Verjetnost z mero - definicije, trditve in izreki

Oskar Vavtar
po predavanjih profesorja Matija Vidmarja

2021/22

Kazalo

1 Merljivost in mera

1.1 Merljive množice

Definicija 1.1. Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ (t.j. $\mathcal{A} \in 2^{2^\Omega}$). Potem rečemo, da je $\mathcal{A}$ *zaprta* za:

- c^Ω (t.j. za komplement v Ω)

$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall A : (A \in \Omega \ \Rightarrow \ \Omega \setminus A \in \mathcal{A});$$

- $\cap$ (t.j. za preseke)

$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A} \ \text{ brž ko je } \{A_1, A_2\} \subset A;$$

- $\cup$ (t.j. za unije)

$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A} \ \text{ brž ko je } \{A_1, A_2\} \subset A;$$

- $\setminus$ (t.j. za razlike)

$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A} \ \text{ brž ko je } \{A_1, A_2\} \subset A;$$

- $\sigma\cap$ (t.j. za števne preseke)

$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \ \text{ za vsako zaporedje } (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ iz } \mathcal{A};$$

- $\sigma\cup$ (t.j. za števne unije)

$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \ \text{ za vsako zaporedje } (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ iz } \mathcal{A}.$$

Definicija 1.2. $\mathcal{A}$ je *σ-algebra* na Ω

$$\begin{aligned} &\overset{\text{def}}{\iff} \quad (\Omega, \mathcal{A}) \ \text{ je merljiv prostor} \\ &\overset{\text{def}}{\iff} \quad \emptyset \in \mathcal{A} \text{ in } \mathcal{A} \text{ je zaprt za } \mathsf{c}^\Omega \text{ in za } \sigma\cup. \end{aligned}$$

V primeru, da $\mathcal{A}$ je σ-algebra na Ω:

- A je $\mathcal{A}$-merljiva $\overset{\text{def}}{\iff}$ $A \in \mathcal{A}$;
- $\mathcal{B}$ je pod-σ-algebra $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mathcal{B}$ je σ-algebra na Ω in $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

Trditev 1.1. Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ zaprta za c^Ω in naj bo $\emptyset \in \mathcal{A}$. Potem je $\mathcal{A}$ σ-algebra na Ω, če je $\mathcal{A}$ zaprta za števne preseke, in v tem primeru je $\mathcal{A}$ zaprta za $\cap$, $\cup$ in $\setminus$.

1.2 Mere

Definicija 1.3. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F})$ merljiv prostor in $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$. μ je *mera* na $(\Omega, \mathcal{F})$ $\overset{\text{def}}{\iff}$

- $\mu(\emptyset) \ = \ 0$;
- $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\right) \ = \ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ za vsako zaporedje $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{F}$, ki sestoji iz paroma disjunktnih dogodkov.

Lastnosti:

- Mera μ na $(\Omega, \mathcal{F})$ je *končna* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mu(\Omega) < \infty$.
- Mera μ na $(\Omega, \mathcal{F})$ je *verjetnostna*[1] $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mu(\Omega) = 1$
- Mera μ na $(\Omega, \mathcal{F})$ je *σ-končna* $\overset{\text{def}}{\iff}$ obstaja zaporedje $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v $\mathcal{F}$, da je

$$\begin{aligned} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ &= \ \Omega \quad \text{in} \\ \mu(A_n) \ &< \ \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ je prostor z mero $\overset{\text{def}}{\iff}$ μ je mera na $(\Omega, \mathcal{F})$. Če je μ mera na $(\Omega, \mathcal{F})$ potem je $\mu(\Omega)$ *masa* mere μ. Če je $A \in \mathcal{F}$, potem je:

- A je *μ-zanemarljiv* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mu(A) = 0$;

[1] Tudi: μ je *verjetnost*.

- A je *μ-trivialna* $\overset{\text{def}}{\iff}$ A ali $\Omega \setminus A$ je μ-zanemarljiva

Če imamo poleg tega še lastnost $P(\omega)$ v $\omega \in A$, potem

- $P(\omega)$ drži *μ-skoraj povsod* (μ-s.p.) v $\omega \in A$ $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$A_{\neg P} \;:=\; \{\omega \in \Omega \mid \neg P(\omega) \in \mathcal{F} \text{ in } \mu(A_{\neg P}) = 0\};$$

- $P(\omega)$ drži *μ-skoraj gotovo* (μ-s.g.) $\overset{\text{def}}{\iff}$ $P(\omega)$ drži μ-skoraj povsod in μ je verjetnostna.

P drži μ-skoraj povsod na A $\overset{\text{def}}{\iff}$ $P(\omega)$ drži μ-skoraj povsod v $\omega \in A$. Podobno za ostale.

Trditev 1.2. Naj bo μ mera na $(\Omega, \mathcal{F})$. Potem:

(i) μ je aditivna:
$$\mu(A \cup B) \;=\; \mu(A) + \mu(B)$$
za vsaki disjunktivni množici $A, B \in \mathcal{F}$.

(ii) μ je monotona:
$$\mu(A) \;\leq\; \mu(B),$$
če je $A \subset B$ in $A, B \in \mathcal{F}$

(iii) μ je zvezna od spodaj:
$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \;=\; \uparrow\text{-}\lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$
za vsako zaporedje $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iz $\mathcal{F}$, ki je nepadajoče glede na inkluzijo: $A_n \subset A_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

(iv) μ je števno subaditivna:
$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \;\leq\; \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$
za vsako zaporedje $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iz $\mathcal{F}$.

(v) Naj bo μ končna:

$$\mu(\Omega \setminus A) \;=\; \mu(\Omega) - \mu(A) \;\forall A \in \mathcal{F}.$$

Naprej, μ je zvezna od zgoraj:

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \;=\; \downarrow\text{-}\lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

za vsako zaporedje $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{F}$, ki je nenaraščajoča glede na inkluzijo: $A_n \supset A_{n+1}$ $\forall n \in N$.

(vi) Za vsak $A \in \mathcal{F}$ je

$$\mathcal{F}\big|_A \;:=\; \{B \cap A \mid B \in \mathcal{F}\}$$

σ-algebra na A in $\mu_A := \mu\big|_{\mathcal{F}|_A}$ je mera na $(A, \mathcal{F}\big|_A)$.

Definicija 1.4. $\mu_A := \mu\big|_{\mathcal{F}|_A}$ rečemo *mera* μ *zožana na* A oz. *zožitev* μ *na* A.

1.3 Merljive preslikave in generirane σ-algebre

Definicija 1.5. Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$:

$$\sigma_\Omega(\mathcal{A}) \;:=\; \bigcap\{\mathcal{F} \in 2^{2^\Omega} \mid \mathcal{F}\ \sigma\text{-algebra na } \Omega \text{ in } \mathcal{F} \supset \mathcal{A}\},$$

rečemo σ-algebra z A na Ω. Če sta $\mathcal{B}_1$ in $\mathcal{B}_2$ obe σ-algebri na Ω, potem definiramo

$$\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2 \;:=\; \sigma_\Omega(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)$$

in ji rečemo skupek $\mathcal{B}_1$ in $\mathcal{B}_2$. Bolj splošno, če imamo družino σ-algebr $(B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ na Ω, potem postavimo

$$\bigvee_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{B}_\lambda \;:=\; \sigma_\Omega\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{B}_\lambda\right).$$

Definicija 1.6. Naj bo $f : \Omega \to \Omega'$. Če je dana σ-algebra $\mathcal{F}'$ na Ω', potem definiramo

$$\sigma^{\mathcal{F}'}(f) \;:=\; \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{F}'\}.$$

Začetno strukturo f glede na $\mathcal{F}'$ (tudi, σ-algebra generirana s f glede na $\mathcal{F}'$). Če je dana σ-algebra $\mathcal{F}$ na Ω, potem definiramo

$$\sigma_{\mathcal{F}}^{\Omega'}(f) \;:=\; \{A' \in 2^{\Omega'} \mid f^{-1}(A') \in \mathcal{F}\}$$

končno strukturo f na Ω' glede na $\mathcal{F}$. Če sta dani σ-algebri $\mathcal{F}$ na Ω in σ-algebra $\mathcal{F}'$ na Ω, potem rečemo: f je $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$-merljiva $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$f^{-1}(A') \in \mathcal{F}, \quad \forall A' \in \mathcal{F}.$$

Definicija 1.7. Če je $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω in je $\mathcal{F}'$ σ-algebra na Ω', potem označimo

$$\mathcal{F}/\mathcal{F}' \;:=\; \{f \in \Omega'^{\Omega} \mid f \text{ je } \mathcal{F}/\mathcal{F}'\text{-merljiva}\}.$$

Definicija 1.8. Za $A \subset \Omega$ definiramo $\mathbb{1}_{A_\Omega} : \Omega \to \{0,1\}$,

$$\mathbb{1}_{A_\Omega}(x) \;:=\; \begin{cases} 1\,; & x \in A, \\ 0\,; & x \notin A, \end{cases}, \quad x \in \Omega,$$

ki ji rečemo *indikatorska funkcija A na ambientnem prostoru Ω.*[2]

Trditev 1.3. Za σ-algebre $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$, kjer $f \in \mathcal{F}/\mathcal{G}$ in $g \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$ je

$$g \circ f \;\in\; \mathcal{F}/\mathcal{H}.$$

Trditev 1.4. Naj bo $f : \Omega \to \Omega'$:

(i) Za σ-algebro $\mathcal{F}'$ na Ω' je $\sigma^{\mathcal{F}'}(f)$ σ-algebra na Ω; ona je najmanjša (glede na inkluzijo) σ-algebra $\mathcal{G}$ na Ω, da je $f \in \mathcal{G}/\mathcal{F}'$.

(ii) Za σ-algebro $\mathcal{F}$ na Ω je $\sigma_F^{\Omega'}(f)$ σ-algebra na Ω'; ona je največja (glede na inkluzijo) σ-algebra $\mathcal{G}'$ na Ω, da je $f \in \mathcal{F}/\mathcal{G}$.

[2]Ponavadi namesto $\mathbb{1}_{A_\Omega}$ pišemo le $\mathbb{1}_A$.

(iii) Za σ-algebro $\mathcal{F}$ na Ω in σ-algebro $\mathcal{F}'$ na Ω' je

$$f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}' \iff \sigma^{\mathcal{F}'}(f) \subset \mathcal{F} \iff \mathcal{F}' \subset \sigma_{\mathcal{F}}^{\Omega'}(f).$$

(iv) Naj bo $\mathcal{A}'\sigma 2^{\Omega'}$ ter $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω. Potem je

$$f \in \mathcal{F}/\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}') \iff (f^{-1}(A') \in \mathcal{F},\ \forall A' \in \mathcal{A}').$$

Velja tudi

$$\sigma^{\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}')}(f) = \sigma_{\Omega}(\{f^{-1}(A') \mid A' \in \mathcal{A}'\}).$$

Definicija 1.9. *Sled* $\mathcal{A}$ *na* A definiramo kot

$$\mathcal{A}\big|_A := \{B \cap A \mid B \in \mathcal{A}\}.[3]$$

Trditev 1.5 (Sledi komutirajo v generirani σ-algebri)**.** Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ in $A \subset \Omega$. Potem je

$$\sigma_A(\mathcal{A}\big|_A) = \sigma_{\Omega}(\mathcal{A})\big|_A.$$

Trditev 1.6. Naj bo $f : \Omega \to \Omega'$ in naj bo $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω ter $\mathcal{F}'$ σ-algebra na Ω'.

(i) Če je $A' \subset \Omega'$ in $f : \Omega \to A'$, potem je

$$f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}' \iff f \in \mathcal{F}/(\mathcal{F}'\big|_{A'}).$$

(ii) Če je $A \in \Omega$ in $f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$, potem

$$f\big|_A \in (\mathcal{F}\big|_A)/\mathcal{F}'.$$

(iii) Če je $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ zaporedje v $\mathcal{F}$ in $\Omega = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ in je $f\big|_{A_i} \in (\mathcal{F}\big|_{A_i})/\mathcal{F}'$ $\forall i \in \mathbb{N}$, potem je

$$f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$$

.

[3]Zapis je isti kot za zožitev, vendar ne pomeni isto.

1.4 Borelove množice na razširjeni realni osi $[-\infty, \infty]$ in Borelova merljivost numeričnih funkcij

Definicija 1.10. Definirajmo *razširjeno realno os*:

$$\begin{aligned} [-\infty, \infty] &:= \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\} \\ [-\infty, a] &:= \{-\infty\} \cup (-\infty, a] \quad \text{za } a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \end{aligned}$$

Relacijo $\leq$ na $\mathbb{R}$ razširimo na $[-\infty, \infty]$ kot sledi:

$$-\infty \leq x \leq \infty \quad \forall x \in [-\infty, \infty].$$

Temu ustrezno imamo "$(<) := (\leq) \setminus (=)$", itd.

Definicija 1.11. *Borelovo σ-algebro* na $[-\infty, \infty]$ definiramo kot

$$\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]} := \sigma_{[-\infty,\infty]}(\{[-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}\}).$$

Za $A \subset [-\infty, \infty]$ je

$$\mathcal{B}_A := \mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}\big|_A$$

Borelova σ-algebra na A. Elementom Borelovih σ-algebr pravimo *Borelove množice.*

Definicija 1.12. Funkcija f je *numerična*, če je $\mathcal{Z}_f \in [-\infty, \infty]$.

Definicija 1.13. Če je funkcija f numerična:

- $\sigma(f) := \sigma^{\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}}(f)$;
- če je $\mathcal{F}$ σ-algebra na domeni f, je f $\mathcal{F}$-merljiva $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ f je $\mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$-merljiva;
- če je $g : \mathcal{D}_f \to [-\infty, \infty]$, je

$$\begin{aligned} g \wedge f &:= \min\{g, f\}^4 \\ g \vee f &:= \max\{g, f\}. \end{aligned}$$

Definiramo *pozitivni* in *negativni del* f:

$$\begin{aligned} f^+ &:= f \vee 0 \\ f^- &:= (-f) \vee 0 \end{aligned}$$

Opomba.

- $f \;=\; f^+ - f^-$
- $|f| \;=\; f^+ + f^-$

Definicija 1.14. Dogovorimo se

$$\begin{aligned} 0\cdot(\pm\infty) \;&:=\; 0 \;=:\; (\pm\infty)\cdot 0 \\ \infty + (-\infty) \;&:=\; 0 \;=:\; (-\infty)+\infty. \end{aligned}$$

Preostanek aritmetike na $[-\infty,\infty]$ definiramo na naraven način, npr.

$$\begin{aligned} a\cdot\infty \;&:=\; \mathrm{sgn}(a)\cdot\infty \quad \text{za } a\in[-\infty,\infty]\setminus\{0\} \\ a+\infty \;&:=\; \infty \quad \text{za } a\in(-\infty,\infty] \\ \infty-\infty \;&:=\; \infty+(-\infty) \;=\; 0 \\ &\mathit{itd.} \end{aligned}$$

Trditev 1.7. Če je $A\subset[-\infty,\infty]$ in je $f : A\to[-\infty,\infty]$ zvezna, potem je $f\in\mathcal{B}_A/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$. Če je $\{f,g\}\subset\mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$ za σ-algebro $\mathcal{F}$, potem je

$$\{f+g, f\cdot g\}\subset\mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$$

in

$$\{\{f\le g\},\{f=g\},\{f<g\}\}\subset\mathcal{F}$$

.

Trditev 1.8. Naj bo $\mathcal{F}$ σ-algebra in $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje v $\mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$. Potem je

$$\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n, \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n, \limsup_{n\to\infty} f_n, \liminf_{n\to\infty} f_n\} \;\subset\; \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}.$$

Če je $f_n\ge 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$, potem je

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \;\in\; \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[0,\infty]}.$$

Definicija 1.15. Naj bo $\mathcal{F}$ σ-algebra. Za $\{f,g\} \subset \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$ je

$$\{f \vee g, f \wedge g, f^+, f^-, |f|\} \ \subset \ \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}.$$

Za zaporedje $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v $\mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$ je

$$\{\{f_n \text{ konverg., ko } n \to \infty\}, \{f_n \text{ konverg. v } \mathbb{R}, \text{ ko } n \to \infty\}, \{\lim_{n\to\infty} f_n = f_\infty\}\} \ \subset \ \mathcal{F}.$$

1.5 Argumenti monotonega razreda

Definicija 1.16. Naj bo $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω in $f : \Omega \to [0,\infty)$:

$$f \text{ je } \mathcal{F}\text{-enostavna} \ \overset{\text{def}}{\iff} \ f \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[0,\infty)} \text{ in } \mathcal{Z}_f \text{ je končna.}$$

Trditev 1.9. Naj bo $(\Omega,\mathcal{F})$ merljiv prostor in $f : \Omega \to [0,\infty]$. Potem je f $\mathcal{F}$-enostavna $\iff$

$$f \ = \ \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{A_i},$$

za neke c_i, $i \in [n]$, iz $[0,\infty)$, neke A_i, $i \in [n]$, iz $\mathcal{F}$ in nek $n \in \mathbb{N}$. Naprej; če je $f \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[0,\infty]}$, potem je

$$\big((2^{-n}\lfloor 2^n f \rfloor) \wedge n\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

zaporedje $\mathcal{F}$-enostavnih funkcij, ki ne padajo k f (celo enakomerno na vsaki množici na kateri je f omejena).

Posledica (Izrek o monotonem razredu)**.** Naj bo $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω in $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[0,\infty]}$. Če je

$$\mathbb{1}_A \in \mathcal{M} \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

in je $\mathcal{M}$ zaprta za nenegativne linearne kombinacije (je stožec)[5] in je $\mathcal{M}$

[5] Pomeni:

$$\{m_1, m_2\} \subset \mathcal{M}, \ \{c_1, c_2\} \subset (0,\infty) \ \Rightarrow \ c_1 m_1 + c_2 m_2 \in \mathcal{M}$$

zaprta za nepadajoče limite[6] potem je

$$\mathcal{M} \;=\; \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[0,\infty]}.$$

Trditev 1.10 (Doob-Dynkinova faktorizacijska lema)**.** Naj bo $X : \Omega \to A$, $(A, \mathcal{A})$ merljiv prostor. Potem je

$$Y \in \sigma^{\mathcal{A}}(X)/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]} \iff \exists h \in \mathcal{A}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]},\ \text{da je } Y = h \circ X = h(X).$$

Definicija 1.17. Naj bo $\mathcal{D} \subset 2^{\Omega}$. D je Dynkinov sistem (tudi λ-sistem) na $\Omega \overset{\text{def}}{\iff}$

- $\Omega \in \mathcal{D}$,
- $B \setminus A \in \mathcal{D}$ brž ko je $\mathcal{D} \ni A \subset B \in \mathcal{D}$,
- če je $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ je nepadajoče zaporedje v $\mathcal{D}$ je tudi $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$.

$\mathcal{D}$ je π-sistem $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mathcal{D}$ je zaprt za $\cap$.

Trditev 1.11. Naj bo $\mathcal{D} \subset 2^{\Omega}$. Potem je $\mathcal{D}$ Dynkinov sistem $\iff$

- $\Omega \in \mathcal{D}$,
- $\mathcal{D}$ zaprta za c^{Ω},
- $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ zaporedje iz $\mathcal{D}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$ iz $\mathbb{N} \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{D}$.

$\mathcal{D}$ je σ-algebra na $\Omega \iff \mathcal{D}$ je λ-sistem na Ω in π-sistem.

Definicija 1.18. Za $\mathcal{L} \subset 2^{\Omega}$ postavimo

$$\lambda_{\Omega}(\mathcal{L}) \;:=\; \bigcap \{\mathcal{D} \in 2^{2^{\Omega}} \mid \mathcal{D} \text{ je } \lambda\text{-sistem in } \mathcal{D} \supset \mathcal{L}\}.$$

[6]Pomeni: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nepadajoče zaporedje iz $\mathcal{M}$, potem je

$$\lim_{n \to \infty} f_n \in \mathcal{M}$$

Trditev 1.12. Naj bo $\mathcal{L}$ π-sistem in $\mathcal{L} \subset 2^\Omega$. Potem je

$$\lambda_\Omega(\mathcal{L}) \; = \; \sigma_\Omega(\mathcal{L}).$$

Posledica (π-λ izrek/Dynkinova lema)**.** Naj bo $\mathcal{L}$ π-sistem in $\mathcal{D}$ λ-sistem na Ω, $\mathcal{L} \subset \mathcal{D}$. Potem je

$$\sigma_\Omega(\mathcal{L}) \; \subset \; \mathcal{D}.$$

Trditev 1.13. Naj bosta μ, ν meri na merljivem prostoru $(E, \mathcal{E})$, $\mathcal{L} \subset \mathcal{E}$ π-sistem, $\sigma_E(\mathcal{L}) = \mathcal{E}$. Predpostavimo, da je $\mu|_\mathcal{L} = \nu|_\mathcal{L}$ in da obstaja zaporedje $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{L}$, ki je nepadajoče ali sestoji iz paroma disjunktnih množic, in za katerega je

- $\mu(L_n) \; = \; \nu(L_n) \; < \; \infty,$
- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n \; = \; E.$

Potem je

$$\mu \; = \; \nu$$

.

1.6 Lebesque-Stieltjesova mera

Izrek 1.1 (Lebesque-Stieltjesov izrek)**.** Naj bo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nepadajoča in zvezna z desne (*ca'd*). Potem obstaja natanko ena mera μ na $\mathcal{B}_\mathbb{R}$, da je

$$\mu([a, b]) \; = \; F(b) - F(a) \quad \forall a \leq b \in \mathbb{R}.$$

Definicija 1.19. μ iz prejšnjega izreka rečemo *mera prirejena* F *v Lebesque-Stieltjesovem smislu* in jo označimo z dF. V posebne primernu primeru, ko je $F = \mathrm{id}_\mathbb{R}$ ji rečemo *Lebesqueva mera* in jo označimo

$$\mathscr{L} \; := \; d(\mathrm{id}_\mathbb{R}).$$

Trditev 1.14. Naj bo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ca'd*, nepadajoča. Potem je dF:

- σ-končna $\iff$ je F omejena:

$$dF(\mathbb{R}) \;=\; \lim_{n\to\infty} dF((-n, n])$$

- verjetnostna $\iff$ $\lim_{\infty} F - \lim_{-\infty} F = 1$.

Za $x \in \mathbb{R}$ je

$$dF(\{x\}) \;=\; F(x) - F(x^{-}),$$

$\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (x - \frac{1}{n}, x]$.

2 Integracija na merljivih prostorih

2.1 Lebesgueov integral

Definicija 2.1. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero $f \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$.

(a) Za f, ki je $\mathcal{F}$-enostavna postavimo

$$\int f\,d\mu \;:=\; \sum_{a\in\mathcal{Z}_f} d\mu(\{f=a\}) \;=\; \sum_{a\in\mathcal{Z}_f} d\mu(f^{-1}(\{a\})).$$

(b) Za $f \geq 0$, ki ni $\mathcal{F}$-enostavna postavimo

$$\int f\,d\mu \;:=\; \sup\{\int g\,d\mu \mid g \leq f,\; g\ \mathcal{F}\text{-enostavna}\}.$$

(c) Za $\neg(f \geq 0)$, ki ni $\mathcal{F}$-enostavna postavimo

$$\int f\,d\mu \;:=\; \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu.$$

Dogovor.

$$\mu[f] \;=\; \mu^x[f(x)] \;:=\; \int f(x)\,\mu(dx) \;:=\; \int f\,d\mu$$

Če je še $A \in \mathcal{F}$, potem označimo še

$$\mu[f;A] \;:=\; \mu^x[f(x); x\in A] \;:=\; \int_A f(x)\,\mu(dx) \;:=\; \int_A f\,d\mu \;:=\; \int f\mathbb{1}_A\,d\mu.$$

Integral f proti μ je *dobro definiran* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\int f^+\,d\mu \;\wedge \int f^-\,d\mu \;<\; \infty;$$

f je μ-integrabilna $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\int f^+\,d\mu \;\vee \int f^-\,d\mu \;<\; \infty.$$

Definicija 2.2. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero:

$$\mathcal{L}^1(\mu) \ := \ \{f \in \mathcal{F}/\mathcal{B} \mid f \text{ je } \mu\text{-integrabilna}\}.$$

Za $g : \Omega \to \mathbb{C}$ z $\{\Re(g), \Im(g)\} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ je

$$\int g \, d\mu \ := \ \int \Re(g) \, d\mu + i \int \Im(g) \, d\mu.$$