UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA – UFSC- CTC
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
PROJETO E ANÁLISE DE ALGORITMO
Prof. Alexandre Gonçalves Silva
Aluno: Osmar de Oliveira Braz Junior

Questão 3

3. Prove as seguintes séries por indução matemática:

$(a)\ \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

1ª Forma de Resolução:

Base de Indução: Para n=1, em $\sum_{i=1}^{1} i = \frac{n(n+1)}{2}$. o resultado esperado é 1

$T(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

$T(1) = \sum_{i=1}^{1} i = \frac{1(1+1)}{2}$ //Substituir n por 1 no somatório e na equação

$T(1) = 1 = \frac{1(2)}{2}$

$T(1) = 1 = 1$

O passo base é verdadeiro.
Logo para todo n = k com k >=n_0

$T(k) = \sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$

Hipótese de indução: Por hipótese de indução, assumimos que a fórmula está correta para (k + 1), isto é $T(k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$. Então, temos que verificar se $T(k) = \frac{k(k+1)}{2}$, sabendo-se que $T(k) = \frac{k(k+1)}{2}$ e partindo da hipótese de indução que $T(k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$.

Passo de Indução é:

Supondo que a série aritmética $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ é válida para n, e que n = k seja verdadeiro, logo n = k +1 também será:

$T(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ => substituir todos os n por k + 1 temos

$T(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$

Portanto trocando:

$T(k) = \sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$

e

$T(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$

Em:

$\boldsymbol{T(k) + (k+1) = T(k+1)}$

ou

$\sum_{i=1}^{k} i + (k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} i$

Temos:
=>$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$
=>$\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$
=>$\frac{(k^2+k)+(2k+2)}{2}=\frac{(k^2+2k+k+2)}{2}$
=>$\frac{(k^2+k+2k+2)}{2}=\frac{(k^2+2k+k+2)}{2}$
=>$\frac{(k^2+3k+2)}{2}=\frac{(k^2+3k+2)}{2}$
=>Verdadeiro

2ª Forma de Resolução:

Base de Indução: Para n=1, em $\sum_{i=1}^{1} i=\frac{n(n+1)}{2}$. o resultado esperado é 1

$T(n)=\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$

$T(1)=\sum_{i=1}^{1} i=\frac{1(1+1)}{2}$

$T(1)=1=\frac{1(2)}{2}$

$T(1)=1=1$

O passo base é verdadeiro.

Hipótese de indução: Por hipótese de indução, assumimos que a fórmula está correta para (n + 1), isto é $T(n+1)=\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$. Então, temos que verificar se $T(n)=\frac{n(n+1)}{2}$, sabendo-se que $T(n)=\frac{n(n+1)}{2}$ e partindo da hipótese de indução que $T(n+1)=\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$.

Uma regra de associação é representada como uma implicação na forma LHS => RHS, em que LHS e RHS são respectivamente o antecedente (*Left Hand Side*) e o consequente (*Right Hand Side*) da regra.

LHS → $\sum_{i=1}^{n} i$ => somar o próximo passo i que é igual a (n+1) ao somatório
LHS → $\sum_{i=1}^{n} i=\sum_{i=1}^{n} i+(n+1)$ => substituir o somatório pela equação original
LHS → $\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$ =>Reduzir a equação
LHS → $\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$
LHS → $\sum_{i=1}^{n} i=\frac{(n^2+n)+(2n+2)}{2}$
LHS → $\sum_{i=1}^{n} i=\frac{(n^2+3n+2)}{2}$

RHS→ $\frac{n(n+1)}{2}$
RHS (obtido pela substituição de n por n + 1 na definição da série)
$RHS \rightarrow T(n)=\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$ =>fazendo a troca de n por n +1
$RHS \rightarrow T(n+1)=\sum_{i=1}^{n+1} i=\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$
$RHS \rightarrow T(n+1)=\sum_{i=1}^{n+1} i=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$
$RHS \rightarrow T(n+1)=\sum_{i=1}^{n+1} i=\frac{(n^2+2n+n+2)}{2}$

$RHS \rightarrow T(n+1) = \sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n^2+3n+2)}{2}$

Verificamos se LHS = RHS ou $\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n+1} i$
=>$LHS = RHS$
=>$\frac{(n^2+3n+2)}{2} = \frac{(n^2+3n+2)}{2}$
Como LHS= RHS, então hipótese é verdadeira.

(b) $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1ª Forma de Resolução:

Base de Indução: Para n=1, $\sum_{i=0}^{1} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, o resultado esperado é 1

$T(n) = \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$T(0) = \sum_{i=0}^{1} i^2 = \frac{1(1+1)*(2*1+1)}{6}$

$T(0) = 1^2 = \frac{1(2)*(2+1)}{6}$

$T(0) = 1 = \frac{2*3}{6}$

$T(0) = 1 = \frac{6}{6}$

$T(0) = 1 = 1$

O passo base é verdadeiro.

Logo para todo n = k com k >=n_0

$T(k) = \sum_{i=0}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

Hipótese de indução: Por hipótese de indução, assumimos que a fórmula está correta para (k + 1), isto é $T(k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}$. Então, temos que verificar se $T(k) = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$, sabendo-se que $T(k) = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ e partindo da hipótese de indução que $T(k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}$.

Passo de Indução é:

Supondo a série aritmética $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ é válida para n, e n = k seja verdadeiro, logo n = k +1 também será:

$T(n) = \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ => substituir n por k + 1

$T(k+1) = \sum_{i=0}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}$

Portanto trocando:

$T(k) = \sum_{i=0}^{k} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

e

$T(k+1) = \sum_{i=0}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}$

Em:

$\boldsymbol{T(k)} + \boldsymbol{(k+1)^2} = \boldsymbol{T(k+1)}$

ou

$\sum_{i=0}^{k} i^2 + (k+1)^2 = \sum_{i=0}^{k+1} i^2$

Temos:

=> $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}$

=> $\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+2)+1)}{6}$ => MMC de 6 na 1ª, soma de 1 e produto por 2 na 2a

=> $\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k^2+2k+1)}{6} = \frac{(k^2+2k+k+2)(2k+3)}{6}$ => produto por 6 na 1ª, produto na segunda

$=> \frac{(k^2+k)(2k+1)+(6k^2+12k+6)}{6} = \frac{(k^2+3k+2)(2k+3)}{6}$
$=> (k^2+k)(2k+1)+(6k^2+12k+6) = (k^2+3k+2)(2k+3)$
$=> (2k^3+k^2+2k^2+k)+(6k^2+12k+6) = (2k^3+6k^2+4k+3k^2+9k+6)$
$=> (2k^3+9k^2+13k+6) = (2k^3+9k^2+13k+6)$
=> Verdadeiro

2ª Forma de Resolução:

Base de Indução: Para n=1, $\sum_{i=0}^{1} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, o resultado esperado é 1

$T(n) = \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$T(0) = \sum_{i=0}^{1} i^2 = \frac{1(1+1)*(2*1+1)}{6}$

$T(0) = 1^2 = \frac{1(2)*(2+1)}{6}$

$T(0) = 1 = \frac{2*3}{6}$

$T(0) = 1 = \frac{6}{6}$

$T(0) = 1 = 1$

O passo base é verdadeiro.

Hipótese de indução: Por hipótese de indução, assumimos que a fórmula está correta para (n + 1), isto é $T(n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$. Então, temos que verificar se $T(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, sabendo-se que $T(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ e partindo da hipótese de indução que $T(n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$.

Uma regra de associação é representada como uma implicação na forma LHS => RHS, em que LHS e RHS são respectivamente o antecedente (*Left Hand Side*) e o consequente (*Right Hand Side*) da regra.

LHS $\rightarrow \sum_{i=0}^{n} i^2$ =>somar o próximo passo i^2 que é igual (n+1)^2

LHS $\rightarrow \sum_{i=0}^{n} i^2 = \sum_{i=0}^{n} i^2 + (n+1)^2$ =>substituir o somatório pelo equação original

LHS $\rightarrow \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

LHS $\rightarrow \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$ => MMC de 6

LHS $\rightarrow \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6((n+1)(n+1))}{6}$ => retirada expoente

LHS $\rightarrow \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n^2+2n+1)}{6}$ => multiplicação n+1

LHS $\rightarrow \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{(n^2+n)(2n+1)+(6n^2+12n+6)}{6}$ =>multiplicação n e por 6

LHS $\rightarrow \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{(n^2+n)(2n+1)+(6n^2+12n+6)}{6}$

$RHS \rightarrow \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

RHS (obtido pela substituição de n por n + 1 na definição da série)

$RHS \rightarrow T(n) = \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ =>fazendo a troca de n por n +1

$RHS \rightarrow T(n+1) = \sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$ =>multiplicação por 2, e soma dos 1

$RHS \rightarrow T(n+1) = \sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+2)+1)}{6}$ =>multiplicação de n+1 e soma de 1

$RHS \rightarrow T(n+1) = \sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \frac{(n^2+2n+n+2)(2n+3)}{6}$ => soma de 2n e n

$RHS \rightarrow T(n+1) = \sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \frac{(n^2+3n+2)(2n+3)}{6}$

Verificamos se LHS = RHS ou $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \sum_{i=0}^{n+1} i^2$

=>$LHS = RHS$

=> $\frac{(n^2+n)(2n+1)+(6n^2+12n+6)}{6} = \frac{(n^2+3n+2)(2n+3)}{6}$ => retirado o 6 para simplificar

=> $(n^2+n)(2n+1)+(6n^2+12n+6) = (n^2+3n+2)(2n+3)$

=> $(2n^3+n^2+2n^2+n)+(6n^2+12n+6) = (2n^3+6n^2+4n+3n^2+9n+6)$ => realizar multiplicações

=> $(2n^3+9n^2+13n+6) = (2n^3+9n^2+13n+6)$

Como LHS= RHS, então hipótese é verdadeira.

(c) $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$

1ª Forma de Resolução:

Base de Indução: Para n=1, em $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$, o resultado esperado é 1

$T(n) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$
$T(1) = \sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 1^2$
$T(1) = (2 * 1 - 1) = 1^2$
$T(1) = (2 - 1) = 1$
$T(1) = 1 = 1$

O passo base é verdadeiro.
Logo para todo n = k com k >= n_0
$T(k) = \sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2$

Hipótese de indução: Por hipótese de indução, assumimos que a fórmula está correta para (k + 1), isto é $T(k+1) = (k+1)^2$ Então, temos que verificar se $T(k) = k^2$, sabendo-se que $T(k) = k^2$ e partindo da hipótese de indução que $T(k+1) = (k+1)^2$.

Passo de Indução é:
Supondo que a série aritmética $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$ é válida para n, e que n = k seja verdadeiro, logo n = k +1 também será:

$T(n) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$ => substituir n por k + 1
$T(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = (k+1)^2$

Portanto trocando:
$T(k) = \sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2$
e
$T(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = (k+1)^2$
Em:
$\boldsymbol{T(k) + (2(k+1) - 1) = T(k+1)}$
ou
$\sum_{i=1}^{k}(2i-1) + (2(k+1)-1) = \sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)$

Temos:
=> $k^2 + (2(k+1) - 1) = (k+1)^2$
=> $k^2 + 2k + 2 - 1 = k^2 + k + k + 1$
=> $k^2 + 2k + 2 - 1 = k^2 + 2k + 1$
=> $k^2 + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1$
=> Verdadeiro

2ª Forma de Resolução:

Base de Indução: Para n=1, em $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$, o resultado esperado é 1

$T(n) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$
$T(1) = \sum_{i=1}^{1}(2i-1)=1^2$
$T(1) = (2*1-1) = 1^2$
$T(1) = (2-1) = 1$
$T(1) = 1 = 1$

O passo base é verdadeiro.

Hipótese de indução: Por hipótese de indução, assumimos que a fórmula está correta para (k + 1), isto é $T(k+1) = (k+1)^2$ Então, temos que verificar se $T(k) = k^2$, sabendo-se que $T(k) = k^2$ e partindo da hipótese de indução que $T(k+1) = (k+1)^2$.

Uma regra de associação é representada como uma implicação na forma LHS => RHS, em que LHS e RHS são respectivamente o antecedente (*Left Hand Side*) e o consequente (*Right Hand Side*) da regra.

LHS $\rightarrow \sum_{i=1}^{n}(2i-1)$ => somar o próximo passo i que é igual a (n+1) ao somatório
LHS $\rightarrow \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) + (2(n+1)-1)$ => substituir o somatório pela equação original
LHS $\rightarrow \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2 + (2(n+1)-1)$ => Reduzir a equação
LHS $\rightarrow \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2 + (2n+2-1)$
LHS $\rightarrow \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2 + 2n + 1$

RHS$\rightarrow$ n^2
RHS (obtido pela substituição de n por n + 1 na definição da série)
$RHS \rightarrow T(n) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$=>fazendo a troca de n por n +1
$RHS \rightarrow T(n+1) = \sum_{i=1}^{n+1}(2(n+1)-1) = (n+1)^2$ =>Simplificando, fazendo a multiplicação por 2 e depois (n+1)^2
$RHS \rightarrow T(n+1) = \sum_{i=1}^{n+1}(2n+2-1) = (n+1)*(n+1)$
$RHS \rightarrow T(n+1) = \sum_{i=1}^{n+1}(2n+1) = n^2 + 2n + 1$

Verificamos se LHS = RHS ou $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = \sum_{i=1}^{n+1}(2i-1)$
=>$LHS = RHS$
=> $n^2 + 2n + 1$ = $n^2 + 2n + 1$
Como LHS= RHS, então hipótese é verdadeira.

(d) $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, n>=1

1ª Forma de Resolução:

Base de Indução: Para n=1, em $\sum_{i=0}^{1} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ o resultado esperado é 1.

T(n) = $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

T(1) = $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$

T(1) = $1 = \frac{1^2(2)^2}{4}$

T(1) = $1 = \frac{1*4}{4}$

T(0) = $1 = 1$

O passo base é verdadeiro

Logo para todo n = k com k >= 1

$T(k) = \sum_{i=0}^{k} i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$

Hipótese de indução: Por hipótese de indução, assumimos que a fórmula está correta para (k + 1), isto é $T(k+1) = \frac{(k+1)^2\left((k+1)+1\right)^2}{4}$ Então, temos que verificar se $T(k) = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$, sabendo-se que $T(k) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ e partindo da hipótese de indução que $T(k+1) = \frac{(k+1)^2\left((k+1)+1\right)^2}{4}$.

Passo de Indução é:

Supondo que a série aritmética $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ é válida para n, e que n = k seja verdadeiro, logo n = k +1 também será:

T(n) = $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ => substituir n por k + 1

T(k+1) = $\sum_{i=0}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2\left((k+1)+1\right)^2}{4}$

Portanto trocando:

$T(k) = \sum_{i=0}^{k} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

e

$T(k+1) = \sum_{i=0}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2\left((k+1)+1\right)^2}{4}$

Em:

$\boldsymbol{T(k) + (k+1)^3 = T(k+1)}$

ou

$\sum_{i=0}^{k} i^3 \ + (k+1)^3 = \sum_{i=0}^{k+1} i^3$

Temos:

$\frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2\left((k+1)+1\right)^2}{4}$

$\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2*(k+2)^2}{4}$

$\frac{k^2(k+1)(k+1)+4(k+1)(k+1)^2}{4} = \frac{(k+1)*(k+1)*(k+2)*(k+2)}{4}$

$\frac{k^2\left(k^2+k+k+1\right)+(4k+4)\left(k^2+2k+1\right)}{4} = \frac{\left(k^2+2k+1\right)*\left(k^2+4k+4\right)}{4}$

$\frac{(k^4+2k^3+k^2)+(4k^3+8k^2+4k+4k^2+8k+4)}{4} = \frac{(k^4+4k^3+4k^2+2k^3+8k^2+8k+k^2+4k+4)}{4}$

$\frac{(k^4+2k^3+k^2)+(4k^3+12k^2+12k+4)}{4} = \frac{(k+6k^3+13k^2+12k+4)}{4}$

$\frac{(k^4+6k^3+13k^2+12k+4)}{4} = \frac{(k^4+6k^3+13k^2+12k+4)}{4}$

Como LHS= RHS, então hipótese é verdadeira.

2ª Forma de Resolução:

Base de Indução: Para n=1, em $\sum_{i=0}^{1} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ o resultado esperado é 1.

T(n) = $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

T(1) = $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$

T(1) = $1 = \frac{1^2(2)^2}{4}$

T(1) = $1 = \frac{1*4}{4}$

T(0) = $1 = 1$

O passo base é verdadeiro

Hipótese de indução: Por hipótese de indução, assumimos que a fórmula está correta para (k + 1), isto é $T(k+1) = \frac{(k+1)^2\left((k+1)+1\right)^2}{4}$ Então, temos que verificar se $T(k) = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$, sabendo-se que $T(k) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ e partindo da hipótese de indução que $T(k+1) = \frac{(k+1)^2\left((k+1)+1\right)^2}{4}$.

Uma regra de associação é representada como uma implicação na forma LHS => RHS, em que LHS e RHS são respectivamente o antecedente (*Left Hand Side*) e o consequente (*Right Hand Side*) da regra.

LHS →$\sum_{i=0}^{n} i^3$ => somar o próximo passo i^3 que é igual a (n+1)^3 ao somatório

LHS →$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \sum_{i=0}^{n} i^3 + (n+1)^3$ => substituir o somatório pela equação original

LHS →$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$ => mdc de 4e 1

LHS →$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}$ => produto de ^2 e retirar (n+1) do elevando ^3

LHS →$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)(n+1)+4(n+1)(n+1)^2}{4}$ => realizar os produtos

LHS →$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n^2+n+n+1)+(4n+4)(n^2+2n+1)}{4}$ => realizar os produtos n^2 e 4(n+4)

LHS →$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{(n^4+2n^3+n^2)+(4n^3+8n^2+4n+4n^2+8n+4)}{4}$ => somar os semelhantes

LHS →$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{(n^4+2n^3+n^2)+(4n^3+12n^2+12n+4)}{4}$ =>somar os semelhantes

LHS →$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{(n^4+6n^3+13n^2+12n+4)}{4}$

$RHS \rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

RHS (obtido pela substituição de n por n + 1 na definição da série)

$RHS \rightarrow T(n) = \sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$=>fazendo a troca de n por n +1

$RHS \rightarrow T(n+1) = \sum_{i=0}^{n+1} i^3 = \frac{(n+1)^2\left((n+1)+1\right)^2}{4}$=>simplificando

$RHS \rightarrow T(n+1) = \sum_{i=0}^{n+1} i^3 = \frac{(n+1)^2*(n+2)^2}{4}$ =>realizando as exponenciação

$RHS \rightarrow T(n+1) = \sum_{i=0}^{n+1} i^3 = \frac{(n+1)*(n+1)*(n+2)*(n+2)}{4}$=>multiplicando

$RHS \rightarrow T(n+1) = \sum_{i=0}^{n+1} i^3 = \frac{(n^2+2n+1)*(n^2+4n+4)}{4}$ =>multiplicando as 2 expressões

$RHS \rightarrow T(n+1) = \sum_{i=0}^{n+1} i^3 = \frac{(n^4+4n^3+4n^2+2n^3+8n^2+8n+n^2+4n+4)}{4}$ => somar os semelhantes

$RHS \rightarrow T(n+1) = \sum_{i=0}^{n+1} i^3 = \frac{(n^4+6n^3+13n^2+12n+4)}{4}$

Verificamos se LHS = RHS ou$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \sum_{i=0}^{n+1} i^3$

=>$LHS = RHS$

=> $\frac{(n^4+6n^3+13n^2+12n+4)}{4} = \frac{(n^4+6n^3+13n^2+12n+4)}{4}$

Como LHS= RHS, então hipótese é verdadeira.