

Tema 1. Anàlisi d'algorismes

Estructures de Dades i Algorismes

FIB

Transparències d' **Antoni Lozano**
(amb edicions menors d' **Enric Rodríguez**)

Q2 2016 – 17

Tema 1. Anàlisi d'algorismes

1 Temps de càlcul i espai de memòria

- Eficiència dels algorismes
- Mida de l'entrada i cost
- Ordre de magnitud

2 Notació asimptòtica

- Notació asimptòtica: definicions
- Notació asimptòtica: propietats
- Formes de creixement

3 Cost dels algorismes

- Algorismes no recursius
- Algorismes recursius
- Teoremes mestres

Objectius:

- Comparar solucions algorísmiques alternatives
- Millorar els algorismes existents
- Predir els recursos que farà servir un algorisme

Objectius:

- Comparar solucions algorísmiques alternatives
- Millorar els algorismes existents
- Predir els recursos que farà servir un algorisme

Objectius:

- Comparar solucions algorísmiques alternatives
- Millorar els algorismes existents
- Predir els recursos que farà servir un algorisme

Consideracions sobre l'eficiència:

- Depèn de la mida de les entrades
- És un concepte relatiu: hi intervenen compilador, màquina, ...
- Aquests factors afecten de forma lineal

Consideracions sobre l'eficiència:

- Depèn de la mida de les entrades
- És un concepte relatiu: hi intervenen compilador, màquina, ...
- Aquests factors afecten de forma lineal

Consideracions sobre l'eficiència:

- Depèn de la mida de les entrades
- És un concepte relatiu: hi intervenen compilador, màquina, ...
- Aquests factors afecten de forma lineal

Exemple 1: el problema de selecció

Problema de selecció

Donada una llista de n naturals, determinar el k -èsim més gran.

Primera solució

Ordenar els nombres en un vector de forma decreixent i retornar el k -èsim.

Segona solució

Escriure els k primers en un vector i ordenar-los de forma decreixent.
Cada element següent es tracta per separat:

- si és més petit que el k -èsim del vector, es descarta;
- si no, se situa correctament en el vector i s'elimina el més petit.

Retornar l'element de la k -èsima posició.

Exemple 1: el problema de selecció

Problema de selecció

Donada una llista de n naturals, determinar el k -èsim més gran.

Primera solució

Ordenar els nombres en un vector de forma decreixent i retornar el k -èsim.

Segona solució

Escriure els k primers en un vector i ordenar-los de forma decreixent.
Cada element següent es tracta per separat:

- si és més petit que el k -èsim del vector, es descarta;
- si no, se situa correctament en el vector i s'elimina el més petit.

Retornar l'element de la k -èsima posició.

Exemple 1: el problema de selecció

Problema de selecció

Donada una llista de n naturals, determinar el k -èsim més gran.

Primera solució

Ordenar els nombres en un vector de forma decreixent i retornar el k -èsim.

Segona solució

Escriure els k primers en un vector i ordenar-los de forma decreixent. Cada element següent es tracta per separat:

- si és més petit que el k -èsim del vector, es descarta;
- si no, se situa correctament en el vector i s'elimina el més petit.

Retornar l'element de la k -èsima posició.

Exemple 2: el mur infinit

Mur infinit

Estem davant d'un mur que s'allarga indefinidament en totes dues direccions. Volem trobar l'única porta que el travessa, però no sabem a quina distància està ni en quina direcció. Tot i que és fosc, portem una espelma que ens permet veure la porta quan ja hi som a prop.



Exemple 2: el mur infinit

Primera solució

- Avancem 1 metre i tornem a l'origen
- Retrocedim 2 metres i tornem a l'origen
- Avancem 3 metres i tornem a l'origen
- Retrocedim 4 metres i tornem a l'origen
- (recorrem sempre un metre més en direcció contrària)



Exemple 2: el mur infinit

Segona solució

- Avancem 1 metre i tornem a l'origen
- Retrocedim 2 metres i tornem a l'origen
- Avancem 4 metres i tornem a l'origen
- Retrocedim 8 metres i tornem a l'origen
- (recorrem sempre el doble de distància en direcció contrària)



Donat un algorisme A amb conjunt d'entrades E ,
el **cost** d' A (en temps, o en espai) es pot expressar com una funció

$$T : E \rightarrow \mathbb{R}^+.$$

Però calcular T **per cada entrada** pot ser complicat i poc manejable.

És més útil agrupar les entrades amb la mateixa **mida**,
i estudiar el cost sobre aquestes entrades en conjunt.

Donat un algorisme A amb conjunt d'entrades E ,
el **cost** d' A (en temps, o en espai) es pot expressar com una funció

$$T : E \rightarrow \mathbb{R}^+.$$

Però calcular T **per cada entrada** pot ser complicat i poc manejable.

És més útil agrupar les entrades amb la mateixa **mida**,
i estudiar el cost sobre aquestes entrades en conjunt.

Donat un algorisme A amb conjunt d'entrades E ,
el **cost** d' A (en temps, o en espai) es pot expressar com una funció

$$T : E \rightarrow \mathbb{R}^+.$$

Però calcular T **per cada entrada** pot ser complicat i poc manejable.

És més útil agrupar les entrades amb la mateixa **mida**,
i estudiar el cost sobre aquestes entrades en conjunt.

Mida

La **mida** d'una entrada x és el nombre de símbols necessari per codificar-la. Es representa amb $|x|$.

Tipus d'entrades

- Nombres naturals \rightarrow codificació en valor (en “unari”)

$$|15| = 15$$

- Nombres naturals \rightarrow codificació en binari

$$|15| = 4 \text{ perquè } 15_{10} = 1111_2$$

- Llistes, vectors \rightarrow nombre de components

$$|(23, 1, 7, 0, 12)| = 5$$

Mida

La **mida** d'una entrada x és el nombre de símbols necessari per codificar-la. Es representa amb $|x|$.

Tipus d'entrades

- Nombres naturals \rightarrow codificació en valor (en “unari”)

$$|15| = 15$$

- Nombres naturals \rightarrow codificació en binari

$$|15| = 4 \text{ perquè } 15_{10} = 1111_2$$

- Llistes, vectors \rightarrow nombre de components

$$|(23, 1, 7, 0, 12)| = 5$$

- **Cas pitjor.** $T_{pitjor}(n) = \max\{T(x) \mid x \in E \wedge |x| = n\}$

Ofereix garanties sobre uns límits que l'algorisme no superarà.

- **Cas mig.** $T_{mig}(n) = \sum_{x \in E, |x|=n} Pr(x) T(x),$

on $Pr(x)$ és la probabilitat d'escollir l'entrada x entre totes les de mida n

Cal definir com es distribueix la probabilitat, i sol ser difícil de calcular.

- **Cas millor.** $T_{millor}(n) = \min\{T(x) \mid x \in E \wedge |x| = n\}$

Poc útil.

- **Cas pitjor.** $T_{pitjor}(n) = \max\{T(x) \mid x \in E \wedge |x| = n\}$

Ofereix garanties sobre uns límits que l'algorisme no superarà.

- **Cas mig.** $T_{mig}(n) = \sum_{x \in E, |x|=n} Pr(x) T(x),$

on $Pr(x)$ és la probabilitat d'escollir l'entrada x entre totes les de mida n

Cal definir com es distribueix la probabilitat, i sol ser difícil de calcular.

- **Cas millor.** $T_{millor}(n) = \min\{T(x) \mid x \in E \wedge |x| = n\}$

Poc útil.

- **Cas pitjor.** $T_{pitjor}(n) = \max\{T(x) \mid x \in E \wedge |x| = n\}$

Ofereix garanties sobre uns límits que l'algorisme no superarà.

- **Cas mig.** $T_{mig}(n) = \sum_{x \in E, |x|=n} Pr(x) T(x),$

on $Pr(x)$ és la probabilitat d'escollir l'entrada x entre totes les de mida n

Cal definir com es distribueix la probabilitat, i sol ser difícil de calcular.

- **Cas millor.** $T_{millor}(n) = \min\{T(x) \mid x \in E \wedge |x| = n\}$

Poc útil.

Taula 1 (Garey/Johnson, *Computers and Intractability*)

Comparació de funcions polinòmiques i exponencials.

cost	10	20	30	40	50
n	0.00001 s	0.00002 s	0.00003 s	0.00004 s	0.00005 s
n^2	0.0001 s	0.0004 s	0.0009 s	0.0016 s	0.0025 s
n^3	0.001 s	0.008 s	0.027 s	0.064 s	0.125 s
n^5	0.1 s	3.2 s	24.3 s	1.7 min	5.2 min
2^n	0.001 s	1.0 s	17.9 min	12.7 dies	35.7 anys
3^n	0.059 s	58 min	6.5 anys	3855 segles	2×10^8 segles

Taula 2 (Garey/Johnson, *Computers and Intractability*)

Efecte de les millores tecnològiques en algorismes polinòmics i exponencials

cost	tecnologia actual	tecnologia $\times 100$	tecnologia $\times 1000$
n	N_1	$100N_1$	$1000N_1$
n^2	N_2	$10N_2$	$31.6N_2$
n^3	N_3	$4.64N_3$	$10N_3$
2^n	N_4	$N_4 + 6.64$	$N_4 + 9.97$
3^n	N_5	$N_5 + 4.19$	$N_5 + 6.29$

Taula 3 (R. Sedgewick, *Algorithms in C++*)

En moltes aplicacions, l'única possibilitat de resoldre entrades enormes és fent servir algorismes eficients.

Un algorisme ràpid permet resoldre un problema en una màquina lenta, però una màquina ràpida no ajuda quan fem servir un algorisme lent.

operacions per segon	mida del problema 1 milió			mida del problema 10^3 milions		
	n	$n \log n$	n^2	n	$n \log n$	n^2
10^6	segons	segons	setmanes	hores	hores	mai
10^9	instant	instant	hores	segons	segons	dècades
10^{12}	instant	instant	segons	instant	instant	setmanes

Ordre de magnitud

Necessitem una notació que:

- permeti expressar una fita superior de

$$T_{pitjor}(n) = \max\{T(x) \mid x \in E \wedge |x| = n\}.$$

(sabrem que l'algorisme no superarà la fita)

- que sigui independent de constants multiplicatives
(així no dependrà de la implementació)

Notació O gran

Donada una funció f , $\mathcal{O}(f)$ representa la classe de funcions que “creixen com f o més a poc a poc”.

Formalment, $g \in \mathcal{O}(f)$ si existeixen $c > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ tals que

$$\forall n \geq n_0 \quad g(n) \leq c \cdot f(n).$$

En lloc de $f \in \mathcal{O}(g)$, s'escriu molt sovint “ f és $\mathcal{O}(g)$ ” o, també, $f = \mathcal{O}(g)$.

Ordre de magnitud

Necessitem una notació que:

- permeti expressar una fita superior de

$$T_{pitjor}(n) = \max\{T(x) \mid x \in E \wedge |x| = n\}.$$

(sabrem que l'algorisme no superarà la fita)

- que sigui independent de constants multiplicatives
(així no dependrà de la implementació)

Notació O gran

Donada una funció f , $\mathcal{O}(f)$ representa la classe de funcions que “creixen com f o més a poc a poc”.

Formalment, $g \in \mathcal{O}(f)$ si existeixen $c > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ tals que

$$\forall n \geq n_0 \quad g(n) \leq c \cdot f(n).$$

En lloc de $f \in \mathcal{O}(g)$, s'escriu molt sovint “ f és $\mathcal{O}(g)$ ” o, també, $f = \mathcal{O}(g)$.

Ordre de magnitud

Necessitem una notació que:

- permeti expressar una fita superior de

$$T_{pitjor}(n) = \max\{T(x) \mid x \in E \wedge |x| = n\}.$$

(sabrem que l'algorisme no superarà la fita)

- que sigui independent de constants multiplicatives
(així no dependrà de la implementació)

Notació O gran

Donada una funció f , $\mathcal{O}(f)$ representa la classe de funcions que “creixen com f o més a poc a poc”.

Formalment, $g \in \mathcal{O}(f)$ si existeixen $c > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ tals que

$$\forall n \geq n_0 \quad g(n) \leq c \cdot f(n).$$

En lloc de $f \in \mathcal{O}(g)$, s'escriu molt sovint “ f és $\mathcal{O}(g)$ ” o, també, $f = \mathcal{O}(g)$.

Ordre de magnitud

Necessitem una notació que:

- permeti expressar una fita superior de

$$T_{pitjor}(n) = \max\{T(x) \mid x \in E \wedge |x| = n\}.$$

(sabrem que l'algorisme no superarà la fita)

- que sigui independent de constants multiplicatives
(així no dependrà de la implementació)

Notació O gran

Donada una funció f , $\mathcal{O}(f)$ representa la classe de funcions que “creixen com f o més a poc a poc”.

Formalment, $g \in \mathcal{O}(f)$ si existeixen $c > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ tals que

$$\forall n \geq n_0 \quad g(n) \leq c \cdot f(n).$$

En lloc de $f \in \mathcal{O}(g)$, s'escriu molt sovint “ f és $\mathcal{O}(g)$ ” o, també, $f = \mathcal{O}(g)$.

Exemple

Sigui $f(n) = 3n^3 + 5n^2 - 7n + 41$. Llavors, podem afirmar que $f \in \mathcal{O}(n^3)$.

Per justificar-ho, només cal trobar c i n_0 que compleixin:

$$\forall n \geq n_0 \quad f(n) \leq cn^3.$$

Però $3n^3 + 5n^2 - 7n + 41 \leq 8n^3 + 41$. Triem $c = 9$. Llavors,

$$8n^3 + 41 \leq 9n^3 \iff 41 \leq n^3,$$

que es compleix a partir de $n_0 = 4$. Per tant,

$$\forall n \geq 4 \quad f(n) \leq 9n^3,$$

i llavors $f(n) = \mathcal{O}(n^3)$ amb $c = 9$ i $n_0 = 4$.

(De fet, és fàcil trobar constants c i n_0 més petites.)

Exemple 1: el problema de selecció

Problema de selecció

Donada una llista de n naturals, determinar el k -èsim més gran.

Primera solució

Ordenar els nombres en un vector de forma decreixent i retornar el k -èsim.

Segona solució

Escriure els k primers en un vector i ordenar-los de forma decreixent.
Cada element següent es tracta per separat:

- si és més petit que el k -èsim del vector, es descarta;
- si no, se situa correctament en el vector i s'elimina el més petit.

Retornar l'element de la k -èsima posició.

Exemple 1: el problema de selecció

Problema de selecció

Donada una llista de n naturals, determinar el k -èsim més gran.

Primera solució

Ordenar els nombres en un vector de forma decreixent i retornar el k -èsim.

Segona solució

Escriure els k primers en un vector i ordenar-los de forma decreixent.
Cada element següent es tracta per separat:

- si és més petit que el k -èsim del vector, es descarta;
- si no, se situa correctament en el vector i s'elimina el més petit.

Retornar l'element de la k -èsima posició.

Exemple 1: el problema de selecció

Problema de selecció

Donada una llista de n naturals, determinar el k -èsim més gran.

Primera solució

Ordenar els nombres en un vector de forma decreixent i retornar el k -èsim.

Segona solució

Escriure els k primers en un vector i ordenar-los de forma decreixent. Cada element següent es tracta per separat:

- si és més petit que el k -èsim del vector, es descarta;
- si no, se situa correctament en el vector i s'elimina el més petit.

Retornar l'element de la k -èsima posició.

Exemple 1: el problema de selecció

Problema de selecció

Donada una llista de n naturals, determinar el k -èsim més gran.

Primera solució

Ordenar els nombres en un vector de forma decreixent i retornar el k -èsim.

- amb un algorisme d'ordenació bàsic (bombolla, inserció): $\mathcal{O}(n^2)$
- amb un algorisme d'ordenació eficient: $\mathcal{O}(n \log n)$

Exemple 1: el problema de selecció

Problema de selecció

Donada una llista de n naturals, determinar el k -èsim més gran.

Segona solució

Escriure els k primers en un vector i ordenar-los. Cada element següent es tracta per separat:

- si és més petit que el k -èsim del vector, es descarta;
- si no, se situa correctament en el vector i s'elimina el més petit.

Retornar l'element de la k -èsima posició.

$$\mathcal{O}((k \log k) + (n - k) \cdot k)$$

- Si k és constant, és $\mathcal{O}(k \cdot n) = \mathcal{O}(n)$
- Si $k = \lceil n/2 \rceil$, és $\mathcal{O}(\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2}) = \mathcal{O}(n^2)$

Exemple 2: el mur infinit

Mur infinit

Estem davant d'un mur que s'allarga indefinidament en totes dues direccions. Volem trobar l'única porta que el travessa, però no sabem a quina distància està ni en quina direcció. Tot i que és fosc, portem una espelma que ens permet veure la porta quan ja hi som a prop.



Exemple 2: el mur infinit

Primera solució

- Avancem 1 metre i tornem a l'origen
- Retrocedim 2 metres i tornem a l'origen
- Avancem 3 metres i tornem a l'origen
- Retrocedim 4 metres i tornem a l'origen
- (recorrem sempre un metre més en direcció contrària)

Temps quan la porta està a distància n :

$$T(n) = 2 \sum_{i=1}^{n-1} i + n = 2 \frac{(n-1)n}{2} + n = n^2 \in \mathcal{O}(n^2).$$

$$\text{(recordem que } \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2} \text{)}$$

Exemple 2: el mur infinit

Segona solució

- Avancem 1 metre i tornem a l'origen
- Retrocedim 2 metres i tornem a l'origen
- Avancem 4 metres i tornem a l'origen
- Retrocedim 8 metres i tornem a l'origen
- (recorrem sempre el doble de distància en direcció contrària)

Si la porta es troba a distància $n = 2^k$, aleshores

$$T(n) = 2 \sum_{i=0}^{k-1} 2^i + 2^k = 2(2^k - 1) + 2^k = 3n - 2 \in \mathcal{O}(n).$$

(recordem que $\sum_{i=0}^{k-1} 2^i = 2^k - 1$)

Tema 1. Anàlisi d'algorismes

1 Temps de càlcul i espai de memòria

- Eficiència dels algorismes
- Mida de l'entrada i cost
- Ordre de magnitud

2 Notació asimptòtica

- Notació asimptòtica: definicions
- Notació asimptòtica: propietats
- Formes de creixement

3 Cost dels algorismes

- Algorismes no recursius
- Algorismes recursius
- Teoremes mestres

Notació asimptòtica: definicions

- La **notació asimptòtica** permet classificar les funcions segons com creixen “a la llarga”.
- Se centra en el comportament de les funcions per a entrades grans. Per exemple, $10^6 n > n^2$ fins a un cert valor de n que podem trobar així:

$$10^6 n > n^2 \iff 10^6 > n.$$

Per a $n \geq 10^6$, doncs, n^2 és més gran que $10^6 n$. En aquest cas, direm que la funció $g(n) = 10^6 n$ està fitada per $f(n) = n^2$ **asimptòticament**.

- La notació $\mathcal{O}(g)$, anomenada “O gran”, representa el conjunt de funcions fitades asimptòticament per g .

Notació asimptòtica: definicions

Notació Θ ((a): fita exacta asimptòtica)

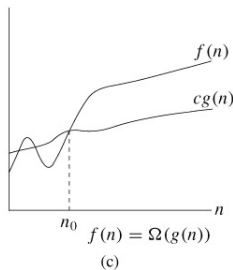
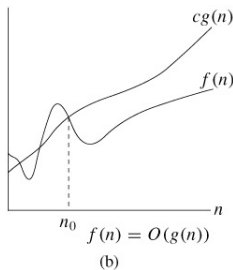
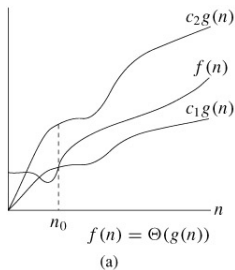
$$\Theta(g) = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \ c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)\}$$

Notació O gran ((b): fita superior asimptòtica)

$$O(g) = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid \exists c \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \ f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

Notació Ω ((c): fita inferior asimptòtica)

$$\Omega(g) = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid \exists c \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \ f(n) \geq c \cdot g(n)\}$$



Notació Θ (fita exacta asimptòtica)

$$\Theta(g) = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \ c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)\}$$

Exemples

- $75n \in \Theta(n)$
- $1023n^2 \notin \Theta(n)$
- $n^2 \notin \Theta(n)$
- $2^n \notin \Theta(2^{n^2})$
- $\Theta(n) \neq \Theta(n^2)$

Notació O gran (fita superior asimptòtica)

$$\mathcal{O}(g) = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid \exists c \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \quad f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

Exemples

- $3n^2 + 5n - 7 \in \mathcal{O}(n^2)$
- $n + 15 \in \mathcal{O}(n)$
- $\mathcal{O}(n^5) \subseteq \mathcal{O}(n^6)$
- $n^3 \notin \mathcal{O}(n^2)$
- $n^3 \in \mathcal{O}(2^n)$

Notació Ω ((c): fita inferior asimptòtica)

$$\Omega(g) = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid \exists c \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \quad f(n) \geq c \cdot g(n)\}$$

Exemples

- $2^n \in \Omega(n)$
- $n^2 \in \Omega(n)$
- $n \in \Omega(n)$
- $n \notin \Omega(n^2)$
- $\Omega(n^6) \subseteq \Omega(n^5)$

Relacions entre \mathcal{O} , Ω i Θ

Donades dues funcions f i g :

- $f \in \Omega(g) \iff g \in \mathcal{O}(f)$
- $\Theta(f) = \mathcal{O}(f) \cap \Omega(f)$

Regles del límit

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Rightarrow f \in \mathcal{O}(g)$ però $f \notin \Omega(g)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \Rightarrow f \in \Omega(g)$ però $f \notin \mathcal{O}(g)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c$, on $0 < c < \infty \Rightarrow f \in \Theta(g)$

Propietats de l'O gran

Donades les funcions f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 i h :

- *Reflexivitat.* $f \in \mathcal{O}(f)$
- *Transitivitat.* $h \in \mathcal{O}(g) \wedge g \in \mathcal{O}(f) \Rightarrow h \in \mathcal{O}(f)$
- *Caracterització.* $g \in \mathcal{O}(f) \iff \mathcal{O}(g) \subseteq \mathcal{O}(f)$
- *Suma.* $g_1 \in \mathcal{O}(f_1) \wedge g_2 \in \mathcal{O}(f_2) \Rightarrow g_1 + g_2 \in \mathcal{O}(f_1 + f_2) = \mathcal{O}(\max(f_1, f_2))$
- *Producte.* $g_1 \in \mathcal{O}(f_1) \wedge g_2 \in \mathcal{O}(f_2) \Rightarrow g_1 \cdot g_2 \in \mathcal{O}(f_1 \cdot f_2)$
- *Invariància multiplicativa.* Per a tota constant $c \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(c \cdot f)$

Propietats de l'O gran

Donades les funcions f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 i h :

- *Reflexivitat.* $f \in \mathcal{O}(f)$
- *Transitivitat.* $h \in \mathcal{O}(g) \wedge g \in \mathcal{O}(f) \Rightarrow h \in \mathcal{O}(f)$
- *Caracterització.* $g \in \mathcal{O}(f) \iff \mathcal{O}(g) \subseteq \mathcal{O}(f)$
- *Suma.* $g_1 \in \mathcal{O}(f_1) \wedge g_2 \in \mathcal{O}(f_2) \Rightarrow g_1 + g_2 \in \mathcal{O}(f_1 + f_2) = \mathcal{O}(\max(f_1, f_2))$
- *Producte.* $g_1 \in \mathcal{O}(f_1) \wedge g_2 \in \mathcal{O}(f_2) \Rightarrow g_1 \cdot g_2 \in \mathcal{O}(f_1 \cdot f_2)$
- *Invariància multiplicativa.* Per a tota constant $c \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(c \cdot f)$

Propietats de l'O gran

Donades les funcions f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 i h :

- *Reflexivitat.* $f \in \mathcal{O}(f)$
- *Transitivitat.* $h \in \mathcal{O}(g) \wedge g \in \mathcal{O}(f) \Rightarrow h \in \mathcal{O}(f)$
- *Caracterització.* $g \in \mathcal{O}(f) \iff \mathcal{O}(g) \subseteq \mathcal{O}(f)$
- *Suma.* $g_1 \in \mathcal{O}(f_1) \wedge g_2 \in \mathcal{O}(f_2) \Rightarrow g_1 + g_2 \in \mathcal{O}(f_1 + f_2) = \mathcal{O}(\max(f_1, f_2))$
- *Producte.* $g_1 \in \mathcal{O}(f_1) \wedge g_2 \in \mathcal{O}(f_2) \Rightarrow g_1 \cdot g_2 \in \mathcal{O}(f_1 \cdot f_2)$
- *Invariància multiplicativa.* Per a tota constant $c \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(c \cdot f)$

Propietats de l'O gran

Donades les funcions f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 i h :

- *Reflexivitat.* $f \in \mathcal{O}(f)$
- *Transitivitat.* $h \in \mathcal{O}(g) \wedge g \in \mathcal{O}(f) \Rightarrow h \in \mathcal{O}(f)$
- *Caracterització.* $g \in \mathcal{O}(f) \iff \mathcal{O}(g) \subseteq \mathcal{O}(f)$
- *Suma.* $g_1 \in \mathcal{O}(f_1) \wedge g_2 \in \mathcal{O}(f_2) \Rightarrow g_1 + g_2 \in \mathcal{O}(f_1 + f_2) = \mathcal{O}(\max(f_1, f_2))$
- *Producte.* $g_1 \in \mathcal{O}(f_1) \wedge g_2 \in \mathcal{O}(f_2) \Rightarrow g_1 \cdot g_2 \in \mathcal{O}(f_1 \cdot f_2)$
- *Invariància multiplicativa.* Per a tota constant $c \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(c \cdot f)$

Propietats de l'O gran

Donades les funcions f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 i h :

- *Reflexivitat.* $f \in \mathcal{O}(f)$
- *Transitivitat.* $h \in \mathcal{O}(g) \wedge g \in \mathcal{O}(f) \Rightarrow h \in \mathcal{O}(f)$
- *Caracterització.* $g \in \mathcal{O}(f) \iff \mathcal{O}(g) \subseteq \mathcal{O}(f)$
- *Suma.* $g_1 \in \mathcal{O}(f_1) \wedge g_2 \in \mathcal{O}(f_2) \Rightarrow g_1 + g_2 \in \mathcal{O}(f_1 + f_2) = \mathcal{O}(\max(f_1, f_2))$
- *Producte.* $g_1 \in \mathcal{O}(f_1) \wedge g_2 \in \mathcal{O}(f_2) \Rightarrow g_1 \cdot g_2 \in \mathcal{O}(f_1 \cdot f_2)$
- *Invariància multiplicativa.* Per a tota constant $c \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(c \cdot f)$

Propietats de l'O gran

Donades les funcions f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 i h :

- *Reflexivitat.* $f \in \mathcal{O}(f)$
- *Transitivitat.* $h \in \mathcal{O}(g) \wedge g \in \mathcal{O}(f) \Rightarrow h \in \mathcal{O}(f)$
- *Caracterització.* $g \in \mathcal{O}(f) \iff \mathcal{O}(g) \subseteq \mathcal{O}(f)$
- *Suma.* $g_1 \in \mathcal{O}(f_1) \wedge g_2 \in \mathcal{O}(f_2) \Rightarrow g_1 + g_2 \in \mathcal{O}(f_1 + f_2) = \mathcal{O}(\max(f_1, f_2))$
- *Producte.* $g_1 \in \mathcal{O}(f_1) \wedge g_2 \in \mathcal{O}(f_2) \Rightarrow g_1 \cdot g_2 \in \mathcal{O}(f_1 \cdot f_2)$
- *Invariància multiplicativa.* Per a tota constant $c \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(c \cdot f)$

Propietats de Θ

Donades les funcions f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 i h :

- *Reflexivitat.* $f \in \Theta(f)$
- *Transitivitat.* $h \in \Theta(g) \wedge g \in \Theta(f) \Rightarrow h \in \Theta(f)$
- *Simetria.* $g \in \Theta(f) \iff f \in \Theta(g) \iff \Theta(g) = \Theta(f)$
- *Suma.* $g_1 \in \Theta(f_1) \wedge g_2 \in \Theta(f_2) \Rightarrow g_1 + g_2 \in \Theta(f_1 + f_2) = \Theta(\max(f_1, f_2))$
- *Producte.* $g_1 \in \Theta(f_1) \wedge g_2 \in \Theta(f_2) \Rightarrow g_1 \cdot g_2 \in \Theta(f_1 \cdot f_2)$
- *Invariància multiplicativa.* Per a tota constant $c \in \mathbb{R}^+$, $\Theta(f) = \Theta(c \cdot f)$

Notació asimptòtica: propietats

Notació de classes

Si \mathcal{F}_1 i \mathcal{F}_2 són classes de funcions (com ara $\mathcal{O}(f)$ o $\Omega(f)$), definim:

- $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 = \{f + g \mid f \in \mathcal{F}_1 \wedge g \in \mathcal{F}_2\}$
- $\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2 = \{f \cdot g \mid f \in \mathcal{F}_1 \wedge g \in \mathcal{F}_2\}$

Regles de la suma i el producte (segona versió)

Donades dues funcions f i g :

- $\mathcal{O}(f) + \mathcal{O}(g) = \mathcal{O}(f + g) = \mathcal{O}(\max\{f, g\})$
- $\mathcal{O}(f) \cdot \mathcal{O}(g) = \mathcal{O}(f \cdot g)$
- $\Theta(f) + \Theta(g) = \Theta(f + g) = \Theta(\max\{f, g\})$
- $\Theta(f) \cdot \Theta(g) = \Theta(f \cdot g)$

Notació asimptòtica: propietats

Notació de classes

Si \mathcal{F}_1 i \mathcal{F}_2 són classes de funcions (com ara $\mathcal{O}(f)$ o $\Omega(f)$), definim:

- $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 = \{f + g \mid f \in \mathcal{F}_1 \wedge g \in \mathcal{F}_2\}$
- $\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2 = \{f \cdot g \mid f \in \mathcal{F}_1 \wedge g \in \mathcal{F}_2\}$

Regles de la suma i el producte (segona versió)

Donades dues funcions f i g :

- $\mathcal{O}(f) + \mathcal{O}(g) = \mathcal{O}(f + g) = \mathcal{O}(\max\{f, g\})$
- $\mathcal{O}(f) \cdot \mathcal{O}(g) = \mathcal{O}(f \cdot g)$
- $\Theta(f) + \Theta(g) = \Theta(f + g) = \Theta(\max\{f, g\})$
- $\Theta(f) \cdot \Theta(g) = \Theta(f \cdot g)$

Costos freqüents

- **Constant** $\Theta(1)$. Decidir si un nombre és parell o senar.
- **Logarítmic** $\Theta(\log n)$. Cerca binària.
- **Radical** $\Theta(\sqrt{n})$. Test bàsic de primalitat.
- **Lineal** $\Theta(n)$. Cerca seqüencial en un vector.
- **Quasilineal** $\Theta(n \log n)$. Ordenació eficient d'un vector.
- **Quadràtic** $\Theta(n^2)$. Suma de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- **Cúbic** $\Theta(n^3)$. Producte de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- **Polinòmic** $\Theta(n^k)$, per a $k \geq 1$ constant. Enumerar combinacions (n elements presos de k en k).
- **Exponencial** $\Theta(k^n)$, per a k constant. Cerca en un espai de configuracions (d'amplada k i fondària n).
- **Altres funcions:** $\Theta(n!)$, $\Theta(n^n)$.

Costos freqüents

- **Constant** $\Theta(1)$. Decidir si un nombre és parell o senar.
- **Logarítmic** $\Theta(\log n)$. Cerca binària.
- **Radical** $\Theta(\sqrt{n})$. Test bàsic de primalitat.
- **Lineal** $\Theta(n)$. Cerca seqüencial en un vector.
- **Quasilineal** $\Theta(n \log n)$. Ordenació eficient d'un vector.
- **Quadràtic** $\Theta(n^2)$. Suma de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- **Cúbic** $\Theta(n^3)$. Producte de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- **Polinòmic** $\Theta(n^k)$, per a $k \geq 1$ constant. Enumerar combinacions (n elements presos de k en k).
- **Exponencial** $\Theta(k^n)$, per a k constant. Cerca en un espai de configuracions (d'amplada k i fondària n).
- **Altres funcions:** $\Theta(n!)$, $\Theta(n^n)$.

Costos freqüents

- **Constant** $\Theta(1)$. Decidir si un nombre és parell o senar.
- **Logarítmic** $\Theta(\log n)$. Cerca binària.
- **Radical** $\Theta(\sqrt{n})$. Test bàsic de primalitat.
- **Lineal** $\Theta(n)$. Cerca seqüencial en un vector.
- **Quasilineal** $\Theta(n \log n)$. Ordenació eficient d'un vector.
- **Quadràtic** $\Theta(n^2)$. Suma de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- **Cúbic** $\Theta(n^3)$. Producte de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- **Polinòmic** $\Theta(n^k)$, per a $k \geq 1$ constant. Enumerar combinacions (n elements presos de k en k).
- **Exponencial** $\Theta(k^n)$, per a k constant. Cerca en un espai de configuracions (d'amplada k i fondària n).
- **Altres funcions**: $\Theta(n!)$, $\Theta(n^n)$.

Costos freqüents

- **Constant** $\Theta(1)$. Decidir si un nombre és parell o senar.
- **Logarítmic** $\Theta(\log n)$. Cerca binària.
- **Radical** $\Theta(\sqrt{n})$. Test bàsic de primalitat.
- **Lineal** $\Theta(n)$. Cerca seqüencial en un vector.
- **Quasilineal** $\Theta(n \log n)$. Ordenació eficient d'un vector.
- **Quadràtic** $\Theta(n^2)$. Suma de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- **Cúbic** $\Theta(n^3)$. Producte de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- **Polinòmic** $\Theta(n^k)$, per a $k \geq 1$ constant. Enumerar combinacions (n elements presos de k en k).
- **Exponencial** $\Theta(k^n)$, per a k constant. Cerca en un espai de configuracions (d'amplada k i fondària n).
- **Altres funcions:** $\Theta(n!)$, $\Theta(n^n)$.

Costos freqüents

- **Constant** $\Theta(1)$. Decidir si un nombre és parell o senar.
- **Logarítmic** $\Theta(\log n)$. Cerca binària.
- **Radical** $\Theta(\sqrt{n})$. Test bàsic de primalitat.
- **Lineal** $\Theta(n)$. Cerca seqüencial en un vector.
- **Quasilineal** $\Theta(n \log n)$. Ordenació eficient d'un vector.
- **Quadràtic** $\Theta(n^2)$. Suma de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- **Cúbic** $\Theta(n^3)$. Producte de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- **Polinòmic** $\Theta(n^k)$, per a $k \geq 1$ constant. Enumerar combinacions (n elements presos de k en k).
- **Exponencial** $\Theta(k^n)$, per a k constant. Cerca en un espai de configuracions (d'amplada k i fondària n).
- **Altres funcions:** $\Theta(n!)$, $\Theta(n^n)$.

Costos freqüents

- **Constant** $\Theta(1)$. Decidir si un nombre és parell o senar.
- **Logarítmic** $\Theta(\log n)$. Cerca binària.
- **Radical** $\Theta(\sqrt{n})$. Test bàsic de primalitat.
- **Lineal** $\Theta(n)$. Cerca seqüencial en un vector.
- **Quasilineal** $\Theta(n \log n)$. Ordenació eficient d'un vector.
- **Quadràtic** $\Theta(n^2)$. Suma de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- **Cúbic** $\Theta(n^3)$. Producte de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- **Polinòmic** $\Theta(n^k)$, per a $k \geq 1$ constant. Enumerar combinacions (n elements presos de k en k).
- **Exponencial** $\Theta(k^n)$, per a k constant. Cerca en un espai de configuracions (d'amplada k i fondària n).
- **Altres funcions:** $\Theta(n!)$, $\Theta(n^n)$.

Costos freqüents

- **Constant** $\Theta(1)$. Decidir si un nombre és parell o senar.
- **Logarítmic** $\Theta(\log n)$. Cerca binària.
- **Radical** $\Theta(\sqrt{n})$. Test bàsic de primalitat.
- **Lineal** $\Theta(n)$. Cerca seqüencial en un vector.
- **Quasilineal** $\Theta(n \log n)$. Ordenació eficient d'un vector.
- **Quadràtic** $\Theta(n^2)$. Suma de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- **Cúbic** $\Theta(n^3)$. Producte de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- **Polinòmic** $\Theta(n^k)$, per a $k \geq 1$ constant. Enumerar combinacions (n elements presos de k en k).
- **Exponencial** $\Theta(k^n)$, per a k constant. Cerca en un espai de configuracions (d'amplada k i fondària n).
- **Altres funcions:** $\Theta(n!)$, $\Theta(n^n)$.

Costos freqüents

- **Constant** $\Theta(1)$. Decidir si un nombre és parell o senar.
- **Logarítmic** $\Theta(\log n)$. Cerca binària.
- **Radical** $\Theta(\sqrt{n})$. Test bàsic de primalitat.
- **Lineal** $\Theta(n)$. Cerca seqüencial en un vector.
- **Quasilineal** $\Theta(n \log n)$. Ordenació eficient d'un vector.
- **Quadràtic** $\Theta(n^2)$. Suma de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- **Cúbic** $\Theta(n^3)$. Producte de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- **Polinòmic** $\Theta(n^k)$, per a $k \geq 1$ constant. Enumerar combinacions (n elements presos de k en k).
- **Exponencial** $\Theta(k^n)$, per a k constant. Cerca en un espai de configuracions (d'amplada k i fondària n).
- **Altres funcions**: $\Theta(n!)$, $\Theta(n^n)$.

Costos freqüents

- **Constant** $\Theta(1)$. Decidir si un nombre és parell o senar.
- **Logarítmic** $\Theta(\log n)$. Cerca binària.
- **Radical** $\Theta(\sqrt{n})$. Test bàsic de primalitat.
- **Lineal** $\Theta(n)$. Cerca seqüencial en un vector.
- **Quasilineal** $\Theta(n \log n)$. Ordenació eficient d'un vector.
- **Quadràtic** $\Theta(n^2)$. Suma de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- **Cúbic** $\Theta(n^3)$. Producte de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- **Polinòmic** $\Theta(n^k)$, per a $k \geq 1$ constant. Enumerar combinacions (n elements presos de k en k).
- **Exponencial** $\Theta(k^n)$, per a k constant. Cerca en un espai de configuracions (d'amplada k i fondària n).
- **Altres funcions:** $\Theta(n!)$, $\Theta(n^n)$.

Costos freqüents

- **Constant** $\Theta(1)$. Decidir si un nombre és parell o senar.
- **Logarítmic** $\Theta(\log n)$. Cerca binària.
- **Radical** $\Theta(\sqrt{n})$. Test bàsic de primalitat.
- **Lineal** $\Theta(n)$. Cerca seqüencial en un vector.
- **Quasilineal** $\Theta(n \log n)$. Ordenació eficient d'un vector.
- **Quadràtic** $\Theta(n^2)$. Suma de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- **Cúbic** $\Theta(n^3)$. Producte de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- **Polinòmic** $\Theta(n^k)$, per a $k \geq 1$ constant. Enumerar combinacions (n elements presos de k en k).
- **Exponencial** $\Theta(k^n)$, per a k constant. Cerca en un espai de configuracions (d'amplada k i fondària n).
- **Altres funcions:** $\Theta(n!)$, $\Theta(n^n)$.

Tema 1. Anàlisi d'algorismes

1 Temps de càlcul i espai de memòria

- Eficiència dels algorismes
- Mida de l'entrada i cost
- Ordre de magnitud

2 Notació asimptòtica

- Notació asimptòtica: definicions
- Notació asimptòtica: propietats
- Formes de creixement

3 Cost dels algorismes

- Algorismes no recursius
- Algorismes recursius
- Teoremes mestres

Càlcul del cost (en temps):

- El cost d'una **operació elemental** és $\Theta(1)$. Això inclou:
 - una assignació entre tipus bàsics (`int`, `bool`, `double`, ...)
 - un increment o decrement d'una variable de tipus bàsic
 - una operació aritmètica
 - una lectura o escriptura de tipus bàsic
 - una comparació
 - l'accés a una component d'un vector
- Avaluar una expressió té cost igual a la suma dels costos de les operacions que s'hi fan (incloses les crides a les funcions, si n'hi ha).
- El cost de `return E` és la suma del cost de l'avaluació de l'expressió E més el cost de copiar (assignar) el resultat.
- El cost del pas de paràmetres per referència és $\Theta(1)$
- El cost de construir o copiar un vector de mida n (assignació, pas per valor, return) és $\Theta(n)$

- Si el cost d'un fragment F_1 és C_1 i el d'un fragment F_2 és C_2 , llavors el cost de la **composició seqüencial**

$$F_1; F_2$$

és $C_1 + C_2$.

En general, si N és constant i cada fragment F_k té cost C_k , el cost de la composició seqüencial

$$F_1; F_2 ; \dots ; F_N$$

és $C_1 + C_2 + \dots + C_N$

- Si el cost d'un fragment F_1 és C_1 , el d'un fragment F_2 és C_2 i el d'avaluar B és D , llavors el cost de la **composició alternativa**

`if (B) F_1 ; else F_2`

és $D + C_1$ si es compleix B , i $D + C_2$ altrament.

En tot cas, el cost és $\leq D + \max(C_1, C_2)$.

- Si el cost de F durant la k -èsima iteració és C_k , el d'avaluar B és D_k i el nombre d'iteracions és N , llavors el cost de la **composició iterativa**

`while (B) F ;`

és $(\sum_{k=1}^N C_k + D_k) + D_{N+1}$.

- Si el cost d'un fragment F_1 és C_1 , el d'un fragment F_2 és C_2 i el d'avaluar B és D , llavors el cost de la **composició alternativa**

`if (B) F_1 ; else F_2`

és $D + C_1$ si es compleix B , i $D + C_2$ altrament.

En tot cas, el cost és $\leq D + \max(C_1, C_2)$.

- Si el cost de F durant la k -èsima iteració és C_k , el d'avaluar B és D_k i el nombre d'iteracions és N , llavors el cost de la **composició iterativa**

`while (B) F ;`

és $(\sum_{k=1}^N C_k + D_k) + D_{N+1}$.

Exemple d'ordenació per selecció

Passos per ordenar 5, 6, 1, 2, 0, 7, 4, 3 segons l'algorisme de selecció.

En vermell, els elements ja ordenats.

En groc, els elements intercanviats pel màxim.

5	6	1	2	0	7	4	3
5	6	1	2	0	3	4	7
5	4	1	2	0	3	6	7
3	4	1	2	0	5	6	7
3	0	1	2	4	5	6	7
2	0	1	3	4	5	6	7
1	0	2	3	4	5	6	7
0	1	2	3	4	5	6	7

Ordenació per selecció

```
0 int posicio_maxim (const vector<int>& v, int m) {  
1     int k = 0;  
2     for (int i = 1; i <= m; ++i)  
3         if (v[i] > v[k]) k = i;  
4     return k; }  
  
5 void ordena_seleccio (vector<int>& v, int n) {  
6     for (int i = n-1; i >= 0; --i) {  
7         int k = posicio_maxim(v, i);  
8         swap(v[k], v[i]); }}}
```

2, 6 Iteracions bucles: $m - 1 + 1 = m$, $n - 1 + 1 = n$.

7 Cost $\Theta(i)$.

altres Instruccions de cost constant: $\Theta(1)$.

$$t_{sel}(n) = \Theta(1) + \sum_{i=1}^n (\Theta(i) + \Theta(1)) = \Theta(\sum_{i=1}^n i) = \Theta\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \Theta(n^2)$$

Exemple d'ordenació per inserció

Passos per ordenar 5, 6, 1, 2, 0, 7, 4, 3 segons l'algorisme d'inserció.

En vermell, els elements ja ordenats.

Entre parèntesis, el nombre de posicions que s'ha desplaçat l'element inserit.

5	6	1	2	0	7	4	3	(0)
5	6	1	2	0	7	4	3	(0)
1	5	6	2	0	7	4	3	(2)
1	2	5	6	0	7	4	3	(2)
0	1	2	5	6	7	4	3	(4)
0	1	2	5	6	7	4	3	(0)
0	1	2	4	5	6	7	3	(3)
0	1	2	3	4	5	6	7	(4)

Ordenació per inserció

```
0 void ordena_insercio (vector<int>& v, int n) {  
1     for (int k = 1; k <= n-1; ++k) {  
2         int t = k-1;  
3         while (t >= 0 and v[t+1] < v[t]) {  
4             swap(v[t], v[t+1]);  
5             --t;  
        }  
    }  
}
```

0 Pas de paràmetres: $\Theta(1)$.

1 Iteracions bucle: $(n - 1) - 1 + 1 = n - 1 = \Theta(n)$.

1,2 Condició d'iteració i línia 2: $\Theta(1)$.

3 Iteracions bucle: entre 0 i $k - 1 - 0 + 1 = k$.

4,5 Assignacions de cost $\Theta(1)$.

$$\Theta(1) + (\Theta(n) \times \Theta(1)) \leq t_{ins}(n) \leq \Theta(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \Theta(k)$$

Tenim que el cost d'ordenar per inserció n elements és $t_{ins}(n)$ on:

$$\Theta(1) + (\Theta(n) \times \Theta(1)) \leq t_{ins}(n) \leq \Theta(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \Theta(k)$$

Però

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2} \in \Theta(n^2).$$

Aleshores,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \Theta(k) = \Theta(\sum_{k=1}^{n-1} k) = \Theta(n^2)$$

i

$$\Theta(n) \leq t_{ins}(n) \leq \Theta(n^2).$$

El cost d'un algorisme recursiu s'expressa sovint en forma de recurrència.

Definició

Una **recurrència** és una equació o una desigualtat que descriu una funció expressada en termes del seu valor per a entrades més petites.

Exemple

$$C(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 1 \\ C(n-1) + n, & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Per exemple, $C(1) = 1$, $C(2) = 1 + 2 = 3$ i $C(3) = 3 + 3 = 6$.

Però voldríem una fórmula no recurrent per calcular el valor!

Resoldre la recurrència vol dir donar una forma tancada pel terme n -èsim.

El cost d'un algorisme recursiu s'expressa sovint en forma de recurrència.

Definició

Una **recurrència** és una equació o una desigualtat que descriu una funció expressada en termes del seu valor per a entrades més petites.

Exemple

$$C(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 1 \\ C(n-1) + n, & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Per exemple, $C(1) = 1$, $C(2) = 1 + 2 = 3$ i $C(3) = 3 + 3 = 6$.

Però voldríem una fórmula no recurrent per calcular el valor!

Resoldre la recurrència vol dir donar una forma tancada pel terme n -èsim.

$$C(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 1 \\ C(n-1) + n, & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Solució

$$\begin{aligned} C(n) &= C(n-1) + n \\ &= C(n-2) + (n-1) + n \\ &= C(n-3) + (n-2) + (n-1) + n \\ &\vdots \\ &= C(1) + 2 + \dots + (n-2) + (n-1) + n \\ &= 1 + 2 + \dots + n \\ &= \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \in \Theta(n^2). \end{aligned}$$

Per trobar una recurrència que descrigui el cost d'un algorisme recursiu, hem de determinar:

- el paràmetre de recursió n ,
- el cost del cas inductiu
 - nombre de crides recursives
 - valors del paràmetre recursiu de les crides
 - cost dels càlculs extra no recursius

Cerca lineal recursiva

Mirar si un nombre x apareix en un vector a entre les posicions 0 i $n - 1$ comparant-lo amb $a[0], a[1], \dots, a[n - 1]$.

Si el troba, retorna l'índex de la posició que conté x .

Altrament, retorna -1 .

```
int cerca_lineal(const vector<int>& a, int n, int x) {  
    if (n == 0) return -1;  
    else if (a[n-1] == x) return n-1;  
    else return cerca_lineal(a, n-1, x);  
}
```

El paràmetre de la recursió és n , la mida del vector.

Definim la recurrència per a $T(n)$, el cost (en el cas pitjor) de l'algorisme:

$$T(n) = T(n - 1) + \Theta(1)$$

$$T(n) = T(n-1) + \Theta(1) \text{ per a } n \geq 1 \quad (\text{i } T(0) = \Theta(1))$$

Solució

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + \Theta(1) \\ &= T(n-2) + 2 \cdot \Theta(1) \\ &= T(n-3) + 3 \cdot \Theta(1) \\ &\vdots \\ &= T(1) + (n-1) \cdot \Theta(1) \\ &= T(0) + n \cdot \Theta(1) \\ &= (n+1) \cdot \Theta(1) \\ &= \Theta(n+1) = \Theta(n). \end{aligned}$$

Cerca binària recursiva

Mirar si un nombre x apareix en un vector ordenat a entre les posicions i i j per cerca binària.

Si el troba, retorna l'índex de la posició que conté x .

Altrament, retorna -1 .

```
int cerca_binaria(const vector<int>& a,int i,int j,int x)
{  if (i <= j) {
    int k = (i + j) / 2;
    if      (x < a[k])
        return cerca_binaria(a, i, k-1, x);
    else if (x > a[k])
        return cerca_binaria(a, k+1, j, x);
    else
        return k;
  }
  else return -1;
}
```

```
int cerca_binaria(const vector<int>& a,int i,int j,int x)
{
    if (i <= j) {
        int k = (i + j) / 2;
        if (x < a[k])
            return cerca_binaria(a, i, k-1, x);
        else if (x > a[k])
            return cerca_binaria(a, k+1, j, x);
        else
            return k;
    }
    else return -1;
}
```

El paràmetre de recursió és $n = j - i + 1$, la mida de l'interval a explorar. Definim la recurrència per a $T(n)$, el cost (en cas pitjor) de l'algorisme:

$$T(n) = T(n/2) + \Theta(1)$$

$$T(n) = T(n/2) + \Theta(1) \quad \text{per a } n \geq 1 \quad (\text{i } T(0) = \Theta(1)).$$

Solució

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n/2) + \Theta(1) \\ &= T(n/4) + 2 \cdot \Theta(1) \\ &= T(n/8) + 3 \cdot \Theta(1) \\ &\vdots \\ &= T(n/2^{\log_2 n}) + \log_2 n \cdot \Theta(1) \\ &= T(1) + \log_2 n \cdot \Theta(1) \\ &= T(0) + (\log_2 n + 1) \cdot \Theta(1) \\ &= (\log_2 n + 2) \cdot \Theta(1) = \Theta(\log n + 2) = \Theta(\log n). \end{aligned}$$

Per sistematitzar l'anàlisi del cost dels algorismes recursius, els classifiquem en dos grups en funció de com divideixen el problema d'entrada en subproblemes en les crides recursives.

Sigui A un algorisme amb una entrada de mida n que fa a crides recursives i una feina addicional no recursiva de cost $g(n)$. Llavors, si en les crides recursives els subproblemes tenen tots mida

- $n - c$, el cost d' A ve descrit per la recurrència

$$T(n) = a \cdot T(n - c) + g(n)$$

- n/b , el cost d' A ve descrit per la recurrència

$$T(n) = a \cdot T(n/b) + g(n)$$

Les dues menes de recurrències anteriors:

- **subtractives**: $T(n) = a \cdot T(n - c) + g(n)$
- **divisores**: $T(n) = a \cdot T(n/b) + g(n)$

es poden resoldre amb els **teoremes mestres** que veurem a continuació.

Teorema mestre de recurrències subtractives

Sigui $T(n)$ la recurrència

$$T(n) = \begin{cases} f(n), & \text{si } 0 \leq n < n_0 \\ a \cdot T(n - c) + g(n), & \text{si } n \geq n_0 \end{cases}$$

on $n_0 \in \mathbb{N}$, $c \geq 1$, f és una funció arbitrària i $g \in \Theta(n^k)$ per a $k \geq 0$.

Aleshores,

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k), & \text{si } a < 1 \\ \Theta(n^{k+1}), & \text{si } a = 1 \\ \Theta(a^{n/c}), & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

Teorema mestre de recurrències subtractives

$$\text{Sigui } T(n) = \begin{cases} f(n), & \text{si } 0 \leq n < n_0 \\ a \cdot T(n - c) + g(n), & \text{si } n \geq n_0 \end{cases}$$

on $n_0 \in \mathbb{N}$, $c \geq 1$, f és una funció arbitrària i $g \in \Theta(n^k)$ per a $k \geq 0$.

Aleshores,

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k), & \text{si } a < 1 \\ \Theta(n^{k+1}), & \text{si } a = 1 \\ \Theta(a^{n/c}), & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

Exemple 1

Hem vist que el cost de l'algorisme recursiu de **cerca lineal** es pot descriure amb la recurrència $T(n) = T(n - 1) + \Theta(1)$ per a $n \geq 1$ i $T(0) = \Theta(1)$.

Per tant, $n_0 = 1$, $a = 1$, $c = 1$, $k = 0$. Llavors, $T(n)$ pertany al segon cas:

$$T(n) \in \Theta(n^{k+1}) = \Theta(n).$$

Teorema mestre de recurrències subtractives

$$\text{Sigui } T(n) = \begin{cases} f(n), & \text{si } 0 \leq n < n_0 \\ a \cdot T(n - c) + g(n), & \text{si } n \geq n_0 \end{cases}$$

on $n_0 \in \mathbb{N}$, $c \geq 1$, f és una funció arbitrària i $g \in \Theta(n^k)$ per a $k \geq 0$.

Aleshores,

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k), & \text{si } a < 1 \\ \Theta(n^{k+1}), & \text{si } a = 1 \\ \Theta(a^{n/c}), & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

Exemple 2

En la recurrència $T(n) = T(n - 1) + \Theta(n)$, tenim els valors

$$a = 1, c = 1, k = 1.$$

Lavors, $T(n)$ pertany al segon cas:

$$T(n) \in \Theta(n^{k+1}) = \Theta(n^2).$$

Teorema mestre de recurrències subtractives

$$\text{Sigui } T(n) = \begin{cases} f(n), & \text{si } 0 \leq n < n_0 \\ a \cdot T(n - c) + g(n), & \text{si } n \geq n_0 \end{cases}$$

on $n_0 \in \mathbb{N}$, $c \geq 1$, f és una funció arbitrària i $g \in \Theta(n^k)$ per a $k \geq 0$.

Aleshores,

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k), & \text{si } a < 1 \\ \Theta(n^{k+1}), & \text{si } a = 1 \\ \Theta(a^{n/c}), & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

Exemple 3

En la recurrència $T(n) = 2 \cdot T(n - 1) + \Theta(n)$, tenim els valors

$$a = 2, c = 1, k = 1.$$

Lavors, $T(n)$ pertany al tercer cas:

$$T(n) \in \Theta(2^n).$$

Teorema mestre de recurrències divisores

Sigui $T(n)$ la recurrència

$$T(n) = \begin{cases} f(n), & \text{si } 0 \leq n < n_0 \\ a \cdot T(n/b) + g(n), & \text{si } n \geq n_0 \end{cases}$$

on $n_0 \in \mathbb{N}$, $b > 1$, f és una funció arbitrària i $g \in \Theta(n^k)$ per a $k \geq 0$.

Sigui $\alpha = \log_b(a)$. Aleshores,

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k), & \text{si } \alpha < k \\ \Theta(n^k \log n), & \text{si } \alpha = k \\ \Theta(n^\alpha), & \text{si } \alpha > k \end{cases}$$

Teorema mestre de recurrències divisores

$$\text{Sigui } T(n) = \begin{cases} f(n), & \text{si } 0 \leq n < n_0 \\ a \cdot T(n/b) + g(n), & \text{si } n \geq n_0 \end{cases}$$

on $n_0 \in \mathbb{N}$, $b > 1$, f és una funció arbitrària i $g \in \Theta(n^k)$ per a $k \geq 0$.

Sigui $\alpha = \log_b(a)$. Aleshores,

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k), & \text{si } \alpha < k \\ \Theta(n^k \log n), & \text{si } \alpha = k \\ \Theta(n^\alpha), & \text{si } \alpha > k \end{cases}$$

Exemple 1

Hem vist que el cost de l'algorisme recursiu de **cerca binària** es pot descriure amb la recurrència $T(n) = T(n/2) + \Theta(1)$ per a $n \geq 1$ i $T(0) = \Theta(1)$.

Per tant, $n_0 = 1$, $a = 1$, $b = 2$, $k = 0$, $\alpha = 0$. Llavors, $T(n)$ pertany al 2n cas:

$$T(n) \in \Theta(n^k \log n) = \Theta(\log n).$$

Exemple 2

Funció principal de l'ordenació per fusió (*mergesort*).

```
template <typename elem>
void ordenacio_fusio (vector<elem>& a, int e, int d) {
    if (e < d) {
        int m = (e + d) / 2;
        ordenacio_fusio(a, e, m);
        ordenacio_fusio(a, m + 1, d);
        fusionar(a, e, m, d);
    }
}
```

Tenint en compte que el cost de la crida `fusionar(a, e, m, d)` és $\Theta(n)$ (on $n = d - e + 1$), el cost total es pot expressar amb la recurrència:

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n) \text{ per a } n \geq 2, \text{ i } T(1) = \Theta(1).$$

Teorema mestre de recurrències divisores

$$\text{Sigui } T(n) = \begin{cases} f(n), & \text{si } 0 \leq n < n_0 \\ a \cdot T(n/b) + g(n), & \text{si } n \geq n_0 \end{cases}$$

on $n_0 \in \mathbb{N}$, $b > 1$, f és una funció arbitrària i $g \in \Theta(n^k)$ per a $k \geq 0$.

Sigui $\alpha = \log_b(a)$. Aleshores,

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k), & \text{si } \alpha < k \\ \Theta(n^k \log n), & \text{si } \alpha = k \\ \Theta(n^\alpha), & \text{si } \alpha > k \end{cases}$$

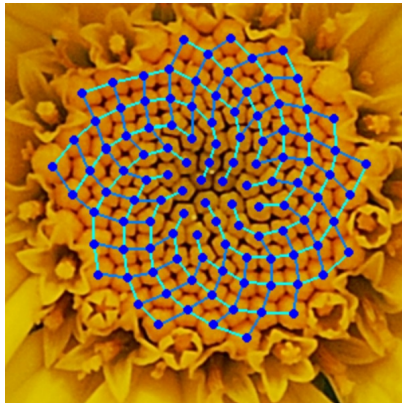
Exemple 2

Hem vist que el cost de l'**ordenació per fusió** es pot descriure amb la recurrència $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$ per a $n \geq 2$ i $T(1) = \Theta(1)$.

Per tant, $n_0 = 2$, $a = 2$, $b = 2$, $k = 1$, $\alpha = 1$. Llavors, $T(n)$ pertany al 2n cas:

$$T(n) \in \Theta(n^k \log n) = \Theta(n \log n).$$

- Els nombres de Fibonacci estan definits per la recurrència $f(k) = f(k - 1) + f(k - 2)$ per a $k \geq 2$, amb $f(0) = 1$ i $f(1) = 1$.



1a solució

```
int fib(int k) {  
    if (k <= 1) return 1;  
    else return fib(k-1) + fib(k-2);  
}
```

- El cost segueix la recurrència $T(k) = T(k - 1) + T(k - 2) + \Theta(1)$
- No podem aplicar directament el teorema mestre per resoldre-la!

Podem aproximar i llavors aplicar el teorema mestre:
(noteu les inequacions i les O/Ω)

- $T(k) = T(k-1) + T(k-2) + \Theta(1) \leq 2T(k-1) + \Theta(1)$ dóna
 $T(k) = O(2^k)$, i
- $T(k) = T(k-1) + T(k-2) + \Theta(1) \geq 2T(k-2) + \Theta(1)$ dóna
 $T(k) = \Omega(\sqrt{2}^k)$

Es pot demostrar que $T(k) = \Theta(\phi^k)$, on $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (*nombre d'or*)

Noteu que $\sqrt{2} = 1.414213562\dots$ i $\phi = 1.618033988\dots$

2a solució

```
int fib(int k) {  
    if (k <= 1) return 1;  
    int cur = 1;  
    int pre = 1;  
    for (int i = 1; i < k; ++i) {  
        int tmp = pre;  
        pre = cur;  
        cur = cur + tmp;  
    }  
    return cur;  
}
```

- Cada volta costa temps $\Theta(1)$
- El cost és proporcional al nombre de voltes: $\Theta(k)$

Algorisme d'exponenciació ràpida

```
template <typename T>
T pow(const T& a, int k) {
    if (k == 0) return identity(a);
    T b = pow(a, k/2);
    if (k % 2 == 0) return b*b;
    else           return a*b*b;
}
```

- Serveix per a calcular a^k
- $a^0 = 1$
- Si k és parell, $a^k = (a^{\frac{k}{2}})^2 = (a^{k \div 2})^2$
- Si k és senar, $a^k = a \cdot a^{k-1} = a \cdot (a^{\frac{k-1}{2}})^2 = a \cdot (a^{k \div 2})^2$

Algorisme d'exponenciació ràpida

```
template <typename T>
T pow(const T& a, int k) {
    if (k == 0) return identity(a);
    T b = pow(a, k/2);
    if (k % 2 == 0) return b*b;
    else           return a*b*b;
}
```

- Assumim cost d'`identity`, `*`, construcció i còpia pel tipus T és $\Theta(1)$
- El cost $T(k)$ segueix la recurrència $T(k) = T(k/2) + \Theta(1)$
- Aplicant el teorema mestre tenim que $T(k) = \Theta(\log(k))$

- Per inducció es pot demostrar que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} f(k) & f(k-1) \\ f(k-1) & f(k-2) \end{pmatrix} \text{ per tot } k \geq 0 \text{ (fent } f(-1) = 0)$$

3a solució

```
typedef vector<vector<int>> matrix;  
  
int fib(int k) {  
    matrix f = {{1, 1}, {1, 0}};  
    matrix p = pow(f, k);  
    return p[0][0];  
}
```

- Ja hem vist que el cost és $\Theta(\log(k))$

En termes de cost asimptòtic, l'algorisme d'ordenació per fusió és òptim:

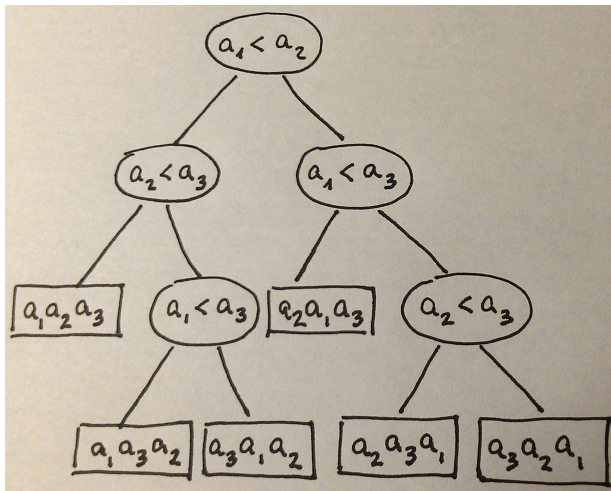
Proposició

Tot algorisme d'ordenació basat en comparacions té cost $\Omega(n \log n)$.

Es pot argumentar fent servir arbres per representar els algorismes d'ordenació basats en comparacions.

Fita inferior dels algorismes d'ordenació

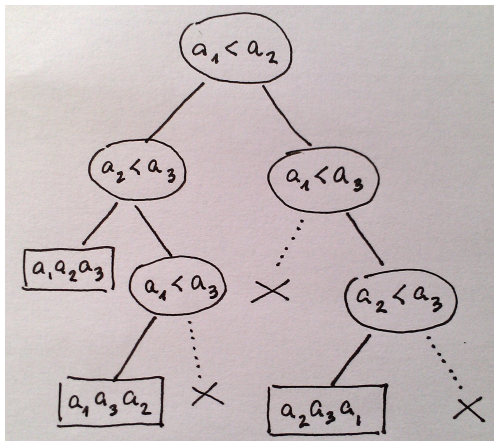
Suposem que volem ordenar a_1 , a_2 i a_3 . Si $a_1 < a_2$, seguim per la branca esquerra; si no, per la dreta. Els rectangles representen les ordenacions trobades. La fondària de l'arbre és el cost en cas pitjor.



Fita inferior dels algorismes d'ordenació

Considerem un arbre que ordena n elements:

- cada fulla correspon a una permutació de $\{1, 2, \dots, n\}$
- cada permutació de $\{1, 2, \dots, n\}$ ha d'aparèixer en alguna fulla
(si una no hi aparegués, què passaria si es donés com a entrada?)



Fita inferior dels algorismes d'ordenació

- com que hi ha $n!$ permutacions de n elements, l'arbre té $\geq n!$ fulles
- tot arbre binari de fondària d té $\leq 2^d$ fulles
- per tant, la fondària del nostre arbre és almenys de $\log_2 n!$

El cost de l'algorisme representat per l'arbre és, per tant, $\Omega(\log n!)$. Com que

$$n! \geq n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot \lfloor n/2 \rfloor \geq (n/2)^{(n/2)}$$

tenim que

$$\log_2 n! \geq \log_2 (n/2)^{(n/2)} = \frac{n}{2} \log_2 (n/2) \in \Omega(n \log n).$$

Proposició

Tot algorisme d'ordenació basat en comparacions té cost $\Omega(n \log n)$.

Fita inferior dels algorismes d'ordenació

- com que hi ha $n!$ permutacions de n elements, l'arbre té $\geq n!$ fulles
- tot arbre binari de fondària d té $\leq 2^d$ fulles
- per tant, la fondària del nostre arbre és almenys de $\log_2 n!$

El cost de l'algorisme representat per l'arbre és, per tant, $\Omega(\log n!)$. Com que

$$n! \geq n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot \lfloor n/2 \rfloor \geq (n/2)^{(n/2)}$$

tenim que

$$\log_2 n! \geq \log_2 (n/2)^{(n/2)} = \frac{n}{2} \log_2 (n/2) \in \Omega(n \log n).$$

Proposició

Tot algorisme d'ordenació basat en comparacions té cost $\Omega(n \log n)$.

Fita inferior dels algorismes d'ordenació

- com que hi ha $n!$ permutacions de n elements, l'arbre té $\geq n!$ fulles
- tot arbre binari de fondària d té $\leq 2^d$ fulles
- per tant, **la fondària del nostre arbre és almenys de $\log_2 n!$**

El cost de l'algorisme representat per l'arbre és, per tant, $\Omega(\log n!)$. Com que

$$n! \geq n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot \lfloor n/2 \rfloor \geq (n/2)^{(n/2)}$$

tenim que

$$\log_2 n! \geq \log_2 (n/2)^{(n/2)} = \frac{n}{2} \log_2 (n/2) \in \Omega(n \log n).$$

Proposició

Tot algorisme d'ordenació basat en comparacions té cost $\Omega(n \log n)$.

Fita inferior dels algorismes d'ordenació

- com que hi ha $n!$ permutacions de n elements, l'arbre té $\geq n!$ fulles
- tot arbre binari de fondària d té $\leq 2^d$ fulles
- per tant, **la fondària del nostre arbre és almenys de $\log_2 n!$**

El cost de l'algorisme representat per l'arbre és, per tant, $\Omega(\log n!)$. Com que

$$n! \geq n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot \lfloor n/2 \rfloor \geq (n/2)^{(n/2)}$$

tenim que

$$\log_2 n! \geq \log_2 (n/2)^{(n/2)} = \frac{n}{2} \log_2 (n/2) \in \Omega(n \log n).$$

Proposició

Tot algorisme d'ordenació basat en comparacions té cost $\Omega(n \log n)$.

Fita inferior dels algorismes d'ordenació

- com que hi ha $n!$ permutacions de n elements, l'arbre té $\geq n!$ fulles
- tot arbre binari de fondària d té $\leq 2^d$ fulles
- per tant, **la fondària del nostre arbre és almenys de $\log_2 n!$**

El cost de l'algorisme representat per l'arbre és, per tant, $\Omega(\log n!)$. Com que

$$n! \geq n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot \lfloor n/2 \rfloor \geq (n/2)^{(n/2)}$$

tenim que

$$\log_2 n! \geq \log_2 (n/2)^{(n/2)} = \frac{n}{2} \log_2 (n/2) \in \Omega(n \log n).$$

Proposició

Tot algorisme d'ordenació basat en comparacions té cost $\Omega(n \log n)$.