Verjetnost z mero - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar
po predavanjih profesorja Matija Vidmarja

2021/22

Kazalo

1 Merljivost in mera

1.1 Merljive množice

Definicija 1.1. Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ (t.j. $\mathcal{A} \in 2^{2^\Omega}$). Potem rečemo, da je $\mathcal{A}$ *zaprta* za:

- c^Ω (t.j. za komplement v Ω)
$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall A : (A \in \Omega \;\Rightarrow\; \Omega \setminus A \in \mathcal{A});$$
- $\cap$ (t.j. za preseke)
$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A} \text{ brž ko je } \{A_1, A_2\} \subset A;$$
- $\cup$ (t.j. za unije)
$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A} \text{ brž ko je } \{A_1, A_2\} \subset A;$$
- $\setminus$ (t.j. za razlike)
$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A} \text{ brž ko je } \{A_1, A_2\} \subset A;$$
- $\sigma\cap$ (t.j. za števne preseke)
$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \text{ za vsako zaporedje } (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ iz } \mathcal{A};$$
- $\sigma\cup$ (t.j. za števne unije)
$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \text{ za vsako zaporedje } (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ iz } \mathcal{A}.$$

Definicija 1.2. $\mathcal{A}$ je σ-*algebra* na Ω
$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad (\Omega, \mathcal{A}) \text{ je merljiv prostor}$$
$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad \emptyset \in \mathcal{A} \text{ in } \mathcal{A} \text{ je zaprt za } \mathsf{c}^\Omega \text{ in za } \sigma\cup.$$

V primeru, da $\mathcal{A}$ je σ-algebra na Ω:

- A je $\mathcal{A}$-merljiva $\overset{\text{def}}{\iff}$ $A \in \mathcal{A}$;
- $\mathcal{B}$ je pod-σ-algebra $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mathcal{B}$ je σ-algebra na Ω in $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

Trditev 1.1. Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ zaprta za c^Ω in naj bo $\emptyset \in \mathcal{A}$. Potem je $\mathcal{A}$ σ-algebra na Ω, če je $\mathcal{A}$ zaprta za števne preseke, in v tem primeru je $\mathcal{A}$ zaprta za $\cap$, $\cup$ in $\setminus$.

1.2 Mere

Definicija 1.3. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F})$ merljiv prostor in $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$. μ je *mera* na $(\Omega, \mathcal{F})$ $\overset{\text{def}}{\iff}$

- $\mu(\emptyset) \;=\; 0$;
- $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\right) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ za vsako zaporedje $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{F}$, ki sestoji iz paroma disjunktnih dogodkov.

Lastnosti:

- Mera μ na $(\Omega, \mathcal{F})$ je *končna* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mu(\Omega) < \infty$.
- Mera μ na $(\Omega, \mathcal{F})$ je *verjetnostna*[1] $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mu(\Omega) = 1$
- Mera μ na $(\Omega, \mathcal{F})$ je *σ-končna* $\overset{\text{def}}{\iff}$ obstaja zaporedje $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v $\mathcal{F}$, da je

$$\begin{aligned} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \;&=\; \Omega \quad \text{in} \\ \mu(A_n) \;&<\; \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ je prostor z mero $\overset{\text{def}}{\iff}$ μ je mera na $(\Omega, \mathcal{F})$. Če je μ mera na $(\Omega, \mathcal{F})$ potem je $\mu(\Omega)$ *masa* mere μ. Če je $A \in \mathcal{F}$, potem je:

- A je *μ-zanemarljiv* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mu(A) = 0$;

[1] Tudi: μ je *verjetnost*.

- A je *μ-trivialna* $\overset{\text{def}}{\iff}$ A ali $\Omega \setminus A$ je μ-zanemarljiva

Če imamo poleg tega še lastnost $P(\omega)$ v $\omega \in A$, potem

- $P(\omega)$ drži *μ-skoraj povsod* (μ-s.p.) v $\omega \in A$ $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$A_{\neg P} \ := \ \{\omega \in \Omega \mid \neg P(\omega) \in \mathcal{F} \text{ in } \mu(A_{\neg P}) = 0\};$$

- $P(\omega)$ drži *μ-skoraj gotovo* (μ-s.g.) $\overset{\text{def}}{\iff}$ $P(\omega)$ drži μ-skoraj povsod in μ je verjetnostna.

P drži μ-skoraj povsod na A $\overset{\text{def}}{\iff}$ $P(\omega)$ drži μ-skoraj povsod v $\omega \in A$. Podobno za ostale.

Trditev 1.2. Naj bo μ mera na $(\Omega, \mathcal{F})$. Potem:

(i) μ je aditivna:
$$\mu(A \cup B) \ = \ \mu(A) + \mu(B)$$
za vsaki disjunktivni množici $A, B \in \mathcal{F}$.

(ii) μ je monotona:
$$\mu(A) \ \leq \ \mu(B),$$
če je $A \subset B$ in $A, B \in \mathcal{F}$

(iii) μ je zvezna od spodaj:
$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \ = \ \uparrow\text{-}\lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$
za vsako zaporedje $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iz $\mathcal{F}$, ki je nepadajoče glede na inkluzijo: $A_n \subset A_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

(iv) μ je števno subaditivna:
$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \ \leq \ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$
za vsako zaporedje $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iz $\mathcal{F}$.

(v) Naj bo μ končna:

$$\mu(\Omega \setminus A) \;=\; \mu(\Omega) - \mu(A) \;\forall A \in \mathcal{F}.$$

Naprej, μ je zvezna od zgoraj:

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \;=\; \downarrow\text{-}\lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

za vsako zaporedje $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{F}$, ki je nenaraščajoča glede na inkluzijo: $A_n \supset A_{n+1}\ \forall n \in N$.

(vi) Za vsak $A \in \mathcal{F}$ je

$$\mathcal{F}\big|_A \;:=\; \{B \cap A \mid B \in \mathcal{F}\}$$

σ-algebra na A in $\mu_A := \mu\big|_{\mathcal{F}|_A}$ je mera na $(A, \mathcal{F}\big|_A)$.

Definicija 1.4. $\mu_A := \mu\big|_{\mathcal{F}|_A}$ rečemo *mera μ zožana na A* oz. *zožitev μ na A.*

1.3 Merljive preslikave in generirane σ-algebre

Definicija 1.5. Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$:

$$\sigma_\Omega(\mathcal{A}) \;:=\; \bigcap\{\mathcal{F} \in 2^{2^\Omega} \mid \mathcal{F}\ \sigma\text{-algebra na } \Omega \text{ in } \mathcal{F} \supset \mathcal{A}\},$$

rečemo σ-algebra z A na Ω. Če sta $\mathcal{B}_1$ in $\mathcal{B}_2$ obe σ-algebri na Ω, potem definiramo

$$\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2 \;:=\; \sigma_\Omega(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)$$

in ji rečemo skupek $\mathcal{B}_1$ in $\mathcal{B}_2$. Bolj splošno, če imamo družino σ-algebr $(B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ na Ω, potem postavimo

$$\bigvee_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{B}_\lambda \;:=\; \sigma_\Omega\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{B}_\lambda\right).$$

Definicija 1.6. Naj bo $f : \Omega \to \Omega'$. Če je dana σ-algebra $\mathcal{F}'$ na Ω', potem definiramo

$$\sigma^{\mathcal{F}'}(f) \ := \ \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{F}'\}.$$

Začetno strukturo f glede na $\mathcal{F}'$ (tudi, σ-algebra generirana s f glede na $\mathcal{F}'$). Če je dana σ-algebra $\mathcal{F}$ na Ω, potem definiramo

$$\sigma_{\mathcal{F}}^{\Omega'}(f) \ := \ \{A' \in 2^{\Omega'} \mid f^{-1}(A') \in \mathcal{F}\}$$

končno strukturo f na Ω' glede na $\mathcal{F}$. Če sta dani σ-algebri $\mathcal{F}$ na Ω in σ-algebra $\mathcal{F}'$ na Ω, potem rečemo: f je $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$-merljiva $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$f^{-1}(A') \in \mathcal{F}, \quad \forall A' \in \mathcal{F}.$$

Definicija 1.7. Če je $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω in je $\mathcal{F}'$ σ-algebra na Ω', potem označimo

$$\mathcal{F}/\mathcal{F}' \ := \ \{f \in \Omega'^{\Omega} \mid f \text{ je } \mathcal{F}/\mathcal{F}'\text{-merljiva}\}.$$

Definicija 1.8. Za $A \subset \Omega$ definiramo $\mathbb{1}_{A_\Omega} : \Omega \to \{0, 1\}$,

$$\mathbb{1}_{A_\Omega}(x) \ := \ \begin{cases} 1\,; & x \in A, \\ 0\,; & x \notin A, \end{cases} \quad x \in \Omega,$$

ki ji rečemo *indikatorska funkcija A na ambientnem prostoru* Ω.[2]

Trditev 1.3. Za σ-algebre $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$, kjer $f \in \mathcal{F}/\mathcal{G}$ in $g \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$ je

$$g \circ f \ \in \ \mathcal{F}/\mathcal{H}.$$

Trditev 1.4. Naj bo $f : \Omega \to \Omega'$:

(i) Za σ-algebro $\mathcal{F}'$ na Ω' je $\sigma^{\mathcal{F}'}(f)$ σ-algebra na Ω; ona je najmanjša (glede na inkluzijo) σ-algebra $\mathcal{G}$ na Ω, da je $f \in \mathcal{G}/\mathcal{F}'$.

(ii) Za σ-algebro $\mathcal{F}$ na Ω je $\sigma_F^{\Omega'}(f)$ σ-algebra na Ω'; ona je največja (glede na inkluzijo) σ-algebra $\mathcal{G}'$ na Ω, da je $f \in \mathcal{F}/\mathcal{G}$.

[2] Ponavadi namesto $\mathbb{1}_{A_\Omega}$ pišemo le $\mathbb{1}_A$.

(iii) Za σ-algebro $\mathcal{F}$ na Ω in σ-algebro $\mathcal{F}'$ na Ω' je

$$f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}' \iff \sigma^{\mathcal{F}'}(f) \subset \mathcal{F} \iff \mathcal{F}' \subset \sigma_{\mathcal{F}}^{\Omega'}(f).$$

(iv) Naj bo $\mathcal{A}'\sigma 2^{\Omega'}$ ter $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω. Potem je

$$f \in \mathcal{F}/\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}') \iff (f^{-1}(A') \in \mathcal{F},\ \forall A' \in \mathcal{A}').$$

Velja tudi

$$\sigma^{\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}')}(f) = \sigma_{\Omega}(\{f^{-1}(A') \mid A' \in \mathcal{A}'\}).$$

Definicija 1.9. *Sled $\mathcal{A}$ na A* definiramo kot

$$\mathcal{A}\big|_A := \{B \cap A \mid B \in \mathcal{A}\}.^3$$

Trditev 1.5 (Sledi komutirajo v generirani σ-algebri)**.** Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ in $A \subset \Omega$. Potem je

$$\sigma_A(\mathcal{A}\big|_A) = \sigma_{\Omega}(\mathcal{A})\big|_A.$$

Trditev 1.6. Naj bo $f : \Omega \to \Omega'$ in naj bo $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω ter $\mathcal{F}'$ σ-algebra na Ω'.

(i) Če je $A' \subset \Omega'$ in $f : \Omega \to A'$, potem je

$$f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}' \iff f \in \mathcal{F}/(\mathcal{F}'\big|_{A'}).$$

(ii) Če je $A \in \Omega$ in $f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$, potem

$$f\big|_A \in (\mathcal{F}\big|_A)/\mathcal{F}'.$$

(iii) Če je $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ zaporedje v $\mathcal{F}$ in $\Omega = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ in je $f\big|_{A_i} \in (\mathcal{F}\big|_{A_i})/\mathcal{F}'$ $\forall i \in \mathbb{N}$, potem je

$$f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$$

.

[3] Zapis je isti kot za zožitev, vendar ne pomeni isto.

1.4 Borelove množice na razširjeni realni osi $[-\infty,\infty]$ in Borelova merljivost numeričnih funkcij

Definicija 1.10. Definirajmo *razširjeno realno os*:

$$\begin{aligned} [-\infty,\infty] &:= \mathbb{R}\cup\{\infty\}\cup\{-\infty\} \\ [-\infty,a] &:= \{-\infty\}\cup(-\infty,a] \quad \text{za } a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\} \end{aligned}$$

Relacijo $\leq$ na $\mathbb{R}$ razširimo na $[-\infty,\infty]$ kot sledi:

$$-\infty \leq x \leq \infty \quad \forall x\in[-\infty,\infty].$$

Temu ustrezno imamo "$(<) := (\leq)\setminus(=)$", itd.

Definicija 1.11. *Borelovo σ-algebro* na $[-\infty,\infty]$ definiramo kot

$$\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]} := \sigma_{[-\infty,\infty]}(\{[-\infty,a] \mid a\in\mathbb{R}\}).$$

Za $A\subset[-\infty,\infty]$ je

$$\mathcal{B}_A := \mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}\big|_A$$

Borelova σ-algebra na A. Elementom Borelovih σ-algebr pravimo *Borelove množice.*

Definicija 1.12. Funkcija f je *numerična*, če je $\mathcal{Z}_f\in[-\infty,\infty]$.

Definicija 1.13. Če je funkcija f numerična:

- $\sigma(f) := \sigma^{\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}}(f)$;
- če je $\mathcal{F}$ σ-algebra na domeni f, je f $\mathcal{F}$-merljiva $\overset{\text{def}}{\iff}$ f je $\mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$-merljiva;
- če je $g:\mathcal{D}_f\to[-\infty,\infty]$, je

$$\begin{aligned} g\wedge f &:= \min\{g,f\}^4 \\ g\vee f &:= \max\{g,f\}. \end{aligned}$$

Definiramo *pozitivni* in *negativni del* f:

$$\begin{aligned} f^+ &:= f\vee 0 \\ f^- &:= (-f)\vee 0 \end{aligned}$$

Opomba.

- $f \;=\; f^+ - f^-$
- $|f| \;=\; f^+ + f^-$

Definicija 1.14. Dogovorimo se

$$\begin{aligned} 0 \cdot (\pm\infty) \;&:=\; 0 \;=:\; (\pm\infty) \cdot 0 \\ \infty + (-\infty) \;&:=\; 0 \;=:\; (-\infty) + \infty. \end{aligned}$$

Preostanek aritmetike na $[-\infty, \infty]$ definiramo na naraven način, npr.

$$\begin{aligned} a \cdot \infty \;&:=\; \operatorname{sgn}(a) \cdot \infty \quad \text{za } a \in [-\infty, \infty] \setminus \{0\} \\ a + \infty \;&:=\; \infty \quad \text{za } a \in (-\infty, \infty] \\ \infty - \infty \;&:=\; \infty + (-\infty) \;=\; 0 \\ &\textit{itd.} \end{aligned}$$

Trditev 1.7. Če je $A \subset [-\infty, \infty]$ in je $f : A \to [-\infty, \infty]$ zvezna, potem je $f \in \mathcal{B}_A/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$. Če je $\{f, g\} \subset \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$ za σ-algebro $\mathcal{F}$, potem je

$$\{f + g, f \cdot g\} \subset \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$$

in

$$\{\{f \leq g\}, \{f = g\}, \{f < g\}\} \subset \mathcal{F}$$

.

Trditev 1.8. Naj bo $\mathcal{F}$ σ-algebra in $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje v $\mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$. Potem je

$$\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n, \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n, \limsup_{n\to\infty} f_n, \liminf_{n\to\infty} f_n\} \;\subset\; \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}.$$

Če je $f_n \geq 0 \;\forall n \in \mathbb{N}$, potem je

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \;\in\; \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[0,\infty]}.$$

Definicija 1.15. Naj bo $\mathcal{F}$ σ-algebra. Za $\{f, g\} \subset \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$ je

$$\{f \vee g, f \wedge g, f^+, f^-, |f|\} \ \subset \ \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}.$$

Za zaporedje $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v $\mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$ je

$$\{\{f_n \text{ konverg., ko } n \to \infty\}, \{f_n \text{ konverg. v } \mathbb{R}, \text{ ko } n \to \infty\}, \{\lim_{n\to\infty} f_n = f_\infty\}\} \ \subset \ \mathcal{F}.$$