

# Aproksymacja profilu wysokościowego

Oskar Wiśniewski, 198058  
Politechnika Gdańska, WETI

29 kwietnia 2025

## 1 Wstęp

### 1.1 Profil wysokościowy

Profil wysokościowy to wykres przedstawiający zmiany wartości wysokości bezwzględnej terenu w funkcji odległości od punktu początkowego trasy. Pokazuje, jak zmienia się wysokość nad poziomem morza wraz z oddalaniem się od owego punktu startowego, dzięki czemu pozwala na intuicyjnie odczytanie charakteru jakiegoś odcinka terenu.

Profile wysokościowe mają szczególne znaczenie dla uczestników wyścigów kolarskich, biegaczy oraz turystów, którym to ułatwiają przygotowanie do trasy i rozplanowanie wysiłku. Korzystać z nich również mogą inżynierowie projektujący infrastrukturę transportową, geolodzy, czy architekci.

### 1.2 Interpolacja

Interpolacja polega na wyznaczaniu przybliżonych wartości funkcji na podstawie punktów, dla których są one znane, zwanych węzłami interpolacji. Mogą nimi być przykładowo punkty pomiarowe, wyniki obliczeń numerycznych, czy punkty zadane analitycznie (na podstawie wzoru funkcji).

Pierwszym etapem interpolacji jest wyznaczenie parametrów funkcji interpolacyjnej na podstawie węzłów. Następnie należy obliczyć wartości funkcji interpolacyjnej dla zadanej siatki punktów. Co istotne, z definicji interpolacja dotyczy wyłącznie oszacowania wartości wewnątrz przedziału wyznaczonego przez węzły interpolacyjne - poza zakresem mówimy o ekstrapolacji, które generalnie nie gwarantuje takiej samej dokładności jak interpolacja.

### 1.3 Interpolacja wielomianowa - metoda Lagrange'a

Interpolacja wielomianowa funkcji  $f(x)$  polega na skonstruowaniu wielomianu  $W_N(x)$  stopnia maksymalnie  $N$  w oparciu o  $N+1$  różnych węzłów interpolacyjnych  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$ , dla których to zachodzi warunek:

$$W_N(x_i) = f(x_i), \quad \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, N\} \quad (1)$$

Dla danych węzłów interpolacyjnych i ich wartości można skonstruować dokładnie jeden wielomian o postaci:

$$W_N(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_Nx^N \quad (2)$$

Szczególnym przykładem interpolacji wielomianowej jest interpolacja Lagrange'a, dla której baza funkcji określona jest następującym wzorem:

$$\phi_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad (3)$$

Po zastosowaniu go dla wszystkich węzłów interpolacyjnych można wyznaczyć wielomian interpolacyjny w następujący sposób:

$$W_N(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \phi_i(x) \quad (4)$$

## 1.4 Interpolacja funkcjami sklejanymi

Interpolacja funkcjami sklejanymi (splajnami), w przeciwieństwie do wielomianowej, ma charakter lokalny, ponieważ stosuje się dla niej wielomiany niskiego stopnia między poszczególnymi węzłami. Mianowicie dla  $N + 1$  węzłów należy utworzyć  $N$  wielomianów oznaczanych  $S_0(x), S_1(x), \dots, S_{N-1}(x)$ , gdzie  $S_i(x)$  to funkcja sklejana dla przedziału  $[x_i, x_{i+1}]$ . Od ich stopnia zależy ile niewiadomych zostanie wprowadzonych i jak dokładna będzie interpolacja. W praktyce okazuje się, że wielomiany trzeciego stopnia pozwalają na uzyskanie dobrych aproksymacji i właśnie one zostały użyte w implementacji algorytmu.

W celu utworzenia układu równań dla  $N + 1$  węzłów, wprowadzone zostały następujące założenia, z których wynikły następujące równania:

- Węzły są równo rozmieszczone, zatem  $x_{i+1} - x_i = h, \quad \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, N - 1\}$
- $S_i(x_i) = f(x_i) \implies a_i = f(x_i), \quad \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, N - 1\}$
- $S_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) \implies a_i + b_i h + c_i h^2 + d_i h^3 = f(x_{i+1}), \quad \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, N - 1\}$
- $S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i) \implies b_{i-1} + 2c_{i-1}h + 3d_{i-1}h^2 = b_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N - 1\}$
- $S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i) \implies 2c_{i-1} + 6d_{i-1}h = 2c_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N - 1\}$
- $S''_0(x_0) = 0 \implies c_0 = 0$
- $S''_{N-1}(x_N) = 0 \implies 2c_{N-1} + 6d_{N-1}h = 0$