

Aproksymacja profilu wysokościowego

Oskar Wiśniewski, 198058
Politechnika Gdańska, WETI

19 maja 2025

1 Wstęp

1.1 Profil wysokościowy

Profil wysokościowy to wykres przedstawiający zmiany wartości wysokości bezwzględnej terenu w funkcji odległości od punktu początkowego trasy. Pokazuje, jak zmienia się wysokość nad poziomem morza wraz z oddalaniem się od owego punktu startowego, dzięki czemu pozwala na intuicyjne odczytanie charakteru jakiegoś odcinka terenu.

Profile wysokościowe mają szczególne znaczenie dla uczestników wyścigów kolarskich, biegaczy oraz turystów, którym to ułatwiają przygotowanie do trasy i rozplanowanie wysiłku. Korzystać z nich również mogą inżynierowie projektujący infrastrukturę transportową, geolodzy, czy architekci.

1.2 Interpolacja

Interpolacja polega na wyznaczaniu przybliżonych wartości funkcji na podstawie punktów, dla których są one znane, zwanych węzłami interpolacji. Mogą nimi być przykładowo punkty pomiarowe, wyniki obliczeń numerycznych, czy punkty zadane analitycznie (na podstawie wzoru funkcji).

Pierwszym etapem interpolacji jest wyznaczenie parametrów funkcji interpolacyjnej na podstawie węzłów. Następnie należy obliczyć wartości funkcji interpolacyjnej dla zadanej siatki punktów. Co istotne, z definicji interpolacja dotyczy wyłącznie oszacowania wartości wewnątrz przedziału wyznaczonego przez węzły interpolacyjne - poza zakresem mówimy o ekstrapolacji, które generalnie nie gwarantuje takiej samej dokładności jak interpolacja.

1.3 Interpolacja wielomianowa - metoda Lagrange’a

Interpolacja wielomianowa funkcji $f(x)$ polega na skonstruowaniu wielomianu $W_N(x)$ stopnia maksymalnie N w oparciu o $N+1$ różnych węzłów interpolacyjnych $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$, dla których to zachodzi warunek:

$$W_N(x_i) = f(x_i), \quad \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, N\} \quad (1)$$

Dla danych węzłów interpolacyjnych i ich wartości można skonstruować dokładnie jeden wielomian o postaci:

$$W_N(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_Nx^N \quad (2)$$

Szczególnym przykładem interpolacji wielomianowej jest interpolacja Lagrange'a, dla której baza funkcji określona jest następującym wzorem:

$$\phi_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad (3)$$

Po zastosowaniu go dla wszystkich węzłów interpolacyjnych można wyznaczyć wielomian interpolacyjny w następujący sposób:

$$W_N(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \phi_i(x) \quad (4)$$

1.4 Interpolacja funkcjami sklejanymi

Interpolacja funkcjami sklejanymi (splajnami), w przeciwieństwie do wielomianowej, ma charakter lokalny, ponieważ stosuje się dla niej wielomiany niskiego stopnia między poszczególnymi węzłami. Mianowicie dla $N + 1$ węzłów należy utworzyć N wielomianów oznaczanych $S_0(x), S_1(x), \dots, S_{N-1}(x)$, gdzie $S_i(x)$ to funkcja sklejana dla przedziału $[x_i, x_{i+1}]$. Od ich stopnia zależy ile niewiadomych zostanie wprowadzonych i jak dokładna będzie interpolacja. W praktyce okazuje się, że wielomiany trzeciego stopnia (splajny kubiczne) pozwalają na uzyskanie dobrych aproksymacji i właśnie one zostały użyte w implementacji algorytmu.

W celu utworzenia układu równań dla $N + 1$ węzłów, wprowadzone zostały następujące założenia, z których wynikły następujące równania:

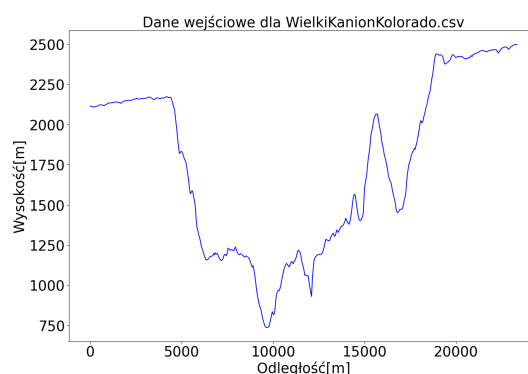
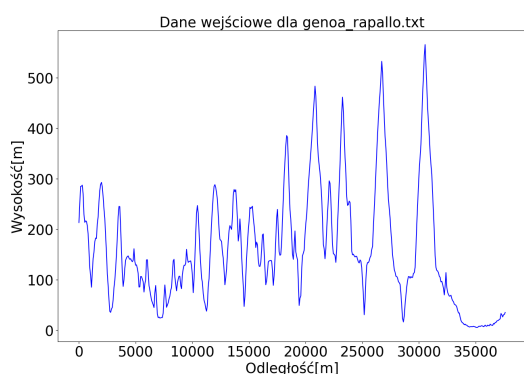
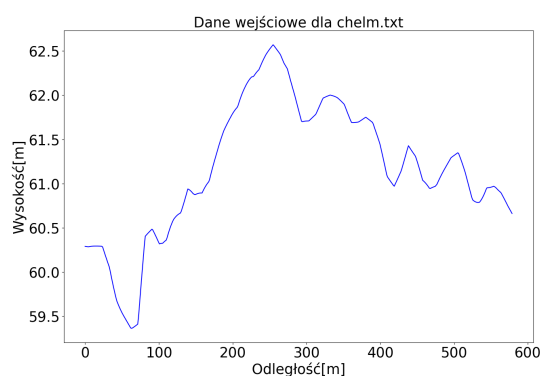
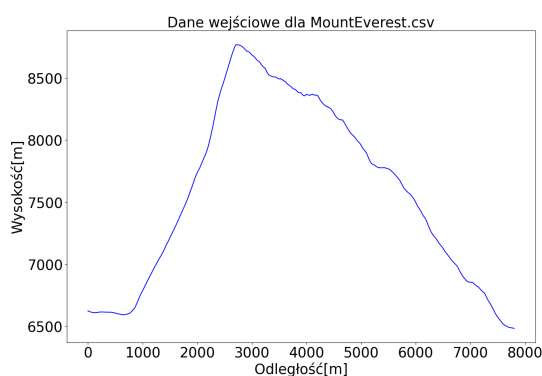
- Węzły są równo rozmieszczone, zatem $x_{i+1} - x_i = h, \quad \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, N - 1\}$
- Szukane splajny są wielomianami trzeciego stopnia
- $S_i(x_i) = f(x_i) \implies a_i = f(x_i), \quad \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, N - 1\}$
- $S_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) \implies a_i + b_i h + c_i h^2 + d_i h^3 = f(x_{i+1}), \quad \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, N - 1\}$
- $S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i) \implies b_{i-1} + 2c_{i-1}h + 3d_{i-1}h^2 = b_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N - 1\}$
- $S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i) \implies 2c_{i-1} + 6d_{i-1}h = 2c_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N - 1\}$
- $S'''_0(x_0) = 0 \implies c_0 = 0$
- $S'''_{N-1}(x_N) = 0 \implies 2c_{N-1} + 6d_{N-1}h = 0$

Dzięki temu otrzymano układ równań, który łatwo można przedstawić w postaci macierzowej $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, gdzie \mathbf{A} to macierz zawierająca wartości współczynników dla równań, \mathbf{x} to wektor kolumnowy zawierający szukane współczynniki splajnów $[a_0, b_0, c_0, d_0, \dots]$, a \mathbf{b} to wektor kolumnowy zawierający wartości liczbowe, np. $f(x_i)$. Po znalezieniu równań splajnów postaci $S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$ można rozpocząć aproksymację wartości dla siatki punktów. W tym celu należy odnaleźć przedział między dwoma węzłami zawierający ten punkt i podstawić go do odpowiadającemu temu przedziałowi wielomianu.

1.5 Dane wejściowe i metodyka

W celu analizy różnych metod interpolacji wykorzystano profile topologiczne o różnym charakterze:

- `MountEverest.csv` - fragment profilu topologicznego dla góry Mount Everest charakteryzujący się jednym, wyraźnym wzniesieniem z maksymalną różnicą wysokości ok. 2000 m.n.p.m.
- `chelm.txt` - charakteryzuje się niewielkimi zmianami wysokości, z maksymalną różnicą wysokości ok. 3 m.n.p.m.
- `genoa_rapallo.txt` - profil topologiczny dla trasy między Genuą a Rapallo charakteryzujący się licznymi stromymi wzniesieniami z maksymalną różnicą wysokości ok. 500 m.n.p.m.
- `WielkiKanyonKolorado.csv` - profil topologiczny Wielkiego Kanionu charakteryzujący się pojedynczym, silnym spadkiem wysokości i maksymalną różnicą wysokości ok. 1750 m.n.p.m.



Dla każdej metody interpolacji oraz trasy wykorzystano siatkę 512 punktów, z czego jako węzły interpolacyjne wybierano kolejno 5, 10, 20 i 50 z nich. W wykresach bezpośrednio dotyczących interpolacji zastosowano skalę logarytmiczną dla lepszego zobrazowania pożądaných własności analizowanych metod. Ponadto, w celu poprawy stabilności numerycznej dla obliczeń podczas interpolacji wielomianowej dane zostały przekształcone do przedziału $[-1, 1]$.

2 Analiza wyników interpolacji Lagrange'a

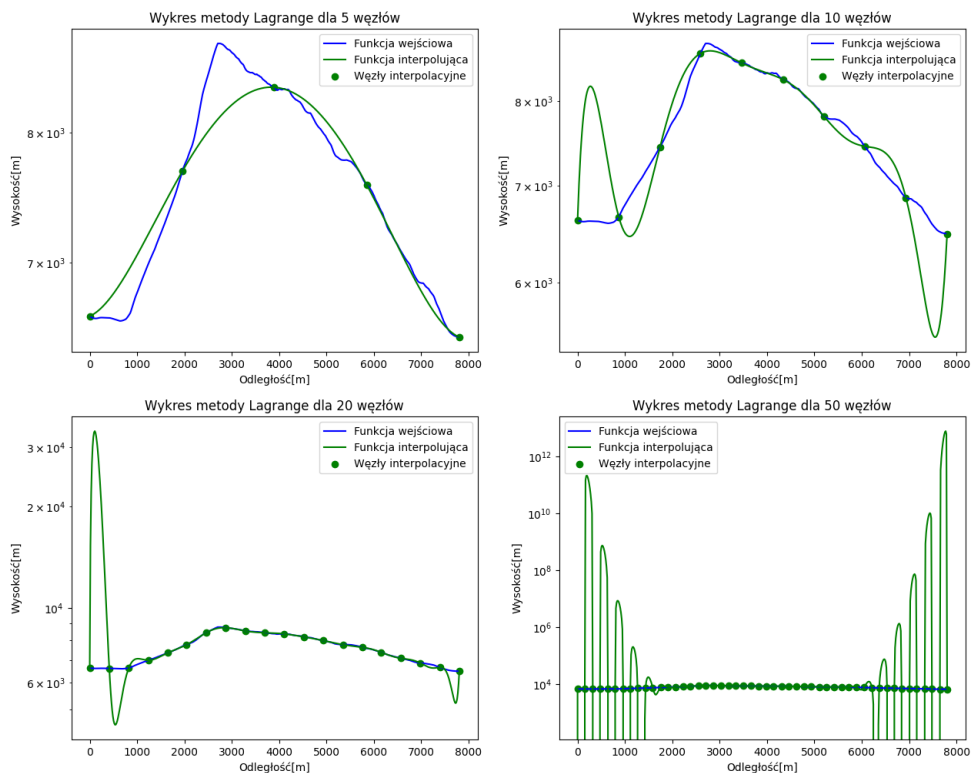
W pierwszej kolejności zaimplementowano interpolację wielomianową Lagrange'a z równoodległymi węzłami interpolacyjnymi definiowanymi następująco na przedziale $[a, b]$:

$$x_i = a + (b - a) \frac{i}{N - 1}, \quad i \in \{0, 1, 2, \dots, N - 1\} \quad (5)$$

2.1 MountEverest.csv

Dla 5 węzłów wielomian stosunkowo dobrze przybliża profil topologiczny o pojedynczym wzniesieniu. Jednak dla coraz większej ilości węzłów można zauważyć, że wzrastającej dokładności aproksymacji w środku przedziału towarzyszy coraz to silniejsza niedokładność na jego skrajach. Niedokładność ta pokrywa coraz to większy przedział i błąd przybliżenia staje się coraz większy - dla 50 węzłów wartość jest rzędu 10^{12} zamiast wzorcowej ok. 7000. Efekt ten nazywany jest efektem Rungego i omawiany będzie szerzej w dalszej części opracowania.

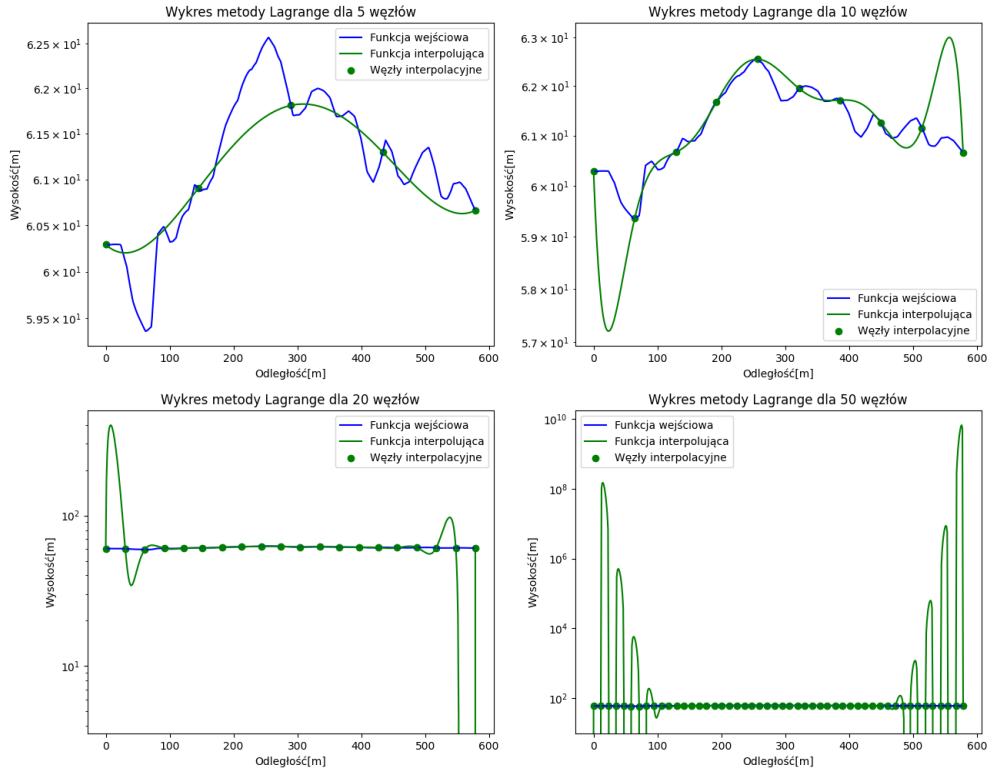
Wyniki interpolacji Lagrange'a dla MountEverest.csv



2.2 Chelm.txt

Dla w przybliżeniu stałego profilu topologicznego 5 węzłów z grubsza go aproksymuje, omijając drobne zmiany wysokości. Ponownie, dla większej liczby węzłów można zaobserwować coraz silniejszy efekt Rungego.

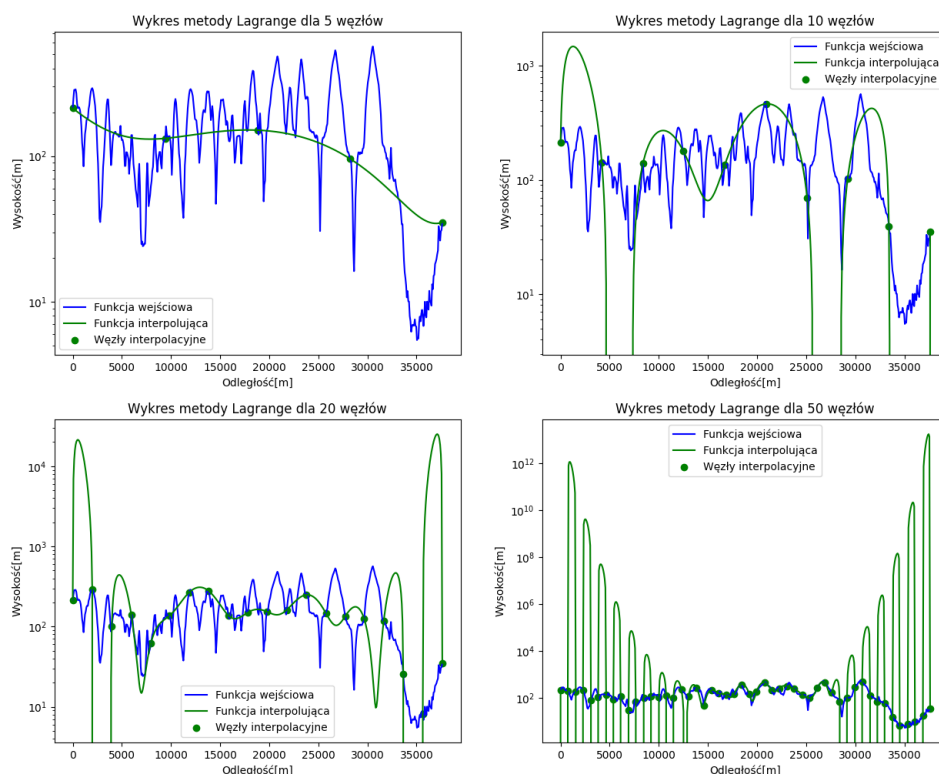
Wyniki interpolacji Lagrange'a dla chelm.txt



2.3 Genoa_rapallo.txt

Dla profilu topologicznego o silnych oscylacjach w żadnym przypadku nie udało się dobrze go przybliżyć. Dla 5 węzłów wielomian zarysowuje jedynie trend funkcji, a dla 10 węzłów przy silniejszej zmianie wysokości następuje gwałtowna zmiana wartości funkcji interpolującej z nieakceptowalnym błędem aproksymacji. Z kolei dla 20 i 50 węzłów ponownie zaobserwowano efekt Rungego, w ostatnim przypadku na jeszcze większej części przedziału niż przedtem.

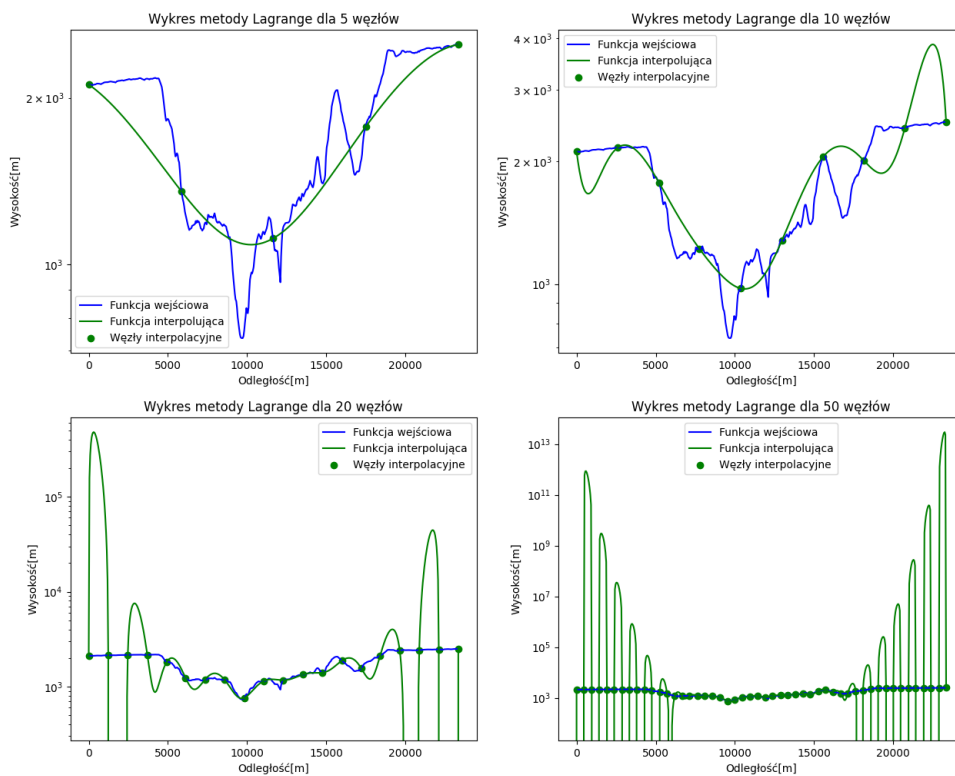
Wyniki interpolacji Lagrange'a dla genoa_rapallo.txt



2.4 WielkiKanionKolorado.txt

Dla profilu topologicznego o silnym spadku dokładność aproksymacji jest podobna do tej dla wzniesienia. Różnicę zaobserwowano dla 20 i 50 węzłów, gdzie wystąpił silniejszy efekt Rungego.

Wyniki interpolacji Lagrange'a dla WielkiKanionKolorado.csv



3 Analiza wyników interpolacji Lagrange'a z węzłami Czebyszewa

Jedną z metod poprawy dokładności interpolacji wielomianowej jest zmiana sposobu rozmieszczenia węzłów interpolacyjnych. Przykładem są węzły Czebyszewa drugiego rodzaju definiowane następująco na przedziale $[a, b]$:

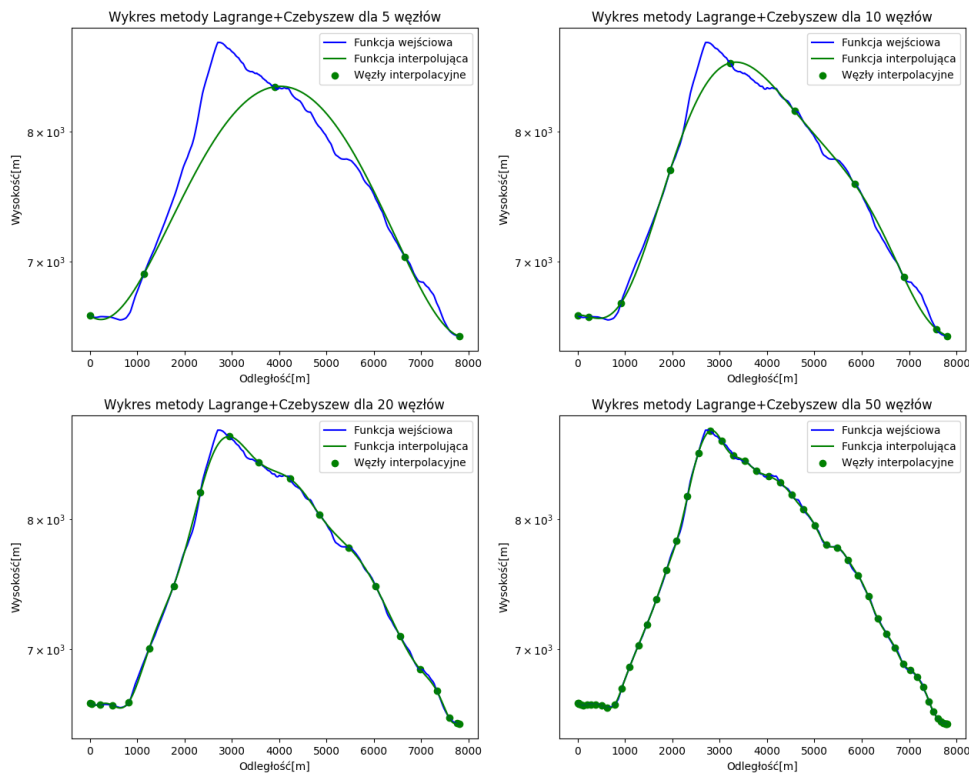
$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{i}{N-1}\pi\right), \quad i \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\} \quad (6)$$

Węzły Czebyszewa charakteryzują się większym zagęszczeniem na krańcach przedziału, ograniczając wystąpienie efektu Rungego, który zaobserwowano powyżej. Polega on na pogorszeniu się jakości interpolacji mimo zwiększającej się liczby węzłów. Szczególnie widoczny jest na krańcach przedziałów, co pokazano wcześniej.

3.1 MountEverest.csv

Dla 5 węzłów wielomian interpolacyjny jest zbliżony do omówionego wyżej. Jednak dla większej liczby węzłów widoczna jest znaczna poprawa dokładności - nie jest obserwowany bowiem efekt Rungego. Dla 50 węzłów otrzymano funkcję prawie idealnie pokrywającą wzorcowy profil topologiczny.

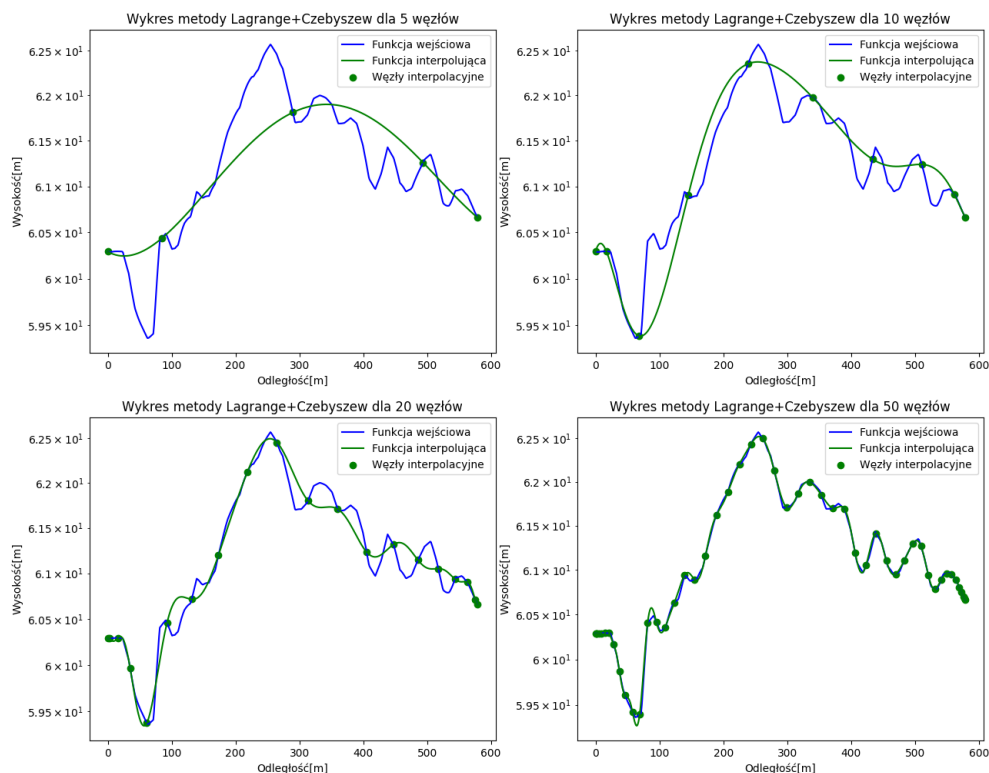
Wyniki interpolacji Lagrange'a + Czebyszew dla MountEverest.csv



3.2 Chelm.txt

Dla w przybliżeniu stałego profilu topologicznego 5 węzłów z grubsza go aproksymuje, omijając drobne zmiany wysokości, podobnie jak wcześniej. Nieco lepiej jest dla 10 i 20 węzłów, kiedy to skutecznie uniknięto efektu Rungego. Z kolei dla 50 węzłów ponownie osiągnięto bardzo dokładny wielomian, z trzema bardziej widocznymi niedokładnościami dla $x \in \{70, 100, 150\}$.

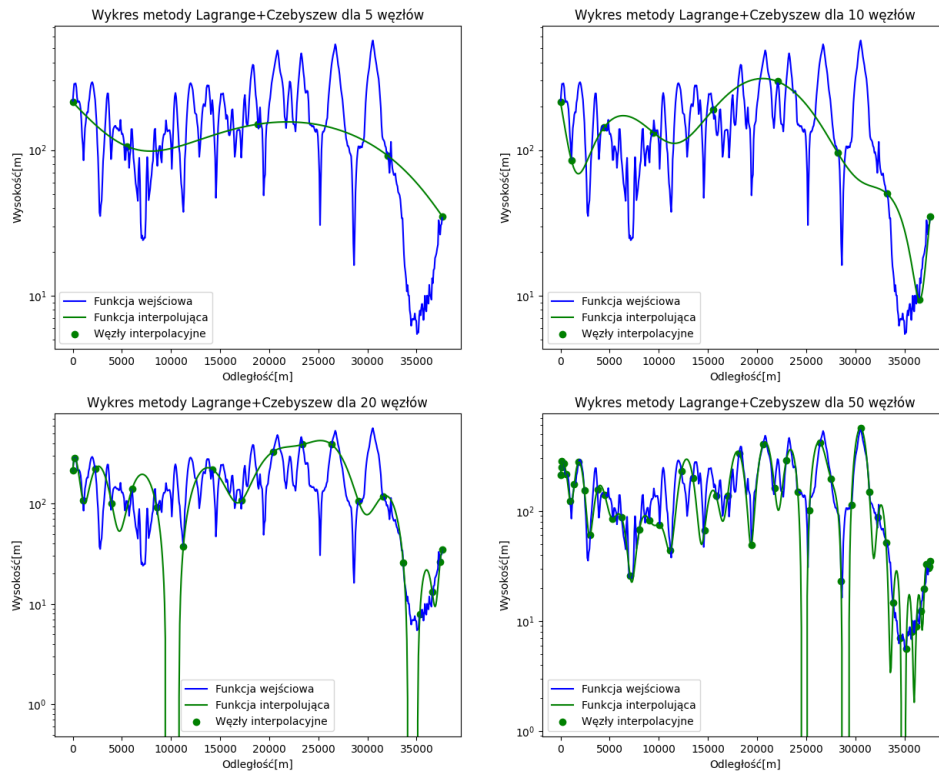
Wyniki interpolacji Lagrange'a + Czebyszew dla chelm.txt



3.3 Genoa_rapallo.txt

Dla profilu topologicznego o silnych oscylacjach w żadnym przypadku nie udało się dobrze go przybliżyć, tak jak w poprzedniej implementacji. Obserwowane jest zarysowanie linii trendu dla mniejszej liczby węzłów i pojawiające się silne spadki wartości funkcji interpolującej dla ich większej liczby. Ponadto, nawet dla 50 węzłów wielomian nie jest w stanie pokryć występujących oscylacji.

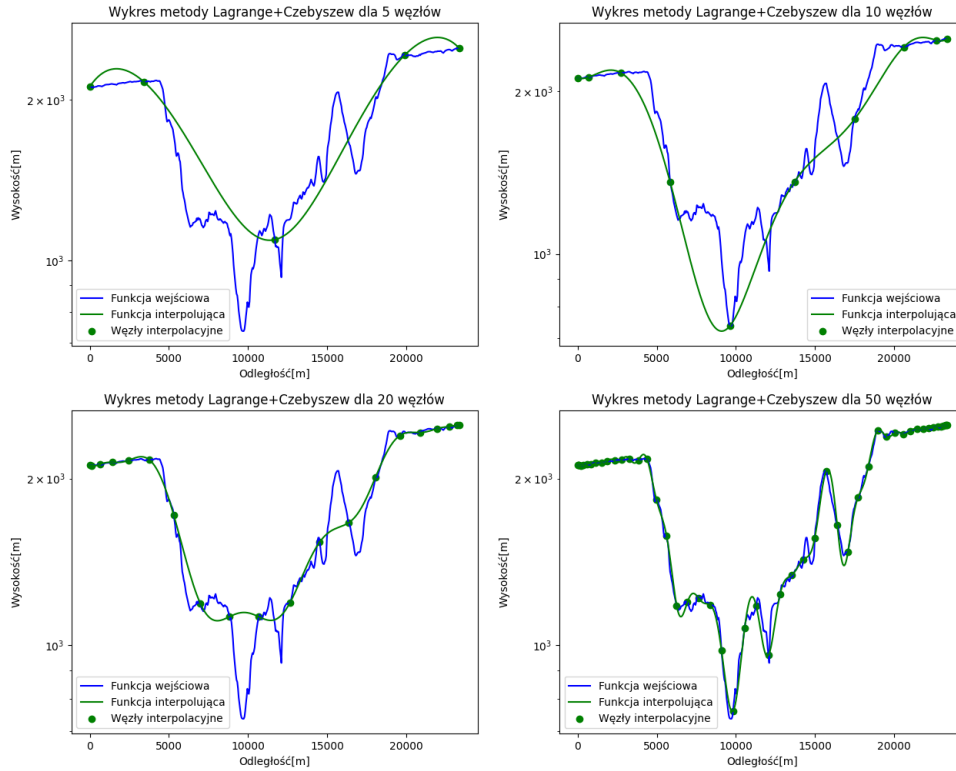
Wyniki interpolacji Lagrange'a + Czebyszew dla genoa_rapallo.txt



3.4 WielkiKanionKolorado.txt

Dla profilu topologicznego o silnym spadku dokładność aproksymacji jest podobna do tej dla wzniesienia, ale 20 węzłów nie jest w stanie pokryć występujących dwóch niewielkich peaków. Tutaj również udało się uniknąć efektu Rungego.

Wyniki interpolacji Lagrange'a + Czebyszew dla WielkiKanionKolorado.csv



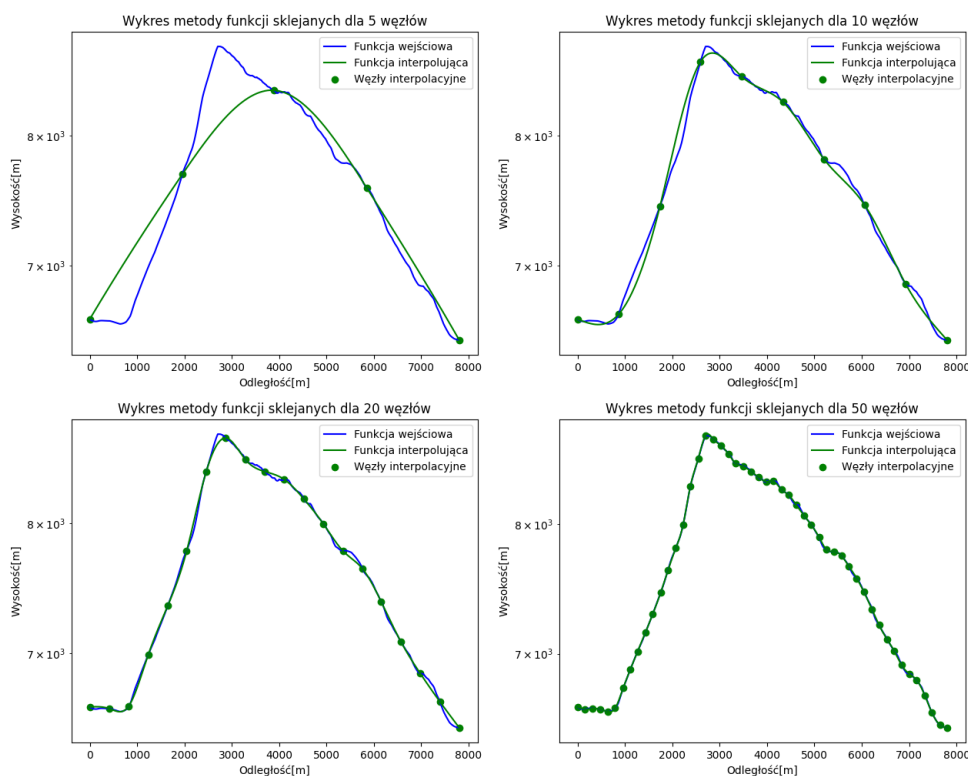
4 Analiza wyników interpolacji splajnami kubicznymi

Dla interpolacji funkcjami sklejonymi trzeciego stopnia przyjęto wszystkie założenia z punktu 1.4.

4.1 MountEverest.csv

Dla 5 węzłów stosunkowo dobrze przybliżono profil topologiczny o pojedynczym wzniesieniu, jednak nieco gorzej między pierwszymi dwoma węzłami w porównaniu do poprzednich metod. Mimo tego dość dokładną aproksymację profilu osiągnięto już dla 10 węzłów, podczas gdy metody wielomianowe nie przybliżały dobrze szczytu wzniesienia. Wzrastająca liczba węzłów pozwoliła na coraz to lepsze odwzorowanie, dając najlepszą dotąd interpolację dla 50 węzłów.

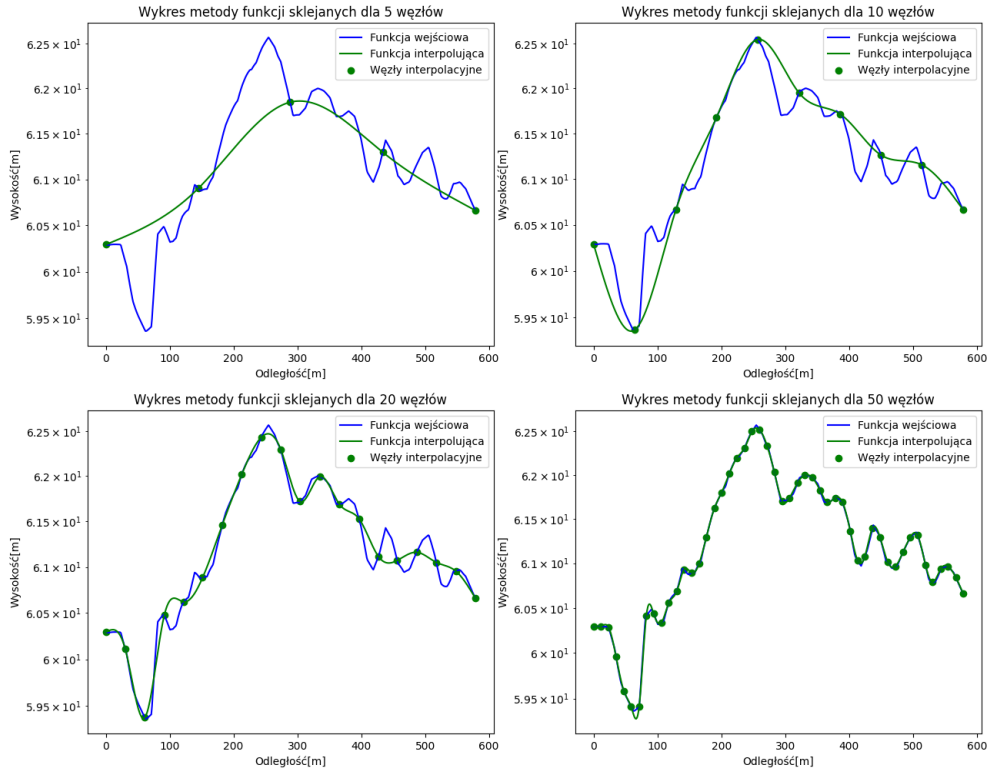
Wyniki interpolacji funkcjami sklejonymi dla MountEverest.csv



4.2 Chelm.txt

Dla mało zmiennego profilu wysokościowego osiągnięto wyniki bardzo zbliżone do tych dla interpolacji Lagrange'a z węzłami Czebyszewa, z niewielką przewagą na korzyść interpolacji splajnami.

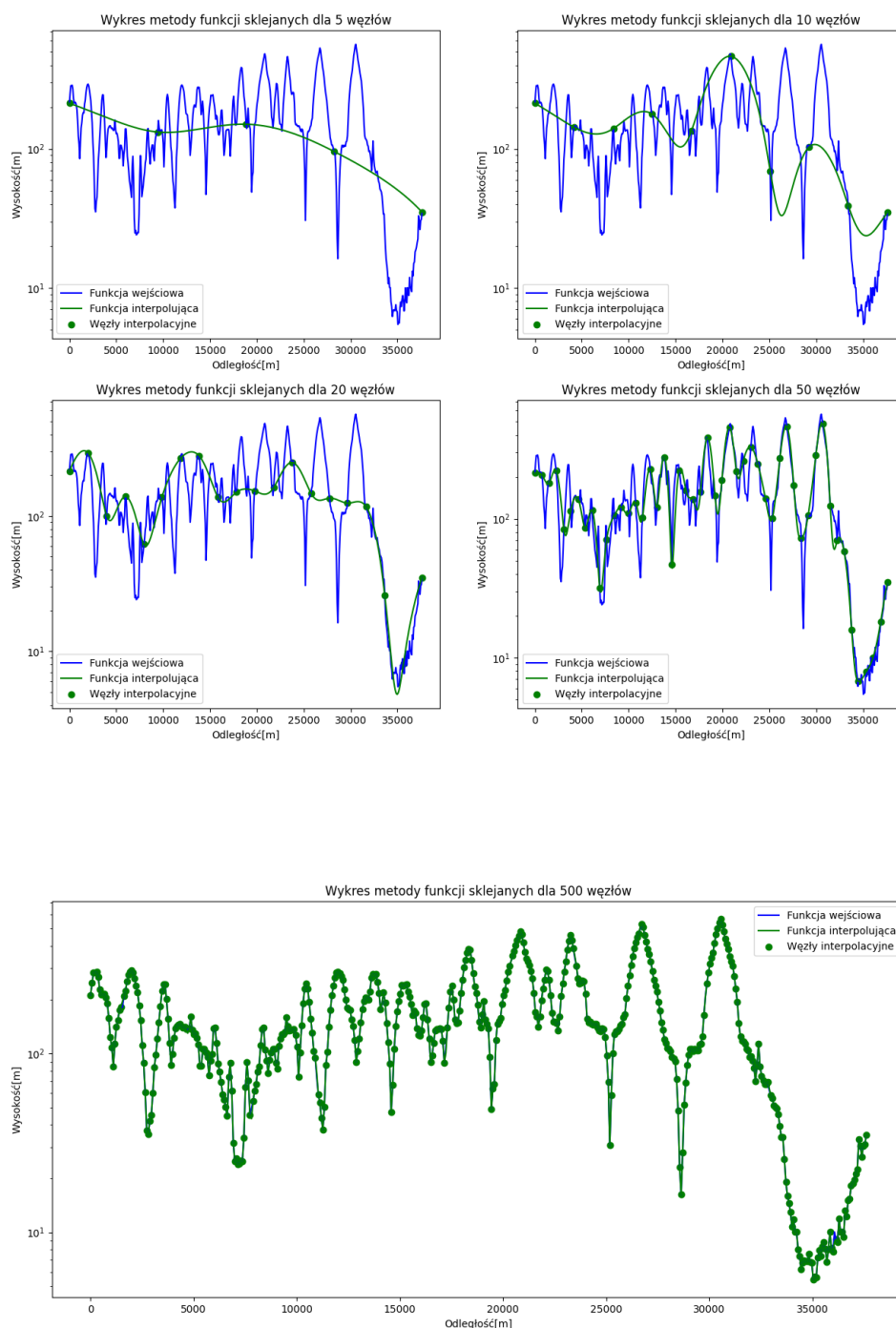
Wyniki interpolacji funkcjami sklejanymi dla chelm.txt



4.3 Genoa_rapallo.txt

Dla profilu topologicznego o silnych oscylacjach interpolacja splajnami zapewniła najlepsze dotąd wyniki. Nie wystąpiły bardzo duże błędy aproksymacji, które zaobserwowano dla wielomianów. Mimo tego, 50 węzłów również nie dało rady pokryć wszystkich ekstremów lokalnych, dlatego przeprowadzono dalsze testy ze względu na zauważony potencjał przy rosnącej liczbie węzłów. Dopiero dla 500 węzłów udało się bardzo dokładnie przybliżyć profil na całym rozpatrywanym przedziale.

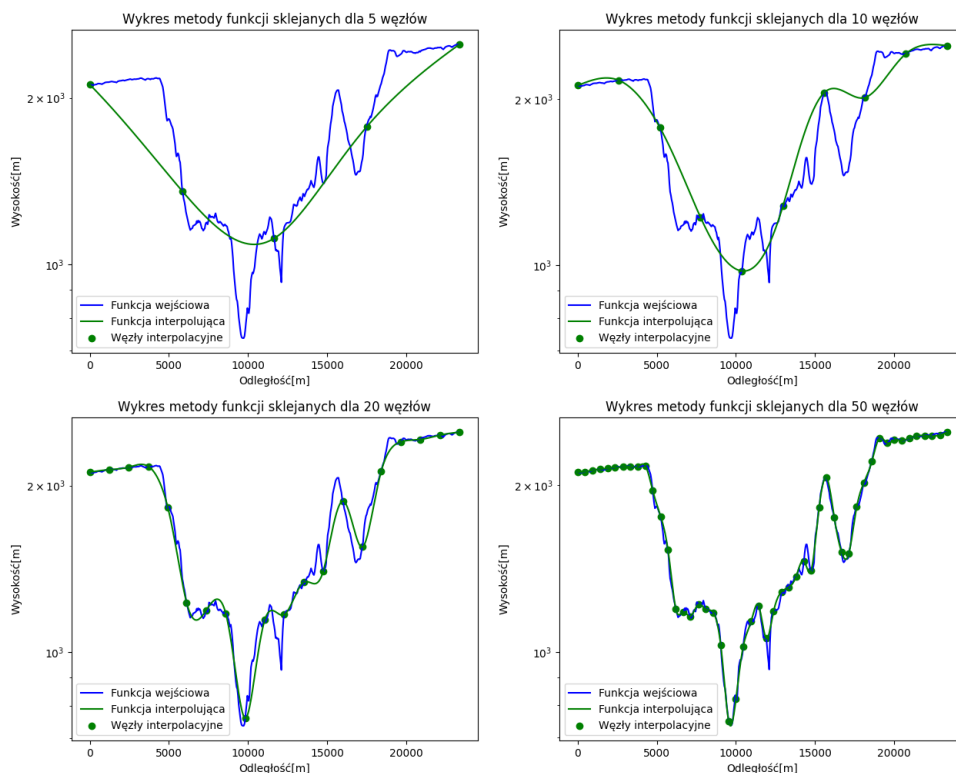
Wyniki interpolacji funkcjami sklejanymi dla genoa_rapallo.txt



4.4 WielkiKanionKolorado.txt

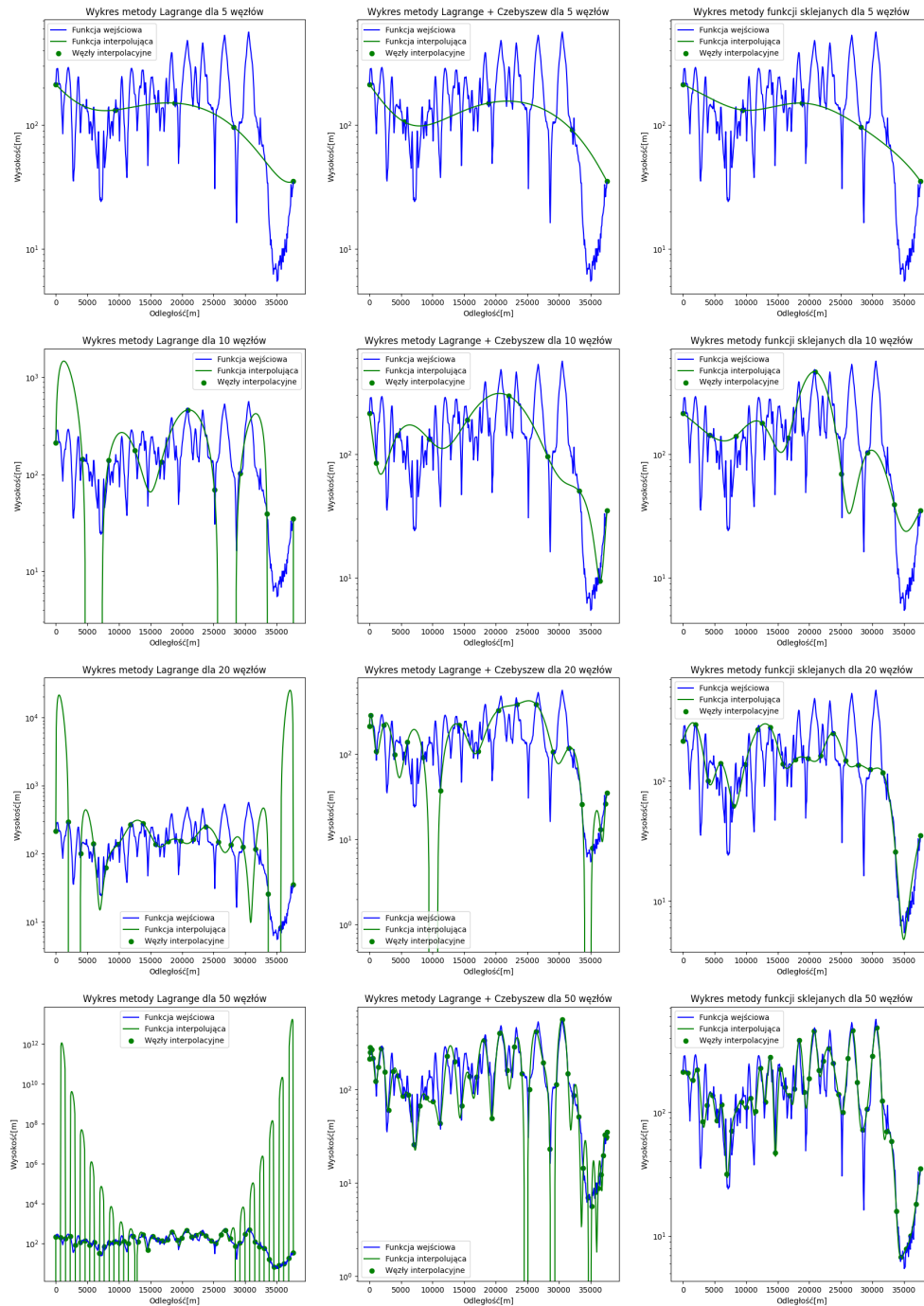
Dla profilu topologicznego o silnym spadku zauważono widoczną poprawę od 20 węzłów. Pierwsza metoda dobrze przybliżała środek, ale zaobserwowano efekt Rungego na krańcach przedziału. Druga metoda dobrze pokrywała krańce, ale kosztem mniejszej ilości węzłów w środku przedziału, a co za tym idzie - mniejszej dokładności. Z kolei interpolacja splajnami pozwoliła na stosunkowo wysoką dokładność na całym przedziale. Mimo tego dla 50 węzłów pominięte zostały drobne zmiany wysokości dla $x \in \{13000, 15000\}$.

Wyniki interpolacji funkcjami sklejanymi dla WielkiKanionKolorado.csv



5 Zestawienie

Zestawienie metod interpolacji dla genoa_rapallo.txt



6 Podsumowanie

Podsumowując, w powyższej analizie ukazane zostały wady i zalety każdej z metod. Zaletą interpolacji Lagrange’a jest prostota implementacji - nie wymaga liczenia pochodnych ani rozwiązywania układu równań. Wadami natomiast są globalny charakter aproksymacji oraz wynikający z niego efekt Rungego, powodujący nieakceptowalne błędy. Metoda jego ograniczania, wprowadzenie węzłów Czebyszewa, również ma pewne niedoskonałości - przeciwdziała wspomnianej wadzie i pozwala na prawidłowe skalowanie dokładności ze wzrastającą liczbą węzłów, ale dzieje się to kosztem zmniejszenia liczby węzłów w środku przedziału i możliwości omijania punktów krytycznych, takich jak wzniesienia oraz występowania niedopuszczalnych błędów aproksymacji dla silnie oscylujących funkcji aproksymowanych. Z kolei interpolacja funkcjami sklejanymi pozwala na uzyskanie bardzo dokładnych rozwiązań i wzrost tej dokładności dla coraz większej liczby węzłów. Jednak wymaga liczenia pochodnych i rozwiązywania dość sporych układów równań, co może w niektórych sytuacjach znacząco wydłużyć czas obliczeń.