

Introducción a la teoría de grafos

A.Kiselev, Universidad Estatal de San Petersburgo, y Ekaterina Zhukova, Universidad Estatal Electrotécnica de San Petersburgo

1. Introducción

Todos los lectores habrán visto problemas como los siguientes

Problema 1.1. En el país de Genovia hay 2013 ciudades. ¿Es posible conectarlas con carreteras de tal manera que salgan 3 carreteras de cada ciudad?

Problema 1.2. Demostrar que si 2013 personas asisten a una reunión y algunas de ellos estrechan la mano con otras (pero no a sí mismas), entonces al final hay al menos dos personas que han estrechado la mano al mismo número de personas.

Problema 1.3. Demostrar que si 2013 personas asisten a una reunión y todo el mundo estrecha la mano a otros (pero no a sí mismo), entonces al final se han producido $\frac{2013 \cdot 2012}{2}$ apretones de manos.

Todos estos problemas están relacionados con el concepto de grafo. Los objetos de los que trata cada problema (ciudades, personas, etc) se llaman *vértices*. Para hacer la situación más obvia, se pueden dibujar como puntos en el plano. La representación visual del grafo puede ser útil para entender mejor el concepto. Conectaremos vértices que estén relacionados entre sí (ciudades unidas por carreteras, personas relacionadas entre sí por apretones de manos, etc) por líneas llamadas *aristas*. Se verá un dibujo, parecido a un mapa o algo similar.

Esta es una idea intuitiva de la noción de grafo. Vamos a dar ahora la definición estricta para expresar la idea visual.

Definición 1.1. Sea V cualquier conjunto finito de vértices y sea VV el conjunto de todos los subconjuntos de V que tengan 2 elementos. Entonces $E \subset VV$ es el conjunto de las aristas. El par ordenado (V, E) es un grafo.

He aquí algunos ejemplos de grafos. El grafo tal que $E = VV$ se dice que es *completo*. El grafo tal que $E = \emptyset$ se dice *grafo vacío* o *grafo nulo*.

En lo que sigue, para hablar sobre vértices y aristas de grafos usaremos alguna terminología intuitivamente entendible que exprese el enfoque visual. Por ejemplo, la arista y el vértice perteneciente a ella se dirán *incidentes*. Dos vértices a y b tales que $\{a, b\} \in E$ se dirá que están conectados por una arista o que son *adyacentes*.

Necesitaremos la siguiente definición:

Definición 1.2. El número de aristas incidentes con un vértice se llamará *grado del vértice*.

Ahora echemos una mirada a algunas propiedades obvias de los grafos.

Teorema 1.1. El número de vértices de grado impar es un número par.

La suma de los grados de todos los vértices de un grafo es igual al número de aristas multiplicado por 2 (un número efectivamente par), así que debe haber un número par de términos impares en esta suma. ■

Teorema 1.2. En cualquier grafo hay dos vértices del mismo grado.

Consideremos la negación de la proposición: supongamos que todos los vértices del grafo tienen grados distintos. Puesto que puede haber grados desde 0 hasta $n - 1$ (donde n es el número de vértices), pero no puede haber un vértice de grado 0 y otro con grado $n - 1$ en el mismo grafo, esto es una contradicción. ■

Teorema 1.3. *Un grafo completo de n vértices tiene $\frac{n(n-1)}{2}$ aristas.*

En efecto, cada vértice está conectado a otros $n - 1$, pero cada vértice se cuenta así dos veces. ■

Cada uno de los teoremas anteriores da la solución a los problemas de la sección siguiente. Luego se proponen otros problemas de solución obvia.

Problema 1.4. *Demostrar que si hay 2013 ciudades y cada ciudad está conectada a todas las demás, entonces en total hay $\frac{2013 \cdot 2012}{2}$ carreteras entre ellas.*

Problema 1.5. *Demostrar que si hay 2013 ciudades y cada una de ellas está conectada por carretera con alguna de las demás, entonces hay al menos dos ciudades de las que sale el mismo número de carreteras.*

Problema 1.6. *En Genovia hay 2013 ciudades. ¿Es posible conectarlas por carretera de manera salgan 3, 5 ó 7 carreteras de cualquier ciudad?*

Problema 1.7. *¿Existe un grafo con vértices de grados*

4,4,4,3,3,2?

8,6,6,5,3,2,1,1?

7,3,3,3,3,2,2,1?

7,7,5,4,4,2,2,1?

7,6,4,3,4,4,1,2?

7,7,7,5,3,3,2,2?

Definición 1.3. *Un grafo con vértices que pueden ser distribuidos en dos grupos de tal manera que ningún par de vértices del mismo grupo estén conectados por una arista se llama grafo bipartito.*

Si el grafo bipartito es tal que toda arista permitida está en E (toda arista entre vértices de grupos diferentes) se llamará *grafo completo bipartito*.

Teorema 1.4. *En un grafo completo bipartito con n y m vértices en los grupos hay nm aristas.*

En efecto, todo vértice del primer grupo está conectado con m vértices, así que hay nm aristas que salen del primer grupo. Obsérvese que así contamos todas las aristas (una sola vez). ■

Problema 1.8. *Vamos a considerar que algunos vértices del grafo son azules y otros son verdes. Todo vértice azul está conectado a 5 vértices azules y a 10 vértices verdes; y todo vértice verde está conectado a 9 vértices azules y 6 verdes. ¿Cuál es el color dominante en ese grafo?*

Problema 1.9. *En Genovia hay 100 ciudades y cuatro carreteras salen de cada ciudad. ¿Cuántas carreteras hay en total?*

Problema 1.10. *¿Existe una línea quebrada de 21 segmentos tal que interseque a cualquiera de esos segmentos*

- a) una vez?
- b) dos veces?
- c) tres veces?

Problema 1.11. En una clase hay 30 estudiantes. ¿Es posible que 9 de ellos tengan (en la clase) 3 amigos cada uno, 11 tengan 4 amigos cada uno y 10 tengan 5 amigos cada uno?

Problema 1.12. El rey de Genovia tiene 19 vasallos. ¿Es posible que cada vasallo tenga 1, 5 ó 9 vecinos?

Problema 1.13. En el reino de Genovia hay 3 carreteras que salen de cada ciudad. ¿Es posible que haya 100 carreteras en Genovia?

Problema 1.14. Probar que el número de personas de entre la población de Valladolid que han dado apretones de manos a un número impar de otros residentes de Valladolid, es par.

Problema 1.15. Nueve personas juegan un torneo a una sola vuelta. En un cierto momento solo hay dos jugadores que hayan jugado el mismo número de partidas. Probar que, o bien hay un jugador que todavía no ha jugado, o bien un jugador que ya ha jugado todas sus partidas.

Problema 1.16. Cada uno de los 102 estudiantes de un centro escolar conoce al menos a otros 68 estudiantes. Probar que hay cuatro estudiantes que tienen el mismo número de amistades.

Problema 1.17. Una matemática y su marido van a una reunión, en la que hay un total de cuatro parejas. Como es normal, al llegar los participantes se saludan dándose la mano (Nadie se da la mano a sí mismo o a la persona con la que llega). Y no todo el mundo le da la mano a todos los demás. Pero cuando la matemática pregunta a las otras 7 personas presentes a cuántas personas ha dado la mano, recibe 7 respuestas diferentes. ¿A cuántas personas ha dado la mano el marido de la matemática?

Problema 1.18. Juan, a su regreso de Disneylandia, dice que allí ha visto un lago encantado con 7 islas, a cada una de las cuales llegan 1, 3 ó 5 puentes. Es verdad que alguno de esos puentes debe llegar a la orilla del lago?

En nuestra introducción decíamos que la aproximación visual es bastante apropiada para entender estos conceptos. En realidad, nuestra representación visual del grafo, un dibujo, es un objeto que merece la pena estudiar por sí mismo. Diferentes grafos a veces se pueden representar por la misma figura, o diferentes figuras pueden representar el mismo grafo. La siguiente definición pretende dar más luz sobre este asunto.

Definición 1.4. *Dos grafos se llamarán isomorfos si sus vértices pueden ser numerados de tal manera que los vértices con el mismo número están conectados o no, simultáneamente, en ambos grafos.*

Esto significa que a veces uno puede considerar dos grafos como distintos solo si no son isomorfos (y dos grafos isomorfos se consideran el mismo), aunque

se diga otra cosa en la definición de grafo que dimos antes. Los siguientes problemas pretenden simplificar la definición y ayudar a entenderla mejor.

Problema 1.19. Hágase una lista con todos los grafos no isomorfos con 4 vértices.

Problema 1.20. Hallar dos grafos con el mismo número de vértices de cada grado que no sean isomorfos.

Problema 1.21. ¿Es verdad que dos grafos deben ser isomorfos, si

- a) ambos tienen 10 vértices y el grado de cada uno es 9?
- b) ambos tienen 8 vértices y el grado de cada uno es 3?

2. Conectividad

Como se puede observar de la Introducción, la noción de grafo puede representarse en forma visual. Dijimos que dibujar un grafo tiene algunas desventajas relacionadas con un grafo equivalente, pero aún así, varios conceptos y proposiciones sobre grafos en teoría de grafos provienen de la experiencia práctica, deducidos de la intuición y obvios para las figuras.

Uno de esos conceptos es la conectividad. Ante todo, necesitamos algunas definiciones que son intuitivamente claras.

Definición 2.1. *Una sucesión de vértices, en la que cada dos vértices consecutivos están conectados por una arista, se llama ruta.*

Visualmente, esta definición significa que se empiezan a conectar vértices en un cierto orden; se elige siempre el siguiente vértice de modo que sea adyacente al anterior.

Definición 2.2. *Una ruta en la que el primer y el último vértice coinciden, se llamará cerrada.*

Si el vértice a está en la ruta, se dice que la ruta pasa por el vértice a . Si los vértices a y b son consecutivos en la ruta, se dice que la ruta contiene a la arista $\{a, b\}$.

Definición 2.3. *Una ruta que contiene cada arista no más de una vez, se llama camino.*

Es claro que cualquier camino es una ruta por la definición anterior. Pero antes, en nuestro dibujo, se pueden conectar vértices en cualquier orden posible, se permite usar cualquier arista dos veces, o tres, o más. Ahora sólo se puede usar cada arista una vez. Esta es la diferencia entre ruta y camino. Tampoco es obligatorio usar todas las aristas.

Definición 2.4. *Una ruta cerrada que además es un camino, se llama ciclo.*

Si existe una ruta en la que el vértice a es el primero y el vértice b es el último, se dice que los vértices a y b están conectados por la ruta. La misma terminología se usa para caminos. En efecto, si los vértices están conectados por un camino, también lo están por una ruta (es obvio que cualquier camino es también una ruta). Se puede observar que el recíproco es también cierto: si los vértices están conectados por la ruta, también lo están por el camino.

Definición 2.5. *La componente de conectividad de un vértice es un conjunto de vértices para los cuales existe un camino que los conecta con el vértice dado.*

Se debe observar que las componentes de conectividad de dos vértices diferentes o son iguales o son disjuntos. En efecto, si los consideramos conjuntamente obtendremos que deben ser iguales en ese caso. Recordemos siempre la representación visual del grafo que introdujimos antes. Úsese para conseguir una visualización más clara.

Problema 2.1. Se considera el "grafo del alfil": V es el conjunto de las casillas del tablero de ajedrez y E está formado por los pares de tales casillas tales que el alfil puede moverse de una a otra en un movimiento. ¿Cuántas componentes de conectividad hay en este grafo?

Definición 2.6. *Un grafo con una única componente de conectividad se llama un grafo conexo.*

Hay otros grafos relacionados con el ajedrez contruídos de esta manera: "grafo del rey", "grafo de la reina", "grafo del caballo", "grafo de la torre" - y obsérvese que todos son conexos.

Problema 2.2. Considérese el "grafo del caballo" en un tablero $n \times n$. Hallar valores de n para los que el grafo no es conexo.

La definición 2.6 confirma una vez más nuestro punto de vista intuitivo del grafo. Un grafo es conexo si y solamente si existe un camino entre cualesquiera vértices en él. Visualmente significa que se puede trazar una línea quebrada usando aristas como segmentos entre cualquier par de vértices. Así en este aspecto, dos vértices cualesquiera están "conectados".

Hay una condición simple para que el grafo sea conexo, expresada en términos del número de aristas:

Teorema 2.1. *Sea n el número de vértices de un grafo. Si el número de aristas es mayor que $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, entonces el grafo es conexo.*

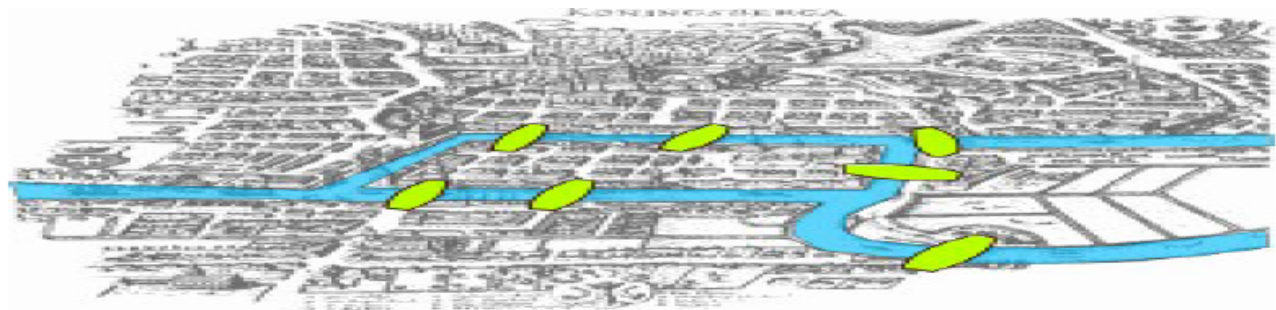
Supongamos que hay al menos dos componentes de conectividad en el grafo dado. Sea k el número de vértices en una de las componentes, y por tanto, $n - k$ vértices en la otra. El máximo número de aristas cuando hay dos componentes de conectividad es cuando ambos son grafos completos. Por lo tanto, el número de aristas en el grafo entero es $\frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$ que no es mayor que $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Esto es una contradicción, así que el grafo es conexo. ■

También se puede observar que si hay menos de $n - 2$ aristas en el grafo, no es conexo. Luego cualquier grafo con n vértices debe tener al menos $n - 1$ aristas para ser conexo. Más adelante estudiaremos algunos grafos interesantes con exactamente $n - 1$ aristas.

Ahora, algunos problemas relativos a la conectividad.

Problema 2.3. Un grafo tiene 100 vértices y el grado de cada vértice es por lo menos 50. Probar que el grafo es conexo.

Problema 2.4. En un grafo conexo, el grado de 4 de los vértices es 3 y el de los demás vértices es 4. Probar que no se puede borrar una arista de tal manera que el grafo se divida en dos componentes de conectividad isomorfos.



Definición 2.7. Una arista tal que al borrarla aumenta el número de componentes de conectividad de un grafo se llama puente.

Problema 2.5. Hay 10 vértices en un grafo y exactamente dos de sus aristas son puentes. ¿Cuál es el máximo número de aristas en este grafo?

Problema 2.6. ¿Es verdad que dos grafos tienen que ser isomorfos si ambos son conexos, sin ciclos y tienen 6 aristas?

Problema 2.7. En el reino de Genovia salen 100 carreteras de cada ciudad y se puede viajar por ellas de cualquier ciudad a otra. Se cierra una carretera por obras de reparación. Probar que se sigue pudiendo viajar de cualquier ciudad a cualquier otra.

3 Caminos y ciclos Eulerianos

En nuestra infancia intentábamos dibujar figuras sin levantar el lápiz del papel. Algunas veces se podía, y otras no. Por ejemplo, no es posible dibujar un sobre cerrado (que se ve como un rectángulo con sus diagonales) sin levantar el lápiz del papel, pero sí se puede dibujar un sobre abierto.

He aquí el conocido problema de los puentes de Königsberg

La ciudad de Königsberg en Prusia Oriental (hoy Kaliningrado, Rusia) está construida en ambas orillas del río Pregel, que forma dos grandes islas conectadas entre sí y con las orillas del río por medio de siete puentes. El problema era encontrar un camino que cruzase cada puente una vez y solamente una. Las islas no se podían alcanzar de ninguna forma que no fuera por los puentes; y cada puente debía cruzarse por completo cada vez: no se podía dar media vuelta al llegar a la mitad del puente. El camino no tenía por qué empezar y terminar en el mismo sitio. Leonhard Euler demostró que el problema no tenía solución.

Veremos a continuación el criterio para saber si tal camino es posible.

Definición 3.1. Un camino que visite cada arista exactamente una vez se llama camino euleriano.

Definición 3.2. Un ciclo que visite cada arista exactamente una vez se llama ciclo euleriano.

El siguiente teorema es el criterio de existencia de un ciclo euleriano en un grafo conexo, que fué introducido por primera vez por Euler cuando intentaba resolver el problema de los puentes de Königsberg.

Teorema 3.1. *Existe un ciclo euleriano en un grafo conexo si y solamente si todos los vértices tienen grado par.*

Supongamos que en el grafo existe un ciclo euleriano. Cada vez que el ciclo visita un vértice, hay dos aristas incidentes con el vértice. Luego el grado de cada vértice ha de ser par.

Recíproco: Supongamos que todos los vértices tienen grado par. Construyamos un ciclo A que visite cada arista solamente una vez (pero que tal vez no visite todas las aristas del grafo). Si quedara alguna arista que el ciclo A no visite, consideremos un vértice c que visite el ciclo A pero que no visite alguna de las aristas incidentes con el vértice c . Es posible construir un ciclo B que empiece y termine en c tal que A no visite ninguna de las aristas de B . Ahora consideremos un ciclo D que sea la unión de A y B (el ciclo B está "incluido" en el ciclo A). Obsérvese que D sigue visitando cada una de sus aristas solamente una vez y es más largo que A . Si siguieran quedando aristas, el proceso se puede repetir, pero no puede ser infinito porque el conjunto de aristas es finito. Al final tenemos un ciclo euleriano. ■

También hay el criterio de existencia de camino euleriano en un grafo conexo que formulamos a continuación.

Teorema 3.2. *Existe un camino euleriano (pero no ciclo) en un grafo conexo si y solamente si todos los vértices, salvo dos, tienen grado par y esos dos tienen grado impar.*

La demostración es bastante similar a la anterior. El camino euleriano empieza y termina en un vértice de grado impar.

Problema 3.1. Probar que un grafo conexo con $2n$ vértices de grado impar puede trazarse sin dibujar ninguna arista más de una vez y de tal manera que el lápiz se levante del papel exactamente $n - 1$ veces.

Problema 3.2. Hay 100 círculos formando una figura conexa en el plano. Demostrar que esta figura se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel o dibujando cualquier parte de cualquier círculo dos veces.

Problema 3.3. En la ciudad de Tiro hay 7 islas. Hay 3 puentes entre 2 islas, 3 puentes entre 4 islas y 4 puentes desde la última. ¿Es posible recorrer la ciudad visitando cada puente una vez y solamente una?

Problema 3.4. Hallar valores de n tales que sea posible dibujar un polígono de n lados con todas sus diagonales sin levantar el lápiz del papel.

Problema 3.5. a) Un trozo de cable mide 120 cm de largo. ¿Se puede usar para formar las aristas de un cubo, que midan 10cm cada una?

b) ¿Cuál es el menor número de cortes que hay que hacer en el cable para poder formar ese cubo?

Problema 3.6. ¿Es posible contruir una red con 5×5 nudos a partir de 5 líneas quebradas de longitud 8?

Problema 3.7. ¿Es posible construir una red de 5×5 nudos a partir de ocho líneas quebradas de longitud 5?

4 Camino y ciclo hamiltoniano

En paralelo al contenido de la sección anterior, vamos a tratar ahora de los caminos y ciclos hamiltonianos, que visitan cada vértice del grafo una vez y solamente una.

Definición 4.1. *En un grafo, un camino que pasa por cada vértice exactamente una vez se llama hamiltoniano.*

Definición 4.2. *En un grafo, un ciclo que pasa por cada vértice (excepto uno, en el que empieza y termina) exactamente una vez, se llama hamiltoniano.*

Definición 4.3. *Un grafo se llama hamiltoniano si existe un ciclo hamiltoniano en él.*

No hay criterios de existencia de caminos y ciclos hamiltonianos, sino sólo condiciones necesarias. Los enunciados correspondientes van a continuación. Su uso práctico es casi inexistente y sus demostraciones son bastante complicadas y no las incluiremos aquí. El lector interesado puede consultar los títulos [3] y [4] de la Bibliografía.

Teorema 4.1. (Dirac, 1952) *Un grafo con n vértices ($n \geq 3$) es hamiltoniano si cada vértice tiene grado $\frac{n}{2}$ o mayor.*

Teorema 4.2. (Ore, 1960) *Un grafo con n vértices ($n \geq 3$) es hamiltoniano si, para cada par de vértices no adyacentes, la suma de sus grados es n o mayor.*

Para formular el siguiente teorema necesitamos el concepto de clausura de un grafo. Dado un grafo G con n vértices, la *clausura de G* , $cl(G)$, se construye de manera unívoca a partir de G , añadiendo repetidamente una nueva arista $\{u, v\}$ que conecte dos vértices no adyacentes u y v con $\text{grado}(u) + \text{grado}(v) \geq n$, hasta que no puedan encontrarse más pares con esta propiedad.

Teorema 4.3. (Bondy-Chvátal, 1972) *Un grafo es hamiltoniano si y solamente si su clausura es hamiltoniana.*

Problema 4.1. Dado el tablero 4×4 sin las casillas de las 4 esquinas, ¿es posible que el caballo de ajedrez visite cada casilla exactamente una vez y vuelva?

Problema 4.2. ¿Existe un ciclo hamiltoniano en el grafo del caballo de ajedrez en el tablero 5×5 ?

Problema 4.3. ¿Existe un ciclo hamiltoniano en el grafo de la torre, del alfil, de la reina y del caballo en el tablero de ajedrez tradicional?

Problema 4.4. Se considera el siguiente grafo: sus vértices son los vértices de un cubo y los centros de las caras; sus aristas son las diagonales (o sea, las aristas del cubo no son aristas en este grafo). ¿Existe un ciclo hamiltoniano en este grafo?

5 Árboles

Definición 5.1. *Un grafo conexo sin ciclos se llama un árbol.*

Definición 5.2. *Un grafo conexo tal que todas sus aristas son puentes es un árbol.*

Definición 5.3. *Un grafo en el que existe exactamente un camino entre cada par de vértices es un árbol.*

Como hemos dado tres definiciones diferentes del mismo objeto, debemos probar que todas definen el mismo objeto, pues si no, no las podríamos utilizar:

Teorema 5.1. *Las tres definiciones de árbol son equivalentes.*

Consideremos un árbol dado por la primera definición y probemos que cumple la tercera. Supongamos que el grafo G no tiene ciclos. Entonces en efecto todos los vértices están conectados por un camino - existe al menos uno (G es conexo) y si existieran al menos dos diferentes habría un ciclo.

Ahora tomemos un árbol según la tercera definición y probemos que cumple la segunda. El grafo G es conexo por definición. Supongamos que G es tal que existe exactamente un camino entre cada par de vértices. Tomemos la arista $\{a, b\}$. Observemos que si no es un puente, existiría un camino diferente entre los vértices a y b , ya que G sin $\{a, b\}$ sigue siendo conexo. Luego toda arista es un puente.

Finalmente, tomemos un árbol según la segunda definición y probemos que cumple la primera. Supongamos que cada arista de G es un puente. Entonces efectivamente no hay ciclos en G , porque si C fuera un ciclo entonces ninguna arista de C sería un puente. ■

Ya que hemos definido bien la noción de árbol, usaremos en lo que sigue cualquiera de las 3 definiciones a nuestra conveniencia.

Veamos algunas propiedades importantes de los árboles.

Teorema 5.2. *En cualquier árbol existe un vértice de grado 1.*

Consideremos el camino P más largo del árbol G . Ese camino existe, porque como entre dos vértices cualesquiera, existe siempre un camino, no puede haber más de $\frac{n(n-1)}{2}$ caminos en G , que es finito. Si hubiera varios de la máxima longitud, elegimos uno cualquiera de ellos. Marcamos el último vértice, b , en ese camino. Si el grado de b fuera mayor que 1, podríamos prolongar el camino usando otra arista incidente con b . Esto contradice la hipótesis sobre la maximalidad de P . ■

De hecho, en un árbol hay al menos dos vértices de grado 1. Se puede probar fácilmente esto a partir de la demostración del teorema anterior.

Observemos que hay un grafo conexo "mínimo" - en el sentido de que tiene el menor número de aristas para el número dado de vértices. Antes vimos que cualquier grafo con n vértices y menos de $n - 1$ aristas no es conexo.

Teorema 5.3. *En cualquier árbol con n vértices hay $n - 1$ aristas.*

Sea m el número de aristas en el árbol G de n vértices. Por el teorema anterior, existe un vértice a de grado 1 en G . Consideremos G_1 , que va a ser G

sin el vértice a y sin la única arista incidente con a . Obviamente, en G_1 hay $n-1$ vértices y $m-1$ aristas; sigue siendo conexo y no tiene ciclos. Así construimos una cadena de árboles en la que cada G_k es G_{k-1} sin el vértice de grado 1 y sin la única arista incidente en él. El último, G_{n-1} , tiene sólo dos vértices y $m-(n-2)$ aristas. Pero el único árbol (el único grafo conexo) con dos vértices tiene solamente una arista. Por tanto $m-(n-2)=1$, es decir, $m=n-1$. ■

Así, es obvio que en cualquier grafo conexo con n vértices debe haber al menos $n-1$ arista, como dijimos antes sin demostración.

Problema 5.1. En un país encantado hay 239 ciudades y dos ciudades cualesquiera están unidas por una carretera y solamente una. ¿Cuántas carreteras hay allí?

Problema 5.2. El rey Guidon tiene 3 hijos. Tiene un total de 93 descendientes; algunos de ellos tienen 2 hijos y otros ni se han casado ni tienen hijos. ¿cuántos de sus descendientes no se han casado?

Problema 5.3. Tenemos 5 cajas. Dentro de algunas de ellas hay otras 5 cajas (de menor tamaño), y así sucesivamente. En total hay 12 cajas no vacías. ¿Cuántas cajas hay en total?

Problema 5.4. La diabólica reina del ajedrez edifica muros entre todos los escaques del tablero. ¿Cuál es el menor número de muros que hay que derribar para que la torre pueda visitar todos los escaques?

Problema 5.5. Una red de volleyball tiene un retículo rectangular de dimensiones 50×600 . El gamberro Xavi corta sus hilos unidad. ¿Cuál es el máximo número de hilos unidad que puede cortar antes de que la red se rompa en dos o más trozos?

Esta última proposición es bastante fácil de formular de manera formal y tiene su importancia en aplicaciones de la teoría de grafos, así que merece la pena discutirla.

Teorema 5.4. *Para todo grafo $G = (V, E)$, existe un árbol $T = (V, E^*)$ tal que $E^* \subset E$. Además, si n es el número de vértices de G y N es el número de aristas, entonces hay que borrar exactamente $N - n + 1$ aristas de E para obtener E^* .*

Problema 5.6. En el reino de Genovia hay 30 ciudades. Cada una de ellas está unida a cualquier otra por una única carretera. ¿Cuál es el máximo número de carreteras que se pueden cerrar de manera que siga pudiéndose ir de cualquier ciudad a cualquier otra?

Problema 5.7. Probar que en cualquier grafo conexo es posible borrar un vértice, junto con todas las aristas que salen de él, de manera que el grafo así obtenido siga siendo conexo.

Problema 5.8. El mapa del metro de Tiro es un grafo conexo. Demostrar que el alcalde de Tiro puede cerrar una estación, y todas las líneas de metro que llegan a ella desde estaciones contiguas de forma que lo que quede siga siendo conexo.

6 Grafos binarios coloreados

Problema 6.1. En el valle del río Amazonas hay 5 poblados. Dos cualesquiera de ellos están conectados por senderos selváticos o por el río, pero no por ambas cosas al mismo tiempo. Además, de entre tres poblados cualesquiera, existe un par conectados por el río y un par conectados por sendero. Probar que es posible completar un viaje empezando y terminando en el mismo poblado, visitando los 5 poblados (cada uno de ellos solamente una vez) y usando solamente senderos o la ruta fluvial.

Problema 6.2. En el valle del río Mississippi hay 6 poblados. Dos cualesquiera de ellos están conectados por senderos o por el río, pero no por los dos medios simultáneamente. Probar que los 6 poblados no se pueden conectar de tal manera que entre tres cualesquiera de ellos existan dos conectados por el río y dos conectados por senderos.

Resolveremos primero el segundo problema. Llamemos A a uno de los poblados. Existen al menos tres rutas fluviales o senderos desde él (porque si hubiera menos de dos senderos o menos de 2 rutas fluviales, entonces A no se podría conectar con cualquier otro poblado). Tratemos el caso de al menos 3 senderos. Razonemos por contradicción: los poblados se conectarían como se indica en el enunciado. Entonces, cualquier par de tres poblados conectados con A por senderos deberían estar conectados por rutas fluviales, lo cual es una contradicción.

El caso de al menos 3 rutas fluviales se analiza de manera análoga. ■

Ahora vamos con el primer problema. De la solución del segundo se deduce que debe haber exactamente dos senderos y exactamente dos rutas fluviales desde cualquier poblado. Entonces se puede fácilmente deducir que es posible completar el viaje en la forma que se indica. ■

Por último, definamos la noción en cuestión: el grafo binario coloreado.

Definición 6.1. *Un grafo completo, cada una de cuyas aristas es de uno de dos colores, se llama grafo binario coloreado.*

Problema 6.3. Supongamos que seis personas son citadas, aleatoriamente, para formar parte de un Jurado. Probar que o bien tres de ellas se conocen mutuamente, o bien tres de ellas no se conocen mutuamente.

Problema 6.4. Supongamos que nueve personas son citadas, aleatoriamente, para formar parte de un Jurado. Se sabe que ninguna terna de ellas está formada por personas que no se conocen entre sí. Demostrar que cuatro de ellas se conocen mutuamente.

Problema 6.5. Supongamos que 18 personas han sido citadas, aleatoriamente, para formar parte de un Jurado. Probar que, o bien cuatro de ellas se conocen mutuamente o bien cuatro de ellas no se conocen mutuamente.

Problema 6.6. En el reino de Genovia las ciudades están conectadas por carretera o por tren. El ministro de Transportes introduce líneas de autobús entre aquellos pares de ciudades que no están conectadas por tren. Probar que

es posible llegar a cualquier ciudad desde cualquier otra usando solamente un tipo de transporte.

Soluciones de los problemas

1.1 a 1.6 están resueltos en el texto.

1.7. El primer grafo es fácil de dibujar. Sea $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ y

$$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, f\}, \{e, f\}\}.$$

El segundo grafo no existe porque el máximo grado en el grafo con 8 vértices es 7 y no puede ser 8.

El tercer grafo existe: $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ y

$$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{a, f\}, \{a, g\}, \{a, h\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{f, g\}\}.$$

El cuarto grafo no existe pues dos vértices deben estar conectados con los demás, con lo que los grados de estos demás vértices deben ser al menos 2, así que no puede haber un vértice de grado 1.

El sexto grafo no existe por la misma razón: tres vértices han de estar conectados con cualesquiera otros, luego los grados de estos deben ser al menos 3 y no puede haber un vértice de grado 2.

El quinto grafo no existe porque hay tres vértices de grado impar, lo que contradice el teorema 1.3.

1.8. Olvidémonos de las aristas que conectan vértices del mismo color. Así tenemos un grafo bipartito. Contemos sus aristas. Sea g el número de vértices verdes y b el número de vértices azules. Por una parte, hay $9g$ aristas (todo vértice verde está conectado a 9 azules); por otro lado, debe ser igual a $10b$ (todo vértice azul está unido a 10 verdes). Como $9g = 10b$, debe ser b menor que g , luego predomina el color verde.

1.9. Si hay 100 ciudades y 4 carreteras llegando a cada una, hay 400 finales de carreteras: luego hay 200 carreteras.

1.10. a) y c). Consideremos el grafo cuyos vértices son los segmentos de la línea quebrada y las aristas conectan aquellos pares que se intersecan mutuamente. Tenemos 21 vértices de grado 1 (en a)) o 3 (en c)). Eso contradice el teorema 1.1.

b) Consideremos la siguiente situación: hay 21 puntos en el círculo, numerados en el sentido horario. Conectamos el punto N°1 con el N°3, el N°2 con el N°4, ... , N° 19 con el N° 21, el N° 20 con el N° 1, el N° 21 con el N° 2. Se observa fácilmente que esta es la quebrada buscada.

1.11. Si fuera posible, entonces también sería posible dibujar un grafo con 30 vértices (los estudiantes), nueve de los cuales tienen grado 3, once tienen grado 4 y diez tienen grado 5 (conectando "amistosamente" los vértices con aristas). Sin embargo, tal grafo tendría 19 vértices con grados impares, lo que contradice el teorema 1.3.

1.12. Consideremos un grafo en el que los vasallos son los vértices y los que sean vecinos se conectan por una arista. Ese grafo tendría 19 vértices de grado impar, contradiciendo el teorema 1.3.

1.13. Sea n el número de ciudades en Genovia. Entonces hay $\frac{3n}{2}$ carreteras. Si fuera igual a 100, resultaría que 200 sería divisible por 3, lo cual es falso. Por tanto no puede haber 100 carreteras en Genovia.

1.14. Es la situación del teorema 1.1 para un grafo en el que V es el conjunto de los habitantes de Valladolid y E es el conjunto de pares de elementos de V que han estrechado sus manos,

1.15. Si sólo hay 2 jugadores que han jugado el mismo número de partidas, habría exactamente 8 números diferentes de partidas jugadas por los jugadores. Pero si nadie ha jugado 0 u 8 partidas, no puede haber más de 7 números diferentes.

1.16. Todo estudiante conoce a otros 68, 69,...,101; en total hay 33 oportunidades. Si no hay más de 3 estudiantes que tengan el mismo número de conocidos, entonces no hay más de 99 estudiantes. Por lo tanto, debe haber al menos 4 con el mismo número de conocidos.

1.17. Como cualesquiera 7 personas dan diferentes respuestas, esas respuestas varían de 0 a 6, porque nadie puede estrechar menos de 0 ó más de 6 manos. Si alguna persona estrecha 6 manos, entonces la única persona que estrecha 0 manos puede ser su cónyuge. Entonces, si alguna persona estrecha 5 manos, la única persona que estrecha 1 mano ha de ser su cónyuge. Lo mismo para 4 y 2. Entonces, el único número disponible para el marido de la matemática es 3.

1.18. Si ningún puente conduce a la costa, entonces existiría un grafo (donde V es el conjunto de islas y E el conjunto de puentes que las conectan) con 7 vértices de grado impar, lo que contradice el teorema 1.1.

1.19. He aquí los 11 grafos existentes

1.20. Ver la solución del siguiente problema, apartado b).

1.21. a) Tales grafos son completos, luego en efecto todos son isomórficos.

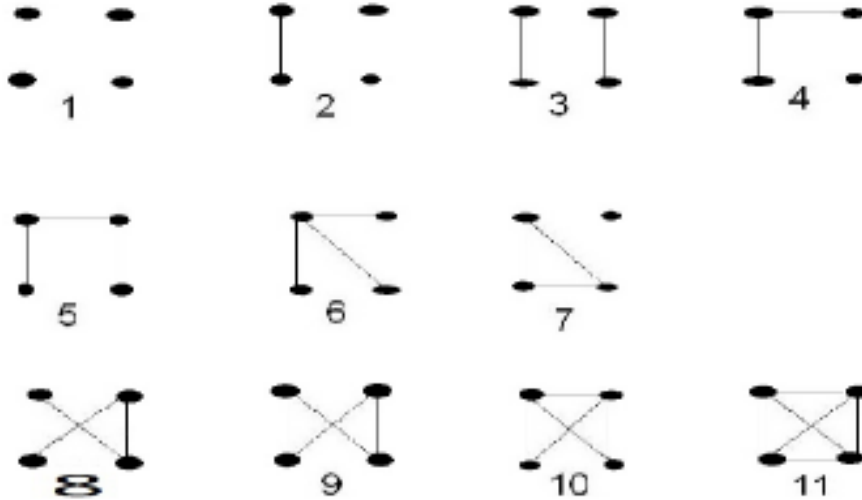
b) Consideremos los siguientes grafos de 8 vértices. Numeramos los vértices de 1 a 8. Las aristas de uno de los grafos conectan el vértice 1 con el 2, el 2 con el 3, ... , el 7 con el 8 y el 8 con el 1, el 1 con el 5, el 2 con el 6, el 3 con el 7 y el 4 con el 8.

El otro grafo consiste en dos grafos completos de vértices 1,2,3,4 y 5,6,7,8.

Ambos grafos no son isomorfos.

2.1. Es bastante obvio que ningún alfil cambia el color de los escaques; el alfil visita escaques del mismo color. Por lo tanto, habrá dos componentes de conectividad: "blanca" y "negra".

2.2. Se comprueba sin dificultad que $n = 2$ y $n = 3$ da grafos no conexos (si $n = 2$ no hay aristas en el grafo de 4 vértices, si $n = 3$ no hay ningún cuadrado conectado con la casilla central), $n = 1$ y $n = 4$ dan grafos conexos. Entonces es claro ampliar el tablero $(n - 1) \times (n - 1)$ hacia la derecha y hacia abajo (obteniendo un tablero $n \times n$) con cada nuevo escaque añadido conectado a alguno de los anteriores.



2.3. Razonemos por contradicción: supongamos que hay al menos dos componentes de conectividad en el grafo. Supongamos que los vértices a y b están en componentes diferentes. No pueden ser adyacentes a los mismos vértices, así que debe haber al menos 51 vértices más en la primera componente y otros tantos en la segunda. Entonces hay al menos 102 vértices en el grafo, lo que contradice el que en el grafo haya 100.

2.4. Razonemos por contradicción: Debe haber un número par de vértices del mismo grado. Entonces habrá 0 ó 2 vértices de grado 2. En el primer caso hay 2 vértices de grado 3 y en el segundo 6. Luego en ambas componentes isomorfas hay 1 (ó 3) vértices de grado 3; cualquier otro vértice tiene grado 2 ó 4, lo que contradice el Teorema 1.1.

2.5. Excluyamos ambos puentes del grafo. Entonces hay 3 componentes de conectividad. El máximo número de aristas estará en el grafo completo de 8 vértices y 2 vértices solitarios. Esto da 28 aristas. Por tanto en total hay 30 aristas en el grafo.

2.6. Consideremos los dos grafos siguientes: uno consta de 7 vértices conectados en fila; el otro, 7 vértices de tal forma que uno de ellos esté conectado a todos los demás. Obviamente esos dos grafos no son isomorfos.

2.7. Se requiere demostrar que ninguna arista en tal grafo es un puente, así que su supresión no afecta a la conectividad. Razonemos por contradicción: sea $\{u, v\}$ el puente; quitándolo descompone el grafo en dos componentes de conectividad. Pero el número de finales de arista (finales de carretera) en ambas componentes es impar, lo cual es imposible.

3.1. La demostración es similar a la del teorema 3.1.

3.2. Consideremos un grafo cuyos vértices son puntos de intersección de circunferencias y las aristas, los arcos de circunferencia entre esos puntos. El

grado de cada vértice es par (cada circunferencia da dos aristas a cada punto de intersección). Entonces existe un ciclo euleriano.

3.3. Hay 4 vértices de grado impar, lo cual contradice los teoremas 3.1 y 3.2.

3.4. Es fácil observar que el grado de cada vértice es $n - 1$, y debe ser par por el teorema 3.1. Luego es posible dibujar tal polígono, si y sólo si n es impar.

3.5. a) La longitud total del cable es igual a la suma de las longitudes de las aristas del cubo. Luego necesitamos que exista un ciclo euleriano, pero no puede ser que el grado de cada vértice sea 3.

b) Como hemos observado, tenemos 8 vértices de grado 3. Luego por el problema 3.1, necesitamos 3 cortes. Es decir, podemos cortar tres trozos de 10 cm del cable.

3.6. Es claro que hay 12 nudos (los vértices del grafo) de grado 3, así que debe haber, por lo menos, 6 líneas quebradas.

3.7. Es posible y no es difícil de dibujar.

4.1. Consideremos el tablero como el tablero de ajedrez standard usando las letras a,b,c,d y los números 1,2,3,4. Las esquinas del tablero (que no pertenecen al grafo) son a1,a4, d1, d4. Entonces el ciclo siguiente

$$d3 - b2 - c4 - d2 - b3 - c1 - a2 - c3 - b1 - a3 - c2 - b4 - d3$$

es un ciclo hamiltoniano.

4.2. No, ese ciclo no es hamiltoniano. Como el movimiento del caballo es entre casillas de diferente color, todo ciclo debe tener longitud par. Pero el tablero tiene 25 casillas, así que todo posible ciclo hamiltoniano debería tener longitud impar de 25. Esto es una contradicción.

4.3. El grafo del alfil, como sabemos por el problema 2.1, no es conexo, así que no puede ser ni camino ni ciclo hamiltoniano (aunque haya ciclos hamiltonianos en las dos componentes de conectividad). Consideremos el tablero etiquetado por las letras a,b,c,d,e,f,g,h y por los números 1,2,3,4,5,6,7,8. Un ciclo hamiltoniano en el grafo de la torre o en el de la reina no son difíciles de construir (de hecho, el mismo grafo de la torre sirve para el de la reina). El siguiente ciclo es hamiltoniano para ambos:

$$a1 - a2 \dots a8 - b8 \dots b2 - c2 \dots c8 - d8 \dots d2 - e2 \dots e8 - f8 \dots f2 - g2 \dots g8 - h8 \dots h1 - g1 \dots b1 - a1.$$

El siguiente ciclo es hamiltoniano para el grafo del caballo:

$$\begin{aligned} & a1 - c2 - a3 - b5 - a7 - c8 - d6 - c4 - e5 - f7 - h8 - g6 - h4 - g2 - e1 - d3 - \\ & c1 - e2 - g1 - f3 - d2 - b1 - c3 - a2 - b4 - a6 - b8 - d7 - c5 - e4 - f6 - e8 - \\ & g7 - h5 - g3 - h1 - f2 - h3 - g5 - h7 - f8 - e6 - f4 - d5 - c7 - a8 - b6 - a4 - \\ & b2 - d1 - e3 - f1 - h2 - g4 - h6 - g8 - e7 - f5 - d4 - c6 - d8 - b7 - a5 - b3 - a1. \end{aligned}$$

4.4. Obsérvese que toda arista conecta vértices de tipo diferente - "vértice-vértice" con "vértice-centro". Luego si existiera un camino o ciclo hamiltoniano entonces el número de "vértices-vértices" y el número de "vértices-centros"

debería ser igual o diferir en no más de 1. Pero el grafo tiene 8 vértice-vértices y 6 vértices-centros.

5.1. El mapa de carreteras es, por definición, un árbol (solamente un camino conecta cada par de ciudades-vértices.. Por lo tanto hay 238 aristas-carreteras.

5.2. El árbol genealógico de Guidon es un árbol (en el sentido de los grafos)-es conexo y no hay ciclos en él. Contemos el número de sus aristas. Por un lado son 93 (el número de vértices menos 1). Por otro lado es igual al doble de los que tienen 2 hijos, más 3. Si x es el número de descendientes solteros, entonces el número de los que tienen 2 hijos es $93 - x$ y resulta entonces $2(93 - x) + 3 = 93$, de donde $x = 45$.

5.3. Construyamos un grafo cuyos vértices son las cajas, y sus aristas conectan dos cajas tales que una está dentro de otra. Es útil introducir una caja imaginaria en la que están las 5 cajas. Entonces, el grafo así construido es un árbol. Así, podemos contar el número de aristas en este grafo. Es igual a $13 \times 5 = 65$. El número de cajas reales es igual al número de aristas (toda caja, salvo la imaginaria, está dentro de alguna otra). Por lo tanto hay 65 cajas.

5.4. Construyamos el grafo de la torre. Al principio está vacío, porque todo par de escaques está separado por el muro. El menor número de muros derribados es el mismo que el de aristas en el árbol de 64 vértices, que es 63.

5.5. Consideremos esta red de volleyball como un grafo. Sus nudos son los vértices, y las aristas son las cuerdas. Nuestro objetivo es borrar tantas aristas como sea posible, manteniendo el grafo conexo. borramos las aristas de una en una, tantas como se pueda. Obsérvese que si el grafo tiene un ciclo, entonces podemos borrar cualquiera de las aristas de este ciclo. Pero un grafo conexo sin ciclos es un árbol - es decir, cuando hayamos obtenido un árbol, ¿no podemos borrar ninguna más de las aristas del grafo!. Calculemos el número de aristas en nuestro grafo en este momento final. El número de vértices es el mismo que al principio - es decir, es igual a $51 \times 601 = 30651$. Por otro lado, un árbol con tantos vértices debe tener $30651 - 1 = 30650$ aristas. Al principio había $601 \times 50 + 600 \times 51 = 60650$ aristas. Luego no se pueden borrar más de 30000 aristas, y es fácil ver como se puede conseguir esto.

5.6. Tenemos un grafo completo y la situación tras cerrar tantas carreteras como se pueda la expresamos en términos de árboles. Por el teorema 5.4 sabemos que es posible cerrar $\frac{30 \cdot 29}{2} - 30 + 1 = 406$ carreteras.

5.7. En cualquier grafo conexo hay un sub-árbol (Teorema 5.4). En el árbol existe un vértice de grado 1 (Teorema 5.2). Podemos quitar este vértice, y lo que queda sigue siendo un grafo conexo. Después restauramos otras aristas (excepto las que llevan al vértice borrado), y la conectividad se mantiene.

5.8. Es la reformulación de 5.7 en términos "sociales".

6.1 a 6.2 se discutieron en la sección correspondiente.

6.3. En lenguaje formal, tenemos un grafo binario coloreado donde el color 1 es "se conocen" y el color 2 es "no se conocen"; y hay que probar la existencia de un triángulo monocromático. Consideremos el vértice a ; al menos tiene tres aristas del mismo color (digamos color 1) incidentes con él. Sean b, c, d los tres vértices conectados a a por esas aristas. Las aristas $\{b, c\}$, $\{c, d\}$ y $\{b, d\}$ no pueden tener el mismo color (ya que entonces tendríamos un triángulo de color

1). Pero así hemos obtenido un triángulo de color 2.

6.4. En lenguaje formal, tenemos un grafo binario coloreado donde el color 1 es "se conocen" y el color 2 es "no se conocen"; no hay un triángulo de color 2, y hemos de probar la existencia de un rectángulo de color 1 con diagonales. Consideremos el vértice a .

Si existen al menos 4 aristas de color 2 (conectando a con los vértices b, c, d, e), entonces toda arista que conecte los vértices b, c, d, e debe ser de color 1 y tenemos el problema resuelto.

Si existen al menos 6 aristas de color 1 (conectando a con otros seis vértices), entonces consideramos el grafo con esos vértices. Hay un triángulo de color 1 (por el problema 6.3). Incluyendo a a se obtiene un rectángulo con diagonales.

El único caso que queda es el siguiente: no hay más de 3 aristas de color 2 y no más de 5 de color 1. Como el grado es igual a 8, hay exactamente 3 aristas de color 2 y exactamente 5 aristas de color 1. Si esto fuera verdad para cualquier vértice, consideremos el grafo con aristas únicamente de color 1. Es un grafo con 9 vértices, todos de grado 5, lo que contradice el teorema 1.1. Por lo tanto, el primero o el segundo caso deben ser ciertos para algún vértice.

6.5. En lenguaje formal, tenemos un grafo binario coloreado donde el color 1 es "se conocen" y el color 2 es "no se conocen"; y hay que probar la existencia de un rectángulo con diagonales, del mismo color. Consideremos el vértice a . Hay al menos 9 aristas de un mismo color.

Por el problema 6.4 obtenemos que en el grafo construido con esos 9 vértices, o bien existe un triángulo monocromático, o bien existe un rectángulo con diagonales del otro color. Incluyendo a el triángulo nos da un rectángulo con diagonales.

6.6. De nuevo tenemos un grafo binario coloreado. El color 1 son las conexiones por tren y el color 2 las conexiones por autobús. Supongamos el grafo de color 1. Si no es conexo, todos los vértices con diferentes componentes de conectividad deben ser conectados con diferente color. Así, cada par de vértices está conectado; bien por una arista del segundo color, o un camino de longitud 2 cruza cualquier vértice de diferente componente de conectividad.

Bibliografía

1. D. Fomin, S. Genkin, I. Itenberg. *Mathematical Circles (Russian Experience)*. AMS, 1996.
2. O. Ore. *Graphs and their uses*. Random House, New York, 1963.
3. O. Ore. *Theory of Graphs*. AMS, Providence, Rhode Island, 1962.
4. R.J.Wilson. *Introduction to Graph Theory*. Oliver and Boyd, Edinburgh, 1972.