mathcal{F}' σ -algebra na Ω' .

(i) Če je $A' \subset \Omega'$ in $f : \Omega \rightarrow A'$, potem je

$$f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}' \iff f \in \mathcal{F}/(\mathcal{F}'|_{A'}).$$

(ii) Če je $A \subset \Omega$ in $f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$, potem

$$f|_A \in (\mathcal{F}|_A)/\mathcal{F}'.$$

(iii) Če je $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ zaporedje v \mathcal{F} in $\Omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ in je $f|_{A_i} \in (\mathcal{F}|_{A_i})/\mathcal{F}'$ $\forall i \in \mathbb{N}$, potem je

$$f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$$

.

³Zapis je isti kot za zožitev, vendar ne pomeni isto.

1.4 Borelove množice na razširjeni realni osi $[-\infty, \infty]$ in Borelova merljivost numeričnih funkcij

Definicija 1.10. Definirajmo *razširjeno realno os*:

$$\begin{aligned} [-\infty, \infty] &:= \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\} \\ [-\infty, a] &:= \{-\infty\} \cup (-\infty, a] \quad \text{za } a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \end{aligned}$$

Relacijo \leq na \mathbb{R} razširimo na $[-\infty, \infty]$ kot sledi:

$$-\infty \leq x \leq \infty \quad \forall x \in [-\infty, \infty].$$

Temu ustrezno imamo “($<$) := (\leq) \ ($=$)”, itd.

Definicija 1.11. Borelovo σ -algebro na $[-\infty, \infty]$ definiramo kot

$$\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]} := \sigma_{[-\infty, \infty]}(\{[-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}\}).$$

Za $A \subset [-\infty, \infty]$ je

$$\mathcal{B}_A := \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}|_A$$

Borelova σ -algebra na A . Elementom Borelovih σ -algebr pravimo *Borelove množice*.

Definicija 1.12. Funkcija f je *numerična*, če je $\mathcal{Z}_f \in [-\infty, \infty]$.

Definicija 1.13. Če je funkcija f numerična:

- $\sigma(f) := \sigma^{\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}}(f)$;
- če je \mathcal{F} σ -algebra na domeni f , je f \mathcal{F} -merljiva $\stackrel{\text{def}}{\iff} f$ je $\mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ -merljiva;
- če je $g : \mathcal{D}_f \rightarrow [-\infty, \infty]$, je

$$\begin{aligned} g \wedge f &:= \min\{g, f\}^4 \\ g \vee f &:= \max\{g, f\}. \end{aligned}$$

Definiramo *pozitivni* in *negativni del* f :

$$\begin{aligned} f^+ &:= f \vee 0 \\ f^- &:= (-f) \vee 0 \end{aligned}$$

Opomba.

- $f = f^+ - f^-$
- $|f| = f^+ + f^-$

Definicija 1.14. Dogovorimo se

$$\begin{aligned} 0 \cdot (\pm\infty) &:= 0 =: (\pm\infty) \cdot 0 \\ \infty + (-\infty) &:= 0 =: (-\infty) + \infty. \end{aligned}$$

Preostanek aritmetike na $[-\infty, \infty]$ definiramo na naraven način, npr.

$$\begin{aligned} a \cdot \infty &:= \operatorname{sgn}(a) \cdot \infty \quad \text{za } a \in [-\infty, \infty] \setminus \{0\} \\ a + \infty &:= \infty \quad \text{za } a \in (-\infty, \infty] \\ \infty - \infty &:= \infty + (-\infty) = 0 \\ &itd. \end{aligned}$$

Trditev 1.7. Če je $A \subset [-\infty, \infty]$ in je $f : A \rightarrow [-\infty, \infty]$ zvezna, potem je $f \in \mathcal{B}_A / \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$. Če je $\{f, g\} \subset \mathcal{F} / \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ za σ -algebro \mathcal{F} , potem je

$$\{f + g, f \cdot g\} \subset \mathcal{F} / \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$$

in

$$\{\{f \leq g\}, \{f = g\}, \{f < g\}\} \subset \mathcal{F}$$

.

Trditev 1.8. Naj bo \mathcal{F} σ -algebra in $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje v $\mathcal{F} / \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$. Potem je

$$\left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n, \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right\} \subset \mathcal{F} / \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}.$$

Če je $f_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, potem je

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \in \mathcal{F} / \mathcal{B}_{[0, \infty]}.$$

Definicija 1.15. Naj bo \mathcal{F} σ -algebra. Za $\{f, g\} \subset \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ je

$$\{f \vee g, f \wedge g, f^+, f^-, |f|\} \subset \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}.$$

Za zaporedje $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ je

$$\{\{f_n \text{ konverg.}, \text{ ko } n \rightarrow \infty\}, \{f_n \text{ konverg. v } \mathbb{R}, \text{ ko } n \rightarrow \infty\}, \{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f_\infty\}\} \subset \mathcal{F}.$$

1.5 Argumenti monotonega razreda

Definicija 1.16. Naj bo \mathcal{F} σ -algebra na Ω in $f : \Omega \rightarrow [0, \infty)$:

$$f \text{ je } \mathcal{F}\text{-enostavna} \stackrel{\text{def}}{\iff} f \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[0, \infty)} \text{ in } Z_f \text{ je končna.}$$

Trditev 1.9. Naj bo (Ω, \mathcal{F}) merljiv prostor in $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$. Potem je f \mathcal{F} -enostavna \iff

$$f = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{A_i},$$

za neke $c_i, i \in [n]$, iz $[0, \infty)$, neke $A_i, i \in [n]$, iz \mathcal{F} in nek $n \in \mathbb{N}$. Naprej; če je $f \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[0, \infty]}$, potem je

$$\left((2^{-n} \lfloor 2^n f \rfloor) \wedge n\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

zaporedje \mathcal{F} -enostavnih funkcij, ki ne padajo k f (celo enakomerno na vsaki množici na kateri je f omejena).

Posledica (Izrek o monotonem razredu). Naj bo \mathcal{F} σ -algebra na Ω in $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[0, \infty]}$. Če je

$$\mathbb{1}_A \in \mathcal{M} \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

in je \mathcal{M} zaprta za nenegativne linearne kombinacije (je stožec)⁵ in je \mathcal{M}

⁵Pomeni:

$$\{m_1, m_2\} \subset \mathcal{M}, \{c_1, c_2\} \subset (0, \infty) \Rightarrow c_1 m_1 + c_2 m_2 \in \mathcal{M}$$

zaprta za nepadajoče limite⁶ potem je

$$\mathcal{M} = \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[0,\infty]}.$$

Trditev 1.10 (Doob-Dynkinova faktorizacijska lema). Naj bo $X : \Omega \rightarrow A$, (A, \mathcal{A}) merljiv prostor. Potem je

$$Y \in \sigma^{\mathcal{A}}(X)/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]} \iff \exists h \in \mathcal{A}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}, \text{ da je } Y = h \circ X = h(X).$$

Definicija 1.17. Naj bo $\mathcal{D} \subset 2^\Omega$. \mathcal{D} je Dynkinov sistem (tudi λ -sistem) na $\Omega \stackrel{\text{def}}{\iff}$

- $\Omega \in \mathcal{D}$,
- $B \setminus A \in \mathcal{D}$ brž ko je $\mathcal{D} \ni A \subset B \in \mathcal{D}$,
- če je $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ nepadajoče zaporedje v \mathcal{D} je tudi $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$.

\mathcal{D} je π -sistem $\stackrel{\text{def}}{\iff} \mathcal{D}$ je zaprt za \cap .

Trditev 1.11. Naj bo $\mathcal{D} \subset 2^\Omega$. Potem je \mathcal{D} Dynkinov sistem \iff

- $\Omega \in \mathcal{D}$,
- \mathcal{D} zaprta za c^Ω ,
- $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ zaporedje iz \mathcal{D} , $A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$ iz $\mathbb{N} \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{D}$.

\mathcal{D} je σ -algebra na $\Omega \iff \mathcal{D}$ je λ -sistem na Ω in π -sistem.

Definicija 1.18. Za $L \subset 2^\Omega$ postavimo

$$\lambda_\Omega(L) := \bigcap \{ \mathcal{D} \in 2^{2^\Omega} \mid \mathcal{D} \text{ je } \lambda\text{-sistem in } \mathcal{D} \supset L \}.$$

⁶Pomeni: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nepadajoče zaporedje iz \mathcal{M} , potem je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \in \mathcal{M}$$

Trditev 1.12. Naj bo L π -sistem in $L \subset 2^\Omega$. Potem je

$$\lambda_\Omega(L) = \sigma_\Omega(L).$$

Posledica (π - λ izrek/Dynkinova lema). Naj bo L π -sistem in \mathcal{D} λ -sistem na Ω , $L \subset \mathcal{D}$. Potem je

$$\sigma_\Omega(L) \subset \mathcal{D}.$$

Trditev 1.13. Naj bosta μ, ν meri na merljivem prostoru (E, \mathcal{E}) , $L \subset \mathcal{E}$ π -sistem, $\sigma_E(L) = \mathcal{E}$. Predpostavimo, da je $\mu|_L = \nu|_L$ in da obstaja zaporedje $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iz L , ki je nepadajoče ali sestoji iz paroma disjunktnih množic, in za katerega je

- $\mu(L_n) = \nu(L_n) < \infty$,
- $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n = E$.

Potem je

$$\mu = \nu$$

.

1.6 Lebesgue-Stieltjesova mera

Izrek 1.1 (Lebesgue-Stieltjesov izrek). Naj bo $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, nepadajoča in zvezna z desne (*ca'd*). Potem obstaja natanko ena mera μ na $\mathcal{B}_\mathbb{R}$, da je

$$\mu([a, b]) = F(b) - F(a) \quad \forall a \leq b \in \mathbb{R}.$$

Definicija 1.19. μ iz prejšnjega izreka rečemo *mera prirejena F v Lebesgue-Stieltjesovem smislu* in jo označimo z dF . V posebne primernu primeru, ko je $F = \text{id}_\mathbb{R}$ ji rečemo *Lebesgueva mera* in jo označimo

$$\mathcal{L} := d(\text{id}_\mathbb{R}).$$

Trditev 1.14. Naj bo $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *ca'd*, nepadajoča. Potem je dF :

- σ -končna \iff je F omejena:

$$dF(\mathbb{R}) = \lim_{n \rightarrow \infty} dF((-n, n])$$

- verjetnostna $\iff \lim_{\infty} F - \lim_{-\infty} F = 1$.

Za $x \in \mathbb{R}$ je

$$dF(\{x\}) = F(x) - F(x^-),$$

$$\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (x - \frac{1}{n}, x].$$

2 Integracija na merljivih prostorih

2.1 Lebesgueov integral

Definicija 2.1. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero $f \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$.

(a) Za f , ki je \mathcal{F} -enostavna postavimo

$$\int f d\mu := \sum_{a \in \mathbb{Z}_f} a\mu(\{f = a\}) = \sum_{a \in \mathbb{Z}_f} d\mu(f^{-1}(\{a\})).$$

(b) Za $f \geq 0$, ki ni \mathcal{F} -enostavna postavimo

$$\int f d\mu := \sup\left\{\int g d\mu \mid g \leq f, g \text{ } \mathcal{F}\text{-enostavna}\right\}.$$

(c) Za $\neg(f \geq 0)$, ki ni \mathcal{F} -enostavna postavimo

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

Dogovor.

$$\mu[f] = \mu^x[f(x)] := \int f(x) \mu(dx) := \int f d\mu$$

Če je še $A \in \mathcal{F}$, potem označimo še

$$\mu[f; A] := \mu^x[f(x); x \in A] := \int_A f(x) \mu(dx) := \int_A f d\mu := \int f \mathbb{1}_A d\mu.$$

Integral f proti μ je *dobro definiran* $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$\int f^+ d\mu \wedge \int f^- d\mu < \infty;$$

f je μ -integrabilna $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$\int f^+ d\mu \vee \int f^- d\mu < \infty.$$

Definicija 2.2. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero:

$$L^1(\mu) := \{f \in \mathcal{F}/\mathcal{B} \mid f \text{ je } \mu\text{-integrabilna}\}.$$

Za $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ z $\{\Re(g), \Im(g)\} \subset L^1(\mu)$ je

$$\int g d\mu := \int \Re(g) d\mu + i \int \Im(g) d\mu.$$

Izrek 2.1. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero. Integral ima naslednje lastnosti:

(i) Aditivnost:

$$\int f + g d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu,$$

za $\{f, g\} \subset \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ z $\mu[f^-] \vee \mu[g^-] < \infty$

(ii) Integral indikatorja:

$$\int \mathbb{1}_A d\mu = \mu(A), \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

V posebnem primeru je $\mu[0] = 0$ in torej $\mu[f^+] - \mu[f^-] = \mu[f] \quad \forall f \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$.

(iii) Integrali, ki so 0 in so končni:

za $f \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[0, \infty]}$:

- $\mu[f] = 0 \iff f = 0 \text{ s.p.-}\mu$
- $\mu[f] < \infty \implies f < \infty \text{ s.p.-}\mu.$

(iv) Trikotniška neenakost:

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu, \quad \forall f \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}.$$

(v) Integral “ne vidi” množic z mero 0:

če je $\{f, g\} \subset \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ in je $f = g$ s.p.- μ , potem je $\mu[f] = \mu[g]$ in je $\mu[f]$ d.d. $\iff \mu[g]$ je d.d.

(vi) Monotonost: če je $\{f, g\} \subset \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$, $g \leq f$ in $\mu[g^-] < \infty$, potem je

$$\int g d\mu \leq \int f d\mu.$$

(vii) Homogenost:

$$\int cf \, d\mu = c \int f \, d\mu$$

za vse $f \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ za katere je $\mu[cf^-] \wedge \mu[cf^+] < \infty$, za $\forall c \in [-\infty, \infty]$.

Vsi integrali v (i),(ii),(iii),(vi) so d.d. Enako velja za (vii), razen, ko je $c = 0$ in $\mu[f^+] = \mu[f^-] = \infty$.

Trditev 2.1. Naj bosta $a \leq b$ realni števili in $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Če je f zvezna, potem je \mathcal{L} -integrabilna in

$$\int_{[a,b]} f \, d\mathcal{L} = \int_a^b f(x) \, dx.$$

2.2 Konvergenčni izreki s posledicami

Izrek 2.2. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero in $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje iz $\mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$.

(i) Naj bo $g \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[0, \infty]}$ z $\mu[g] < \infty$ in $f_n^- \leq g \, \forall n \in \mathbb{N}$. Potem velja:

(a) Polzveznost od spodaj (Fatou):

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu$$

(b) Monotona konvergenca (Levi):

$$\int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu = \uparrow - \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu$$

(ii) Naj bo $g \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[0, \infty]}$ μ -integrabilna z $|f_n| \leq g \, \forall n \in \mathbb{N}$. Potem velja dominirana konvergenca (Lebesgue):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - \lim_{m \rightarrow \infty} f_m| \, d\mu = 0$$

in v posebnem je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu,$$

če seveda $\exists \lim_{m \rightarrow \infty} f_m$ (povsod).

Posledica. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero in $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje iz $\mathcal{F}/\mathcal{B}_{[0, \infty]}$. Potem je

$$\int \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int f_n d\mu,$$

kjer so integrali d.d.

Posledica. Naj bo $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje mer na merljivem prostoru (Ω, \mathcal{F}) . Potem je $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n$ mera na (Ω, \mathcal{F}) :

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n \right) (A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(A), \quad A \in \mathcal{F}.$$

Poleg tega je za $\forall f \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$:

$$\int f d\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n\right) \text{ je d.d.} \iff \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \int f^+ d\mu_n \right) \wedge \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \int f^- d\mu_n \right) < \infty$$

in tedaj je

$$\int f d\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int f d\mu_n.$$

Definicija 2.3. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ porostor z mero, (Ω', \mathcal{F}') merljiv prostor, $f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$. Potem definiramo

$$f_{* \mathcal{F}'} \mu \quad \text{oz.} \quad \mu \circ_{\mathcal{F}'} f^{-1} \quad \text{oz.} \quad \mu_{f \mathcal{F}'}$$

kot preslikavo $f_{* \mathcal{F}'} \mu : \mathcal{F}' \rightarrow [0, \infty]$, dano s predpisom

$$(f_{* \mathcal{F}'} \mu)(A') := \mu(f^{-1}(A')), \quad A' \in \mathcal{F}'.$$

To preslikavo imenujemo *potisk mere μ naprej pod f glede na \mathcal{F}'* . Če je μ verjetnostna, rečemo temu *porazdelitev*.

Posledica (Izrek o sliki mer). Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero, (Ω', \mathcal{F}') merljiv prostor, $f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$. Potem je $f_{*} \mu$ mera na \mathcal{F}' , verjetnostna, če je μ verjetnostna. Če je $g \in \mathcal{F}'/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$, je

$$\int g d(f_{*} \mu) = \int g \circ f d\mu,$$

pri čemer je integral na levi d.d. \iff je to res za integral na desni.

Posledica (Odvajanje pod integralnim znakom). Naj bo $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ prostor z mero, \mathcal{O} odprt v \mathbb{R} . $F : \mathcal{X} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ in naj velja:

- $\forall t \in \mathcal{O}$ je $F(\cdot, t) \in L^1(\mu)$;
- $\forall x \in \mathcal{X}$ je $F(x, \cdot)$ odvedljiva.

Naj naprej $\exists g \in \Sigma/\mathcal{B}_{[0, \infty]}$ z $\mu[g] < \infty$ tako, da je

$$\left| \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x), \quad \forall (x, t) \in \mathcal{X} \times \mathcal{O}.$$

Potem velja:

- (a) $\forall t \in \mathcal{O}$ je $(\mathcal{X} \ni x \mapsto \frac{\partial F}{\partial t}(x, t)) \in L^1(\mu)$;
- (b) $(\mathcal{O} \ni t \mapsto \int F(x, t) \mu(dx))$ je odvedljiva;
- (c) $t \in \mathcal{O}$:

$$\frac{d}{dt} \int F(x, t) \mu(dx) = \int \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) \mu(dx).$$

2.3 Rezultati, ki se tičejo menjave vrstnega reda integracije

Definicija 2.4. Naj bosta (Ω, \mathcal{F}) in (Ω', \mathcal{F}') merljiva prostora. Potem definiramo

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}' := \sigma_{\Omega \times \Omega'}(\{A \times A' \mid (A, A') \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}'\}),$$

in ji rečemo *produktna σ -algebra \mathcal{F} in \mathcal{F}'* .

Trditev 2.2. Če je $A \subset \mathbb{R}^2$ in $f : A \rightarrow [-\infty, \infty]$ zvezna, potem je

$$f \in \mathcal{B}_A / \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}.$$

Trditev 2.3. Naj bosta (Ω, \mathcal{F}) in (Ω', \mathcal{F}') merljiva prostora. Potem je $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'$ najmanjša (glede na inkluzijo) σ -algebra na $\Omega \times \Omega'$ glede na katero sta merljivi kanonični projekciji, tj. $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'$ je najmanjša σ -algebra \mathcal{G} na $\Omega \times \Omega'$, da je:

- $(\Omega \times \Omega' \ni (\omega, \omega') \mapsto \omega) \in \mathcal{G}/\mathcal{F}$;
- $(\Omega \times \Omega' \ni (\omega, \omega') \mapsto \omega') \in \mathcal{G}/\mathcal{F}'$.

Naprej, če je $f \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$, potem je $f(\omega, \cdot) \in \mathcal{F}'/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$, $\forall \omega \in \Omega$ in $f(\cdot, \omega') \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$, $\forall \omega' \in \Omega'$. Obratno, naj bo (G, \mathcal{G}) merljiv prostor; potem je

$$(f, f') \in \mathcal{G}/\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}' \iff f \in \mathcal{G}/\mathcal{F} \text{ in } f' \in \mathcal{G}/\mathcal{F}'.$$

Izrek 2.3. Naj bosta $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ in $(\Omega', \mathcal{F}', \mu')$ prostora z mero, μ in μ' σ -končni.

- (i) Obstaja natanko ena mera ν na $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'$, ki jo označimo $\mu \times \mu'$, za katero velja

$$\nu(A \times A') = \mu(A)\mu'(A'), \quad \forall (A, A') \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}'.$$

- (ii) Naj bo $f \in (\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}')/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ in naj velja

- (a) $f \geq 0$ (*Tonelli*) ali
- (b) $\int |f| d(\mu \times \mu') < \infty$ (*Fubini*) ali
- (c) $\iint f^-(\omega, \omega') \mu(d\omega) \mu'(d\omega') \wedge \iint f^-(\omega, \omega') \mu'(d\omega') \mu(d\omega) < \infty$

Potem je

- $(\Omega' \ni \omega' \mapsto \int f(\omega, \omega') \mu(d\omega)) \in \mathcal{F}'/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$;
- $(\Omega \ni \omega \mapsto \int f(\omega, \omega') \mu'(d\omega')) \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$;
- $\int f^-(\omega, \omega') \mu(d\omega) < \infty$ s.p.- μ' v ω' ;
- $\int f^-(\omega, \omega') \mu'(d\omega') < \infty$ s.p.- μ v ω ;

in

$$\begin{aligned} \int f d(\mu \times \mu') &= \iint f(\omega, \omega') \mu(d\omega) \mu'(d\omega') \\ &= \iint f(\omega, \omega') \mu'(d\omega') \mu(d\omega). \end{aligned}$$

Vsi zunanji integrali zgoraj so d.d.

Definicija 2.5. Notacijo $\mu \times \mu'$ zadržimo, $\mu \times \mu'$ rečemo *produkt μ in μ'* .

Trditev 2.4. $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero, (Ω', \mathcal{F}') merljiv prostor, $X \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$, (A, \mathcal{A}) še en merljiv prostor, da je

$$D_A := \{(x, x) \mid x \in A\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$$

in $\{f, g\} \subset \mathcal{F}'/\mathcal{A}$. Potem je $f(X) = g(X)$ s.p.- $\mu \iff f = g$ s.p.- $X_*\mu$.

2.4 Nedoločena integracija in absolutna zveznost

Definicija 2.6. Naj bosta $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero, $f \in \mathcal{F}'/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ in naj bo integral f pod μ d.d. Potem preslikavi

$$f \cdot \mu := \left(\mathcal{F} \in A \mapsto \int_A f d\mu \right)$$

rečemo *nedoločeni integral f proti μ ⁷*, ali tudi *μ -nedoločeni integral f* .

Definicija 2.7. Naj bosta μ in ν dve meri na merljivem prostoru (Ω, \mathcal{F}) . μ je absolutno zvezna glede na ν (pišemo $\mu \ll \nu$) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$\nu(A) = 0 \implies \mu(A) = 0, \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

μ je ekvivalentna ν , (pišemo $\mu \sim \nu$) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$\mu \ll \nu \quad \text{in} \quad \nu \ll \mu.$$

Trditev 2.5. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero in $f \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[0, \infty]}$. Potem je $f \cdot \mu$ mera, ki je absolutno zvezna glede na μ ; naprej

$$\int g d(f \cdot \mu) = \int g f d\mu$$

⁷Beri: glede na μ .

za vse $g \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$, pri čemer je integral na levi d.d. \iff je integral na desni d.d. in v slednjem primeru je

$$g \cdot (f \cdot \mu) = (gf) \cdot \mu.$$

Če je $f > 0$ s.p.- μ , potem je $f \cdot \mu \sim \mu$.

Trditev 2.6. Naj bo (X, \mathcal{A}, μ) prostor z mero, $\{f, g\} \subset \mathcal{A}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$.

- (a) Denimo, da je $\int_{\{f>g\}} f^+ d\mu \vee \int_{\{f>g\}} g^- d\mu < \infty$ in $\int_{\{f>g\}} f d\mu \leq \int_{\{f>g\}} g d\mu$.
Potem je

$$f < g \quad \text{s.p.-}\mu.$$

- (b) Denimo, da je μ σ -končna, $(\int f^+ d\mu \wedge \int f^- d\mu) \vee (\int g^+ d\mu \wedge \int g^- d\mu) < \infty$ in $\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu, \forall A \in \mathcal{A}$. Potem je

$$f \leq g \quad \text{s.p.-}\mu.$$

Posledica. Naj bo (X, \mathcal{A}, μ) prostor z mero, $\{f, g\} \subset \mathcal{A}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$. Denimo, da je $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu, A \in \mathcal{A}$, pri čemer sta $\mu[f]$ in $\mu[g]$ d.d. Če je f (ali/torej g) μ -integrabilna ali če je μ σ -končna, potem je

$$f = g \quad \text{s.p.-}\mu.$$

V primeru, ko sta f in g μ -integrabilna, potem je, ceteris paribus, enakost $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$ dovolj preveriti za $A \in \Pi \cup \{X\}$, kjer je Π nek π -sistem, ki generira \mathcal{A} na X .

Izrek 2.4 (Radon-Nikodym). Naj bosta μ in ν σ -končni meri na istem merljivem prostoru (Ω, \mathcal{F}) , $\mu \ll \nu$. Potem obstaja $f \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[0, \infty]}$, enolična do enakosti s.p.- μ , za katero je

$$\mu = f \cdot \nu,$$

$f > 0$ s.p.- μ .

Definicija 2.8. Funkcijo f iz zgornjega izreka označimo z

$$\frac{d\mu}{d\nu}.$$

Rečemo ji *Radon-Nikodymov odvod*.

Posledica. Naj bodo $\mu \ll \nu \ll \lambda$ σ -končne mere na σ -algebri. Potem je $\mu \ll \lambda$ in

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = \frac{d\mu}{d\nu} \cdot \frac{d\nu}{d\lambda} \quad \text{s.p.-}\lambda.$$

Torej, če je $\mu \sim \nu$,

$$1 = \frac{d\mu}{d\nu} \frac{d\nu}{d\mu} \quad \text{s.p.-}\mu \text{ in s.p.-}\nu.$$

2.5 Prostori L in nekaj integralskih neenakosti

Definicija 2.9. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero, $p \in [1, \infty)$ in $f \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$, definiramo:

- prostor L^p :

$$\begin{aligned} \|f\|_{p_\mu} &:= \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \\ L^p(\mu) &:= \{f \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{\mathbb{R}}; \|f\|_{p_\mu} < \infty\}, \end{aligned}$$

- prostor L^∞ :

$$\begin{aligned} \|f\|_{\infty_\mu} &:= \inf\{M \in [0, \infty]; |f| \leq M \text{ s.p.-}\mu\}, \\ L^\infty(\mu) &:= \{f \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{\mathbb{R}}; \|f\|_{\infty_\mu} < \infty\}. \end{aligned}$$

Za zaporedje $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ v $L^q(\mu)$, $q \in [1, \infty]$, rečemo da $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_0$ v $L^q(\mu)$

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$\|f_n - f_0\|_{q_\mu} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Za $\{f, g\} \subset L^2(\mu)$,

$$\langle f, g \rangle = \int fg d\mu.$$

Trditev 2.7. Naj bo μ končna mera in $p \leq q$, $\{p, q\} \subset [1, \infty]$. Potem je

$$L^q(\mu) \subset L^p(\mu).$$

Trditev 2.8. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero, $\{f, g\} \subset \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$. Imamo sledeče neenakosti:

(i) Markov:

$$\mu[f; f \geq a] \geq a \cdot \mu(f \geq a), \quad \forall a \in [-\infty, \infty];$$

torej $\mu[f] \geq a\mu(f \geq a)$ za $\forall a \in [0, \infty]$, brž ko je $f \geq 0$.

(ii) Minkowski:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p, \quad \forall p \in [1, \infty]$$

(iii) Hölder:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q, \quad \forall \{p, q\} \subset [1, \infty], \quad p^{-1} + q^{-1} = 1.$$

V posebnem $p = q = 2$, Cauchy-Schwartzova neenakost.

(iv) Jensen:

naj bo μ verjetnostna, $f \in L^1(\mu)$, $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ konveksna, I odprt interval, $f : \Omega \rightarrow I$. Potem je $\varphi \in \mathcal{B}_I/\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $\int (\varphi \circ f)^- d\mu < \infty$, $\int f d\mu \in I$ in

$$\int \varphi \circ f d\mu \geq \varphi \left(\int f d\mu \right).$$

Najprej, za $\forall p \in [1, \infty]$ je $\|\cdot\|_p$ seminorma na $L^p(\mu)$, ki je realni linearen prostor, in v njem je $\|\cdot\|_p$ -limita zaporedje, če obstaja, s.p.- μ enolično določena; obstaja čee je dano zaporedje Cauchyjevo v seminormi $\|\cdot\|_p$. Končno, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je skalarni semiprodukt na $L^2(\mu)$.

3 Verjetnost kot normalizirana mera

3.1 Osnovni pojmi

Definicija 3.1. *Verjetnostni prostor* je prostor z mero $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ pri čemer je \mathbb{P} verjetnostna. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor; A je \mathbb{P} -skoraj gotov (\mathbb{P} -s.g.) $\stackrel{\text{def}}{\iff} A \in \mathcal{F}$ in $\mathbb{P}(A) = 1$.

Če je (E, \mathcal{E}) merljiv prostor, potem elementom \mathcal{F}/\mathcal{E} rečemo *slučajni elementi* z vrednostmi v (E, \mathcal{E}) ; v posebnem primeru, ko je $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ jim rečemo *slučajne spremenljivke*.

Za slučajni element X : $X \sim_{\mathbb{P}} Q \stackrel{\text{def}}{\iff} X$ ima zakon Q pod \mathbb{P} , t.j. $X_*\mathbb{P} = Q$. Za dva slučajna elementa, ki imata vrednosti v istem merljivem prostoru rečemo, da sta *enako porazdeljena* $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ imata isti zakon. *Porazdelitvena funkcija* slučajne spremenljivke X je preslikava $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ dana z $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ za $x \in \mathbb{R}$.

Slučajna spremenljivka X je *diskretna* $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists C$ števna podmnožica \mathbb{R} , da je $\mathbb{P}(X \in C) = 1$. Slučajna spremenljivka X je *absolutno zvezna* $\stackrel{\text{def}}{\iff} \mathbb{P}_X \ll \mathcal{L}$. Slučajna spremenljivka X je *zvezna* $\stackrel{\text{def}}{\iff} F_X$ je zvezna.

Bivarianten slučajni vektor je element $\mathcal{F}/\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$, torej slučajen vektor z vrednostmi v $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$; (X, Y) je absolutno zvezen $\stackrel{\text{def}}{\iff} \mathbb{P}_{(X,Y)} \ll \mathcal{L}^2$, itd.

Trditev 3.1. Naj bo X slučajni element na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z vrednostmi v merljivem prostoru (E, \mathcal{E}) in $f \in \mathcal{E}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$. Potem je

$$\mathbb{P}[f(X)] = \mathbb{P}_X[f],$$

pri čemer je upanje na levi strani d.d. čee je d.d upanje na desni strani.

Za slučajno spremenljivko X je F_X ca'd, \uparrow in $\lim_{-\infty} F_X = 0$, $\lim_{\infty} F_X = 1$.

Če je X diskretna slučajna spremenljivka, potem obstaja najmanjša števna množica $C \subset \mathbb{R}$, da $\mathbb{P}(X \in C) = 1$, ki ji rečemo podpora X , označimo s $\text{supp}(X)$:

$$\text{supp}(X) = \{x \in \mathbb{R}; \mathbb{P}(X = x) > 0\},$$

naprej, za $f \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ je

$$\mathbb{P}[f(X)] = \sum_{x \in \text{supp}(X)} f(x) \mathbb{P}(X = x),$$

če je le $\sum_{x \in \text{supp}(X)} f^+(x) \mathbb{P}(X = x) \wedge \sum_{x \in \text{supp}(X)} f^-(x) \mathbb{P}(X = x) < \infty$.⁸

Če je X absolutno zvezna, potem je zvezna in obstaja do \mathcal{L} -s.p. natančno enolična funkcija $f \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}/\mathcal{B}_{[0, \infty]}$ za katero je $\mathbb{P}_X = f \cdot \mathcal{L}$; ta f označimo f_X in ji rečemo gostota X ; naprej za $g \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ je

$$\mathbb{P}[g(X)] = \int g(x) f_X(x) \mathcal{L}(dx),$$

pri čemer so integrali d.d. brz ko je $\int g^+ f d\mathcal{L} \wedge \int g^- f d\mathcal{L} < \infty$.

Končno, za to da je slučajna spremenljivka X absolutno zvezna je potrebno in zadostno, da $\exists f \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}/\mathcal{B}_{[0, \infty]}$, da je

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \int_{[-\infty, x]} f d\mathcal{L}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

in v tem primeru je f gostota za X .^{9 10}

Definicija 3.2. Zadržimo notacijo za gostoto f_X , $\text{supp}(X)$; za diskretno slučajno spremenljivko X . Definiramo *verjetnostno masno funkcijo* X kot

$$p_X := (\text{supp}(X) \ni x \mapsto \mathbb{P}(X = x)).$$

⁸Potem je tudi $\mathbb{P}[f(X)]$ d.d.

⁹Bolj splošno je ekvivalentno preveriti $\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f d\mathcal{L}$ za $A \in \Pi \cup \{\mathbb{R}\}$, kjer je Π nek π -sistem, ki generira $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ na \mathbb{R} .

¹⁰ $\mathbb{P}_X = dF_X$

Trditev 3.2.

- (1) Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor. Če je X slučajna spremenljivka, potem je $F_X \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}/\mathcal{B}_{[0,1]}$ in $F_X(x) \sim_{\mathbb{P}} \mathcal{L}_{[0,1]}$ čee je X zvezna.
- (2) Obratno, naj bo $U \sim_{\mathbb{P}} \mathcal{L}_{[0,1]}$. Če je $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ porazdelitvena funkcija (ca'd, \uparrow , $\lim_{-\infty} F = 0$, $\lim_{\infty} F = 1$) in če vpeljemo

$$F^{\leftarrow}(x) := \inf\{v \in \mathbb{R}; F(v) > x\}, \quad x \in (0, 1),$$

potem je

$$F^{\leftarrow}(U) \sim_{\mathbb{P}} dF.^{11}$$

Definicija 3.3. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje v $\mathcal{F}/\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ in $X \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira k X v \mathbb{P} -verjetnosti $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$\forall \varepsilon \in (0, \infty) : \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Trditev 3.3. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor. Če je $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje v $\mathcal{F}/\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, ki konvergira k $X \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ s.g.- \mathbb{P} ali v $L^q(\mathbb{P})$ za nek $q \in [1, \infty]$, potem konvergira tudi v \mathbb{P} -verjetnosti.

3.2 Neodvisnost

Definicija 3.4. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor. Za družino $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ podmnožic \mathcal{F} rečemo, da je neodvisnost (pod \mathbb{P}) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ za vsako končno neprazno $I \subset \Lambda$, $\forall C_{\lambda} \in \mathcal{C}_{\lambda}$, $\lambda \in I$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{\lambda \in I} C_{\lambda}\right) = \prod_{\lambda \in I} \mathbb{P}(C_{\lambda}).$$

Za neodvisni podmnožici \mathcal{B} in \mathcal{C} σ -algebre \mathcal{F} je \mathcal{B} neodvisna od \mathcal{C} (pod \mathbb{P}) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ je neodvisnost (pod \mathbb{P}). Za dogodka B in C iz \mathcal{F} je B neodvisen

¹¹ F^{\leftarrow} je desni inverz F oz. kvantilna funkcija F .

od $C \stackrel{\text{def}}{\iff} \{B\}$ je neodvisna od $\{C\}$.

Za slučajni element Z z vrednostmi v merljivem prostoru (E, \mathcal{E}) in za $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ je \mathcal{B} neodvisna od Z (pod \mathbb{P} glede na \mathcal{E}) $\stackrel{\text{def}}{\iff} \mathcal{B}$ je neodvisna od $\sigma^{\mathcal{E}}(Z)$.¹²

Trditev 3.4. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor, X slučajni element z vrednostmi v (E, \mathcal{E}) , Y slučajni element t vrednostmi v (A, \mathcal{A}) . Potem je $(X, Y) \in \mathcal{F}/\mathcal{E} \otimes \mathcal{A}$. Najprej, X in Y sta neodvisna pod \mathbb{P} če $P_{(X,Y)} = \mathbb{P}_X \times \mathbb{P}_Y$; v tem primeru je za $f \in (\mathcal{E} \otimes \mathcal{A})/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$

$$\mathbb{P}[f(X, Y)] = \mathbb{P}_{(X,Y)}[f] = \int \mathbb{P}[f(x, Y)] \mathbb{P}_X(dx),$$

če je le $\mathbb{P}[f^-(X, Y)] \wedge \mathbb{P}[f^+(X, Y)] < \infty$; v posebnem, za $g \in \mathcal{E}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$, $h \in \mathcal{A}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ je

$$\mathbb{P}[g(X)h(Y)] = \mathbb{P}[g(X)]\mathbb{P}[h(Y)].$$

Trditev 3.5. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor in $(\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ družina π -sistemov, $\mathcal{C}_\lambda \subset \mathcal{F} \ \forall \lambda \in \Lambda$. Če je $(\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ neodvisnost, potem je tudi $(\sigma_\Omega(\mathcal{C}_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ neodvisnost.

Trditev 3.6. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor in (X, Y) absolutno zvezen bivariantni slučajni vektor. Označimo

$$f_{(X,Y)} := \frac{d\mathbb{P}_{(X,Y)}}{d\mathcal{L}^2}.$$

Potem sta X in Y absolutno zvezni slučajni spremenljivki;

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int f_{(X,Y)}(x, y) \mathcal{L}(dy) \quad \text{s.p.-}\mathcal{L} \text{ v } x, \\ f_Y(y) &= \int f_{(X,Y)}(x, y) \mathcal{L}(dx) \quad \text{s.p.-}\mathcal{L} \text{ v } y \end{aligned}$$

¹²Nasploš, neodvisnost slučajnih elementov pomeni neodvisnost σ -algebr, ki so generirane z njimi.

ter sta X in Y neodvisni čee

$$f_{(X,Y)} = f_X(x)f_Y(y) \quad \text{s.p.-}\mathcal{L}^2 \text{ v } (x,y).$$

Če sta X in Y neodvisni, potem je

$$\mathbb{P}[g(X,Y)] = \iint g(x,y)f_X(x)f_Y(y) \mathcal{L}(dx) \mathcal{L}(dy)$$

za $\forall g \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$ z $\mathbb{P}[g^+(X,Y)] \wedge \mathbb{P}[g^-(X,Y)] < \infty$.

Definicija 3.5. Ohranimo notacijo $f_{(X,Y)}$ za gostoto slučajnega vektorja (X,Y) .

Definicija 3.6. Naj bo $((\Omega_\lambda, \mathcal{F}_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ družina merljivih prostorov. Definiramo

$$\bigotimes_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda := \bigvee_{\lambda \in \Lambda} \sigma^{\mathcal{F}_\lambda}(\text{pr}_\lambda),$$

kjer so

$$\begin{aligned} \text{pr}_\lambda : \prod_{\mu \in \Lambda} \Omega_\mu &\rightarrow \Omega_\lambda, \quad \lambda \in \Lambda \\ (\omega_\mu)_{\mu \in \Lambda} &\mapsto \omega_\lambda \end{aligned}$$

kanonične projekcije. Za σ -algebro \mathcal{F} in množico Λ je

$$\mathcal{F}^{\otimes \Lambda} := \bigotimes_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda.$$

Trditev 3.7. Naj bo $((\Omega, \mathcal{F}_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ družina merljivih prostorov.

- (i) $\bigotimes_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda$ je najmanjša σ -algebra na $\prod_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda$ glede na katero so merljive vse kanonične projekcije pr_λ , $\lambda \in \Lambda$.
- (ii) Za merljiv prostr (Ω, \mathcal{F}) in družino funkcij $f_\lambda : \Omega \rightarrow \Omega_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, je

$$(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \mathcal{F}/(\bigotimes_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda) \iff f_\lambda \in \mathcal{F}/\mathcal{F}_\lambda, \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

- (iii) Naj bo μ_λ verjetnost na $(\Omega_\lambda, \mathcal{F}_\lambda)$, $\forall \lambda \in \Lambda$. Potem obstaja na $(\prod_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda, \otimes_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda)$ natanko ena verjetnost μ za katero so $(\text{pr}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ neodvisni pod μ in

$$(\text{pr}_\lambda)_* \mu = \mu_\lambda.$$

Trditev 3.8. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor in naj bo f_λ slučajni element z vrednostmi v $(E_\lambda, \mathcal{E}_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$. Potem je $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ neodvisnost pod \mathbb{P} čee

$$((f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})_{* \otimes_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{E}_\lambda} \mathbb{P} = \bigtimes_{\lambda \in \Lambda} (f_{\lambda*} \mathbb{P}).$$

Definicija 3.7. μ iz točke (iii) v trditvi 3.7 označimo z

$$\bigtimes_{\lambda \in \Lambda} \mu_\lambda,$$

produkt verjetnostnih mer μ_λ , $\lambda \in \Lambda$. Za verjetnost μ in množico Λ velja

$$\mu^{\times \Lambda} := \bigtimes_{\lambda \in \Lambda} \mu_\lambda.$$

3.3 Pogojevanje

Trditev 3.9. Če je $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor in $A \in \mathcal{A}$ z $\mathbb{P}(A) > 0$, potem je $(A, \mathcal{A}|_A, \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \mathbb{P}_A)$ verjetnostni prostor in

$$\left(\frac{1}{\mathbb{P}(A)} \mathbb{P} \right) [f] = \frac{\mathbb{P}[f; A]}{\mathbb{P}(A)}, \quad \forall f \in (\mathcal{A}|_A) / \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}.$$

Definicija 3.8. Naj bo $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor in $A \in \mathcal{A}$ z $\mathbb{P}(A) > 0$. Za $B \in \mathcal{A}$ definiramo

$$\mathbb{P}(B | A) := \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)},$$

verjetnost B pogojno na A pod \mathbb{P} . Pišemo

$$\mathbb{P}(\cdot \mid A) = \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \mathbb{P}_A.$$

Za $f \in \mathcal{A}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$, ali $f : \Omega \rightarrow \mathcal{C}$ z $\{\Re(f), \Im(f)\} \subset L^1(\mathbb{P})$, postavimo

$$\mathbb{P}[f \mid A] := \frac{\mathbb{P}[f; A]}{\mathbb{P}(A)},$$

upanje f pogojno na A .

Trditev 3.10. Naj bo $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor in \mathcal{B} pod- σ -algebra \mathcal{A} , $f \in \mathcal{A}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$, $\mathbb{P}[f^+], \mathbb{P}[f^-] < \infty$. Potem obstaja do \mathbb{P} -s.g. enakosti enoličen $g \in \mathcal{B}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ z $\mathbb{P}[g^+] \wedge \mathbb{P}[g^-] < \infty$, tak da je

$$\mathbb{P}[f; B] = \mathbb{P}[g; B], \quad \forall B \in \mathcal{B},$$

t.j. $(f \cdot \mathbb{P})|_{\mathcal{B}} = g(\mathbb{P}|_{\mathcal{B}})$; ta g je $\frac{d((f \cdot \mathbb{P})|_{\mathcal{B}})}{d(\mathbb{P}|_{\mathcal{B}})}$ s.g.- \mathbb{P} , če je $f \geq 0$ in $\mathbb{P}[f] < \infty$.

Definicija 3.9. g iz trditve 3.10 označimo z

$$\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}] := \mathbb{P}_{\mathcal{B}}(f) := \mathbb{P}_{\mathcal{B}}f,$$

pogojno matematično upanje f glede na \mathcal{B} pod \mathbb{P} . Če je $\mathbb{P}[|f|] < \infty$ potem vztrajamo na temu, da je $|\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}]| < \infty$ povsod. Za $A \in \mathcal{A}$ pišemo

$$\mathbb{P}(A \mid \mathcal{B}) := \mathbb{P}[\mathbb{1}_A \mid \mathcal{B}] =: \mathbb{P}_{\mathcal{B}}(A) =: \mathbb{P}_{\mathcal{B}}A,$$

pogojna verjetnost glede na \mathcal{B} pod \mathbb{P} .

Trditev 3.11. Naj bo $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor, \mathcal{B} pod- σ -algebra \mathcal{A} in $f \in \mathcal{A}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ z $\mathbb{P}[f^+] \wedge \mathbb{P}[f^-] < \infty$. Pogojno matematično upanje ima sledeče lastnosti:

(i) (*Stabilnost.*) Če je $f \in \mathcal{B}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$, potem je

$$\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}] = f \quad \text{s.g.-}\mathbb{P}.$$

(ii) (*Zakon popolne verjetnosti/stolpna lastnosti.*)

$$\mathbb{P}[\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}]] = \mathbb{P}[f]$$

(iii) Naj bo \mathcal{C} pod- σ -algebra \mathcal{A} .

(a) (*Zaporedno pogojevanje/stolpna lastnost.*) Če sta \mathcal{B} in \mathcal{C} primerljiva glede na inkluzijo je

$$\mathbb{P}[\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}] \mid \mathcal{C}] = \mathbb{P}[f \mid \mathcal{B} \cap \mathcal{C}] \quad \text{s.g.-}\mathbb{P}.$$

(b) (*Nerelevantnost trivialnih dogodkov.*) Če je $\mathcal{B} \vee \mathbb{P}^{-1}(\{0, 1\}) = \mathcal{C} \vee \mathbb{P}^{-1}(\{0, 1\})$, potem je

$$\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}] = \mathbb{P}[f \mid \mathcal{C}] \quad \text{s.g.-}\mathbb{P}.$$

(iv) (*Nerelevantnost množic z mero nič.*) Če je $g \in \mathcal{A}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$, $\mathbb{P}[g^+] \wedge \mathbb{P}[g^-] < \infty$ in $g = f$ s.g.- \mathbb{P} potem je

$$\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}] = \mathbb{P}[g \mid \mathcal{B}] \quad \text{s.g.-}\mathbb{P}.$$

(v) (*Pogojevanje na trivialno σ -algebro.*) Če je $\mathcal{B} \subset \mathbb{P}^{-1}(\{0, 1\})$, potem je

$$\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}] = \mathbb{P}[f] \quad \text{s.g.-}\mathbb{P}.$$

V posebnem je $\mathbb{P}[f \mid \{\emptyset, \infty\}] = \mathbb{P}[f]$.

(vi) (*Aditivnost.*) Če je še $g \in \mathcal{A}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ in $\mathbb{P}[f^-] \vee \mathbb{P}[g^-] < \infty$, potem je

$$\mathbb{P}[f + g \mid \mathcal{B}] = \mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}] + \mathbb{P}[g \mid \mathcal{B}] \quad \text{s.g.-}\mathbb{P}.$$

(vii) Naj bo $\mathbb{P}[|f|] < \infty$. Naj bo še $g \in \mathcal{B}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ z $\mathbb{P}[|g|] < \infty$. Če je

$$\mathbb{P}[f; B] = \mathbb{P}[g; B], \quad \forall B \in \Pi \cup \{\Omega\}$$

za nek π -sistem Π , ki generira \mathcal{B} na Ω , potem je

$$g = \mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}] \quad \text{s.g.-}\mathbb{P}.$$

(viii) Za $h \in \mathcal{B}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ z $\mathbb{P}[(hf)^+] \wedge \mathbb{P}[(hf)^-] < \infty$ je

$$\mathbb{P}[(h\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}])^+] \wedge \mathbb{P}[(h\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}])^-] < \infty$$

in

$$\mathbb{P}[fh] = \mathbb{P}[\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}]h].$$

- (ix) (*Pogojni determinizen/homogenost.*) Če je $g \in \mathcal{B}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ z $\mathbb{P}[(fg)^+] \wedge \mathbb{P}[(fg)^-] < \infty$, potem je

$$\mathbb{P}[fg \mid \mathcal{B}] = g\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}] \quad \text{s.g.-}\mathbb{P}.$$

V posebnem za $c \in \mathbb{R}$ je $\mathbb{P}[cf \mid \mathcal{B}] = c\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}]$ s.g.- \mathbb{P} .

- (x) (*Monotonost.*) Če je $g \in \mathcal{A}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ z $\mathbb{P}[g^-] \wedge \mathbb{P}[g^+] < \infty$ in če je $\mathbb{P}[f; B] \leq \mathbb{P}[g; B] \quad \forall B \in \mathcal{B}$ (v posebnem, če je $f \leq g$ s.g.- \mathbb{P}), potem je

$$\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}] \leq \mathbb{P}[g \mid \mathcal{B}] \quad \text{s.g.-}\mathbb{P}.$$

- (xi) (*Trikotniška neenakost.*)

$$|\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}]| \leq \mathbb{P}[|f| \mid \mathcal{B}] \quad \text{s.g.-}\mathbb{P}$$

- (xii) Za namene te točke opustimo predpostavko $\mathbb{P}[f^+] \wedge \mathbb{P}[f^-] < \infty$. Naj bo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje v $\mathcal{A}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ in $g \in \mathcal{A}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ z $\mathbb{P}[g] < \infty$ in $g \geq f_n^-$ s.g.- \mathbb{P} , $\forall n \in \mathbb{N}$.

- (a) (*Monotona konvergenca.*) Če $f_n \uparrow f$, ko gre $n \rightarrow \infty$, s.g.- \mathbb{P} , potem tudi

$$\mathbb{P}[f_n \mid \mathcal{B}] \uparrow \mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}],$$

ko gre $n \rightarrow \infty$, s.g.- \mathbb{P} .

- (b) (*Fatou-jeva lema.*) $\mathbb{P}[(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n)^-] < \infty$ in

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[f_n \mid \mathcal{B}] \geq \mathbb{P}[\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \mid \mathcal{B}] \quad \text{s.p.-}\mathbb{P}.$$

- (c) (*Dominirana konvergenca.*) Če je $|f_n| \leq g$ s.g.- \mathbb{P} , $\forall n \in \mathbb{N}$ in $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ s.g.- \mathbb{P} , potem je $\mathbb{P}[[f]] < \infty$ in

$$\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[f_n \mid \mathcal{B}]$$

s.g.- \mathbb{P} in v $L^1(\mathbb{P})$.

- (xiii) (a) (*Neodvisno pogojevanje.*) Če je \mathcal{B}' še pod- σ -algebra \mathcal{A} , $f' \in \mathcal{A}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ z $\mathbb{P}[(f')^+] \wedge \mathbb{P}[(f')^-] < \infty$ in če je $\mathcal{B} \vee \sigma(f)$ neodvisna od $\mathcal{B}' \vee \sigma(f')$ kot tudi $\mathbb{P}[(ff')^+] \wedge \mathbb{P}[(ff')^-] < \infty$, potem je

$$\mathbb{P}[ff' \mid \mathcal{B} \vee \mathcal{B}'] = \mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}]\mathbb{P}[f' \mid \mathcal{B}'] \quad \text{s.g.-}\mathbb{P}.$$

- (b) (*Nerelevantnost neodvisnih dogodkov.*) Če je \mathcal{C} pod- σ -algebra \mathcal{A} , ki je neodvisna od $\mathcal{B} \vee \sigma(f)$, potem je

$$\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B} \vee \mathcal{C}] = \mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}] \quad \text{s.g.-}\mathbb{P}.$$

- (c) (*Pogojevanje na neodvisno σ -algebro.*) Če je \mathcal{B} neodvisna od $\sigma(f)$, potem je

$$\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}] = \mathbb{P}[f] \quad \text{s.p.-}\mathbb{P}.$$

- (xiv) (*Jensenova neenakost.*) Če je $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ konveksna, I interval na \mathbb{R} , f jemlje vrednosti v I , $\mathbb{P}[|f|] < \infty$, potem je $\mathbb{P}(\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}] \in I) = 1$, $\varphi \circ f \in \mathcal{A}/\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $\mathbb{P}[(\varphi \circ f)^-] < \infty$,

$$\mathbb{P}[\varphi \circ f \mid \mathcal{B}] \geq \varphi \circ (\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}]) \quad \text{s.g.-}\mathbb{P}$$

in $f = \mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}]$ s.g.- \mathbb{P} na $\{\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}] \in \partial I\}$.

Trditev 3.12. Naj bo $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor. Nekaj metod za direktno računanje matematičnega upanja:

- (i) (*Diskretno pogojno matematično upanje.*) Naj bo $I \in 2^{\mathcal{A}}$ števna particija Ω . Potem je za $X \in \mathcal{A}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$

$$\mathbb{P}[X \mid \sigma_{\Omega}(\mathcal{I})] = \sum_{I \in \mathcal{I} \cap \mathbb{P}^{-1}((0,1])} \mathbb{1}_I \cdot \mathbb{P}[X \mid I] \quad \text{s.p.-}\mathbb{P},$$

torej $\mathbb{P}[X \mid \sigma_{\Omega}(\mathcal{I})] = \mathbb{P}[X \mid I]$ na I , za vsak $I \in \mathcal{I}$ z $\mathbb{P}(I) > 0$.

- (ii) Naj bosta (F, \mathcal{F}) in (E, \mathcal{E}) merljiva prostora, $X \in \mathcal{A}/\mathcal{F}$, $Y \in \mathcal{A}/\mathcal{E}$ slučajna elementa, $h \in (\mathcal{F} \otimes \mathcal{E})/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$, $\mathbb{P}[h^+(X, Y)] \wedge \mathbb{P}[h^-(X, Y)] < \infty$.

- (a) (*Absolutno zvezna slučajni elementa.*) Naj bosta \mathbb{f} σ -končna mera na (F, \mathcal{F}) in \mathbb{e} σ -končna mera na (E, \mathcal{E}) in naj bo $\mathbb{P}_{(X,Y)} \ll \mathbb{f} \times \mathbb{e}$.¹³ Označimo

$$f_{12} := \frac{d\mathbb{P}_{(X,Y)}}{d(\mathbb{f} \times \mathbb{e})}, \quad f_2 := \frac{d\mathbb{P}_Y}{d\mathbb{e}}.$$

Potem je \mathbb{P} -s.g.

$$\mathbb{P}[h(X, Y) \mid \sigma^{\mathcal{E}}(Y)] = c(Y),$$

¹³Zadnja predpostavka implicira $\mathbb{P}_X \ll \mathbb{f}$ in $\mathbb{P}_Y \ll \mathbb{e}$.

kjer je

$$c(y) := \int h(x, y) \frac{f_{12}(x, y)}{f_2(y)} \mathbb{P}(dx) \mathbb{1}_{\{f_2 > 0\}} y, \quad y \in \mathbb{E}.$$

Naprej, $c \in \mathcal{E}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$.

- (b) (*Neodvisna slučajne elementa.*) Naj bo \mathcal{G} pod- σ -algebra \mathcal{A} , da je $Y \in \mathcal{G}/\mathcal{E}$ in X neodvisna od \mathcal{G} . Potem je \mathbb{P} -s.g.

$$\mathbb{P}[h(X, Y) \mid \mathcal{G}] = d(Y),$$

kjer je

$$d(y) := \mathbb{P}[h(X, y)], \quad y \in E.$$

Naprej, $d \in \mathcal{E}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$.

Definicija 3.10. Če je $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor in Z slučajni element z vrednostmi v merljivem prostoru (E, \mathcal{E}) ; potem pišemo

$$\mathbb{P}[f \mid Z] := \mathbb{P}[f \mid \sigma^{\mathcal{E}}(Z)]$$

za $f \in \mathcal{A}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ z $\mathbb{P}[f^+] \wedge \mathbb{P}[f^-] < \infty$.

Trditev 3.13. Naj bo $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor in Z slučajni element z vrednostmi v merljivem prostoru (E, \mathcal{E}) . Za $f \in \mathcal{A}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ z $\mathbb{P}[f^+] \wedge \mathbb{P}[f^-] < \infty$ obstaja \mathbb{P}_Z -s.g. enolično določen $g \in \mathcal{E}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$, da je

$$\mathbb{P}[f \mid Z] = g(Z) \quad \text{s.g.-}\mathbb{P}.$$