Verjetnost z mero - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar
po predavanjih profesorja Matija Vidmarja

2021/22

Kazalo

1 Merljivost in mera **3**

1.1 Merljive množice . . . 3

1.2 Mere . . . 4

1.3 Merljive preslikave in generirane σ-algebre . . . 6

1.4 Borelove množice na razširjeni realni osi $[-\infty, \infty]$ in Borelova merljivost numeričnih funkcij . . . 9

1.5 Argumenti monotonega razreda . . . 11

1.6 Lebesgue-Stieltjesova mera . . . 13

2 Integracija na merljivih prostorih **15**

2.1 Lebesgueov integral . . . 15

2.2 Konvergenčni izreki s posledicami . . . 17

2.3 Rezultati, ki se tičejo menjave vrsrnega reda integracije . . . 19

2.4 Nedoločena integracija in absolutna zveznost . . . 21

2.5 Prostori L in nekaj integralskih neenakosti . . . 23

3 Verjetnost kot normalizirana mera **25**

3.1 Osnovni pojmi . . . 25

3.2 Neodvisnost . . . 27

3.3 Pogojevanje . . . 30

1 Merljivost in mera

1.1 Merljive množice

Definicija 1.1. Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ (t.j. $\mathcal{A} \in 2^{2^{\Omega}}$). Potem rečemo, da je $\mathcal{A}$ *zaprta* za:

- c^{Ω} (t.j. za komplement v Ω)
$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall A : (A \in \Omega \ \Rightarrow \ \Omega \backslash A \in \mathcal{A});$$
- $\cap$ (t.j. za preseke)
$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A} \ \text{ brž ko je } \{A_1, A_2\} \subset A;$$
- $\cup$ (t.j. za unije)
$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A} \ \text{ brž ko je } \{A_1, A_2\} \subset A;$$
- $\backslash$ (t.j. za razlike)
$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad A_1 \backslash A_2 \in \mathcal{A} \ \text{ brž ko je } \{A_1, A_2\} \subset A;$$
- $\sigma\cap$ (t.j. za števne preseke)
$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \ \text{ za vsako zaporedje } (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ iz } \mathcal{A};$$
- $\sigma\cup$ (t.j. za števne unije)
$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \ \text{ za vsako zaporedje } (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ iz } \mathcal{A}.$$

Definicija 1.2. $\mathcal{A}$ je *σ-algebra* na Ω

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad (\Omega, \mathcal{A}) \ \text{ je merljiv prostor}$$
$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \varnothing \in \mathcal{A} \text{ in } \mathcal{A} \text{ je zaprt za } \mathsf{c}^{\Omega} \text{ in za } \sigma\cup .$$

V primeru, da $\mathcal{A}$ je σ-algebra na Ω:

- A je $\mathcal{A}$-merljiva $\overset{\text{def}}{\iff}$ $A \in \mathcal{A}$;
- $\mathscr{B}$ je pod-σ-algebra $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mathscr{B}$ je σ-algebra na Ω in $\mathscr{B} \subset \mathcal{A}$.

Trditev 1.1. Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ zaprta za c^Ω in naj bo $\varnothing \in \mathcal{A}$. Potem je $\mathcal{A}$ σ-algebra na Ω, če je $\mathcal{A}$ zaprta za števne preseke, in v tem primeru je $\mathcal{A}$ zaprta za $\cap$, $\cup$ in $\setminus$.

1.2 Mere

Definicija 1.3. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F})$ merljiv prostor in $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$. μ je *mera* na $(\Omega, \mathcal{F})$ $\overset{\text{def}}{\iff}$

- $\mu(\varnothing) \ = \ 0;$
- $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\right) \ = \ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ za vsako zaporedje $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{F}$, ki sestoji iz paroma disjunktnih dogodkov.

Lastnosti:

- Mera μ na $(\Omega, \mathcal{F})$ je *končna* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mu(\Omega) < \infty$.
- Mera μ na $(\Omega, \mathcal{F})$ je *verjetnostna*[1] $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mu(\Omega) = 1$
- Mera μ na $(\Omega, \mathcal{F})$ je *σ-končna* $\overset{\text{def}}{\iff}$ obstaja zaporedje $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v $\mathcal{F}$, da je

$$\begin{aligned} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ &= \ \Omega \quad \text{in} \\ \mu(A_n) \ &< \ \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ je prostor z mero $\overset{\text{def}}{\iff}$ μ je mera na $(\Omega, \mathcal{F})$. Če je μ mera na $(\Omega, \mathcal{F})$ potem je $\mu(\Omega)$ *masa* mere μ. Če je $A \in \mathcal{F}$, potem je:

- A je *μ-zanemarljiv* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mu(A) = 0$;

[1] Tudi: μ je *verjetnost*.

- A je *μ-trivialna* $\overset{\text{def}}{\iff}$ A ali $\Omega \backslash A$ je μ-zanemarljiva

Če imamo poleg tega še lastnost $P(\omega)$ v $\omega \in A$, potem

- $P(\omega)$ drži *μ-skoraj povsod* (μ-s.p.) v $\omega \in A$ $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$A_{\neg P} \;:=\; \{\omega \in \Omega \mid \neg P(\omega) \in \mathcal{F} \text{ in } \mu(A_{\neg P}) = 0\};$$

- $P(\omega)$ drži *μ-skoraj gotovo* (μ-s.g.) $\overset{\text{def}}{\iff}$ $P(\omega)$ drži μ-skoraj povsod in μ je verjetnostna.

P drži μ-skoraj povsod na A $\overset{\text{def}}{\iff}$ $P(\omega)$ drži μ-skoraj povsod v $\omega \in A$. Podobno za ostale.

Trditev 1.2. Naj bo μ mera na $(\Omega, \mathcal{F})$. Potem:

(i) μ je aditivna:

$$\mu(A \cup B) \;=\; \mu(A) + \mu(B)$$

za vsaki disjunktivni množici $A, B \in \mathcal{F}$.

(ii) μ je monotona:

$$\mu(A) \;\leqslant\; \mu(B),$$

če je $A \subset B$ in $A, B \in \mathcal{F}$

(iii) μ je zvezna od spodaj:

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \;=\; \uparrow\text{-}\lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

za vsako zaporedje $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{F}$, ki je nepadajoče glede na inkluzijo: $A_n \subset A_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

(iv) μ je števno subaditivna:

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \;\leqslant\; \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

za vsako zaporedje $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{F}$.

(v) Naj bo μ končna:

$$\mu(\Omega \backslash A) \;=\; \mu(\Omega) - \mu(A) \;\forall A \in \mathcal{F}.$$

Naprej, μ je zvezna od zgoraj:

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \;=\; \downarrow\text{-}\lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

za vsako zaporedje $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{F}$, ki je nenaraščajoča glede na inkluzijo: $A_n \supset A_{n+1} \;\forall n \in N$.

(vi) Za vsak $A \in \mathcal{F}$ je

$$\mathcal{F}\big|_A \;:=\; \{B \cap A \mid B \in \mathcal{F}\}$$

σ-algebra na A in $\mu_A := \mu\big|_{\mathcal{F}|_A}$ je mera na $(A, \mathcal{F}\big|_A)$.

Definicija 1.4. $\mu_A := \mu\big|_{\mathcal{F}|_A}$ rečemo *mera μ zožana na A* oz. *zožitev μ na A.*

1.3 Merljive preslikave in generirane σ-algebre

Definicija 1.5. Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$:

$$\sigma_\Omega(\mathcal{A}) \;:=\; \bigcap\{\mathcal{F} \in 2^{2^\Omega} \mid \mathcal{F} \;\sigma\text{-algebra na } \Omega \text{ in } \mathcal{F} \supset \mathcal{A}\},$$

rečemo σ-algebra z A na Ω. Če sta $\mathscr{B}_1$ in $\mathscr{B}_2$ obe σ-algebri na Ω, potem definiramo

$$\mathscr{B}_1 \vee \mathscr{B}_2 \;:=\; \sigma_\Omega(\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2)$$

in ji rečemo skupek $\mathscr{B}_1$ in $\mathscr{B}_2$. Bolj splošno, če imamo družino σ-algebr $(B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ na Ω, potem postavimo

$$\bigvee_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{B}_\lambda \;:=\; \sigma_\Omega\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{B}_\lambda\right).$$

Definicija 1.6. Naj bo $f : \Omega \to \Omega'$. Če je dana σ-algebra $\mathcal{F}'$ na Ω', potem definiramo

$$\sigma^{\mathcal{F}'}(f) \;:=\; \{f^{-1}(A');\; A' \in \mathcal{F}'\}.$$

Začetno strukturo f glede na $\mathcal{F}'$ (tudi, σ-algebra generirana s f glede na $\mathcal{F}'$). Če je dana σ-algebra $\mathcal{F}$ na Ω, potem definiramo

$$\sigma_{\mathcal{F}}^{\Omega'}(f) \;:=\; \{A' \in 2^{\Omega'} \mid f^{-1}(A') \in \mathcal{F}\}$$

končno strukturo f na Ω' glede na $\mathcal{F}$. Če sta dani σ-algebri $\mathcal{F}$ na Ω in σ-algebra $\mathcal{F}'$ na Ω, potem rečemo: f je $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$-merljiva $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$f^{-1}(A') \in \mathcal{F}, \quad \forall A' \in \mathcal{F}'.$$

Definicija 1.7. Če je $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω in je $\mathcal{F}'$ σ-algebra na Ω', potem označimo

$$\mathcal{F}/\mathcal{F}' \;:=\; \{f \in \Omega'^{\Omega} \mid f \text{ je } \mathcal{F}/\mathcal{F}'\text{-merljiva}\}.$$

Definicija 1.8. Za $A \subset \Omega$ definiramo $\mathbb{1}_{A_\Omega} : \Omega \to \{0, 1\}$,

$$\mathbb{1}_{A_\Omega}(x) \;:=\; \begin{cases} 1\,; & x \in A, \\ 0\,; & x \notin A, \end{cases}, \quad x \in \Omega,$$

ki ji rečemo *indikatorska funkcija A na ambientnem prostoru* Ω.[2]

Trditev 1.3. Za σ-algebre $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$, kjer $f \in \mathcal{F}/\mathcal{G}$ in $g \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$ je

$$g \circ f \;\in\; \mathcal{F}/\mathcal{H}.$$

Trditev 1.4. Naj bo $f : \Omega \to \Omega'$:

(i) Za σ-algebro $\mathcal{F}'$ na Ω' je $\sigma^{\mathcal{F}'}(f)$ σ-algebra na Ω; ona je najmanjša (glede na inkluzijo) σ-algebra $\mathcal{G}$ na Ω, da je $f \in \mathcal{G}/\mathcal{F}'$.

[2] Ponavadi namesto $\mathbb{1}_{A_\Omega}$ pišemo le $\mathbb{1}_A$.

(ii) Za σ-algebro $\mathcal{F}$ na Ω je $\sigma_F^{\Omega'}(f)$ σ-algebra na Ω'; ona je največja (glede na inkluzijo) σ-algebra $\mathcal{G}'$ na Ω, da je $f \in \mathcal{F}/\mathcal{G}$.

(iii) Za σ-algebro $\mathcal{F}$ na Ω in σ-algebro $\mathcal{F}'$ na Ω' je

$$f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}' \iff \sigma^{\mathcal{F}'}(f) \subset \mathcal{F} \iff \mathcal{F}' \subset \sigma_{\mathcal{F}}^{\Omega'}(f).$$

(iv) Naj bo $\mathcal{A}'\sigma 2^{\Omega'}$ ter $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω. Potem je

$$f \in \mathcal{F}/\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}') \iff (f^{-1}(A') \in \mathcal{F},\ \forall A' \in \mathcal{A}').$$

Velja tudi

$$\sigma^{\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}')}(f) = \sigma_{\Omega}(\{f^{-1}(A') \mid A' \in \mathcal{A}'\}).$$

Definicija 1.9. *Sled $\mathcal{A}$ na A* definiramo kot

$$\mathcal{A}\big|_A := \{B \cap A \mid B \in \mathcal{A}\}.$$ [3]

Trditev 1.5 (Sledi komutirajo v generirani σ-algebri)**.** Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ in $A \subset \Omega$. Potem je

$$\sigma_A(\mathcal{A}\big|_A) = \sigma_{\Omega}(\mathcal{A})\big|_A.$$

Trditev 1.6. Naj bo $f : \Omega \to \Omega'$ in naj bo $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω ter $\mathcal{F}'$ σ-algebra na Ω'.

(i) Če je $A' \subset \Omega'$ in $f : \Omega \to A'$, potem je

$$f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}' \iff f \in \mathcal{F}/(\mathcal{F}'\big|_{A'}).$$

(ii) Če je $A \in \Omega$ in $f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$, potem

$$f\big|_A \in (\mathcal{F}\big|_A)/\mathcal{F}'.$$

(iii) Če je $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ zaporedje v $\mathcal{F}$ in $\Omega = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ in je $f\big|_{A_i} \in (\mathcal{F}\big|_{A_i})/\mathcal{F}'$ $\forall i \in \mathbb{N}$, potem je

$$f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$$

.

[3] Zapis je isti kot za zožitev, vendar ne pomeni isto.

1.4 Borelove množice na razširjeni realni osi $[-\infty, \infty]$ in Borelova merljivost numeričnih funkcij

Definicija 1.10. Definirajmo *razširjeno realno os*:

$$\begin{aligned} [-\infty,\infty] &:= \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\} \\ [-\infty,a] &:= \{-\infty\} \cup (-\infty,a] \quad \text{za } a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \end{aligned}$$

Relacijo $\leqslant$ na $\mathbb{R}$ razširimo na $[-\infty, \infty]$ kot sledi:

$$-\infty \leqslant x \leqslant \infty \quad \forall x \in [-\infty,\infty].$$

Temu ustrezno imamo "$(<) \ := \ (\leqslant)\backslash(=)$", itd.

Definicija 1.11. *Borelovo σ-algebro* na $[-\infty, \infty]$ definiramo kot

$$\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]} \ := \ \sigma_{[-\infty,\infty]}(\{[-\infty,a] \mid a \in \mathbb{R}\}).$$

Za $A \subset [-\infty, \infty]$ je

$$\mathscr{B}_A \ := \ \mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}\big|_A$$

Borelova σ-algebra na A. Elementom Borelovih σ-algebr pravimo *Borelove množice*.

Definicija 1.12. Funkcija f je *numerična*, če je $\mathcal{Z}_f \in [-\infty, \infty]$.

Definicija 1.13. Če je funkcija f numerična:

- $\sigma(f) \ := \ \sigma^{\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}}(f)$;
- če je $\mathcal{F}$ σ-algebra na domeni f, je f $\mathcal{F}$-merljiva $\overset{\text{def}}{\iff}$ f je $\mathcal{F}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$-merljiva;
- če je $g : \mathcal{D}_f \to [-\infty, \infty]$, je

  $$\begin{aligned} g \wedge f &:= \min\{g, f\}^4 \\ g \vee f &:= \max\{g, f\}. \end{aligned}$$

  Definiramo *pozitivni* in *negativni del* f:

  $$\begin{aligned} f^+ &:= f \vee 0 \\ f^- &:= (-f) \vee 0 \end{aligned}$$

Opomba.

- $f \;=\; f^{+} - f^{-}$
- $|f| \;=\; f^{+} + f^{-}$

Definicija 1.14. Dogovorimo se

$$\begin{aligned} 0 \cdot (\pm\infty) &:= 0 =: (\pm\infty) \cdot 0 \\ \infty + (-\infty) &:= 0 =: (-\infty) + \infty. \end{aligned}$$

Preostanek aritmetike na $[-\infty, \infty]$ definiramo na naraven način, npr.

$$\begin{aligned} a \cdot \infty &:= \operatorname{sgn}(a) \cdot \infty \quad \text{za } a \in [-\infty, \infty] \backslash \{0\} \\ a + \infty &:= \infty \quad \text{za } a \in (-\infty, \infty] \\ \infty - \infty &:= \infty + (-\infty) = 0 \\ & \mathit{itd.} \end{aligned}$$

Trditev 1.7. Če je $A \subset [-\infty, \infty]$ in je $f : A \to [-\infty, \infty]$ zvezna, potem je $f \in \mathscr{B}_A / \mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$. Če je $\{f, g\} \subset \mathcal{F} / \mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$ za σ-algebro $\mathcal{F}$, potem je

$$\{f + g, f \cdot g\} \subset \mathcal{F} / \mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$$

in

$$\{\{f \leqslant g\}, \{f = g\}, \{f < g\}\} \subset \mathcal{F}$$

.

Trditev 1.8. Naj bo $\mathcal{F}$ σ-algebra in $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje v $\mathcal{F} / \mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$. Potem je

$$\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n, \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n, \limsup_{n\to\infty} f_n, \liminf_{n\to\infty} f_n\} \;\subset\; \mathcal{F} / \mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}.$$

Če je $f_n \geqslant 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, potem je

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \;\in\; \mathcal{F} / \mathscr{B}_{[0,\infty]}.$$

Definicija 1.15. Naj bo $\mathcal{F}$ σ-algebra. Za $\{f, g\} \subset \mathcal{F}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$ je

$$\{f \vee g, f \wedge g, f^+, f^-, |f|\} \subset \mathcal{F}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}.$$

Za zaporedje $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v $\mathcal{F}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$ je

$$\{\{f_n \text{ konverg., ko } n \to \infty\}, \{f_n \text{ konverg. v } \mathbb{R}, \text{ ko } n \to \infty\}, \{\lim_{n\to\infty} f_n = f_\infty\}\} \subset \mathcal{F}.$$

1.5 Argumenti monotonega razreda

Definicija 1.16. Naj bo $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω in $f : \Omega \to [0, \infty)$:

$$f \text{ je } \mathcal{F}\text{-enostavna} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad f \in \mathcal{F}/\mathscr{B}_{[0,\infty)} \text{ in } \mathcal{Z}_f \text{ je končna.}$$

Trditev 1.9. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F})$ merljiv prostor in $f : \Omega \to [0, \infty]$. Potem je f $\mathcal{F}$-enostavna $\Longleftrightarrow$

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{A_i},$$

za neke c_i, $i \in [n]$, iz $[0, \infty)$, neke A_i, $i \in [n]$, iz $\mathcal{F}$ in nek $n \in \mathbb{N}$. Naprej; če je $f \in \mathcal{F}/\mathscr{B}_{[0,\infty]}$, potem je

$$\big((2^{-n}\lfloor 2^n f\rfloor) \wedge n\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

zaporedje $\mathcal{F}$-enostavnih funkcij, ki ne padajo k f (celo enakomerno na vsaki množici na kateri je f omejena).

Posledica (Izrek o monotonem razredu)**.** Naj bo $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω in $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}/\mathscr{B}_{[0,\infty]}$. Če je

$$\mathbb{1}_A \in \mathcal{M} \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

in je $\mathcal{M}$ zaprta za nenegativne linearne kombinacije (je stožec)[5] in je $\mathcal{M}$

[5] Pomeni:

$$\{m_1, m_2\} \subset \mathcal{M},\ \{c_1, c_2\} \subset (0, \infty) \ \Rightarrow\ c_1 m_1 + c_2 m_2 \in \mathcal{M}$$

zaprta za nepadajoče limite[6] potem je

$$\mathcal{M} \;=\; \mathcal{F}/\mathscr{B}_{[0,\infty]}.$$

Trditev 1.10 (Doob-Dynkinova faktorizacijska lema)**.** Naj bo $X : \Omega \to A$, $(A, \mathcal{A})$ merljiv prostor. Potem je

$$Y \in \sigma^{\mathcal{A}}(X)/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]} \iff \exists h \in \mathcal{A}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]},\ \text{da je } Y = h \circ X = h(X).$$

Definicija 1.17. Naj bo $\mathcal{D} \subset 2^{\Omega}$. D je Dynkinov sistem (tudi λ-sistem) na $\Omega \overset{\text{def}}{\iff}$

- $\Omega \in \mathcal{D}$,
- $B \backslash A \in \mathcal{D}$ brž ko je $\mathcal{D} \ni A \subset B \in \mathcal{D}$,
- če je $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ je nepadajoče zaporedje v $\mathcal{D}$ je tudi $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$.

$\mathcal{D}$ je π-sistem $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mathcal{D}$ je zaprt za $\cap$.

Trditev 1.11. Naj bo $\mathcal{D} \subset 2^{\Omega}$. Potem je $\mathcal{D}$ Dynkinov sistem $\iff$

- $\Omega \in \mathcal{D}$,
- $\mathcal{D}$ zaprta za c^{Ω},
- $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ zaporedje iz $\mathcal{D}$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ za $i \neq j$ iz $\mathbb{N} \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{D}$.

$\mathcal{D}$ je σ-algebra na $\Omega \iff \mathcal{D}$ je λ-sistem na Ω in π-sistem.

Definicija 1.18. Za $L \subset 2^{\Omega}$ postavimo

$$\lambda_{\Omega}(L) \;:=\; \bigcap \{\mathcal{D} \in 2^{2^{\Omega}} \mid \mathcal{D} \text{ je } \lambda\text{-sistem in } \mathcal{D} \supset L\}.$$

[6]Pomeni: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nepadajoče zaporedje iz $\mathcal{M}$, potem je

$$\lim_{n \to \infty} f_n \in \mathcal{M}$$

Trditev 1.12. Naj bo L π-sistem in $L \subset 2^\Omega$. Potem je

$$\lambda_\Omega(L) \;=\; \sigma_\Omega(L).$$

Posledica (π-λ izrek/Dynkinova lema)**.** Naj bo L π-sistem in $\mathcal{D}$ λ-sistem na Ω, $L \subset \mathcal{D}$. Potem je

$$\sigma_\Omega(L) \;\subset\; \mathcal{D}.$$

Trditev 1.13. Naj bosta μ, ν meri na merljivem prostoru $(E, \mathcal{E})$, $L \subset \mathcal{E}$ π-sistem, $\sigma_E(L) = \mathcal{E}$. Predpostavimo, da je $\mu|_L = \nu|_L$ in da obstaja zaporedje $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz L, ki je nepadajoče ali sestoji iz paroma disjunktnih množic, in za katerega je

- $\mu(L_n) \;=\; \nu(L_n) \;<\; \infty$,
- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n \;=\; E$.

Potem je

$$\mu \;=\; \nu$$

.

1.6 Lebesgue-Stieltjesova mera

Izrek 1.1 (Lebesgue-Stieltjesov izrek)**.** Naj bo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nepadajoča in zvezna z desne (*ca'd*). Potem obstaja natanko ena mera μ na $\mathscr{B}_\mathbb{R}$, da je

$$\mu([a, b]) \;=\; F(b) - F(a) \quad \forall a \leqslant b \in \mathbb{R}.$$

Definicija 1.19. μ iz prejšnjega izreka rečemo *mera prirejena F v Lebesgue-Stieltjesovem smislu* in jo označimo z dF. V posebne primernu primeru, ko je $F = \mathrm{id}_\mathbb{R}$ ji rečemo *Lebesgueva mera* in jo označimo

$$\mathscr{L} \;:=\; d(\mathrm{id}_\mathbb{R}).$$

Trditev 1.14. Naj bo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ca'd*, nepadajoča. Potem je dF:

- σ-končna $\iff$ je F omejena:

$$dF(\mathbb{R}) \;=\; \lim_{n\to\infty} dF((-n, n])$$

- verjetnostna $\iff$ $\lim_{\infty} F - \lim_{-\infty} F = 1$.

Za $x \in \mathbb{R}$ je

$$dF(\{x\}) \;=\; F(x) - F(x^-),$$

$\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (x - \frac{1}{n}, x]$.

2 Integracija na merljivih prostorih

2.1 Lebesgueov integral

Definicija 2.1. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero $f \in \mathcal{F}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$.

(a) Za f, ki je $\mathcal{F}$-enostavna postavimo

$$\int f\,d\mu \;:=\; \sum_{a\in\mathcal{Z}_f} d\mu(\{f=a\}) \;=\; \sum_{a\in\mathcal{Z}_f} d\mu(f^{-1}(\{a\})).$$

(b) Za $f \geqslant 0$, ki ni $\mathcal{F}$-enostavna postavimo

$$\int f\,d\mu \;:=\; \sup\{\int g\,d\mu \mid g \leqslant f,\; g\ \mathcal{F}\text{-enostavna}\}.$$

(c) Za $\neg(f \geqslant 0)$, ki ni $\mathcal{F}$-enostavna postavimo

$$\int f\,d\mu \;:=\; \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu.$$

Dogovor.

$$\mu[f] \;=\; \mu^x[f(x)] \;:=\; \int f(x)\,\mu(dx) \;:=\; \int f\,d\mu$$

Če je še $A \in \mathcal{F}$, potem označimo še

$$\mu[f;A] \;:=\; \mu^x[f(x); x\in A] \;:=\; \int_A f(x)\,\mu(dx) \;:=\; \int_A f\,d\mu \;:=\; \int f\mathbb{1}_A\,d\mu.$$

Integral f proti μ je *dobro definiran* $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$\int f^+\,d\mu \;\wedge \int f^-\,d\mu \;<\; \infty;$$

f je μ-integrabilna $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$\int f^+\,d\mu \;\vee \int f^-\,d\mu \;<\; \infty.$$

Definicija 2.2. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero:

$$L^1(\mu) \ := \ \{f \in \mathcal{F}/\mathscr{B} \mid f \text{ je } \mu\text{-integrabilna}\}.$$

Za $g : \Omega \to \mathbb{C}$ z $\{\Re(g), \Im(g)\} \subset L^1(\mu)$ je

$$\int g \, d\mu \ := \ \int \Re(g) \, d\mu + i \int \Im(g) \, d\mu.$$

Izrek 2.1. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero. Integral ima naslednje lastnosti:

(i) Aditivnost:
$$\int f + g \, d\mu \ = \ \int f \, d\mu + \int g \, d\mu,$$
za $\{f, g\} \subset \mathcal{F}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$ z $\mu[f^-] \vee \mu[g^-] < \infty$

(ii) Integral indikatorja:
$$\int \mathbb{1}_A \, d\mu \ = \ \mu(A), \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$
V posebnem primeru je $\mu[0] = 0$ in torej $\mu[f^+] - \mu[f^-] = \mu[f]$ $\forall f \in \mathcal{F}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$.

(iii) Integrali, ki so 0 in so končni:
za $f \in \mathcal{F}/\mathscr{B}_{[0,\infty]}$:
- $\mu[f] = 0 \iff f = 0$ s.p.-μ
- $\mu[f] < \infty \implies f < \infty$ s.p.-μ.

(iv) Trikotniška neenakost:
$$\left| \int f \, d\mu \right| \leqslant \int |f| \, d\mu, \quad \forall f \in \mathcal{F}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}.$$

(v) Integral "ne vidi" množic z mero 0:
če je $\{f, g\} \subset \mathcal{F}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$ in je $f = g$ s.p.-μ, potem je $\mu[f] = \mu[g]$ in je $\mu[f]$ d.d. $\iff$ $\mu[g]$ je d.d.

(vi) Monotonost: če je $\{f, g\} \subset \mathcal{F}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$, $g \leqslant f$ in $\mu[g^-] < \infty$, potem je
$$\int g \, d\mu \ \leqslant \ \int f \, d\mu.$$

(vii) Homogenost:

$$\int cf \, d\mu \;=\; c\int f \, d\mu$$

za vse $f \in \mathcal{F}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$ za katere je $\mu[cf^-] \wedge \mu[cf^+] < \infty$, za $\forall c \in [-\infty, \infty]$.

Vsi integrali v (i),(ii),(iii),(vi) so d.d. Enako velja za (vii), razen, ko je $c = 0$ in $\mu[f^+] = \mu[f^-] = \infty$.

Trditev 2.1. Naj bosta $a \leqslant b$ realni števili in $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Če je f zvezna, potem je $\mathscr{L}$-integrabilna in

$$\int_{[a,b]} f \, d\mathscr{L} \;=\; \int_a^b f(x)\, dx.$$

2.2 Konvergenčni izreki s posledicami

Izrek 2.2. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero in $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje iz $\mathcal{F}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$.

(i) Naj bo $g \in \mathcal{F}/\mathscr{B}_{[0,\infty]}$ z $\mu[g] < \infty$ in $f_n^- \leqslant g$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Potem velja:

(a) Polzveznost od spodaj (Fatou):

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \;\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$$

(b) Monotona konvergenca (Lévy):

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu \;= \uparrow\text{-} \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

(ii) Naj bo $g \in \mathcal{F}/\mathscr{B}_{[0,\infty]}$ μ-integrabilna z $|f_n| \leqslant g$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Potem velja dominirana konvergenca (Lebesgue):

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - \lim_{m\to\infty} f_m| \, d\mu \;=\; 0$$

in v posebnem je

$$lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \;=\; \int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu,$$

če seveda $\exists \lim_{m\to\infty} f_m$ (povsod).

Posledica. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero in $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje iz $\mathcal{F}/\mathscr{B}_{[0,\infty]}$. Potem je

$$\int \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \, d\mu \;=\; \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \, d\mu,$$

kjer so integrali d.d.

Posledica. Naj bo $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje mer na merljivem prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$. Potem je $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n$ mera na $(\Omega, \mathcal{F})$:

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n\right)(A) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(A), \quad A \in \mathcal{F}.$$

Poleg tega je za $\forall f \in \mathcal{F}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$:

$$\int f \, d(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n) \text{ je d.d.} \iff \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \int f^+ \, d\mu_n\right) \wedge \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \int f^- \, d\mu_n\right) < \infty$$

in tedaj je

$$\int f \, d(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f \, d\mu_n.$$

Definicija 2.3. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ porostor z mero, $(\Omega', \mathcal{F}')$ merljiv prostor, $f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$. Potem definiramo

$$f *_{\mathcal{F}'} \mu \quad \text{oz.} \quad \mu \circ_{\mathcal{F}'} f^{-1} \quad \text{oz.} \quad \mu_{f_{\mathcal{F}'}}$$

kot preslikavo $f *_{\mathcal{F}'} \mu : \mathcal{F}' \to [0, \infty]$, dano s predpisom

$$(f *_{\mathcal{F}'} \mu)(A') \;:=\; \mu(f^{-1}(A')), \quad A' \in \mathcal{F}'.$$

To preslikavo imenujemo *potisk mere μ naprej pod f glede na $\mathcal{F}'$*. Če je μ verjetnostna, rečemo temu *porazdelitev.*

Posledica (Izrek o sliki mer)**.** Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero, $(\Omega', \mathcal{F}')$ merljiv prostor, $f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$. Potem je $f * \mu$ mera na $\mathcal{F}'$, verjetnostna, če je μ verjetnostna. Če je $g \in \mathcal{F}'/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$, je

$$\int g \, d(f * \mu) \;=\; \int g \circ f \, d\mu,$$

pri čemer je integral na levi d.d. $\iff$ je to res za integral na desni.

Posledica (Odvajanje pod integralskim znakom)**.** Naj bo $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ prostor z mero, $\mathcal{O}$ odprt v $\mathbb{R}$. $F : \mathcal{X} \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ in naj velja:

- $\forall t \in \mathcal{O}$ je $\mathcal{F}(\cdot, t) \in L^1(\mu)$;
- $\forall x \in \mathcal{X}$ je $\mathcal{F}(x, \cdot)$ odvedljiva.

Naj naprej $\exists g \in \Sigma/\mathscr{B}_{[0,\infty]}$ z $\mu[g] < \infty$ tako, da je

$$\left|\frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\right| \leqslant g(x), \quad \forall (x,t) \in \mathcal{X} \times \mathcal{O}.$$

Potem velja:

(a) $\forall t \in \mathcal{O}$ je $\left(\mathcal{X} \ni x \mapsto \frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\right) \in L^1(\mu)$;

(b) $\left(\mathcal{O} \ni t \mapsto \int F(x,t)\,\mu(dx)\right)$ je odvedljiva;

(c) $t \in \mathcal{O}$:

$$\frac{d}{dt}\int F(x,t)\,\mu(dx) = \int \frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\,\mu(dx).$$

2.3 Rezultati, ki se tičejo menjave vrsrnega reda integracije

Definicija 2.4. Naj bosta $(\Omega, \mathcal{F})$ in $(\Omega', \mathcal{F}')$ merljiva prostora. Potem definiramo

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}' := \sigma_{\Omega \times \Omega'}\left(\{A \times A' \mid (A, A') \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}'\}\right),$$

in ji rečemo *produktna σ-algebra $\mathcal{F}$ in $\mathcal{F}'$*.

Trditev 2.2. Če je $A \subset \mathbb{R}^2$ in $f : A \to [-\infty, \infty]$ zvezna, potem je

$$f \in \mathscr{B}_A/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}.$$

Trditev 2.3. Naj bosta $(\Omega, \mathcal{F})$ in $(\Omega', \mathcal{F}')$ merljiva prostora. Potem je $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'$ najmanjša (glede na inkluzijo) σ-algebra na $\Omega \times \Omega'$ glede na katero sta merljivi kanonični projekciji, tj. $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'$ je najmanjša σ-algebra $\mathcal{G}$ na $\Omega \times \Omega'$, da je:

- $(\Omega \times \Omega' \ni (\omega, \omega') \mapsto \omega) \in \mathcal{G}/\mathcal{F}$;
- $(\Omega \times \Omega' \ni (\omega, \omega') \mapsto \omega') \in \mathcal{G}/\mathcal{F}'$.

Naprej, če je $f \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$, potem je $f(\omega, \cdot) \in \mathcal{F}'/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$, $\forall \omega \in \Omega$ in $f(\cdot, \omega') \in \mathcal{F}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$, $\forall \omega' \in \Omega'$. Obratno, naj bo $(G, \mathcal{G})$ merljiv prostor; potem je

$$(f, f') \in \mathcal{G}/\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}' \iff f \in \mathcal{G}/\mathcal{F} \text{ in } f' \in \mathcal{G}/\mathcal{F}'.$$

Izrek 2.3. Naj bosta $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ in $(\Omega', \mathcal{F}', \mu')$ prostora z mero, μ in μ' σ-končni.

(i) Obstaja natanko ena mera ν na $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'$, ki jo označimo $\mu \times \mu'$, za katero velja

$$\nu(A \times A') = \mu(A)\mu'(A'), \quad \forall (A, A') \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}'.$$

(ii) Naj bo $f \in (\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}')/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$ in naj velja

(a) $f \geqslant 0$ *(Tonelli)* ali

(b) $\int |f| \, d(\mu \times \mu') < \infty$ *(Fubini)* ali

(c) $\iint f^-(\omega, \omega') \, \mu(d\omega) \, \mu'(d\omega') \ \wedge \ \iint f^-(\omega, \omega') \, \mu'(d\omega') \, \mu(d\omega) < \infty$

Potem je

- $\big(\Omega' \ni \omega' \mapsto \int f(\omega, \omega') \, \mu(d\omega)\big) \in \mathcal{F}'/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$;
- $\big(\Omega \ni \omega \mapsto \int f(\omega, \omega') \, \mu'(d\omega')\big) \in \mathcal{F}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$;
- $\int f^-(\omega, \omega') \, \mu(d\omega) < \infty$ s.p.-μ' v ω';
- $\int f^-(\omega, \omega') \, \mu'(d\omega') < \infty$ s.p.-μ v ω;

in

$$\begin{aligned} \int f \, d(\mu \times \mu') &= \iint f(\omega, \omega') \, \mu(d\omega) \, \mu'(d\omega') \\ &= \iint f(\omega, \omega') \, \mu'(d\omega') \, \mu(d\omega). \end{aligned}$$

Vsi zunanji integrali zgoraj so d.d.

Definicija 2.5. Notacijo $\mu \times \mu'$ zadržimo, $\mu \times \mu'$ rečemo *produkt* μ *in* μ'.

Trditev 2.4. $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero, $(\Omega', \mathcal{F}')$ merljiv prostor, $X \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$, $(A, \mathcal{A})$ še en merljiv prostor, da je

$$D_A \;:=\; \{(x,x) \mid x \in A\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$$

in $\{f, g\} \subset \mathcal{F}'/\mathcal{A}$. Potem je $f(X) = g(X)$ s.p.-$\mu \iff f = g$ s.p.-$X_*\mu$.

2.4 Nedoločena integracija in absolutna zveznost

Definicija 2.6. Naj bosta $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero, $f \in \mathcal{F}'/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$ in naj bo integral f pod μ d.d. Potem preslikavi

$$f \cdot \mu \;:=\; \left(\mathcal{F} \in A \mapsto \int_A f\, d\mu\right)$$

rečemo *nedoločeni integral* f *proti* μ[7], ali tudi tudi μ-*nedoločeni integral* f.

Definicija 2.7. Naj bosta μ in ν dve meri na merljivem prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$. μ je absolutno zvezna glede na ν (pišemo $\mu \ll \nu$) $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$\nu(A) = 0 \;\Rightarrow\; \mu(A), \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

μ je ekvivalentna ν, (pišemo $\mu \sim \nu$) $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$\mu \ll \nu \quad \text{in} \quad \nu \ll \mu.$$

Trditev 2.5. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero in $f \in \mathcal{F}/\mathscr{B}_{[0,\infty]}$. Potem je $f \cdot \mu$ mera, ki je absolutno zvezna glede na μ; naprej

$$\int g\, d(f \cdot \mu) \;=\; \int g\, f(d\mu)$$

[7] Beri: glede na μ.

za vse $g \in \mathcal{F}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$, pri čemer je integral na levi d.d. $\iff$ je integral na desni d.d. in v slednjem primeru je

$$g \cdot (f \cdot \mu) \ = \ (gf) \cdot \mu.$$

Če je $f > 0$ s.p.-μ, potem je $f \cdot \mu \sim \mu$.

Trditev 2.6. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor z mero, $\{f, g\} \subset \mathcal{A}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$.

(a) Denimo, da je $\int_{\{f>g\}} f^+ \, d\mu \vee \int_{\{f>g\}} g^- \, d\mu < \infty$ in $\int_{\{f>g\}} f \, d\mu \leqslant \int_{\{f>g\}} g \, d\mu$. Potem je

$$f \ < \ g \quad \text{s.p.-}\mu.$$

(b) Denimo, da je μ σ-končna, $\left(\int f^+ \, d\mu \wedge \int f^- \, d\mu\right) \vee \left(\int g^+ \, d\mu \wedge \int g^- \, d\mu\right) < \infty$ in $\int_A f \, d\mu \leqslant \int_A g \, d\mu$, $\forall A \in \mathcal{A}$. Potem je

$$f \ \leqslant \ g \quad \text{s.p.-}\mu.$$

Posledica. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor z mero, $\{f, g\} \subset \mathcal{A}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$. Denimo, da je $\int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\mu$, $A \in \mathcal{A}$, pri čemer sta $\mu[f]$ in $\mu[g]$ d.d. Če je f (ali/torej g) μ-integrabilna ali če je μ σ-končna, potem je

$$f \ = \ g \quad \text{s.p.-}\mu.$$

V primeru, ko sta f in g μ-integrabilna, potem je, ceteris paribus, enakost $\int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\mu$ dovolj preveriti za $A \in \Pi \cup \{X\}$, kjer je Π nek π-sistem, ki generira $\mathcal{A}$ na X.

Izrek 2.4 (Radon-Nikodym)**.** Naj bosta μ in ν σ-končni meri na istem merljivem prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$, $\mu \ll \nu$. Potem obstaja $f \in \mathcal{F}/\mathscr{B}_{[0,\infty]}$, enolična do enakosti s.p.-μ, za katero je

$$\mu \ = \ f \cdot \nu,$$

$f > 0$ s.p.-μ.

Definicija 2.8. Funkcijo f iz zgornjega izreka označimo z

$$\frac{d\mu}{d\nu}.$$

Rečemo ji *Radon-Nikodymov odvod*.

Posledica. Naj bodo $\mu \ll \nu \ll \lambda$ σ-končne mere na $\sigma - algebri$. Potem je $\mu \ll \lambda$ in

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = \frac{d\mu}{d\nu} \cdot \frac{d\nu}{d\lambda} \quad \text{s.p.-}\lambda.$$

Torej, če je $\mu \sim \nu$,

$$1 = \frac{d\mu}{d\nu}\frac{d\nu}{d\mu} \quad \text{s.p.-}\mu \text{ in s.p.-}\nu.$$

2.5 Prostori L in nekaj integralskih neenakosti

Definicija 2.9. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero, $p \in [1, \infty)$ in $f \in \mathcal{F}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$, definiramo:

- prostor L^p:

$$\begin{aligned} \|f\|_{p_\mu} &:= \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \\ L^p(\mu) &:= \{f \in \mathcal{F}/\mathscr{B}_\mathbb{R};\ \|f\|_{p_\mu} < \infty\}, \end{aligned}$$

- prostor L^∞:

$$\begin{aligned} \|f\|_{\infty_\mu} &:= \inf\{M \in [0, \infty];\ |f| \leqslant M \text{ s.p.-}\mu\}, \\ L^\infty(\mu) &:= \{f \in \mathcal{F}/\mathscr{B}_\mathbb{R};\ \|f\|_{\infty_\mu} < \infty\}. \end{aligned}$$

Za zaporedje $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ v $L^q(\mu)$, $q \in [1, \infty]$, rečemo da $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f_0$ v $L^q(\mu)$ $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$\|f_n - f_0\|_{q_\mu} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Za $\{f, g\} \subset L^2(\mu)$,

$$\langle f, g \rangle = \int fg \, d\mu.$$

Trditev 2.7. Naj bo μ končna mera in $p \leqslant q$, $\{p, q\} \subset [1, \infty]$. Potem je

$$L^q(\mu) \;\subset\; L^p(\mu).$$

Trditev 2.8. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero, $\{f, g\} \subset \mathcal{F}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$. Imamo sledeče neenakosti:

(i) Markov:

$$\mu[f; f \geqslant a] \;\geqslant\; a \cdot \mu(f \geqslant a), \quad \forall a \in [-\infty, \infty];$$

torej $\mu[f] \geqslant a\mu(f \geqslant a)$ za $\forall a \in [0, \infty]$, brž ko je $f \geqslant 0$.

(ii) Minkowski:

$$\|f + g\|_p \;\leqslant\; \|f\|_p + \|g\|_p, \quad \forall p \in [1, \infty]$$

(iii) Hölder:

$$\|fg\|_1 \;\leqslant\; \|f\|_p \|g\|_q, \quad \forall \{p, q\} \subset [1, \infty],\; p^{-1} + q^{-1} = 1.$$

V posebnem $p = q = 2$, Cauchy-Schwartzova neenakost.

(iv) Jensen:
naj bo μ verjetnostna, $f \in L^1(\mu)$, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ konveksna, I odprt interval, $f : \Omega \to I$. Potem je $\varphi \in \mathscr{B}_I/\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$, $\int (\varphi \circ f)^- \, d\mu < \infty$, $\int f \, d\mu \in I$ in

$$\int \varphi \circ f \, d\mu \;\geqslant\; \varphi\left(\int f \, d\mu\right).$$

Najprej, za $\forall p \in [1, \infty]$ je $\|\cdot\|_p$ seminorma na $L^p(\mu)$, ki je realni linearen prostor, in v njem je $\|\cdot\|_p$-limita zaporedje, če obstaja, s.p.-μ enolično določena; obstaja *čee* je dano zaporedje Cauchyjevo v seminormi $\|\cdot\|_p$. Končno, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je skalarni semiprodukt na $L^2(\mu)$.

3 Verjetnost kot normalizirana mera

3.1 Osnovni pojmi

Definicija 3.1. *Verjetnostni prostor* je prostor z mero $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ pri čemer je $\mathbb{P}$ verjetnostna. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor; A je $\mathbb{P}$-skoraj gotov ($\mathbb{P}$-s.g.) $\overset{\text{def}}{\iff}$ $A \in \mathcal{F}$ in $\mathbb{P}(A) = 1$.

Če je $(E, \mathcal{E})$ merljiv prostor, potem elementom $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ rečemo *slučajni elementi* z vrednostmi v $(E, \mathcal{E})$; v posebnem primeru, ko je $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ jim rečemo *slučajne spremenljivke.*

Za slučajni element X: $X \sim_{\mathbb{P}} Q \overset{\text{def}}{\iff} X$ ima zakon Q pod $\mathbb{P}$, t.j. $X_*\mathbb{P} = Q$. Za dva slučajna elementa, ki imata vrednosti v istem merljivem prostoru rečemo, da sta *enako porazdeljena* $\overset{\text{def}}{\iff}$ imata isti zakon. *Porazdelitvena funkcija* slučajne spremenljivke X je preslikava $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ dana z $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$ za $x \in \mathbb{R}$.

Slučajna spremenljivka X je *diskretna* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists C$ števna podmnožica $\mathbb{R}$, da je $\mathbb{P}(X \in C) = 1$. Slučajna spremenljivka X je *absolutno zvezna* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mathbb{P}_X \ll \mathscr{L}$. Slučajna spremenljivka X je *zvezna* $\overset{\text{def}}{\iff}$ F_X je zvezna.

Bivarianten slučajni vektor je element $\mathcal{F}/\mathscr{B}_{\mathbb{R}^2}$, torej slučajen vektor z vrednostmi v $(\mathbb{R}^2, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^2})$; (X, Y) je absolutno zvezen $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mathbb{P}_{(X,Y)} \ll \mathscr{L}^2$, itd.

Trditev 3.1. Naj bo X slučajni element na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z vrednostmi v merljivem prostoru $(E, \mathcal{E})$ in $f \in \mathcal{E}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$. Potem je

$$\mathbb{P}[f(X)] \;=\; \mathbb{P}_X[f],$$

pri čemer je upanje na levi strani d.d. *čee* je d.d upanje na desni strani.

Za slučajno spremenljivko X je F_X ca'd, $\uparrow$ in $\lim_{-\infty} F_X = 0$, $\lim_{\infty} F_X = 1$.

Če je X diskretna slučajna spremenljivka, potem obstaja najmanjša števna množica $C \subset \mathbb{R}$, da $\mathbb{P}(X \in C) = 1$, ki ji rečemo podpora X, označimo s $\operatorname{supp}(X)$:

$$\operatorname{supp}(X) \;=\; \{x \in \mathbb{R};\; \mathbb{P}(X = x) > 0\},$$

narprej, za $f \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$ je

$$\mathbb{P}[f(X)] \;=\; \sum_{x \in \operatorname{supp}(X)} f(x)\mathbb{P}(X = x),$$

če je le $\sum_{x\in\operatorname{supp}(X)} f^+(x)\mathbb{P}(X = x) \wedge \sum_{x\in\operatorname{supp}(X)} f^-(x)\mathbb{P}(X = x) < \infty$.[8]

Če je X absolutno zvezna, potem je zvezna in obstaja do $\mathscr{L}$-s.p. natančno enolična funkcija $f \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}/\mathscr{B}_{[0,\infty]}$ za katero je $\mathbb{P}_X = f \cdot \mathscr{L}$; ta f označimo f_X in ji rečemo gostota X; naprej za $g \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$ je

$$\mathbb{P}[g(X)] \;=\; \int g(x) f_X(x)\, \mathscr{L}(dx),$$

pri čemer so integrali d.d. brž ko je $\int g^+ f\, d\mathscr{L} \wedge \int g^- f\, d\mathscr{L} < \infty$.

Končno, za to da je slučajna spremenljivka X absolutno zvezna je posebno in zadostno, da $\exists f \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}/\mathscr{B}_{[0,\infty]}$, da je

$$\mathbb{P}(X \leqslant x) \;=\; \int_{[-\infty,x]} f\, d\mathscr{L}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

in v tem primeru je f gostota za X.[9] [10]

Definicija 3.2. Zadržimo notacijo za gostoto f_X, $\operatorname{supp}(X)$; za diskretno slučajno spremenljivko X. Definiramo *verjetnostno masno funkcijo* X kot

$$p_X \;:=\; (\operatorname{supp}(X) \ni x \mapsto \mathbb{P}(X = x))\,.$$

Trditev 3.2.

[8] Potem je tudi $\mathbb{P}[f(X)]$ d.d.

[9] Bolj splošno je ekvivalentno preveriti $\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f\, d\mathscr{L}$ za $A \in \Pi \cup \{\mathbb{R}\}$, kjer je Π nek π-sistem, ki generira $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ na $\mathbb{R}$.

[10] $\mathbb{P}_X = dF_X$

(1) Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor. Če je X slučajna spremenljivka, potem je $F_X \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}/\mathscr{B}_{[0,1]}$ in $\mathcal{F}_X(x) \sim_{\mathbb{P}} \mathscr{L}_{[0,1]}$ *čee* je X zvezna.

(2) Obratno, naj bo $U \sim_{\mathbb{P}} \mathscr{L}_{[0,1]}$. Če je $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ porazdelitvena funkcija (ca'd, $\uparrow$, $\lim_{-\infty} F = 0$, $\lim_{\infty} F = 1$) in če vpeljemo

$$F^{\leftarrow}(x) \ := \ \inf\{v \in \mathbb{R};\ F(v) > u\}, \quad x \in (0,1),$$

potem je

$$F^{\leftarrow}(U) \ \sim_{\mathbb{P}} \ dF.^{11}$$

Definicija 3.3. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje v $\mathcal{F}/\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ in $X \in \mathcal{F}/\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergira k* X *v* $\mathbb{P}$*-verjetnosti* $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$\forall \varepsilon \in (0,\infty): \ \mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Trditev 3.3. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor. Če je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje v $\mathcal{F}/\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$, ki konvergira k $X \in \mathcal{F}/\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ s.g.-$\mathbb{P}$ ali v $L^q(\mathbb{P})$ za nek $q \in [1,\infty]$, potem konvergira tudi v $\mathbb{P}$-verjetnosti.

3.2 Neodvisnost

Definicija 3.4. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor. Za družino $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ podmnožic $\mathcal{F}$ rečemo, da je neodvisnost (pod $\mathbb{P}$) $\overset{\text{def}}{\iff}$ za vsako končno neprazno $I \subset \Lambda$, $\forall C_\lambda \in \mathcal{C}_\lambda$, $\lambda \in I$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{\lambda\in I} C_\lambda\right) \ = \ \prod_{\lambda\in I} \mathbb{P}(C_\lambda).$$

Za neodvisni podmnožici $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$ σ-algebre $\mathcal{F}$ je $\mathcal{B}$ neodvisna od $\mathcal{C}$ (pod $\mathbb{P}$) $\overset{\text{def}}{\iff}$ $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ je neodvisnost (pod $\mathbb{P}$). Za dogodka B in C iz $\mathcal{F}$ je B neodvisen

[11] $F^{\leftarrow}$ je *desni inverz* F oz. *kvantilna funkcija* F.

od $C \overset{\text{def}}{\iff} \{B\}$ je neodvisna od $\{C\}$.

Za slučajni element Z z vrednostmi v merljivem prostoru $(E, \mathcal{E})$ in za $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ je $\mathcal{B}$ neodvisna od Z (pod $\mathbb{P}$ glede na $\mathcal{E}$) $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mathcal{B}$ je neodvisna od $\sigma^{\mathcal{E}}(Z)$.[12]

Trditev 3.4. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor, X slučajni element z vrednostmi v $(E, \mathcal{E})$, Y slučajni element t vrednostmi v $(A, \mathcal{A})$. Potem je $(X, Y) \in \mathcal{F}/\mathcal{E} \otimes \mathcal{A}$. Najprej, X in Y sta neodvisna od $\mathbb{P}$ *čee* $P_{(X,Y)} \ = \ \mathbb{P}_X \times \mathbb{P}_Y$; v tem primeru je za $f \in (\mathcal{E} \otimes \mathcal{A})/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$

$$\mathbb{P}[f(X,Y)] \ = \ \mathbb{P}_{(X,Y)}[f] \ = \ \int \mathbb{P}[f(x,Y)] \mathbb{P}_X(dx),$$

če je le $\mathbb{P}[f^-(X,Y)] \wedge \mathbb{P}[f^+(X,Y)] < \infty$; v posebnem, za $g \in \mathcal{E}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$, $h \in \mathcal{A}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$ je

$$\mathbb{P}[g(X)h(Y)] \ = \ \mathbb{P}[g(X)]\mathbb{P}[h(Y)].$$

Trditev 3.5. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor in $(\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ družina π-sistemov, $\mathcal{C}_\lambda \subset \mathcal{F} \ \forall \lambda \in \Lambda$. Če je $(\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ neodvisnost, potem je tudi $(\sigma_\Omega(\mathcal{C}_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ neodvisnost.

Trditev 3.6. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor in (X, Y) absolutno zvezen bivariantni slučajni vektor. Označimo

$$f_{(X,Y)} \ := \ \frac{d\mathbb{P}_{(X,Y)}}{d\mathscr{L}^2}.$$

Potem sta X in Y absolutno zvezni slučjni spremenljivki;

$$f_X(x) \ = \ \int f_{(X,Y)}(x,y) \, \mathscr{L}(dy) \quad \text{s.p.-}\mathscr{L} \text{ v } x,$$
$$f_Y(y) \ = \ \int f_{(X,Y)}(x,y) \, \mathscr{L}(dx) \quad \text{s.p.-}\mathscr{L} \text{ v } y$$

[12] Nasploh, neodvisnost slučajnih elementov pomeni neodvisnost σ-algebr, ki so generirane z njimi.

ter sta X in Y neodvisni *čee*

$$f_{(X,Y)} \; = \; f_X(x) f_Y(y) \quad \text{s.p.-}\mathscr{L}^2 \text{ v } (x,y).$$

Če sta X in Y neodvisni, potem je

$$\mathbb{P}[g(X,Y)] \; = \; \iint g(x,y) f_X(x) f_Y(y)\, \mathscr{L}(dx)\, \mathscr{L}(dy)$$

za $\forall g \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^2}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$ z $\mathbb{P}[g^+(X,Y)] \wedge \mathbb{P}[g^-(X,Y)] < \infty$.

Definicija 3.5. Ohranimo notacijo $f_{(X,Y)}$ za gostoto slučajnega vektorja (X,Y).

Definicija 3.6. Naj bo $((\Omega_\lambda, \mathcal{F}_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ družina merljivih prostorov. Definiramo

$$\bigotimes_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda \; := \; \bigvee_{\lambda \in \Lambda} \sigma^{\mathcal{F}_\lambda}(\mathrm{pr}_\lambda),$$

kjer so

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_\lambda : \prod_{\mu \in \Lambda} \Omega_\mu &\to \Omega_\lambda, \quad \lambda \in \Lambda \\ (\omega_\mu)_{\mu \in \Lambda} &\mapsto \omega_\lambda \end{aligned}$$

kanonične projekcije. Za σ-algebro $\mathcal{F}$ in množico Λ je

$$\mathcal{F}^{\otimes \Lambda} \; := \; \bigotimes_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}.$$

Trditev 3.7. Naj bo $((\Omega, \mathcal{F}_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ družina merljivih prostorov.

(i) $\bigotimes_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_X$ je najmanjša σ-algebra na $\prod_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda$ glede na katero so merljive vse kanonične projekcije pr_λ, $\lambda \in \Lambda$.

(ii) Za merljiv prostr $(\Omega, \mathcal{F})$ in družino funkcij $f_\lambda : \Omega \to \Omega_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, je

$$(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \mathcal{F}/(\bigotimes_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda) \quad \Longleftrightarrow \quad f_\lambda \in \mathcal{F}/\mathcal{F}_\lambda, \; \forall \lambda \in \Lambda.$$

(iii) Naj bo μ_λ verjetnost na $(\Omega_\lambda, \mathcal{F}_\lambda)$, $\forall \lambda \in \Lambda$. Potem obstaja na $(\prod_{\lambda\in\Lambda} \Omega_\lambda, \bigotimes_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda)$ natanko ena verjetnost μ za katero so $(\mathrm{pr}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ neodvisni pod μ in

$$(\mathrm{pr}_\lambda)_* \mu \;=\; \mu_\lambda.$$

Trditev 3.8. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor in naj bo f_λ slučajni element z vrednostmi v $(E_\lambda, \mathcal{E}_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$. Potem je $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ neodvisnost pod $\mathbb{P}$ *čee*

$$((f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})_{*\otimes_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{E}_\lambda} \mathbb{P} \;=\; \bigtimes_{\lambda\in\Lambda} (f_{\lambda *}\mathbb{P}).$$

Definicija 3.7. μ iz točke (iii) v trditvi 3.7 označimo z

$$\bigtimes_{\lambda\in\Lambda} \mu_\lambda,$$

produkt verjetnostnih mer μ_λ, $\lambda \in \Lambda$. Za verjetnost μ in množico Λ velja

$$\mu^{\times\Lambda} \;:=\; \bigtimes_{\lambda\in\Lambda} \mu_\lambda.$$

3.3 Pogojevanje

Trditev 3.9. Če je $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor in $A \in \mathcal{A}$ z $\mathbb{P}(A) > 0$, potem je $(A, \mathcal{A}\big|_A, \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{P}_A)$ verjetnostni prostor in

$$\left(\frac{1}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{P}\right)[f] \;=\; \frac{\mathbb{P}(f; A)}{\mathbb{P}(A)}, \quad \forall f \in \left(\mathcal{A}\big|_A\right)/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}.$$

Definicija 3.8. Naj bo $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor in $A \in \mathcal{A}$ z $\mathbb{P}(A) > 0$. Za $B \in \mathcal{A}$ definiramo

$$\mathbb{P}(B \mid A) \;:=\; \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)},$$

verjetnost B pogojno na A pod $\mathbb{P}$. Pišemo

$$\mathbb{P}(\cdot \mid A) \;=\; \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{P}_A$$

za $f \in \mathcal{A}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$, ali $f : \Omega \to \mathcal{C}$ z $\{\mathfrak{Re}(f), \mathfrak{Im}(f)\} \subset L^1(\mathbb{P})$, postavimo

$$\mathbb{P}[f \mid A] \;:=\; \frac{\mathbb{P}[f; A]}{\mathbb{P}(A)},$$

upanje f pogojno na A.

Trditev 3.10. Naj bo $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor in $\mathcal{B}$ pod-σ-algebra $\mathcal{A}$, $f \in \mathcal{A}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$, $\mathbb{P}[f^+], \mathbb{P}[f^-] < \infty$. Potem obstaja do $\mathbb{P}$-s.g. enakosti enoličen $g \in \mathcal{B}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$ z $\mathbb{P}[g^+] \wedge \mathbb{P}[g^-] < \infty$, tak da je

$$\mathbb{P}[f; B] \;=\; \mathbb{P}[g; B], \quad \forall B \in \mathcal{B},$$

t.j. $(f \cdot \mathbb{P})\big|_{\mathcal{B}} = g(\mathbb{P}\big|_{\mathcal{B}})$; ta g je $\frac{d\left((f\cdot\mathbb{P})\big|_{\mathcal{B}}\right)}{d\left(\mathbb{P}\big|_{\mathcal{B}}\right)}$ s.g.-$\mathbb{P}$, če je $f \geqslant 0$ in $\mathbb{P}[f] < \infty$.

Definicija 3.9. g iz trditve 3.10 označimo z

$$\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}] \;:=\; \mathbb{P}_{\mathcal{B}}(f) \;:=\; \mathbb{P}_{\mathcal{B}}f,$$

pogojno matematično upanje f glede na $\mathcal{B}$ pod $\mathbb{P}$. Če je $\mathbb{P}[|f|] < \infty$ potem vztrajamo na temu, da je $|\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}]| < \infty$ povsod. Za $A \in \mathcal{A}$ pišemo

$$\mathbb{P}(A \mid \mathcal{B}) \;:=\; \mathbb{P}[\mathbb{1}_A \mid \mathcal{B}] \;=:\; \mathbb{P}_{\mathcal{B}}(A) \;=:\; \mathbb{P}_{\mathcal{B}}A,$$

pogojna verjetnost glede na $\mathcal{B}$ pod $\mathbb{P}$.

Trditev 3.11. Naj bo $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor, $\mathcal{B}$ pod-σ-algebra $\mathcal{A}$ in $f \in \mathcal{A}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$ z $\mathbb{P}[f^+] \wedge \mathbb{P}[f^-] < \infty$. Pogojno matematično upanje ima sledeče lastnosti:

(i) (*Stabilnost.*) Če je $f \in \mathcal{B}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$, potem je

$$\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}] \;=\; f \quad \text{s.g.-}\mathbb{P}.$$

(ii) (*Zakon popolne verjetnosti/stolpna lastnosti.*)

$$\mathbb{P}[\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}]] \;=\; \mathbb{P}[f]$$

(iii) Naj bo $\mathcal{C}$ pod-σ-algebra $\mathcal{A}$.

(a) (*Zaporedno pogojevanje/stolpna lastnost.*) Če sta $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$ primerljiva glede na inkluzijo je

$$\mathbb{P}[\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}] \mid \mathcal{C}] \;=\; \mathbb{P}[f \mid \mathcal{B} \cap \mathcal{C}] \quad \text{s.g.-}\mathbb{P}.$$

(b) (*Nerelevantnost trivialnih dogodkov.*) Če je $\mathcal{B} \vee \mathbb{P}^{-1}(\{0,1\}) = \\ = \mathcal{C} \vee \mathbb{P}^{-1}(\{0,1\})$, potem je

$$\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}] \;=\; \mathbb{P}[f \mid \mathcal{C}] \quad \text{s.g.-}\mathbb{P}.$$

(iv) (*Nerelevantnost množic z mero nič.*) Če je $g \in \mathcal{A}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$, $\mathbb{P}[g^+] \wedge \mathbb{P}[g^-] < \infty$ in $g = f$ s.g.-$\mathbb{P}$ potem je

$$\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}] \;=\; \mathbb{P}[g \mid \mathcal{B}] \quad \text{s.g.-}\mathbb{P}.$$

(v) (*Pogojevanje na trivialno σ-algebro.*) Če je $\mathcal{B} \subset \mathbb{P}^{-1}(\{0,1\})$, potem je

$$\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}] \;=\; \mathbb{P}[f] \quad \text{s.g.-}\mathbb{P}.$$

V posebnem je $\mathbb{P}[f \mid \{\varnothing, \infty\}] = \mathbb{P}[f]$.

(vi) (*Aditivnost.*) Če je še $g \in \mathcal{A}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$ in $\mathbb{P}[f^-] \vee \mathbb{P}[g^-] < \infty$, potem je

$$\mathbb{P}[f + g \mid \mathcal{B}] \;=\; \mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}] + \mathbb{P}[g \mid \mathcal{B}] \quad \text{s.g.-}\mathbb{P}.$$

(vii) Naj bo $\mathbb{P}[|f|] < \infty$. Naj bo še $g \in \mathcal{B}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$ z $\mathbb{P}[|g|] < \infty$. Če je

$$\mathbb{P}[f; B] \;=\; \mathbb{P}[g; B], \quad \forall B \in \Pi \cup \{\Omega\}$$

za nek π-sistem Π, ki generira $\mathcal{B}$ na Ω, potem je

$$g \;=\; \mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}] \quad \text{s.g.-}\mathbb{P}.$$

(viii) Za $h \in \mathcal{B}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$ z $\mathbb{P}[(hf)^+] \wedge \mathbb{P}[(hf)^-] < \infty$ je

$$\mathbb{P}[(h\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}])^+] \wedge \mathbb{P}[(h\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}])^-] < \infty$$

in

$$\mathbb{P}[fh] \;=\; \mathbb{P}[\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}]h].$$

(ix) (*Pogojni determinizen/homogenost.*) Če je $g \in \mathcal{B}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$ z $\mathbb{P}[(fg)^+] \wedge \mathbb{P}[(fg)^-] < \infty$, potem je

$$\mathbb{P}[fg \mid \mathcal{B}] \;=\; g\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}] \quad \text{s.g.-}\mathbb{P}.$$

V posebnem za $c \in \mathbb{R}$ je $\mathbb{P}[cf \mid \mathcal{B}] = c\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}]$ s.g.-$\mathbb{P}$.

(x) (*Monotonost.*) Če je $g \in \mathcal{A}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$ z $\mathbb{P}[g^-] \wedge \mathbb{P}[g^+] < \infty$ in če je $\mathbb{P}[f; B] \leqslant \mathbb{P}[g; B]$ $\forall B \in \mathcal{B}$ (v posebnem, če je $f \leqslant g$ s.g.-$\mathbb{P}$), potem je

$$\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}] \;\leqslant\; \mathbb{P}[g \mid \mathcal{B}] \quad \text{s.g.-}\mathbb{P}.$$

(xi) (*Trikotniška neenakost.*)

$$|\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}]| \;\leqslant\; \mathbb{P}[|f| \mid \mathcal{B}] \quad \text{s.g.-}\mathbb{P}$$

(xii) Za namene te točke opustimo predpostavko $\mathbb{P}[f^+] \wedge \mathbb{P}[f^-] < \infty$. Naj bo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje v $\mathcal{A}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$ in $g \in \mathcal{A}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$ z $\mathbb{P}[g] < \infty$ in $g \geqslant f_n^-$ s.g.-$\mathbb{P}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(a) (*Monotona konvergenca.*) Če $f_n \uparrow f$, ko gre $n \to \infty$, s.g.-$\mathbb{P}$, potem tudi

$$\mathbb{P}[f_n \mid \mathcal{B}] \;\uparrow\; \mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}],$$

ko gre $n \to \infty$, s.g.-$\mathbb{P}$.

(b) (*Fatou-jeva lema.*) $\mathbb{P}[(\liminf_{n\to\infty} f_n)^-] < \infty$ in

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}[f_n \mid \mathcal{B}] \;\geqslant\; \mathbb{P}[\liminf_{n\to\infty} f_n \mid \mathcal{B}] \quad \text{s.p.-}\mathbb{P}.$$

(c) (*Dominirana konvergenca.*) Če je $|f_n| \leqslant g$ s.g.-$\mathbb{P}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ in $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ s.g.-$\mathbb{P}$, potem je $\mathbb{P}[[f]] < \infty$ in

$$\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}] \;=\; \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[f_n \mid \mathcal{B}]$$

s.g.-$\mathbb{P}$ in v $L^1(\mathbb{P})$.

(xiii) (a) (*Neodvisno pogojevanje.*) Če je $\mathcal{B}'$ še pod-σ-algebra $\mathcal{A}$, $f' \in \mathcal{A}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$ z $\mathbb{P}[(f')^+] \wedge \mathbb{P}[(f')^-] < \infty$ in če je $\mathcal{B} \vee \sigma(f)$ neodvisna od $\mathcal{B}' \vee \sigma(f')$ kot tudi $\mathbb{P}[(ff')^+] \wedge \mathbb{P}[(ff')^-] < \infty$, potem je

$$\mathbb{P}[ff' \mid \mathcal{B} \vee \mathcal{B}'] \;=\; \mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}]\mathbb{P}[f' \mid \mathcal{B}'] \quad \text{s.g.-}\mathbb{P}.$$

(b) (*Nerelevantnost neodvisnih dogodkov.*) Če je $\mathcal{C}$ pod-σ-algebra $\mathcal{A}$, ki je neodvisna od $\mathcal{B} \vee \sigma(f)$, potem je

$$\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B} \vee \mathcal{C}] \;=\; \mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}] \quad \text{s.g.-}\mathbb{P}.$$

(c) (*Pogojevanje na neodvisno σ-algebro.*) Če je $\mathcal{B}$ neodvisna od $\sigma(f)$, potem je

$$\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}] \;=\; \mathbb{P}[f] \quad \text{s.p.-}\mathbb{P}.$$

(xiv) (*Jensenova neenakost.*) Če je $\varphi : I \to \mathbb{R}$ konveksna, I interval na $\mathbb{R}$, f jemlje vrednosti v I, $\mathbb{P}[|f|] < \infty$, potem je $\mathbb{P}(\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}] \in I) = 1$, $\varphi \circ f \in \mathcal{A}/\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$, $\mathbb{P}[(\varphi \circ f)^-] < \infty$,

$$\mathbb{P}[\varphi \circ f \mid \mathcal{B}] \;\geqslant\; \varphi \circ (\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}]) \quad \text{s.g.-}\mathbb{P}$$

in $f = \mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}]$ s.g.-$\mathbb{P}$ na $\{\mathbb{P}[f \mid \mathcal{B}] \in \partial I\}$.

Trditev 3.12. Naj bo $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor. Nekaj metod za direktno računanje matematičnega upanja:

(i) (*Diskretno pogojno matematično upanje.*) Naj bo $I \in 2^{\mathcal{A}}$ števa particija Ω. Potem je za $X \in \mathcal{A}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$

$$\mathbb{P}[X \mid \sigma_\Omega(\mathcal{I})] \;=\; \sum_{I \in \mathcal{I} \cap \mathbb{P}^{-1}((0,1])} \mathbb{1}_I \cdot \mathbb{P}[X \mid I] \quad \text{s.p.-}\mathbb{P},$$

torej $\mathbb{P}[X \mid \sigma_\Omega(\mathcal{I})] = \mathbb{P}[X \mid I]$ na I, za vsak $I \in \mathcal{I}$ z $\mathbb{P}(I) > 0$.

(ii) Naj bosta $(F, \mathcal{F})$ in $(E, \mathcal{E})$ merljiva prostora, $X \in \mathcal{A}/\mathcal{F}$, $Y \in \mathcal{A}/\mathcal{E}$ slučajna elementa, $h \in (\mathcal{F} \otimes \mathcal{E})/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$, $\mathbb{P}[h^+(X,Y)] \wedge \mathbb{P}[h^-(X,Y)] < \infty$.

(a) (*Absolutno zvezna slučajni elementa.*) Naj bosta $\mathbb{f}$ σ-končna mera na $(F, \mathcal{F})$ in $\mathbb{e}$ σ-končna mera na $(E, \mathcal{E})$ in naj bo $\mathbb{P}_{(X,Y)} \ll \mathbb{f} \times \mathbb{e}$.[13] Označimo

$$f_{1\,2} \;:=\; \frac{d\mathbb{P}_{(X,Y)}}{d(\mathbb{f} \times \mathbb{e})}, \quad f_2 \;:=\; \frac{d\mathbb{P}_Y}{d\mathbb{e}}.$$

Potem je $\mathbb{P}$-s.g.

$$\mathbb{P}[h(X,Y) \mid \sigma^{\mathcal{E}}(Y)] \;=\; c(Y),$$

[13] Zadnja predpostavka implicira $\mathbb{P}_X \ll \mathbb{f}$ in $\mathbb{P}_Y \ll \mathbb{e}$.

kjer je

$$c(y) \ := \ \int h(x,y)\frac{f_{1\,2(x,y)}}{f_2(y)}\,\mathbb{f}(dx)\,\mathbb{1}_{\{f_2>0\}}y, \quad y \in \mathbb{E}.$$

Naprej, $c \in \mathcal{E}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$.

(b) (*Neodvisna slučajne elementa.*) Naj bo $\mathcal{G}$ pod-σ-algebra A, da je $Y \in \mathcal{G}/\mathcal{E}$ in X neodvisna od $\mathcal{G}$. Potem je $\mathbb{P}$-s.g.

$$\mathbb{P}[h(X,Y) \mid \mathcal{G}] \ = \ d(Y),$$

kjer je

$$d(y) := \mathbb{P}[h(X,y)], \quad y \in E.$$

Naprej, $d \in \mathcal{E}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$.

Definicija 3.10. Če je $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostr in Z slučajni element z vrednostmi v merljivem prostoru $(E, \mathcal{E})$; potem pišemo

$$\mathbb{P}[f \mid Z] \ := \ \mathbb{P}[f \mid \sigma^{\mathcal{E}}(Z)]$$

za $f \in \mathcal{A}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$ z $\mathbb{P}[f^+] \wedge \mathbb{P}[f^-] < \infty$.

Trditev 3.13. Naj bo $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor in Z slučajni element z vrednostmi v merljivem prostoru $(E, \mathcal{E})$. Za $f \in \mathcal{A}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$ z $\mathbb{P}[f^+] \wedge \mathbb{P}[f^-] < \infty$ obstaja $\mathbb{P}_Z$-s.g. enolično določen $g \in \mathcal{E}/\mathscr{B}_{[-\infty,\infty]}$, da je

$$\mathbb{P}[f \mid Z] \ = \ g(Z) \quad \text{s.g.-}\mathbb{P}.$$