Verjetnost z mero - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar
po predavanjih profesorja Matija Vidmarja

2021/22

Kazalo

1 Merljivost in mera **3**

1.1 Merljive množice 3

1.2 Mere 4

1 Merljivost in mera

1.1 Merljive množice

Definicija 1.1. Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ (t.j. $\mathcal{A} \in 2^{2^\Omega}$). Potem rečemo, da je $\mathcal{A}$ *zaprta* za:

- c^Ω (t.j. za komplement v Ω)
$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall A : (A \in \Omega \ \Rightarrow \ \Omega \setminus A \in \mathcal{A});$$
- $\cap$ (t.j. za preseke)
$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A} \ \text{ brž ko je } \{A_1, A_2\} \subset A;$$
- $\cup$ (t.j. za unije)
$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A} \ \text{ brž ko je } \{A_1, A_2\} \subset A;$$
- $\setminus$ (t.j. za razlike)
$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A} \ \text{ brž ko je } \{A_1, A_2\} \subset A;$$
- $\sigma\cap$ (t.j. za števne preseke)
$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \ \text{ za vsako zaporedje } (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ iz } \mathcal{A};$$
- $\sigma\cup$ (t.j. za števne unije)
$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \ \text{ za vsako zaporedje } (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ iz } \mathcal{A}.$$

Definicija 1.2. $\mathcal{A}$ je *σ-algebra* na Ω

$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad (\Omega, \mathcal{A}) \ \text{ je merljiv prostor}$$
$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad \emptyset \in \mathcal{A} \text{ in } \mathcal{A} \text{ je zaprt za } \mathsf{c}^\Omega \text{ in za } \sigma\cup.$$

V primeru, da $\mathcal{A}$ je σ-algebra na Ω:

- A je $\mathcal{A}$-merljiva $\overset{\text{def}}{\iff}$ $A \in \mathcal{A}$;
- $\mathcal{B}$ je pod-σ-algebra $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mathcal{B}$ je σ-algebra na Ω in $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

Trditev 1.1. Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ zaprta za c^Ω in naj bo $\emptyset \in \mathcal{A}$. Potem je $\mathcal{A}$ σ-algebra na Ω, če je $\mathcal{A}$ zaprta za števne preseke, in v tem primeru je $\mathcal{A}$ zaprta za $\cap$, $\cup$ in $\setminus$.

1.2 Mere

Definicija 1.3. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F})$ merljiv prostor in $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$. μ je *mera* na $(\Omega, \mathcal{F})$ $\overset{\text{def}}{\iff}$

- $\mu(\emptyset) \ = \ 0$;
- $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\right) \ = \ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ za vsako zaporedje $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{F}$, ki sestoji iz paroma disjunktnih dogodkov.

Lastnosti:

- Mera μ na $(\Omega, \mathcal{F})$ je *končna* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mu(\Omega) < \infty$.
- Mera μ na $(\Omega, \mathcal{F})$ je *verjetnostna*[1] $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mu(\Omega) = 1$
- Mera μ na $(\Omega, \mathcal{F})$ je *σ-končna* $\overset{\text{def}}{\iff}$ obstaja zaporedje $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v $\mathcal{F}$, da je

$$\begin{aligned} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ &= \ \Omega \quad \text{in} \\ \mu(A_n) \ &< \ \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ je prostor z mero $\overset{\text{def}}{\iff}$ μ je mera na $(\Omega, \mathcal{F})$. Če je μ mera na $(\Omega, \mathcal{F})$ potem je $\mu(\Omega)$ *masa* mere μ. Če je $A \in \mathcal{F}$, potem je:

- A je *μ-zanemarljiv* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mu(A) = 0$;

[1] Tudi: μ je *verjetnost*.

- A je *μ-trivialna* $\overset{\text{def}}{\iff}$ A ali $\Omega \setminus A$ je μ-zanemarljiva

Če imamo poleg tega še lastnost $P(\omega)$ v $\omega \in A$, potem

- $P(\omega)$ drži *μ-skoraj povsod* (μ-s.p.) v $\omega \in A$ $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$A_{\neg P} \;:=\; \{\omega \in \Omega \mid \neg P(\omega) \in \mathcal{F} \text{ in } \mu(A_{\neg P}) = 0\};$$

- $P(\omega)$ drži *μ-skoraj gotovo* (μ-s.g.) $\overset{\text{def}}{\iff}$ $P(\omega)$ drži μ-skoraj povsod in μ je verjetnostna.

P drži μ-skoraj povsod na A $\overset{\text{def}}{\iff}$ $P(\omega)$ drži μ-skoraj povsod v $\omega \in A$. Podobno za ostale.