UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA – UFSC- CTC
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
PROJETO E ANÁLISE DE ALGORITMO
Prof. Alexandre Gonçalves Silva
Aluno: Osmar de Oliveira Braz Junior

Questão 4

4. Resolva as seguintes recorrências por meio do **método de iteração** ou **expansão telescópica**, e faça a prova, por indução, da fórmula fechada:

(a) **T(1) = 0 ; T(n) = T(n - 1) + c ; c constante e n > 1**

1ª Forma de resolução (segundos slides aula0901)
1) Fórmula original
T(n) = T(n - 1) + c

2) T(n) está escrito em função de T(n-1)

3) Isole as equações para T(n-1) e T(n-2):
T(n-1) = T(n-2) + c
T(n-2) = T(n-3) + c

4) Substitua T(n-1) pelo valor que foi isolado acima e, em seguida, o mesmo para T(n-2)

- Substituindo o valor isolado de T(n-1) em
  T(n) = T(n-1) + c
  Temos
  T(n) = (T(n-2) + c) + c
- Agora substituindo o valor de T(n-2) em
  T(n) = (T(n-2) + c) + c
  Temos
  T(n) = (T(n-2) + c) + c
  T(n) = ((T(n-3) +c) + c) + c
  ou
  T(n) = T(n-1) +(n-1) c

  Forma geral
  T(n)=T(n-k) + k * c

  Considerando n = k
  T(n) = T(n-n) + n * c
  T(n) = T(0) + n * c

5) Identifique a fórmula do i-ésimo passo
  T(n) = T(n - i) + (n-1)*c

  Calculado para n=5
  T(5)= T(5-1) + c
  T(5)= T(4) + c

  T(4)= T(4-1) + c

T(4)= T(3) + c

T(3)= T(3-1) + c
T(3)= T(2) + c

T(2)= T(2-1) + c
T(2)= T(1) + c

T(1)= 0
T(2)= T(1) + c
T(2)= 0 + c
T(3)= T(2) + c
T(3)= 0 + c + c
T(4)= T(3) + c
T(4)= 0 + c + c + c
T(5)= T(4) + c
T(5)= 0 + c + c + c + c I (c repete n-1 vezes)
ou
T(5)= 4 * c
ou
T(5)= (5-1) * c
ou
T(n)= T(n-1) * c

6) Descubra o valor de i de forma a igualar o parâmetro de T(x) ao parâmetro (valor de n) no caso base
T(n- i) ⇔ T(1) ⇔ 0
n - i = 0
i = n

7) Substitua o valor de i na fórmula do i-ésimo caso
T(n) = T(n -i) + (n-1)*c
T(n) = T(1) + (n-1)*c
T(n) = 0 + (n-1)*c
T(n) = (n-1)*c

8) Logo a complexidade da fórmula,
T(n)= (n-1) * c ϵ Θ(n)

9) Prova por indução,
Passo base: para n = 1, o resultado esperado é 0
T(n) = (n – 1) * c
T(1) = (1 – 1) * c
T(1) = (0) * c
T(1) = 0 (correto)

Passo indutivo: por hipótese de indução, assumimos que a fórmula está correta para n-1, isto é, T(n-1) =((n-1) - 1) * c. Então, temos que verificar se T(n) = (n–1)* c, sabendo-se que T(n) = T(n-1) * c e partindo da H.I. que T(n-1) =((n-1) - 1) * c
T(n)=T(n-1) + c //Fazendo a troca
T(n)=(((n-1) - 1) * c) + c //multiplica c pelos termos
T(n)=(n-1)*c – 1*c + c //remove o 1
T(n)=(n-1)*c – c + c // soma -c com +c
T(n)=(n-1)*c (passo indutivo provado)

Demonstrado que T(n-1) + c = (n-1) * c para n > 1

2ª Forma de resolução

T(n)= T(n-1) + c
T(n)= T(n-2) + c + c
T(n)= T(n-3) + c + c + c
T(n)= T(n-4) + c + c + c + c

T(n)= T(n-(n-1)) + c + ... + c + c (n-1 vezes)
Portanto para n = 5
T(5)= T(5-4) + c + c + c + c
T(5)= T(5-4) + c + c + c + c
T(5)= T(1) + c + c + c => T(1)=0
T(5)= 0 + c + c + c + c
T(5)= 4 * c
ou
T(n)=(n-1)*c

T(n)= (n-1) c ou T(n)= $\sum_{i=1}^{n-1} c$
T(n)=Θ(n)

Em n passos temos a soma de (n -1)c do primeiro passo que é 0, então
T(n)= (n-1)c ϵ Θ(n)

3ª Forma de resolução

Tomando como exemplo n = 5 temos:
T(5)= T(5-1) + c
T(5)= T(4) + c

T(5)= T(4-1) + c + c
T(5)= T(3) + c + c

T(5)= T(3-1) + c + c + c
T(5)= T(2) + c + c + c

T(5)= T(2-1) + c + c + c + c
T(5)= T(1) + c + c + c + c => T(1)=0
T(5)= 0 + c + c + c + c
T(5)= 4c equivale a: T(n)= (n-1) c

Logo a complexidade da fórmula,
T(n)= (n-1)c ϵ Θ(n)

(b) T(1) = 0 ; T(n) = T(n - 1) + 2^n

1ª Forma de resolução (segundos slides aula0901)
1) Fórmula original
T(n) = T(n - 1) + 2^n

2) T(n) está escrito em função de T(n-1)

3) Isole as equações para T(n-1) e T(n-2):
T(n-1) = T(n - 2) + 2^{n-1}
T(n-2) = T(n - 3) + 2^{n-2}

4) Substitua T(n-1) pelo valor que foi isolado acima e, em seguida, o mesmo para T(n-2)

- Substituindo o valor isolado de T(n-1) em
  T(n) = T(n - 1) + 2^n
  Temos
  T(n) = (T(n - 2) + $2^{(n-1)}$) + 2^n
- Agora substituindo o valor de T(n-2) em
  T(n) = (T(n - 2) + $2^{(n-1)}$) + 2^n
  Temos
  T(n) = ((T(n - 3)+ $2^{(n-2)}$)+ $2^{(n-1)}$) + 2^n

  Forma geral
  T(n) = T(n – (k+1))+ $2^{(n-k+2)}$+ $2^{(n-k+3)}$+ ... +$2^{(n-1)}$ + 2^n

  Considerando k=n
  T(n) = T(n –(n+1))+ $2^{(n-n+2)}$+ $2^{(n-n+3)}$+ ... +$2^{(n-1)}$ + 2^n

  T(n) = T(1)+ 2^2+ 2^3+ ... +2^n //Não pode ter e 2^0 2^1 pois T(1) = 0

  Considerando
  $\sum_{i=0}^{k} x^i = 1 + x + x^2 + \ldots + x^k$ //A.5 Página 832 CLRS (3ed)
  $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}$
  A série geométrica
  $\sum_{i=0}^{k} 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^k = \frac{2^{k+1}-1}{2-1}$
  Trocando k por n
  T(n) = T(1)+ $\frac{2^{n+1}-1}{2-1} - 2^0 - 2^1$ //Necessário tirar o primeiro e o segundo termo
  T(n) = 0+ $\frac{2^{n+1}-1}{1} - 1 - 2$
  T(n) = $2^{n+1} - 1 - 1 - 2$
  T(n) = $2^{n+1} - 4$

5) Identifique a fórmula do i-ésimo passo
  T(n) = $T(n-i) + 2^{n+1} - 4$

  Calculado para n=4
  T(4) = T(4 – 1) + $2^5 - 4$
  T(4) = T(3) + $2^5 - 4$

  T(3) = T(3 - 1) + $2^4 - 4$

T(3) = T(2) + $2^4 - 4$

T(2) = T(1) + $2^3 - 4$
T(2) = T(1) + $2^3 - 4$ => T(1) = 0

T(2) = $T(1) + 2^3 - 4$
T(2) = $0 + 2^3 - 4$
T(3) = $T(2) + 2^4 - 4$
T(3) = $0 + 2^3 - 4 + 2^4 - 4$
T(4) = $0 + 2^3 - 4 + 2^4 - 4 + 2^5 - 4$
T(4) = $0 + 2^3 - 2^2 + 2^4 - 2^2 + 2^5 - 2^2$ $//2^3 - 2^2 => 8 - 4 => 4 => 2^2$
T(4) = $0 + 2^2 + 2^3 + 2^4$

6) Descubra o valor de i de forma a igualar o parâmetro de T(x) ao parâmetro (valor de n) no caso base
T(n - i) <-> T(1) <-> 0
n - i = 0
i = -n

7) Substitua o valor de i na fórmula do i-ésimo caso
T(n) = T(n-i) + $2^{n+1} - 4$
T(n) = T(1) + $2^{n+1} - 4$
T(n) = 0 + $2^{n+1} - 4$
T(n) = $2^{n+1} - 4$

8) Logo a complexidade da fórmula,
T(n)= T(n -1) + 2^n ϵ $\Theta(2^n)$

9) Prova por indução,
Passo base: para n = 1, o resultado esperado é 0
T(n) = $2^{n+1} - 4$
T(1) = $2^{1+1} - 2^2$
T(1) = $2^2 - 2^2$
T(1) = 0 (correto)

Passo indutivo: por hipótese de indução, assumimos que a fórmula está correta para n-1, isto é, T(n-1) = $2^{(n-1)+1} - 4$. Então, temos que verificar se T(n) = $2^{n+1} - 4$, sabendo-se que T(n) = $T(n-1) + 2^n$ e partindo da H.I. que T(n-1) = $2^{(n-1)+1} - 4$
T(n) = $T(n-1) + 2^n$
T(n) = $2^{(n-1)+1} - 4 + 2^n$
T(n) = $2^n - 4 + 2^n$
T(n) = $2.2^n - 4^n$ //Adicione 2^ne 2^npara obter 2.2^n
T(n) = $2.2^n - 4^n$ //Use a regra da potência $a^m\ a^n = a^{m+n}$ para combinar os expoentes
T(n) = $2^{n+1} - 4$ (passo indutivo provado)

Demonstrado que T(n - 1) + 2^n = $2^{n+1} - 4$ para n > 1

2ª Forma de resolução
T(n) = T(n-1) + 2^n
T(n) = T(n-2) + 2^{n-1}+ 2^n
T(n) = T(n-3) + 2^{n-2}+ 2^{n-1}+ 2^n
T(n) = T(n-4) + 2^{n-3}+ 2^{n-2}+ 2^{n-1}+ 2^n
Portanto para n = 4
T(4)= T(4-4) + 2^{4-3} + 2^{4-2}+2^{4-1}+ 2^4

$T(4) = T(0) + 2^2 + 2^3 + 2^4$
$T(4) = 0 + 2^2 + 2^3 + 2^4$ //Subtrair os dois primeiros termos da pg

$T(n) = T(n - n) + 2^{(n-n+2)} + 2^{(n-n+3)} + \ldots + 2^{(n-1)} + 2^n$

$T(n) = \sum_{i=1}^{n} 2^i$ ou $T(n) = 2^{n+1} - 4$ //Para subtrair os dois primeiros termos

$T(n) = \Theta(2^n)$

3ª Forma de resolução
Tomando como exemplo n = 4 temos:
$T(4) = T(4 - 1) + 2^4$
$T(4) = T(3) + 2^4$

$T(4) = T(3 - 1) + 2^3 + 2^4$
$T(4) = T(2) + 2^3 + 2^4$

$T(4) = T(2 - 1) + 2^2 + 2^3 + 2^4$
$T(4) = T(1) + 2^2 + 2^3 + 2^4$

$T(4) = T(1) + 2^2 + 2^3 + 2^4 \Rightarrow T(1) = 0$
$T(4) = 0 + 2^2 + 2^3 + 2^4$

ou
$T(4) = T(1) + 2^2 + 2^3 + 2^4$
$T(4) = 0 + 2^2 + 2^3 + 2^4 \Rightarrow T(1) = 0$
$T(4) = 0 + 2^2 + 2^3 + 2^4$

Equivale a:
$T(n) = 2^{n+1} - 4$

Logo a complexidade da fórmula,
$T(n) = 2^{n+1} - 4 \in \Theta(2^n)$

(c) **T(1) = k ; T(n) = cT(n - 1) ; c, k constantes e n > 0**

1ª Forma de resolução (segundos slides aula0901)

1) Fórmula original

T(n) = c*T(n - 1)

2) T(n) está escrito em função de T(n-1)

T(n) = c*T(n - 1)

3) Isole as equações para T(n-1) e T(n-2):

T(n-1) = c*T(n-2)

T(n-2) = c*T(n-3)

4) Substitua T(n-1) pelo valor que foi isolado acima e, em seguida, o mesmo para T(n-2)

- Substituindo o valor isolado de T(n-1) em
  T(n) = c*T(n-1)
  Temos
  T(n) = c * c * T(n-2)
- Agora substituindo o valor de T(n-2) em
  T(n) = c * c * T(n-2)
  Temos
  T(n) = c * c * c * T(n-3)
  ou
  T(n) = c^{n-1} *T(n-3)

5) Identifique a fórmula do i-ésimo passo

T(n) = c^{n-1}*T(n - i)

Calculado para n=5

T(5)= c * T(5-1)

T(5)= c * T(4)

T(4)= c*T(4-1)

T(4)= c*T(3)

T(3)= c*T(3-1)

T(3)= c*T(2)

T(2)= c*T(2-1)

T(2)= c*T(1)

T(1)= k

T(2)= c * T(1)

T(2)= c * k

T(3)= c * T(2)

T(3)= c * c * k

T(4)= c * T(3)

T(4)= c * c * c * k

T(5)= c * T(4)

T(5)= c * c * c * c * k

T(5)= c^4 * k

ou
T(5)= $c^{n-1} * k$

6) Descubra o valor de i de forma a igualar o parâmetro de T(x) ao parâmetro (valor de n) no caso base
T(n- i) ⬄ T(1) ⬄ k
n - i = k
i = n - k

7) Substitua o valor de i na fórmula do i-ésimo caso
T(n) =c^{n-1}*T(n - i)
T(n) = c^{n-1}*k

8) Logo a complexidade da fórmula,
T(n) = cT(n - 1) ϵ $\Theta(2^{n})$

9) Prova por indução,
Passo base: para n = 1, o resultado esperado é k
T(n) = c^{n-1}*k
T(1) = c^{1-1}*k
T(1) = c^{0}*k
T(1) = k (correto)

Passo indutivo: por hipótese de indução, assumimos que a fórmula está correta para n-1, isto é, T(n-1) $= c^{(n-1)-1} * k$. Então, temos que verificar se T(n) = c^{n-1}*k, sabendo-se que T(n) = $c * T(n-1)$ e partindo da H.I. que T(n-1) = $c^{(n-1)-1} * k$.
T(n) = $c * T(n-1)$ //Fazendo a troca
T(n) = $c * c^{(n-1)-1} * k$ //Use a regra da potência $a^{m}\, a^{n} = a^{m+n}$ para combinar os expoentes
T(n) = $c^{(n-1)-1+1} * k$
T(n) = $c^{n-1} * k$ (passo indutivo provado)

Demonstrado que $c * T(n-1)$ = $c^{n-1} * k$ para n > 1

2ª Forma de resolução
T(n) = c * T(n - 1)
T(n) = c * c * T(n-2)
T(n) = c * c * c * T(n-3)
T(n) = c * c * c * c * T(n-4)
T(n) = c * c * c * c * T(n - (n-1)) (c é repetido n -1 vezes)
Portanto para n = 5
T(5) = c * c * c * c * T(5-4)
T(5) = c * c * c * c * T(1)
T(5) = c * c * c * c * T(1) => T(1)=k
T(5) = c * c * c * c * k
T(n) = c^{n-1} * k
Portanto:
T(n)=$\Theta(2^{n})$

3ª Forma de resolução

Tomando como exemplo n = 5 temos:

T(n) = c * T(n - 1)

T(5) = c * T(5 - 1)
T(5) = c * T(4) => T(4) = c * T(4-1)
T(5) = c * c *T(4 - 1)
T(5) = c * c *T(3)
T(5) = c * c * c *T(3 - 1)
T(5) = c * c * c *T(2)
T(5) = c * c * c * c *T(2 - 1)
T(5) = c * c * c * c *T(1) =>T(1) = k
T(5) = c * c * c * c * k
T(5) = c^4 * k

Equivale a:
T(n) = c^{n-1} * k

Logo a complexidade da fórmula,
T(n)= c^{n-1} * k ϵ Θ(2^n)

(d) T(1) = 1 ; T(n) = $3T\left(\frac{n}{2}\right) + n$; para n > 1

1ª Forma de resolução (segundos slides aula0901)

1) Fórmula original

T(n) = $3T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

2) T(n) está escrito em função de T(n/2)

3) Isole as equações para T(n/2) e T(n/4):

T(n) = $3T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

T(n/2) = $3T\left(\frac{\frac{n}{2}}{2}\right) + \frac{n}{2}$

T(n/2) = $3\left(T\left(\frac{n}{4}\right)\right) + \frac{n}{2}$

e

T(n/2/2) = $3\left(T\left(\frac{\frac{n}{2}}{4}\right)\right) + \frac{\frac{n}{2}}{2}$

T(n/4) = $3T\left(\frac{n}{8}\right) + \frac{n}{4}$

T(n/4) = $3\left(T\left(\frac{n}{8}\right)\right) + \frac{n}{4}$

4) Substitua T(n/2) pelo valor que foi isolado acima e, em seguida, o mesmo para T(n/4)

- Substituindo o valor isolado de T(n/2) em

  T(n) = $3\left(T\left(\frac{n}{2}\right)\right) + n$

  Temos

  T(n) = $3\left(3\left(T\left(\frac{n}{4}\right)\right) + \frac{n}{2}\right) + n$

  Simplificando

  T(n) = $3^2 T\left(\frac{n}{4}\right) + 3\frac{n}{2} + n$

- Agora substituindo o valor de T(n/4) em

  T(n) = $3\left(3T\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{n}{2}\right) + n$

  Temos

  T(n) = $3\left(3\left(3T\left(\frac{n}{8}\right) + \frac{n}{4}\right) + \frac{n}{2}\right) + n$

  Simplificando

  T(n) = $3^2\left(3T\left(\frac{n}{8}\right) + \frac{n}{4}\right) + 3\frac{n}{2} + n$

  T(n) = $3^3 T\left(\frac{n}{8}\right) + 3^2\left(\frac{n}{4}\right) + 3^1\left(\frac{n}{2}\right) + 3^0\left(\frac{n}{1}\right)$

  T(n) = $3^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \left(\frac{3^2}{2^2}\right)n + \left(\frac{3^1}{2^1}\right)n + \left(\frac{3^0}{2^0}\right)n$

  T(n) = $3^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 n + \left(\frac{3}{2}\right)^1 n + \left(\frac{3}{2}\right)^0 n$

5) Identifique a fórmula do i-ésimo passo

T(n) = $3^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + n\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{i-1} + \left(\frac{3}{2}\right)^{i-2} + \cdots + \left(\frac{3}{2}\right)^{0}\right]$

T(n) = $3^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) +$ Soma da PG a1=n e q=$\frac{3}{2}$

T(n) = $3^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + (\sum_{i=0}^{(k-1)} \left(\frac{3}{2}\right)^{i}) * n$

Calculado para n=8

T(8)= $3 * T\left(\frac{8}{2^{\log 8}}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 8$

T(8)= $3 * T(4) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 8$

T(4)= $3 * T\left(\frac{4}{2^{\log 4}}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^1 4$

T(4)= $3 * T(2) + \left(\frac{3}{2}\right)^1 4$

T(2)= $3 * T\left(\frac{2}{2^{\log 2}}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^0 2$

T(2)= $3 * T(1) + \left(\frac{3}{2}\right)^0 2$

T(1)= 1

T(2)= $3 * 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^0 2$

T(4)= $3 * T(2) + \left(\frac{3}{2}\right)^1 4$

T(4)= $3 * 3 * 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^0 2 + \left(\frac{3}{2}\right)^1 4$

T(8)= $3 * T(4) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 8$

T(8)= $3 * 3 * 3 * 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^0 2 + \left(\frac{3}{2}\right)^1 4 \ + \left(\frac{3}{2}\right)^2 8$

T(8)= $3^3 * 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^0 2 + \left(\frac{3}{2}\right)^1 4 \ + \left(\frac{3}{2}\right)^2 8$

T(8)= $3^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 n + \left(\frac{3}{2}\right)^1 n + \left(\frac{3}{2}\right)^0 n$

6) Descubra o valor de i de forma a igualar o parâmetro de T(x) ao parâmetro (valor de n) no caso base

$T\left(\frac{n}{2^i}\right)$ ⇔ T(1) ⇔ 1

$\frac{n}{2^i}$ = 1

n = 2^i => $x = b^a$ equivale $a = log_b x$

$i = log_2 n$

7) Substitua o valor de i na fórmula do i-ésimo caso

T(n) = $3^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + n\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{i-1} + \left(\frac{3}{2}\right)^{i-2} + \cdots + \left(\frac{3}{2}\right)^{0}\right]$

Forma geral

T(n) = $3^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 n + \left(\frac{3}{2}\right)^1 n + \left(\frac{3}{2}\right)^0 n$

Considerando

$\sum_{i=0}^{k} x^i = 1 + x + x^2 + \ldots + \ x^n$ //A.5 Página 832 CLRS (3ed)

$\sum_{i=0}^{k} x^i = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}$

A série geométrica

$(\sum_{i=0}^{(k-1)} \left(\frac{3}{2}\right)^{i}) * n = \left(\frac{3}{2}\right)^{(2)} * n + \left(\frac{3}{2}\right)^{(1)} * n + \left(\frac{3}{2}\right)^{(0)} * n$

Substituindo na fórmula do somatório

$(\sum_{i=0}^{(k-1)} \left(\frac{3}{2}\right)^{i}) * n = \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{(k-1)+1} - 1}{\left(\frac{3}{2}\right) - 1}\right) * n$

Trocando k por $\log_2 n$

$(\sum_{i=0}^{((\log_2 n)-1)} \left(\frac{3}{2}\right)^{i}) * n = \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{((\log_2 n)-1)+1} - 1}{\left(\frac{3}{2}\right) - 1}\right) * n$

$(\sum_{i=0}^{((\log_2 n)-1)} \left(\frac{3}{2}\right)^{i}) * n = \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{(\log_2 n)} - 1}{\left(\frac{3}{2}\right) - 1}\right) * n$

//Substituindo o resultado do somatório na fórmula do i-ésimo caso

T(n) = $3^{i} T\left(\frac{n}{2^{i}}\right) + \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 n} - 1}{\left(\frac{3}{2}\right) - 1}\right) * n$

Considerando i= $\log_2 n$

T(n) $=3^{\log_2 n} T\left(\frac{n}{2^{\log_2 n}}\right) + \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{(\log_2 n} - 1}{\left(\frac{3}{2}\right) - 1}\right) * n$ //Propriedade(funções exponencial e logarítmica são inversas $a = b^{(\log_b a)} => 2^{(\log_2 n)} = n$

T(n) $=3^{\log_2 n} T\left(\frac{n}{n}\right) + \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{(\log_2 n} - 1}{\left(\frac{3}{2}\right) - 1}\right) * n$ //n dividido por n é igual 1

T(n) $=3^{\log_2 n} T(1) + \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{(\log_2 n} - 1}{\left(\frac{3}{2}\right) - 1}\right) * n$ //T(1)=1

T(n) $=3^{\log_2 n} * 1 + \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{(\log_2 n} - 1}{\left(\frac{3}{2}\right) - 1}\right) * n$

T(n) = $3^{\log_2 n} + \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{(\log_2 n} - 1}{\left(\frac{3}{2}\right) - 1}\right) * n$ //MMC de (3/2)-1

T(n) = $3^{\log_2 n} + \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{(\log_2 n)} - 1}{\frac{3-2}{2}}\right) * n$ //Subtrair 3/2 -2

T(n) = $3^{\log_2 n} + \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{(\log_2 n)} - 1}{\frac{1}{2}}\right) * n$ //Dividir por ½ é igual que multiplicar por 2

T(n) = $3^{\log_2 n} + 2 * \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{(\log_2 n)} - 1}{1}\right) * n$ //Remove a divisão por 1

T(n) = $3^{\log_2 n} + 2 * \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{(\log_2 n)} - 1\right) * n$ //Distribui a exponencial na fração (3/2)

T(n) = $3^{\log_2 n} + 2 * \left(\frac{3^{(\log_2 n)}}{2^{(\log_2 n)}} - 1\right) * n$ //Propriedade(funções exponencial e logarítmica são inversas $a = b^{(\log_b a)} => 2^{(\log_2 n)} = n$

T(n) = $3^{\log_2 n} + 2 * \left(\frac{3^{(\log_2 n)}}{n} - 1\right) * n$ //Multiplica n por dois termos

T(n) = $3^{\log_2 n} + 2 * \left(n * \frac{3^{(\log_2 n)}}{n} - n * 1\right)$ //Elimina n

T(n) = $3^{\log_2 n} + 2 * \left(3^{(\log_2 n)} - n\right)$

T(n) = $3^{\log_2 n} + 2 * 3^{(\log_2 n)} - 2n$ //Adicione $3^{(\log_2 n)}$e $2 * 3^{(\log_2 n)}$para obter $3 * 3^{(\log_2 n)}$

T(n) = 3.$3^{\log_2 n} - 2n$ // Inverter o n por 3 pela propriedade $a^{(\log_b c)} = c^{(\log_b a)}$

T(n) = 3.$n^{\log_2 3} - 2n$

8) Logo a complexidade da fórmula,
T(n) = $3T\left(\frac{n}{2}\right) + n \in \Theta(n^{\log 3})$

9) Prova por indução,
Passo base: para n = 1, o resultado esperado é k
T(n) = $3.n^{\log_2 3} - 2n$
T(1) = $3.1^{\log_2 3} - 2 * 1$
T(1) = $3.1^{\log_2 3} - 2$
T(1) = $3.3.1 - 2$
T(1) = $3 - 2$
T(1) = 1 (correto)

Passo indutivo: por hipótese de indução, assumimos que a fórmula está correta para n/2, isto é, T$\left(\frac{n}{2}\right)$ =3.$\left(\frac{n}{2}\right)^{\log_2 3} - 2\left(\frac{n}{2}\right)$. Então, temos que verificar se T(n) =$3.n^{\log_2 3} - 2n$, sabendo-se que T(n)=$3T\left(\frac{n}{2}\right) + n$ e partindo da H.I. que T$\left(\frac{n}{2}\right)$ =3.$\left(\frac{n}{2}\right)^{\log_2 3} - 2\left(\frac{n}{2}\right)$.
T(n)=$3T\left(\frac{n}{2}\right) + n$
T$\left(\frac{n}{2}\right)$ =3.$\left(\frac{n}{2}\right)^{\log_2 3} - 2\left(\frac{n}{2}\right)$. //troca na equação anterior
T(n)=3 $*\left(3.\left(\frac{n}{2}\right)^{\log_2 3} - 2\left(\frac{n}{2}\right)\right) + n$ //Multiplica por n/2 por 2
T(n)=3 $*\left(3\left(\frac{n}{2}\right)^{\log_2 3} - n\right) + n$ //Multiplica por 3 os 2 membros da equação
T(n)=3 $* 3 * \left(\frac{n}{2}\right)^{\log_2 3} - 3n + n$ //Soma n com -3n
T(n)=3 $* 3 * \left(\frac{n^{\log_2 3}}{2^{\log_2 3}}\right) - 2n$ //Distribui o exponencial na fração (n/2)
T(n)=3 $* 3 * \left(\frac{n^{\log_2 3}}{2^{\log_2 3}}\right) - 2n$ // Propriedade $a^{(\log_b c)}$ é igual a c portanto $2^{(\log_2 3)}$=3
T(n)=3 $* 3 * \left(\frac{n^{\log_2 3}}{3}\right) - 2n$ // Elimina um 3 da divisão com outro da multiplicação
T(n)=3 $* n^{\log_2 3} - 2n$ // (passo indutivo provado)

Demonstrado que $3T\left(\frac{n}{2}\right) + n$ = $3.n^{\log_2 3} - 2n$ para n > 1

***(e)* T(1) = 1 ; T(n) = T($\sqrt{n}$) + log n ; para n >= 1**

A equação pode ser simplificada através de manipulação algébrica. Substituindo-se log *n* por *m*: (Obs. cormen p 64 e exercício 4.3.9)
Desta forma temos que:
$n = 2^m$ ou
$m = log_2 n$

Desta forma podemos reescrever a recorrência da seguinte forma
$T(n) = T(\sqrt{n}\,) + log_2 n$

Transforma-se em
T(2^m) = T($\sqrt{2^m}$) $+ \log 2^m$ // $\sqrt{2^1} = 2^{\frac{1}{2}}$ //o log é na base 2
T(2^m) = T($2^{\frac{m}{2}}$) $+ \log_2 2^m$ // $\log_b b^a = a$
T(2^m) = T($2^{\frac{m}{2}}$) + m

Agora, realizando manipulação algébrica de simplificação fazemos a substituição da função em
T(2^m) = T($2^{\frac{m}{2}}$) + m

usando-se a igualdade $T(2^m) = S(m)$, temos
S(m) = S($\frac{m}{2}$) + m

1ª Forma de resolução (segundos slides aula0901)
1) Fórmula original
S(m) = $S\left(\frac{m}{2}\right) + m$

2) S(n) está escrito em função de $S\left(\frac{m}{2}\right)$

3) Isole as equações para $S\left(\frac{m}{2}\right)$e $S\left(\frac{m}{4}\right)$:
S(m) = $S\left(\frac{m}{2}\right) + m$
S(m/2) = $S\left(\frac{\frac{m}{2}}{2}\right) + \frac{m}{2}$
S(m/2) = $S\left(\frac{m}{4}\right) + \frac{m}{2}$
e
S(m/2/2) = $\left(S\left(\frac{\frac{m}{2}}{4}\right)\right) + \frac{\frac{m}{2}}{2}$
S(m/4) = $S\left(\frac{m}{8}\right) + \frac{m}{4}$

4) Substitua S(m/2) pelo valor que foi isolado acima e, em seguida, o mesmo para S(m/4)

- Substituindo o valor isolado de S(m/2) em
- S(m) = $S\left(\frac{m}{2}\right) + m$

  Temos

  S(m) = $\left(S\left(\frac{m}{4}\right) + \frac{m}{2}\right) + m$
- Agora substituindo o valor de S(m/4) em

S(m) = $\left(S\left(\frac{m}{4}\right)+\frac{m}{2}\right)+m$

Temos

S(m) = $\left(\left(S\left(\frac{m}{8}\right)+\frac{m}{4}\right)+\frac{m}{2}\right)+m$

S(m) = $S\left(\frac{m}{2^3}\right)+\frac{m}{2^2}+\frac{m}{2^1}+\frac{m}{2^0}$

S(m) = $S\left(\frac{m}{2^3}\right)+\frac{1}{2^2}m+\frac{1}{2^1}m+\frac{1}{2^0}m$

S(m) = $S\left(\frac{m}{2^3}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2m+\left(\frac{1}{2}\right)^1m+\left(\frac{1}{2}\right)^0m$

5) Identifique a fórmula do i-ésimo passo

S(m) = $S\left(\frac{m}{2^i}\right)+m\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{i-2}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^0\right]$

S(m) = $S\left(\frac{m}{2^i}\right)+$ Soma da PG a1=m e q=$\frac{1}{2}$

S(m) = $S\left(\frac{m}{2^i}\right)+\left(\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^i\right)*m$

Calculado para n=8

S(8)= $\left(\frac{8}{2^{\log 8}}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2 8$

S(8)= $S(4)+\left(\frac{1}{2}\right)^2 8$

S(4)= $\left(\frac{4}{2^{\log 4}}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^1 4$

S(4)= $S(2)+\left(\frac{1}{2}\right)^1 4$

S(2)= $\left(\frac{1}{2^{\log 2}}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^0 2$

S(2)= $S(1)+\left(\frac{1}{2}\right)^0 2$

S(1)= 1

S(2)= $1+\left(\frac{1}{2}\right)^0 2$

S(4)= $S(2)+\left(\frac{1}{2}\right)^1 4$

T(4)= $1+\left(\frac{1}{2}\right)^0 2+\left(\frac{1}{2}\right)^1 4$

T(8)= $S(4)+\left(\frac{1}{2}\right)^2 8$

T(8)= $1+\left(\frac{1}{2}\right)^0 2+\left(\frac{1}{2}\right)^1 4+\left(\frac{1}{2}\right)^2 8$

T(8)= $1+\left(\frac{1}{2}\right)^0 2+\left(\frac{1}{2}\right)^1 4+\left(\frac{1}{2}\right)^2 8$

T(n) = $S\left(\frac{m}{2^i}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2m+\left(\frac{1}{2}\right)^1m+\left(\frac{1}{2}\right)^0m$

6) Descubra o valor de i de forma a igualar o parâmetro de T(x) ao parâmetro (valor de n) no caso base

$T\left(\frac{m}{2^i}\right)$ <-> T(1) <-> 1

$\frac{m}{2^i}$ = 1

m = 2^i => $x = b^a$ equivale $a = log_b x$

$i = log_2 m$

7) Substitua o valor de i na fórmula do i-ésimo caso

S(m) = $S\left(\frac{m}{2^i}\right) + m\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{i-2} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{0}\right]$

Forma geral

S(m) = $S\left(\frac{m}{2^i}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^{2} m + \left(\frac{1}{2}\right)^{1} m + \left(\frac{1}{2}\right)^{0} m$

Considerando que a quantidade de termos é $i = \log_2 m$

S(m) = $S\left(\frac{m}{2^{\log_2 m}}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^{(\log_2 m)-1} m + \left(\frac{1}{2}\right)^{(\log_2 m)-2} m + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{(0)} m$

S(m) = $S\left(\frac{m}{2^{\log_2 m}}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^{((\log_2 m)-1)} m + \left(\frac{1}{2}\right)^{((\log_2 m)-2)} m + \left(\frac{1}{2}\right)^{((\log_2 m)-3)} m$

S(m) = $S\left(\frac{m}{m}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^{((\log_2 m)-1} m + \left(\frac{1}{2}\right)^{((\log_2 m)-2)} m + \left(\frac{1}{2}\right)^{((\log_2 m)-3)} m$

S(m) = $S(1) + \left(\frac{1}{2}\right)^{((\log_2 m)-1} m + \left(\frac{1}{2}\right)^{((\log_2 m)-2)} m + \left(\frac{1}{2}\right)^{((\log_2 m)-3)} m$

Considerando

$\sum_{i=0}^{k} x^i = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$ //A.5 Página 832 CLRS (3ed)

$\sum_{i=0}^{k} x^i = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}$

A série geométrica substituir k = $\log_2 m$

$(\sum_{i=0}^{(\log_2 m)} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}) * m = \left(\frac{1}{2}\right)^{(2)} * m + \left(\frac{1}{2}\right)^{(1)} * m + \left(\frac{1}{2}\right)^{(0)} * m$

//Substituindo na fórmula do somatório

$(\sum_{i=0}^{((\log_2 m)-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{i}) * m = \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{((\log_2 m)-1)+1} - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)-1}\right) * m$

$(\sum_{i=0}^{((\log_2 m)-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{i}) * m = \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 m} - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)-1}\right) * m$

Substituindo o resultado do somatório na fórmula do i-ésimo caso

S(m) = $S\left(\frac{m}{2^i}\right) + (\sum_{i=0}^{((\log_2 m)-1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{i}) * m$

S(m) = $S\left(\frac{m}{2^i}\right) + \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 m} - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)-1}\right) * m$

Considerando i= $\log_2 m$

S(m) = $S\left(\frac{m}{2^{\log_2 m}}\right) + \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 m} - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)-1}\right) * m$ //Propriedade(funções exponencial e logarítmica são inversas

$a = b^{(\log_b a)} \Rightarrow 2^{(\log_2 m)} = m$

$S(m) = S\left(\frac{m}{m}\right) + \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 m} - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)-1}\right) * m$ //m dividido por m é igual 1

$S(m) = S(1) + \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 m} - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)-1}\right) * m$

$S(m) = S(1) + \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 m} - 1}{-\frac{1}{2}}\right) * m$ //Dividir por -½ é igual que multiplicar por -2

$S(m) = S(1) - 2m\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 m} - 1}{1}\right)$ //Retira divisão por 1

$S(m) = S(1) - 2m\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 m} - 1\right)$ //Distribui a exponencial na fração (1/2)

$S(m) = S(1) - 2m\left(\frac{1^{(\log_2 m)}}{2^{(\log_2 m)}} - 1\right)$ //Distribui a exponencial na fração (1/2)

$S(m) = S(1) - 2m\left(\frac{1^{(\log_2 m)}}{m} - 1\right)$ //Propriedade(funções exponencial e logarítmica são inversas $a = b^{(\log_b a)} => 2^{(\log_2 n)} = n$

$S(m) = S(1) - 2m\left(\frac{1^{(\log_2 m)}}{m} - 1\right)$ //Um elevado a qualquer potência é um

$S(m) = S(1) - 2m\left(\frac{1}{m} - 1\right)$ //Um elevado a qualquer potência é um

$S(m) = S(1) - 2m\left(\frac{1}{m} - 1\right)$ //Multiplica -2m pelos termos

$S(m) = S(1) - 2m\frac{1}{m} + 2m$ //Multiplica -2m pelos termos

$S(m) = S(1) - 2 + 2m$ //realiza a subtração

$S(m) = S(1) + \ 2m - 2$

Como S(m) = T(2^m), ou seja m = 2^m, fazemos a substituição em

$S(m) = S(1) + 2m - 2$

Temos

$T\left(2^m\right) = T\left(2^1\right) + 2m - 2$

$T\left(2^m\right) = T(2) + 2m - 2$

Pela fórmula inicial, sabemos que

T(2) = T($2^{\frac{1}{2}}$) + 1

T($2^{\frac{1}{2}}$) = T($2^{\frac{1}{4}}$) + $\frac{1}{2}$

T($2^{\frac{1}{2}}$) = T($2^{\frac{1}{4}}$) + $\frac{1}{2}$+ $\frac{1}{4}$

...

Portanto

T(2) = T($2^{\frac{1}{2^k}}$) $+ [1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \ldots]$

Temos uma PG infinita entre os colchetes, cuja a equação é

$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ //A.6 Página 833 CLRS (3ed)

Sendo o primeiro elemento igual a 1 e a razão igual ½ (e k tende ao infinito) temos:

T(2) = T($2^{\frac{1}{\infty}}$) $+ [\frac{1}{1-\frac{1}{2}}]$

T(2) = T(2^0) + 2

T(2) = T(1) + 2

Substituindo em:

$T\left(2^m\right) = T(2) + 2m - 2$

$T\left(2^m\right) = [T(1) + 2] + 2m - 2$

$T\left(2^m\right) = 1 + 2 + 2m - 2$

$T\left(2^m\right) = 1 + 2m$

Por fim, como = $m = log_2 n$ troque em

$T(2^m) = 1 + 2m$

Resultando em
$T\left(2^{log_2 n}\right) = 1 + 2log_2 n$
$T(n) = 1 + 2log_2 n$

8) Logo a complexidade da fórmula,
T(n) = $1 + 2log_2 n$ ϵ Θ($log_2 n$)

9) Prova por indução,
Passo base: para n = 1, o resultado esperado é 1
$T(n) = 1 + 2log_2 n$
$T(1) = 1 + 2log_2 1$
$T(1) = 1 + 2 * 0$
$T(1) = 1$ (Correto)

Passo indutivo: por hipótese de indução, assumimos que a fórmula está correta para $n^{\frac{1}{2}}$, isto é, T$\left(n^{\frac{1}{2}}\right)$ =1 $+ 2log_2 n^{\frac{1}{2}}$. Então, temos que verificar se $T(n) = 1 + 2log_2 n$, sabendo-se T(n)=$T\left(n^{\frac{1}{2}}\right) + log_2 n$ e partindo da H:I: que T$\left(n^{\frac{1}{2}}\right)$ =1 $+ 2log_2 n^{\frac{1}{2}}$.
T(n)=$T\left(n^{\frac{1}{2}}\right) + log_2 n$
T(n)=$[1 + 2log_2 n^{\frac{1}{2}}] + log_2 n$
T(n)=1 $+ 2\frac{1}{2}log_2 n] + log_2 n$
T(n)=1 $+ 2log_2 n$ (passo indutivo provado)

Demonstrado que $T\left(n^{\frac{1}{2}}\right) + log_2 n = T(\sqrt{n}\,) + log_2 n$ para n >= 1

(f) T(1) = 1 ; T(n) = 8T(n/2) + n

1ª Forma de resolução (segundos slides aula0901)

1) Fórmula original

T(n) = $8T\left(\frac{n}{2}\right)+n$

2) T(n) está escrito em função de T(n/2)

3) Isole as equações para T(n/2) e T(n/4):

T(n) = $8T\left(\frac{n}{2}\right)+n$

T(n/2) = $8T\left(\frac{\frac{n}{2}}{2}\right)+\frac{n}{2}$

T(n/2) = $8\left(T\left(\frac{n}{4}\right)\right)+\frac{n}{2}$

e

T(n/2/2) = $8\left(T\left(\frac{\frac{n}{2}}{4}\right)\right)+\frac{\frac{n}{2}}{2}$

T(n/4) = $8T\left(\frac{n}{8}\right)+\frac{n}{4}$

T(n/4) = $8\left(T\left(\frac{n}{8}\right)\right)+\frac{n}{4}$

4) Substitua T(n/2) pelo valor que foi isolado acima e, em seguida, o mesmo para T(n/4)

- Substituindo o valor isolado de T(n/2) em

  T(n) = $8\left(T\left(\frac{n}{2}\right)\right)+n$

  Temos

  T(n) = $8\left([8\left(T\left(\frac{n}{4}\right)\right)+\frac{n}{2}]\right)+n$

  Simplificando

  T(n) = $8^2T\left(\frac{n}{4}\right)+8\frac{n}{2}+n$

- Agora substituindo o valor de T(n/4) em

  T(n) = $8\left(8T\left(\frac{n}{4}\right)+\frac{n}{2}\right)+n$

  Temos

  T(n) = $8\left([8\left(8T\left(\frac{n}{8}\right)+\frac{n}{4}\right)+\frac{n}{2}]\right)+n$

  Simplificando

  T(n) = $8^2\left(8T\left(\frac{n}{8}\right)+\frac{n}{4}\right)+8\frac{n}{2}+n$

  T(n) = $8^3T\left(\frac{n}{8}\right)+8^2\left(\frac{n}{4}\right)+8^1\left(\frac{n}{2}\right)+8^0\left(\frac{n}{1}\right)$

  T(n) = $8^3T\left(\frac{n}{2^3}\right)+\left(\frac{8^2}{2^2}\right)n+\left(\frac{8^1}{2^1}\right)n+\left(\frac{8^0}{2^0}\right)n$

  T(n) = $8^3T\left(\frac{n}{2^3}\right)+\left(\frac{8}{2}\right)^2n+\left(\frac{8}{2}\right)^1n+\left(\frac{8}{2}\right)^0n$

  T(n) = $8^3T\left(\frac{n}{2^3}\right)+(4)^2n+(4)^1n+(4)^0n$

5) Identifique a fórmula do i-ésimo passo

T(n) = $8^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + n\left[(4)^{i-1} + (4)^{i-2} + \cdots + (4)^0\right]$

T(n) = $8^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) +$ Soma da PG a1=n e q=4

T(n) = $8^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + (\sum_{i=0}^{(k-1)} 4^i) * n$

Calculado para n=512

T(512)= $8 * T\left(\frac{512}{8}\right) + (4)^2$ //i=3

T(512)= $8 * T(64) + (4)^2$

T(64)= $8 * T(64/8) + (4)^1$ //i=2

T(64)= $8 * T(8) + (4)^1$

T(8)=$8 * T\left(\frac{8}{8}\right) + (4)^0$ //i=1

T(8)=$8 * T(1) + (4)^0$

T(1) = 1

T(8)=$8 * \ 1 + (4)^0$

T(64) =$8 * 8 * 1 + (4)^0 + (4)^1$

T(512) = $8 * 8 * 8 * 1 + (4)^0 + (4)^1 \ + (4)^3$

6) Descubra o valor de i de forma a igualar o parâmetro de T(x) ao parâmetro (valor de n) no caso base

$T\left(\frac{n}{2^i}\right)$ ⇔ T(1) ⇔ 1

$\frac{n}{2^i}$ = 1

n = 2^i => $x = \ b^a$ equivale $a = log_b x$

$i = log_2 n$

7) Substitua o valor de i na fórmula do i-ésimo caso

T(n) = $8^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + n\left[(4)^{i-1} + (4)^{i-2} + \cdots + (4)^0\right]$

Forma geral

T(n) = $8^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 4^2 n + 4^1 n + 4^0 n$

Considerando

$\sum_{i=0}^{k} x^i = 1 + x + x^2 + \ldots + \ x^k$ //A.5 Página 832 CLRS (3ed)

$\sum_{i=0}^{k} x^i = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}$

A série geométrica x = 4

$(\sum_{i=0}^{(k-1)} 4^i) * n = 4^2 * n + 4^1 * n + 4^0 * n$

Substituindo na fórmula do somatório

$(\sum_{i=0}^{(k-1)} 4^i) * n = \left(\frac{4^{(k-1)+1}-1}{4-1}\right) * n$

$(\sum_{i=0}^{(k-1)} 4^i * n = \left(\frac{4^k-1}{4-1}\right) * n$

Substituindo k = $\log_2 n$

$(\sum_{i=0}^{((\log_2 n)-1)} 4^i) * n = \left(\frac{4^{\log_2 n}-1}{4-1}\right) * n$

//Substituindo o resultado do somatório na fórmula do i-ésimo caso

T(n) = $8^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) * n + \left(\frac{4^{\log_2 n}-1}{4-1}\right) * n$

Considerando i= $\log_2 n$

T(n) = $8^{\log_2 n} T\left(\frac{n}{2^{\log_2 n}}\right) * n + \left(\frac{4^{(\log_2 n)}-1}{4-1}\right) * n$ //8 é igual 2^3

T(n) $=2^{3^{\log_2 n}} T\left(\frac{n}{2^{\log_2 n}}\right) * n + \left(\frac{4^{(\log_2 n)}-1}{4-1}\right) * n$ //Propriedade(funções exponencial e logarítmica são inversas $x^{a^{\log_b c}} = x^{\log_b c^a} => 2^{3^{\log_2 n}} = 2^{\log_2 n^3}$

T(n) $=2^{\log_2 n^3} T\left(\frac{n}{2^{\log_2 n}}\right) * n + \left(\frac{4^{(\log_2 n)}-1}{4-1}\right) * n$ //Propriedade(funções exponencial e logarítmica são inversas $a = b^{(\log_b a)} => 2^{\log_2 n^3)} = n^3$

T(n) $=n^3 T\left(\frac{n}{n}\right) + \left(\frac{4^{(\log_2 n)}-1}{4-1}\right) * n$ //n dividido por n é igual 1
T(n) $=n^3 * T(1) + \left(\frac{4^{(\log_2 n)}-1}{4-1}\right) * n$ //T(1)=1
T(n) $=n^3 * 1 + \left(\frac{4^{(\log_2 n)}-1}{4-1}\right) * n$ //Subtrair 1 de 4
T(n) $= n^3 + \left(\frac{4^{(\log_2 n)}-1}{3}\right) * n$ //Propriedade(funções exponencial e logarítmica são inversas $a = b^{(\log_b a)} => 4^{\log_2 n} = n^{\log_2 4}$
T(n) = $n^3 + \left(\frac{n^{(\log_2 4)}-1}{3}\right) * n$ //$\log_2 4 = 2$
T(n) = $n^3 + \left(\frac{n^2-1}{3}\right) * n$ //Multiplica por n
T(n) = $n^3 + \left(\frac{n^3-n}{3}\right)$ //MDC com n^3/1
T(n) = $\frac{n^3}{1} + \frac{n^3-n}{3}$
T(n) = $\frac{3n^3+n^3-n}{3}$
T(n) = $\frac{4n^3-n}{3}$

8) Logo a complexidade da fórmula,
T(n) = $8T\left(\frac{n}{2}\right) + n \in \Theta(n^3)$

9) Prova por indução,
Passo base: para n = 1, o resultado esperado é k
T(n) = $\frac{4n^3-n}{3}$
T(1) = $\frac{4*1^3-1}{3}$
T(1) = $\frac{4-1}{3}$
T(1) = $\frac{3}{3}$
T(1) = 1 (correto)

Passo indutivo: por hipótese de indução, assumimos que a fórmula está correta para n/2, isto é, T$\left(\frac{n}{2}\right)$ =$\frac{4\frac{n^3}{2}-\frac{n}{2}}{3}$. Então, temos que verificar se T(n) =$\frac{4n^3-n}{3}$, sabendo-se que T(n)=$8T\left(\frac{n}{2}\right) + n$ e partindo da H.I. que T$\left(\frac{n}{2}\right)$ =$\frac{4\frac{n^3}{2}-\frac{n}{2}}{3}$.
T(n)=$8T\left(\frac{n}{2}\right) + n$
T$\left(\frac{n}{2}\right)$ =$\frac{4\left(\frac{n}{2}\right)^3-\frac{n}{2}}{3}$ //Distribui o exponencial na fração (n/3)
T$\left(\frac{n}{2}\right)$ =$\frac{4\left(\frac{n^3}{2^3}\right)-\frac{n}{2}}{3}$ //Calcula 2^3
T$\left(\frac{n}{2}\right)$ =$\frac{4\left(\frac{n^3}{8}\right)-\frac{n}{2}}{3}$ //Simplifica 4/8 dividindo por 4

$T\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{1(\frac{n^3}{2}) - \frac{n}{2}}{3}$ // Mdc 2 e 2

$T\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{\frac{n^3 - 2n}{2}}{3}$ // multiplica a fração por 1/3

$T\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n^3 - n}{6}$ //troca na equação anterior

$T(n) = 8 * \left(\frac{n^3 - n}{6}\right) + n$

$T(n) = \frac{4n^3 - n}{3}$ (passo indutivo provado)

Demonstrado que $8T\left(\frac{n}{2}\right) + n = \frac{4n^3 - n}{3}$ para n > 1

***(g)* T(1) = 1 ; T(n) = T(n/3) + n**

1ª Forma de resolução (segundos slides aula0901)

1) Fórmula original

T(n) = $T\left(\frac{n}{3}\right) + n$

2) T(n) está escrito em função de T(n/3)

3) Isole as equações para T(n/3) e T(n/9):

T(n) = $T\left(\frac{n}{3}\right) + n$

T(n/3) = $T\left(\frac{\frac{n}{3}}{3}\right) + \frac{n}{3}$

T(n/3) = $T\left(\frac{n}{9}\right) + \frac{n}{3}$

e

T(n/3/3) = $T\left(\frac{\frac{n}{3}}{9}\right) + \frac{\frac{n}{3}}{3}$

T(n/9) = $T\left(\frac{n}{27}\right) + \frac{n}{9}$

4) Substitua T(n/3) pelo valor que foi isolado acima e, em seguida, o mesmo para T(n/3)

- Substituindo o valor isolado de T(n/3) em

  T(n) = $T\left(\frac{n}{3}\right) + n$

  Temos

  T(n) = $\left(\left[\left(T\left(\frac{n}{9}\right)\right) + \frac{n}{3}\right]\right) + n$

  Simplificando

  T(n) = $T\left(\frac{n}{9}\right) + \frac{n}{3} + n$

- Agora substituindo o valor de T(n/4) em

  T(n) = $\left(T\left(\frac{n}{9}\right) + \frac{n}{3}\right) + n$

  Temos

  T(n) = $\left(\left[\left(T\left(\frac{n}{27}\right) + \frac{n}{9}\right) + \frac{n}{3}\right]\right) + n$

  Simplificando

  T(n) = $\left(T\left(\frac{n}{27}\right) + \frac{n}{9}\right) + \frac{n}{3} + n$

  T(n) = $T\left(\frac{n}{27}\right) + \left(\frac{n}{9}\right) + \left(\frac{n}{3}\right) + \left(\frac{n}{1}\right)$

  T(n) = $T\left(\frac{n}{3^3}\right) + \left(\frac{1}{3^2}\right)n + \left(\frac{1}{3^1}\right)n + \left(\frac{1}{3^0}\right)n$

  T(n) = $T\left(\frac{n}{3^3}\right) + \left(\frac{1}{3^2}\right)n + \left(\frac{1}{3^1}\right)n + \left(\frac{1}{3^0}\right)n$

  T(n) = $T\left(\frac{n}{3^3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 n + \left(\frac{1}{3}\right)^1 n + \left(\frac{1}{3}\right)^0 n$

5) Identifique a fórmula do i-ésimo passo

T(n) = $T\left(\frac{n}{3^i}\right) + n\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{i-2} + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^0\right]$

T(n) = $T\left(\frac{n}{3^i}\right)$ + Soma da PG a1=n e q=$\frac{1}{3}$

T(n) = $T\left(\frac{n}{3^i}\right) + (\sum_{i=0}^{(k-1)} \left(\frac{1}{3}\right)^i) * n$

Calculado para n=27

T(27)= $T\left(\frac{27}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^3 27$ //i=3

T(27)= $T(9) + \left(\frac{1}{3}\right)^3 27$

T(9)= $T\left(\frac{9}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 9$ //i=2

T(9)= $T(3) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 9$

T(3)= $T\left(\frac{3}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^1 3$ //i=1

T(3)=$T(1) + \left(\frac{1}{3}\right)^1 3$

T(1) = 1

T(3)= $1 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 3$

T(9)= $1 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 3 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 9$

T(27) =$1 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 3 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 9 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 27$

6) Descubra o valor de i de forma a igualar o parâmetro de T(x) ao parâmetro (valor de n) no caso base

$T\left(\frac{n}{3^i}\right)$ <-> T(1) <-> 1

$\frac{n}{3^i}$ = 1

n = 3^i => $x = b^a$ equivale $a = log_b x$

$i = log_3 n$

7) Substitua o valor de i na fórmula do i-ésimo caso

T(n) = $T\left(\frac{n}{3^i}\right) + n\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{i-2} + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^0\right]$

Forma geral

T(n) = $T\left(\frac{n}{3^3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 n + \left(\frac{1}{3}\right)^1 n + \left(\frac{1}{3}\right)^0 n$

Considerando

$\sum_{i=0}^{k} x^i = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$ //A.5 Página 832 CLRS (3ed)

$\sum_{i=0}^{k} x^i = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}$

A série geométrica x = 4

$\sum_{i=0}^{(k-1)} \left(\frac{1}{3}\right)^i = \left(\frac{1}{3}\right)^{(2)} * n + \left(\frac{1}{3}\right)^{(1)} * n + \left(\frac{1}{3}\right)^{(0)} * n$

//Substituindo na fórmula do somatório

$(\sum_{i=0}^{(k-1)} \left(\frac{1}{3}\right)^i) * n) = \left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{(k-1)+1} - 1}{\left(\frac{1}{3}\right) - 1}\right) * n$

$(\sum_{i=0}^{(k-1)} \left(\frac{1}{3}\right)^i * n) = \left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{k} - 1}{\left(\frac{1}{3}\right) - 1}\right) * n$

Substituindo k = $\log_3 n$

$(\sum_{i=0}^{(k-1)} \left(\frac{1}{3}\right)^i * n) = \left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{(\log_3 n)} - 1}{\left(\frac{1}{3}\right) - 1}\right) * n$

//Substituindo o resultado do somatório na fórmula do i-ésimo caso

T(n) = $T\left(\frac{n}{3^i}\right) + \left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{(\log_3 n)} - 1}{\left(\frac{1}{3}\right) - 1}\right) * n$

Considerando i= $\log_3 n$

T(n) = $T\left(\frac{n}{3^{\log_3 n}}\right) + \left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{(\log_3 n)} - 1}{\left(\frac{1}{3}\right) - 1}\right) * n$ //Propriedade(funções exponencial e logarítmica são inversas $a = b^{(\log_b a)} => 3^{(\log_3 n)} = n$

T(n) = $T\left(\frac{n}{n}\right) + \left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{(\log_3 n)} - 1}{\left(\frac{1}{3}\right) - 1}\right) * n$ //n dividido por n é igual 1

T(n) = $T(1) + \left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{(\log_3 n)} - 1}{\left(\frac{1}{3}\right) - 1}\right) * n$ //T(1)=1

T(n) = $1 + \left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{(\log_3 n)} - 1}{\left(\frac{1}{3}\right) - 1}\right) * n$ //Subtrair 1 de 1/3

T(n) = $1 + \left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{(\log_3 n)} - 1}{-\frac{1}{3}}\right) * n$ //Dividir por -1/3 é igual que multiplicar por -3

T(n) = $1 - 3\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{(\log_3 n)} - 1\right) * n$ //Distribui a exponencial na fração (1/3)

T(n) = $1 - 3\left(\frac{1^{(\log_3 n)}}{3^{(\log_3 n)}} - 1\right) * n$ //1 elevando a qualquer número é 1

T(n) = $1 - 3\left(\frac{1}{3^{(\log_3 n)}} - 1\right) * n$ //Propriedade(funções exponencial e logarítmica são inversas $a = b^{(\log_b a)} => 3^{(\log_3 n)} = n$

T(n) = $1 - 3n\left(\frac{1}{n} - 1\right)$ //Multiplica 3n pelos membros da equação

T(n) = $1 - \frac{3n}{n} + 3n$ // 3n dividido por n é 3

T(n) = $1 - 3 + 3n$

T(n) = $3n - 2$

8) Logo a complexidade da fórmula,

T(n) = $T\left(\frac{n}{3}\right) + n \in \Theta(n)$

9) Prova por indução,

Passo base: para n = 1, o resultado esperado é k

T(n) = $3n - 2$

T(1) = $3 * 1 - 2$

T(1) = $3 - 2$

T(1) = 1 (correto)

Passo indutivo: por hipótese de indução, assumimos que a fórmula está correta para n/2, isto é, T$\left(\frac{n}{3}\right)$ = $3\left(\frac{n}{3}\right) - 2$. Então, temos que verificar se T(n) =$3n - 2$, sabendo-se que T(n) = $T\left(\frac{n}{3}\right) + n$ e partindo da H.I. que T$\left(\frac{n}{3}\right)$ =$3\frac{n}{3} - 2$.

T(n) = $T\left(\frac{n}{3}\right) + n$

T$\left(\frac{n}{3}\right)$ = $(n - 2) + n$ //Troca na equação anterior

T(n)=$((n - 2) + n) + n$ //Retire os parênteses

T(n)=$n - 2 + n + n$ //soma os membros
T(n)=$3n - 2$ (passo indutivo provado)

Demonstrado que $T\left(\frac{n}{3}\right) + n$ = $3n - 2$ para n > 1

(h) T(1) = 1 ; T(n) = $\boldsymbol{7T\left(\frac{n}{4}\right)+n}$

1ª Forma de resolução (segundos slides aula0901)

1) Fórmula original

T(n) = $7T\left(\frac{n}{4}\right)+n$

2) T(n) está escrito em função de T($\frac{n}{4}$)

3) Isole as equações para T(n/4) e T(n/16):

T(n) = $7T\left(\frac{n}{4}\right)+n$

T(n/4) = $7T\left(\frac{\frac{n}{4}}{4}\right)+\frac{n}{4}$

T(n/4) = 7$\left(T\left(\frac{n}{16}\right)\right)+\frac{n}{4}$

e

T(n/4/4) = 7$\left(T\left(\frac{\frac{n}{4}}{16}\right)\right)+\frac{\frac{n}{4}}{4}$

T(n/16) = $7T\left(\frac{n}{64}\right)+\frac{n}{16}$

T(n/16) = 7$\left(T\left(\frac{n}{64}\right)\right)+\frac{n}{16}$

4) Substitua T(n/4) pelo valor que foi isolado acima e, em seguida, o mesmo para T(n/4)

- Substituindo o valor isolado de T(n/4) em

  T(n) = 7$\left(T\left(\frac{n}{4}\right)\right)+n$

  Temos

  T(n) = 7$\left([7\left(T\left(\frac{n}{16}\right)\right)+\frac{n}{4}]\right)+n$

  Simplificando

  T(n) = $7^2T\left(\frac{n}{16}\right)+7\frac{n}{4}+n$

- Agora substituindo o valor de T(n/4) em

  T(n) = 7$\left(7T\left(\frac{n}{16}\right)+\frac{n}{4}\right)+n$

  Temos

  T(n) = 7$\left([7\left(7T\left(\frac{n}{64}\right)+\frac{n}{16}\right)+\frac{n}{4}]\right)+n$

  Simplificando

  T(n) = $7^2\left(7T\left(\frac{n}{64}\right)+\frac{n}{16}\right)+7\frac{n}{4}+n$

  T(n) = $7^3T\left(\frac{n}{64}\right)+7^2\left(\frac{n}{16}\right)+7^1\left(\frac{n}{4}\right)+7^0\left(\frac{n}{1}\right)$

  T(n) = $7^3T\left(\frac{n}{4^3}\right)+\left(\frac{7^2}{4^2}\right)n+\left(\frac{7^1}{4^1}\right)n+\left(\frac{7^0}{4^0}\right)n$

  T(n) = $7^3T\left(\frac{n}{4^3}\right)+\left(\frac{7}{4}\right)^2n+\left(\frac{7}{4}\right)^1n+\left(\frac{7}{4}\right)^0n$

5) Identifique a fórmula do i-ésimo passo

T(n) = $7^iT\left(\frac{n}{4^i}\right)+n\left[\left(\frac{7}{4}\right)^{i-1}+\left(\frac{7}{4}\right)^{i-2}+\cdots+\left(\frac{7}{4}\right)^0\right]$

T(n) =$7^iT\left(\frac{n}{4^i}\right)$ + Soma da PG a1=n e q=$\frac{7}{4}$

T(n) = $7^iT\left(\frac{n}{4^i}\right) + (\sum_{i=0}^{(k-1)}\left(\frac{7}{4}\right)^i) * n$

Calculado para n=64

T(64)= $7 * T\left(\frac{64}{4}\right) + 64$ //i=3

T(64)= $7 * T(16) + 64$

T(16)= $7 * T\left(\frac{16}{4}\right) + 16$ //i=2

T(16)= $7 * T(4) + 16$

T(4)=$7 * T\left(\frac{4}{4}\right) + 4$ //i=1

T(4)=$7 * T(1) + 4$

T(1) = 1

T(4)=$7 * \; 1 + 4$

T(16) =$7 * 7 * 1 + 4 + 16$

T(64) = $7 * 7 * 7 * 1 + 4 + 16 + 64$

ou

T(n)=$7^iT(\frac{n}{4^i}) + \left(\frac{7}{4}\right)^{i-1}$*n

6) Descubra o valor de i de forma a igualar o parâmetro de T(x) ao parâmetro (valor de n) no caso base

$T\left(\frac{n}{4^i}\right)$ ⇔ T(1) ⇔ 1

$\frac{n}{4^i}$ = 1

n = 4^i => $x = b^a$ equivale $a = log_b x$

$i = log_4 n$

7) Substitua o valor de i na fórmula do i-ésimo caso

T(n) = $7T\left(\frac{n}{4^i}\right) + n\left[\left(\frac{7}{4}\right)^{i-1} + \left(\frac{7}{4}\right)^{i-2} + \cdots + \left(\frac{7}{4}\right)^0\right]$

Forma geral

T(n) = $7^3T\left(\frac{n}{4^3}\right) + \left(\frac{7}{4}\right)^2 n + \left(\frac{7}{4}\right)^1 n + \left(\frac{7}{4}\right)^0 n$

Considerando

$\sum_{i=0}^{k} x^i = 1 + x + x^2 + \ldots + x^k$ //A.5 Página 832 CLRS (3ed)

$\sum_{i=0}^{k} x^i = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}$

A série geométrica k = $\log_4 n$ e x = 7/4

$(\sum_{i=0}^{(k-1)}\left(\frac{7}{4}\right)^i) * n = \left(\frac{7}{4}\right)^2 * n + \left(\frac{7}{4}\right)^1 * n + \left(\frac{7}{4}\right)^0 * n$

Substituindo na fórmula do somatório

$(\sum_{i=0}^{(k-1)}\left(\frac{7}{4}\right)^i) * n = \left(\frac{\left(\frac{7}{4}\right)^{(k-1)+1} - 1}{\left(\frac{7}{4}\right) - 1}\right) * n$ //Soma +1 e -1

$(\sum_{i=0}^{(k-1)}\left(\frac{7}{4}\right)^i) * n = \left(\frac{\left(\frac{7}{4}\right)^{k} - 1}{\left(\frac{7}{4}\right) - 1}\right) * n$

Substituindo k = $\log_4 n$

$(\sum_{i=0}^{(k-1)} \left(\frac{7}{4}\right)^{i}) * n = \left(\frac{\left(\frac{7}{4}\right)^{\log_4 n} - 1}{\left(\frac{7}{4}\right) - 1}\right) * n$

//Substituindo o resultado do somatório na fórmula do i-ésimo caso

T(n) = $7^{i}T\left(\frac{n}{4^{i}}\right) + \left(\frac{\left(\frac{7}{4}\right)^{(\log_4 n} - 1}{\left(\frac{7}{4}\right) - 1}\right) * n$

Considerando i= $\log_4 n$

T(n) = $7^{\log_4 n}T\left(\frac{n}{4^{\log_4 n}}\right) + \left(\frac{\left(\frac{7}{4}\right)^{(\log_4 n)} - 1}{\left(\frac{7}{4}\right) - 1}\right) * n$ //Propriedade(funções exponencial e logarítmica são inversas $a = b^{(\log_b a)} => 4^{\log_4 n} = n$

T(n) = $7^{\log_4 n}T\left(\frac{n}{n}\right) + \left(\frac{\left(\frac{7}{4}\right)^{(\log_4 n)} - 1}{\left(\frac{7}{4}\right) - 1}\right) * n$ //n dividido por n é igual 1

T(n) = $7^{\log_4 n}T(1) + \left(\frac{\left(\frac{7}{4}\right)^{(\log_4 n)} - 1}{\left(\frac{7}{4}\right) - 1}\right) * n$ // T(1)=1

T(n) = $7^{\log_4 n} * 1 + \left(\frac{\left(\frac{7}{4}\right)^{(\log_4 n)} - 1}{\left(\frac{7}{4}\right) - 1}\right) * n$ // //MMC de (7/4)-1

T(n) = $7^{\log_4 n} + \left(\frac{\left(\frac{7}{4}\right)^{(\log_4 n)} - 1}{\frac{7-4}{4}}\right) * n$ //Subtrai 7-4

T(n) = $7^{\log_4 n} + \left(\frac{\left(\frac{7}{4}\right)^{(\log_4 n)} - 1}{\frac{3}{4}}\right) * n$ //Dividir por 3/4 é igual que multiplicar por 4

T(n) = $7^{\log_4 n} + 4 * \left(\frac{\left(\frac{7}{4}\right)^{(\log_4 n)} - 1}{3}\right) * n$ // Distribui a exponencial na fração (7/4)

T(n) = $7^{\log_4 n} + 4 * \left(\frac{\frac{7^{(\log_4 n)}}{4^{(\log_4 n)}} - 1}{3}\right) * n$ //Propriedade(funções exponencial e logarítmica são inversas $a = b^{(\log_b a)} => 4^{\log_4 n} = n$

T(n) = $7^{\log_4 n} + 4n * \left(\frac{\frac{7^{(\log_4 n)}}{n} - 1}{3}\right)$ // Inverter o n por 7 pela propriedade $a^{(\log_b c)} = c^{(\log_b a)}$

T(n) = $n^{\log_4 7} + 4n * \left(\frac{\frac{n^{(\log_4 7)}}{n} - 1}{3}\right)$ // Subtrair -1 no log por causa da divisão

T(n) = $n^{\log_4 7} + 4n * \left(\frac{n^{(\log_4 7) - 1} - 1}{3}\right)$ // Multiplicar por n

T(n) = $n^{\log_4 7} + \left(\frac{4n * (n^{(\log_4 7) - 1} - 1)}{3}\right)$ // Dividir por MDC 3

T(n) = $\frac{3n^{(\log_4 7)} + 4n(n^{(\log_4 7) - 1} - 1)}{3}$ // Multiplicar por 4n propriedade distributiva

T(n) = $\frac{3n^{(\log_4 7)} + 4nn^{(\log_4 7) - 1} - 4n}{3}$ // Use regra de potência$a^m a^n = a^{m+n}$

T(n) = $\frac{3n^{(\log_4 7)} + 4n^{(\log_4 7) - 1 + 1} - 4n}{3}$ // somar +1 e -1

T(n) = $\frac{3n^{(\log_4 7)} + 4n^{(\log_4 7)} - 4n}{3}$ // somar os termos semelhantes

T(n) = $\frac{7n^{(\log_4 7)} - 4n}{3}$

8) Logo a complexidade da fórmula,

T(n) = $7T\left(\frac{n}{4}\right) + n \in \Theta(n^{(\log_4 7})$

9) Prova por indução,

Passo base: para n = 1, o resultado esperado é k

T(n) = $\frac{7n^{(\log_4 7)}-4n}{3}$

T(1) = $\frac{7*1^{(\log_4 7)}-4*1}{3}$

T(1) = $\frac{7-4}{3}$

T(1) = $\frac{3}{3}$

T(1) = 1 (correto)

Passo indutivo: por hipótese de indução, assumimos que a fórmula está correta para n/4, isto é, T$\left(\frac{n}{4}\right)$ =$\frac{7\left(\frac{n}{4}\right)^{(\log_4 7)}-4\left(\frac{n}{4}\right)}{3}$. Então, temos que verificar se T(n) =$\frac{7n^{(\log_4 7)}-4n}{3}$, sabendo-se que T(n)=$7T\left(\frac{n}{4}\right) + n$ e partindo da H.I. que T$\left(\frac{n}{4}\right)$ =$\frac{7\left(\frac{n}{4}\right)^{(\log_4 7)}-4\left(\frac{n}{4}\right)}{3}$.

T(n)=$7T\left(\frac{n}{4}\right) + n$

T$\left(\frac{n}{4}\right)$ =$\frac{7\left(\frac{n}{4}\right)^{(\log_4 7)}-4\left(\frac{n}{4}\right)}{3}$ // Dividir 4 por 4

T$\left(\frac{n}{4}\right)$ =$\frac{7\left(\frac{n}{4}\right)^{(\log_4 7)}-n}{3}$ // Distribui o exponencial na fração (n/4)

T$\left(\frac{n}{4}\right)$ =$\frac{7\left(\frac{n^{(\log_4 7)}}{4^{(\log_4 7)}}\right)-n}{3}$ // Inverter o 4 por 7 pela propriedade $a^{(\log_b c)} = c^{(\log_b a)}$

T$\left(\frac{n}{4}\right)$ =$\frac{7\left(\frac{n^{(\log_4 7)}}{7^{(\log_4 4)}}\right)-n}{3}$ // $\log_4 4$=1

T$\left(\frac{n}{4}\right)$ =$\frac{7\left(\frac{n^{(\log_4 7)}}{7}\right)-n}{3}$ // Dividir 7 por 7

T$\left(\frac{n}{4}\right)$ =$\frac{n^{(\log_4 7)}-n}{3}$ // troca na equação anterior

T(n)=7 $\left(\frac{n^{(\log_4 7)}-n}{3}\right) + n$ //Multiplica por 7

T(n)=$\left(\frac{7(n^{(\log_4 7)}-n)}{3}\right) + n$ //MDC de 3 e 1

T(n)=$\left(\frac{7(n^{(\log_4 7)}-n)+3n}{3}\right)$ //Multiplica por 7

T(n)=$\left(\frac{7n^{(\log_4 7)}-7n+3n}{3}\right)$ //Soma os termos semelhantes

T(n)=$\left(\frac{7n^{(\log_4 7)}-4n}{3}\right)$ // (passo indutivo provado)

Demonstrado que $7T\left(\frac{n}{4}\right) + n$ = $\frac{7n^{(\log_4 7)}-4n}{3}$ para n > 1

(*i*) T(1) = 1 ; T(n) = $\boldsymbol{T\left(\frac{n}{4}\right)+n^2}$

1ª Forma de resolução (segundos slides aula0901)

1) Fórmula original

T(n) = $T\left(\frac{n}{4}\right)+n^2$

2) T(n) está escrito em função de T($\frac{n}{4}$)

3) Isole as equações para T(n/4) e T(n/16):

T(n) = $T\left(\frac{n}{4}\right)+n^2$

T(n/4) = $T\left(\frac{\frac{n}{4}}{4}\right)+\left(\frac{n}{4}\right)^2$

T(n/4) = $\left(T\left(\frac{n}{16}\right)\right)+\left(\frac{n}{4}\right)^2$

e

T(n/4/4) = $\left(T\left(\frac{\frac{n}{4}}{16}\right)\right)+\frac{\left(\frac{n}{4}\right)^2}{4}$

T(n/16) = $T\left(\frac{n}{64}\right)+\left(\frac{n}{16}\right)^2$

T(n/16) = $\left(T\left(\frac{n}{64}\right)\right)+\left(\frac{n}{16}\right)^2$

4) Substitua T(n/4) pelo valor que foi isolado acima e, em seguida, o mesmo para T(n/4)

- Substituindo o valor isolado de T(n/4) em

  T(n) = $\left(T\left(\frac{n}{4}\right)\right)+n^2$

  Temos

  T(n) = $\left(\left[\left(T\left(\frac{n}{16}\right)\right)+\left(\frac{n}{4}\right)^2\right]\right)+n^2$

  Simplificando

  T(n) = $T\left(\frac{n}{16}\right)+\left(\frac{n}{4}\right)^2+n^2$

- Agora substituindo o valor de T(n/4) em

  T(n) = $\left(T\left(\frac{n}{16}\right)+\left(\frac{n}{4}\right)^2\right)+n^2$

  Temos

  T(n) = $\left(\left[\left(T\left(\frac{n}{64}\right)+\left(\frac{n}{16}\right)^2\right)+\left(\frac{n}{4}\right)^2\right]\right)+n^2$

  Simplificando

  T(n) = $\left(T\left(\frac{n}{64}\right)+\left(\frac{n}{16}\right)^2\right)+\left(\frac{n}{4}\right)^2+n^2$

  T(n) = $T\left(\frac{n}{64}\right)+\left(\frac{n}{16}\right)^2+\left(\frac{n}{4}\right)^2+\left(\frac{n}{1}\right)^2$ //Distribui a exponenciação

  T(n) = $T\left(\frac{n}{64}\right)+\frac{n^2}{16^2}+\frac{n^2}{4^2}+\frac{n^2}{1^2}$ //Isola o n^2

  T(n) = $T\left(\frac{n}{64}\right)+\left(\frac{1}{16^2}\right)n^2+\left(\frac{1}{4^2}\right)n^2+\left(\frac{1}{1^2}\right)n^2$//16 é igual a 4^2

  T(n) = $T\left(\frac{n}{64}\right)+\left(\frac{1}{4^{2*2}}\right)n^2+\left(\frac{1}{4^{1*2}}\right)n^2+\left(\frac{1}{1^{0*2}}\right)n^2$

  T(n) = $T\left(\frac{n}{64}\right)+\left(\frac{1}{4^2}\right)^2n^2+\left(\frac{1}{4^2}\right)^1n^2+\left(\frac{1}{4^2}\right)^0n^2$

5) Identifique a fórmula do i-ésimo passo

T(n) = $T\left(\frac{n}{4^i}\right) + n^2\left[\left(\frac{1}{4^2}\right)^{i-1} + \left(\frac{1}{4^2}\right)^{i-2} + \cdots + \left(\frac{1}{4^2}\right)^{0}\right]$

T(n) = $T\left(\frac{n}{4^i}\right)$ + Soma da PG a1=n^2e q=$\frac{1}{4^2}$

T(n) = $T\left(\frac{n}{4^i}\right) + (\sum_{i=0}^{(k-1)}\left(\frac{1}{4^2}\right)^{i}) * n^2$

Calculado para n=64

T(64)= $T\left(\frac{64}{4}\right) + 4096$ //i=3

T(64)= $T(16) + 4096$

T(16)= $T\left(\frac{16}{4}\right) + 256$ //i=2

T(16)= $T(4) + 256$

T(4)=$T\left(\frac{4}{4}\right) + 16$ //i=1

T(4)=$T(1) + 16$

T(1) = 1

T(4)= $1 + 16$

T(16) =$1 + 16 + 256$

T(64) =$1 + 16 + 256 + 4096$

ou

T(n)=$T(\frac{n}{4^i}) + \left(\frac{1}{4^2}\right)^{i-1} * n^2$

6) Descubra o valor de i de forma a igualar o parâmetro de T(x) ao parâmetro (valor de n) no caso base

$T\left(\frac{n}{4^i}\right)$ ⇔ T(1) ⇔ 1

$\frac{n}{4^i}$ = 1

n = 4^i => $x = b^a$ equivale $a = log_b x$

$i = log_4 n$

7) Substitua o valor de i na fórmula do i-ésimo caso

T(n) = $T\left(\frac{n}{4^i}\right) + n^2\left[\left(\frac{1}{4^2}\right)^{i-1} + \left(\frac{1}{4^2}\right)^{i-2} + \cdots + \left(\frac{1}{4^2}\right)^{0}\right]$

Forma geral

T(n) = $T\left(\frac{n}{4^3}\right) + \left(\frac{1}{4^2}\right)^{2} n^2 + \left(\frac{1}{4^2}\right)^{1} n^2 + \cdots + \left(\frac{1}{4^2}\right)^{0} n^2$

Considerando

$\sum_{i=0}^{k} x^i = 1 + x + x^2 + \ldots + x^k$ //A.5 Página 8332 CLRS (3ed)

$\sum_{i=0}^{k} x^i = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}$

A série geométrica k = $\log_4 n$ e x =$\frac{1}{4^2}$

$\sum_{i=0}^{(k-1)}\left(\frac{1}{4^2}\right)^{i} * n^2 = \left(\frac{1}{4^2}\right)^{2} * n^2 + \left(\frac{1}{4^2}\right)^{1} * n^2 + \left(\frac{1}{4^2}\right)^{0} * n^2$

//Substituindo na fórmula do somatório

$\sum_{i=0}^{(k-1)}\left(\frac{1}{4^2}\right)^{i} * n^2 = \left(\frac{\left(\frac{1}{4^2}\right)^{(k-1)+1} - 1}{\left(\frac{1}{4^2}\right) - 1}\right) * n^2$ //Soma +1 e -1

$\sum_{i=0}^{(k-1)}\left(\frac{1}{4^2}\right)^i * n^2 = \left(\frac{\left(\frac{1}{4^2}\right)^k - 1}{\left(\frac{1}{4^2}\right) - 1}\right) * n^2$

Substituindo k = $\log_4 n$

$\sum_{i=0}^{(k-1)}\left(\frac{1}{4^2}\right)^i * n^2 = \left(\frac{\left(\frac{1}{4^2}\right)^{\log_4 n} - 1}{\left(\frac{1}{4^2}\right) - 1}\right) * n^2$

//Substituindo o resultado do somatório na fórmula do i-ésimo caso

T(n) = $T\left(\frac{n}{4^i}\right) + \left(\frac{\left(\frac{1}{4^2}\right)^{\log_4 n} - 1}{\left(\frac{1}{4^2}\right) - 1}\right) * n^2$

Considerando i= $\log_4 n$

T(n) = $T\left(\frac{n}{4^{\log_4 n}}\right) + \left(\frac{\left(\frac{1}{4^2}\right)^{\log_4 n} - 1}{\left(\frac{1}{4^2}\right) - 1}\right) * n^2$ //Propriedade(funções exponencial e logarítmica são inversas $a = b^{(\log_b a)}$ => $4^{\log_4 n} = n$

T(n) = $\left(\frac{n}{n}\right) + \left(\frac{\left(\frac{1}{4^2}\right)^{\log_4 n} - 1}{\left(\frac{1}{4^2}\right) - 1}\right) * n^2$ //n dividido por n é igual 1

T(n) = $T(1) + \left(\frac{\left(\frac{1}{4^2}\right)^{\log_4 n} - 1}{\left(\frac{1}{4^2}\right) - 1}\right) * n^2$ //T(1)=1

T(n) = $1 + \left(\frac{\left(\frac{1}{4^2}\right)^{\log_4 n} - 1}{\left(\frac{1}{4^2}\right) - 1}\right) * n^2$ //MMC de (1/(4^2))-1

T(n) = $1 + \left(\frac{\left(\frac{1}{4^2}\right)^{\log_4 n} - 1}{\frac{1-4^2}{4^2}}\right) * n^2$ //Subtrai 1-4^2

T(n) =$1 + \left(\frac{\left(\frac{1}{4^2}\right)^{\log_4 n} - 1}{-\frac{15}{4^2}}\right) * n^2$ //Dividir por -15/(4^2) é igual que multiplicar por -4^2

T(n) = $1 - 4^2 * \left(\frac{\left(\frac{1}{4^2}\right)^{\log_4 n} - 1}{15}\right) * n^2$ //Distribui a exponencial na fração (1/(4^2))

T(n) = $1 - 4^2 * \left(\frac{\frac{1^{(\log_4 n)}}{(4^2)^{(\log_4 n)}} - 1}{15}\right) * n^2$ //Um elevando a qualquer coisa é 1

T(n) = $1 - 4^2 * \left(\frac{\frac{1}{(4^2)^{(\log_4 n)}} - 1}{15}\right) * n^2$ //4^2 é igual 16

T(n) = $1 - 4^2 * \left(\frac{\frac{1}{16^{(\log_4 n)}} - 1}{15}\right) * n^2$ //Propriedade(funções exponencial e logarítmica são inversas $a = b^{(\log_b a)}$ => $16^{\log_4 n} = n^{\log_4 16} = n^2$

T(n) = $1 - 4^2 * \left(\frac{\frac{1}{n^2} - 1}{15}\right) * n^2$ //leva no n^2 para junto do 4^2

T(n) = $1 - 4^2 n^2 * \left(\frac{\frac{1}{n^2} - 1}{15}\right)$ //MDC de n^2 e 1

T(n) = $1 - 4^2 n^2 * \left(\frac{\frac{1-n^2}{n^2}}{15}\right)$ //Dividir por 15 é igual a multiplicar por 1/15

T(n) = $1 - 4^2 n^2 * \left(\frac{1-n^2}{n^2} * \frac{1}{15}\right)$ //Multiplica por 1/15

T(n) = $1 - 4^2\left(\frac{1-n^2}{15}\right)$ //Multiplica corta n^2

T(n) = $1 - \left(\frac{4^2(1-n^2)}{15}\right)$ //Multiplique por 4^2=16
T(n) = $1 - \left(\frac{16(1+n)(1-n)}{15}\right)$ //Multiplique por $(1 - n^2) = (1 + n)(1 - n)$
T(n) = $\frac{15+(16(1+n)(1-n))}{15}$ //Multiplique por 16
T(n) = $\frac{15+(-16-16n)(1-n)}{15}$ //Multiplique por -16-16n
T(n) = $\frac{15+(-16+16n-16n+16n^2)}{15}$ //-16n +16n = 0
T(n) = $\frac{15+(-16+16n^2)}{15}$ //15 - 16
T(n) = $\frac{-1\mp 16n^2}{15}$ //Reordena os elementos
T(n) = $\frac{16n^2-1}{15}$
ou
T(n) = $\frac{(4n+1)(4n-1)}{15}$

8) Logo a complexidade da fórmula,
T(n) = $T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$ ϵ $\Theta(n^2)$

9) Prova por indução,
Passo base: para n = 1, o resultado esperado é k
T(n) =$\frac{(4n+1)(4n-1)}{15}$
T(n) =$\frac{(4*1+1)(4*1-1)}{15}$
T(n) =$\frac{(4+1)(4-1)}{15}$
T(n) =$\frac{(5)(3)}{15}$
T(n) =$\frac{15}{15}$
T(1) = 1 (correto)

Passo indutivo: por hipótese de indução, assumimos que a fórmula está correta para n/4, isto é, T$\left(\frac{n}{4}\right)$ =$\frac{(4(\frac{n}{4})+1)(4(\frac{n}{4})-1)}{15}$. Então, temos que verificar se T(n) $\frac{(4n+1)(4n-1)}{15}$, sabendo-se que T(n) = $T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$ e partindo da H.I. que T$\left(\frac{n}{4}\right)$ =$\frac{(4(\frac{n}{4})+1)(4(\frac{n}{4})-1)}{15}$.
T(n)=$T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$.

T$\left(\frac{n}{4}\right)$ =$\frac{(4(\frac{n}{4})+1)(4(\frac{n}{4})-1)}{15}$//Simplificando multiplicação por 4 e divisão por 4
T$\left(\frac{n}{4}\right)$ =$\frac{(n+1)(n-1)}{15}$ // troca na equação anterior
T$\left(\frac{n}{4}\right)$ =$\frac{(n+1)(n-1)}{15} + n^2$
T$\left(\frac{n}{4}\right)$ =$\frac{(n^2-1)}{15} + n^2$
T$\left(\frac{n}{4}\right)$ =$\frac{(n^2-1)}{15} + n^2$
T$\left(\frac{n}{4}\right)$ =$\frac{n^2-1+15n^2}{15}$
T$\left(\frac{n}{4}\right)$ =$\frac{16n^2-1}{15}$

ou

T$\left(\frac{n}{4}\right)$ =$\frac{(4n+1)(4n-1)}{15}$ // (passo indutivo provado)

Demonstrado que $T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$ =$\frac{(4n+1)(4n-1)}{15}$ para n > 1

***(j)* T(1) = 1 ; T(n) = 3T(n/4) + n^2**

1ª Forma de resolução (segundos slides aula0901)

1) Fórmula original

T(n) = $3T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$

2) T(n) está escrito em função de T($\frac{n}{4}$)

3) Isole as equações para T(n/4) e T(n/16):

T(n) = $3T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$

T(n/4) =$3T\left(\frac{\frac{n}{4}}{4}\right) + \left(\frac{n}{4}\right)^2$

T(n/4) = 3 $\left(T\left(\frac{n}{16}\right)\right) + \left(\frac{n}{4}\right)^2$

e

T(n/4/4) =3 $\left(T\left(\frac{\frac{n}{4}}{16}\right)\right) + \left(\frac{\frac{n}{4}}{4}\right)^2$

T(n/16) = $3T\left(\frac{n}{64}\right) + \left(\frac{n}{16}\right)^2$

T(n/16) = 3 $\left(T\left(\frac{n}{64}\right)\right) + \left(\frac{n}{16}\right)^2$

4) Substitua T(n/4) pelo valor que foi isolado acima e, em seguida, o mesmo para T(n/4)

- Substituindo o valor isolado de T(n/4) em

  T(n) = 3 $\left(T\left(\frac{n}{4}\right)\right) + n^2$

  Temos

  T(n) = 3 $\left([3\left(T\left(\frac{n}{16}\right)\right) + \left(\frac{n}{4}\right)^2]\right) + n^2$

  Simplificando

  T(n) = $3^2T\left(\frac{n}{16}\right) + 3\left(\frac{n}{4}\right)^2 + n^2$

- Agora substituindo o valor de T(n/16) em

  T(n) = 3 $\left(3T\left(\frac{n}{16}\right) + \left(\frac{n}{4}\right)^2\right) + n^2$

  Temos

  T(n) = 3 $\left([3\left(3T\left(\frac{n}{64}\right) + \left(\frac{n}{16}\right)^2\right) + 3\left(\frac{n}{4}\right)^2]\right) + n^2$

  Simplificando

  T(n) = $3^2\left(3T\left(\frac{n}{64}\right) + \left(\frac{n}{16}\right)^2\right) + 3\left(\frac{n}{4}\right)^2 + n^2$

  T(n) = $3^3T\left(\frac{n}{64}\right) + 3^2\left(\frac{n}{16}\right)^2 + 3^1\left(\frac{n}{4}\right)^2 + 3^0\left(\frac{n}{1}\right)^2$ //Distribui a exponenciação

  T(n) = $3^3T\left(\frac{n}{64}\right) + 3^2\frac{n^2}{16^2} + 3^1\frac{n^2}{4^2} + 3^0\frac{n^2}{1^2}$ //Isola o n^2

  T(n) = $3^3T\left(\frac{n}{64}\right) + 3^2\left(\frac{1}{16^2}\right)n^2 + 3^1\left(\frac{1}{4^2}\right)n^2 + 3^0\left(\frac{1}{1^2}\right)n^2$//16 é igual a 4^2

  T(n) = $3^3T\left(\frac{n}{64}\right) + n^2 3^2\left(\frac{1}{4^{2*2}}\right) + n^2 3^1\left(\frac{1}{4^{1*2}}\right) + n^2 3^0\left(\frac{1}{1^{0*2}}\right)$

  T(n) = $3^3T\left(\frac{n}{64}\right) + n^2\left(\frac{3^2}{4^{2*2}}\right) + n^2\left(\frac{3^1}{4^{1*2}}\right) + n^2\left(\frac{3^0}{1^{0*2}}\right)$

  T(n) = $3^3T\left(\frac{n}{64}\right) + n^2\left(\frac{3}{4^2}\right)^2 + n^2\left(\frac{3}{4^2}\right)^1 + n^2\left(\frac{3}{4^2}\right)^0$

T(n) = $3^3 T\left(\frac{n}{4^3}\right) + n^2\left(\frac{3}{4^2}\right)^2 + n^2\left(\frac{3}{4^2}\right)^1 + n^2\left(\frac{3}{4^2}\right)^0$

T(n) = $\frac{3^3}{4^3} T(n) + n^2\left(\frac{3}{4^2}\right)^2 + n^2\left(\frac{3}{4^2}\right)^1 + n^2\left(\frac{3}{4^2}\right)^0$

T(n) = $\left(\frac{3}{4}\right)^3 T(n) + n^2\left(\frac{3}{4^2}\right)^2 + n^2\left(\frac{3}{4^2}\right)^1 + n^2\left(\frac{3}{4^2}\right)^0$

5) Identifique a fórmula do i-ésimo passo

T(n) = $3^i T\left(\frac{n}{4^i}\right) + n^2\left[\left(\frac{3}{4^2}\right)^{i-1} + \left(\frac{3}{4^2}\right)^{i-2} + \cdots + \left(\frac{3}{4^2}\right)^0\right]$

T(n) = $3^i T\left(\frac{n}{4^i}\right) +$ Soma da PG a1 = n^2 e q = $\frac{3}{4^2}$

T(n) = $3^i T\left(\frac{n}{4^i}\right) + (\sum_{i=0}^{(k-1)} \left(\frac{3}{4^2}\right)^i) * n^2$

Calculado para n=64

T(64)= $3 * T\left(\frac{64}{4}\right) + 4096$ //i=3

T(64)= $3 * T(16) + 4096$

T(16)= $3 * T\left(\frac{16}{4}\right) + 256$ //i=2

T(16)= $3 * T(4) + 256$

T(4)=$3 * T\left(\frac{4}{4}\right) + 16$ //i=1

T(4)=$T(1) + 16$

T(1) = 1

T(4)= $3 * 1 + 16$

T(16) =$3 * 3 * \ 1 + 16 + 256$

T(64) =$3 * 3 * 3 * 1 + 16 + 256 + 4096$

ou

T(n)= $3^i T\left(\frac{n}{4^i}\right) + \ \left(\frac{3}{4^2}\right)^{i-1} * n^2$

6) Descubra o valor de i de forma a igualar o parâmetro de T(x) ao parâmetro (valor de n) no caso base

$T\left(\frac{n}{4^i}\right)$ ⇔ T(1) ⇔ 1

$\frac{n}{4^i}$ = 1

$\frac{n}{4^i}$= 1

n = 4^i => $x = \ b^a$ equivale $a = log_b x$

$i = log_4 n$

7) Substitua o valor de i na fórmula do i-ésimo caso

T(n) $3^i T\left(\frac{n}{4^i}\right) + n^2\left[\left(\frac{3}{4^2}\right)^{i-1} + \left(\frac{3}{4^2}\right)^{i-2} + \cdots + \left(\frac{3}{4^2}\right)^0\right]$

Forma geral

T(n) = $3^3 T\left(\frac{n}{4^3}\right) + \left(\frac{3}{4^2}\right)^2 n^2 + \left(\frac{3}{4^2}\right)^2 n^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4^2}\right)^0 n^2$

Considerando

$\sum_{i=0}^{k} x^i = 1 + x + x^2 + \ldots + \ x^k$ //A.5 Página 833 CLRS (3ed)

$\sum_{i=0}^{k} x^i = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}$

A série geométrica x = $\frac{3}{4^2}$

$(\sum_{i=0}^{(k-1)}\left(\frac{3}{4^2}\right)^i) * n^2 = \left(\frac{3}{4^2}\right)^2 n^2 + \left(\frac{3}{4^2}\right)^1 n^2 + \left(\frac{3}{4^2}\right)^0 n^2$

//Substituindo na fórmula do somatório

$(\sum_{i=0}^{(k-1)}\left(\frac{3}{4^2}\right)^i) * n^2 = \left(\frac{\left(\frac{3}{4^2}\right)^{(k-1)+1} - 1}{\left(\frac{3}{4^2}\right) - 1}\right) * n^2$ //Soma +1 e -1

$(\sum_{i=0}^{(k-1)}\left(\frac{3}{4^2}\right)^i) * n^2 = \left(\frac{\left(\frac{3}{4^2}\right)^{k} - 1}{\left(\frac{3}{4^2}\right) - 1}\right) * n^2$

Substituindo k = $\log_4 n$

$(\sum_{i=0}^{(k-1)}\left(\frac{3}{4^2}\right)^i) * n^2 = \left(\frac{\left(\frac{3}{4^2}\right)^{\log_4 n} - 1}{\left(\frac{3}{4^2}\right) - 1}\right) * n^2$

//Substituindo o resultado do somatório na fórmula do i-ésimo caso

T(n) =$3^i T\left(\frac{n}{4^i}\right) + \left(\frac{\left(\frac{3}{4^2}\right)^{\log_4 n} - 1}{\left(\frac{3}{4^2}\right) - 1}\right) * n^2$

Considerando i= $\log_4 n$

T(n) $= 3^{\log_4 n} T\left(\frac{n}{4^{\log_4 n}}\right) + \left(\frac{\left(\frac{3}{4^2}\right)^{\log_4 n} - 1}{\left(\frac{3}{4^2}\right) - 1}\right) * n^2$ //Propriedade(funções exponencial e logarítmica são inversas $a = b^{(\log_b a)} => 4^{\log_4 n} = n$

T(n) = $n^{\log_4 3} T\left(\frac{n}{n}\right) + \left(\frac{\left(\frac{3}{4^2}\right)^{\log_4 n} - 1}{\left(\frac{3}{4^2}\right) - 1}\right) * n^2$ //n dividido por n é igual 1

T(n) = $n^{\log_4 3} T(1) + \left(\frac{\left(\frac{3}{4^2}\right)^{\log_4 n} - 1}{\left(\frac{3}{4^2}\right) - 1}\right) * n^2$ // T(1)=1

T(n) = $n^{\log_4 3} * 1 + \left(\frac{\left(\frac{3}{4^2}\right)^{\log_4 n} - 1}{\left(\frac{3}{4^2}\right) - 1}\right) * n^2$ // MDC de (3/4^2)-1

T(n) = $n^{\log_4 3} + \left(\frac{\left(\frac{3}{4^2}\right)^{\log_4 n} - 1}{\frac{3-4^2}{4^2}}\right) * n^2$ //Subtrai 3-4^2

T(n) =$n^{\log_4 3} + \left(\frac{\left(\frac{3}{4^2}\right)^{\log_4 n} - 1}{-\frac{13}{4^2}}\right) * n^2$ //Dividir por -13/4^2 é igual que multiplicar por -4^2/13

T(n) = $n^{\log_4 3} - \frac{4^2}{13} * \left(\left(\frac{3}{4^2}\right)^{\log_4 n} - 1\right) * n^2$ // Distribui a exponencial na fração (3/4^2)

T(n) = $3^{\log_4 n} - \frac{4^2}{13} * \left(\frac{3^{(\log_4 n)}}{2^{4(\log_4 n)}} - 1\right) * n^2$ //2^4-16

T(n) = $3^{\log_4 n} - \frac{4^2}{13} * \left(\frac{3^{(\log_4 n)}}{16^{(\log_4 n)}} - 1\right) * n^2$ //Propriedade $a^{(\log_b c)} = c^{(\log_b a)} => 16^{\log_4 n} = n^{\log_4 16}$

T(n) = $3^{\log_4 n} - \frac{4^2}{13} * \left(\frac{3^{(\log_4 n)}}{n^{(\log_4 16)}} - 1\right) * n^2$ // $n^{\log_4 16} = n^2$

T(n) $= 3^{\log_4 n} - \frac{4^2}{13} * \left(\frac{3^{(\log_4 n)}}{n^2} - 1\right) * n^2$ //Propriedade(funções exponencial e logarítmica são inversas $a = b^{(\log_b a)} => 3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$

T(n) = $n^{\log_4 3} - \frac{4^2}{13} * \left(\frac{n^{(\log_4 3)}}{n^2} - 1\right) * n^2$ // MDC n^2 e 1

T(n) = $n^{\log_4 3} - \frac{4^2 n^2}{13} * \left(\frac{n^{(\log_4 3)} - n^2}{n^2}\right)$ //Multiplica por $4^2 n^2$

T(n) = $n^{\log_4 3} + \left(\frac{-4^2 n^2 (n^{(\log_4 3)} - n^2)}{13\, n^2}\right)$ //Corta n^2

T(n) = $n^{\log_4 3} + \left(\frac{-4^2 (n^{(\log_4 3)} - n^2)}{13}\right)$ //Multiplica por -4^2

T(n) = $n^{\log_4 3} + \left(\frac{-4^2 n^{(\log_4 3)} + 4^2 n^2}{13}\right)$ //MMC 1 e 13

T(n) = $\left(\frac{13 n^{\log_4 3} - 4^2 n^{(\log_4 3)} + 4^2 n^2}{13}\right)$ //4^2-16

T(n) = $\left(\frac{13 n^{\log_4 3} - 16 n^{(\log_4 3)} + 16 n^2}{13}\right)$ //Subtrai

T(n) = $\left(\frac{-3 n^{\log_4 3} + 16 n^2)}{13}\right)$

8) Logo a complexidade da fórmula,

T(n) = $T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2 \in \Theta(n^2)$

O crescimento de uma função n^2 é maior $n^{\log_4 3}$

9) Prova por indução,

Passo base: para n = 1, o resultado esperado é k

T(n) =$\frac{-3 n^{\log_4 3} + 16 n^2}{13}$

T(1) $\frac{-3 * 1^{\log_4 3} + 16 * 1}{13}$

T(1) = $\frac{-3 + 16}{13}$

T(1) = $\frac{13}{13}$

T(1) = 1 (correto)

Passo indutivo: por hipótese de indução, assumimos que a fórmula está correta para n/4, isto é, T$\left(\frac{n}{4}\right)$ =$\frac{-3 (\frac{n}{4})^{\log_4 3} + 16 (\frac{n}{4})^2}{13}$. Então, temos que verificar se T(n) $\frac{-3 n^{\log_4 3} + 16 n^2}{13}$, sabendo-se que T(n) =$3T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$ e partindo da H.I. que T$\left(\frac{n}{4}\right)$ =$\frac{-3 (\frac{n}{4})^{\log_4 3} + 16 (\frac{n}{4})^2}{13}$.

T(n)=$3T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$

T$\left(\frac{n}{4}\right)$ =$\frac{-3 (\frac{n}{4})^{\log_4 3} + 16}{13}$ // troca na equação anterior

T(n)=$3\left(\frac{-3 (\frac{n}{4})^{\log_4 3} + 16 (\frac{n}{4})^2}{13}\right) + n^2$//Distribui o exponencial na fração

T(n)=$3(\frac{-3\left(\frac{n^{\log_4 3}}{4^{\log_4 3}}\right) + 16 (\frac{n^2}{4^2})}{13}) + n^2$ //Propriedade $a^{(\log_b c)} = c^{(\log_b a)} => 4^{\log_4 3} = 3^{\log_4 4}$

T(n)=$3(\frac{-3\left(\frac{n^{\log_4 3}}{3^{\log_4 4}}\right) + 16 (\frac{n^2}{16})}{13}) + n^2$ //Propriedade $\log_4 4 =$ 1 e corta 16 com 16

T(n)=$3(\frac{-3\left(\frac{n^{\log_4 3}}{3}\right) + n^2}{13}) + n^2$ //Corta o 3

T(n)=$3(\frac{-n^{\log_4 3} + n^2}{13}) + n^2$ //Multiplica por 3

T(n)=$\frac{-3 n^{\log_4 3} + 3 n^2}{13} + n^2$ //MDC de 13 e 1

T(n)=$\frac{-3 n^{\log_4 3} + 3 n^2 + 13 n^2}{13}$ //Soma termos semelhantes

T(n)=$\frac{-3 n^{\log_4 3} + 16 n^2}{13}$ (Passo indutivo provado)

Demonstrado que $T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$ = $\frac{-3n^{\log_4 3}+16n^2}{13}$ para n > 1

***(k)* T(1) = 1 ; T(n) = 4T(n/2) + n^2 lg n**

1ª Forma de resolução (segundos slides aula0901)

1) Fórmula original

T(n) = $4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \log n$

2) T(n) está escrito em função de T($\frac{n}{2}$)

3) Isole as equações para T(n/2) e T(n/4):

T(n) = $4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \log n$

T(n/2) =$4T\left(\frac{\frac{n}{2}}{2}\right) + \left(\frac{n}{2}\right)^2 \log(\frac{n}{2})$

T(n/2) = $4\left(T\left(\frac{n}{4}\right)\right) + \left(\frac{n}{2}\right)^2 \log(\frac{n}{2})$

e

T(n/2/2) =$4\left(T\left(\frac{\frac{n}{4}}{2}\right)\right) + \left(\frac{\frac{n}{2}}{2}\right)^2 \log(\frac{\frac{n}{2}}{2})$

T(n/4) = $4T\left(\frac{n}{8}\right) + \left(\frac{n}{4}\right)^2 \log(\frac{n}{4})$

4) Substitua T(n/2) pelo valor que foi isolado acima e, em seguida, o mesmo para T(n/4)

- Substituindo o valor isolado de T(n/2) em

  T(n) = $4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \log_2 n$

  Temos

  T(n) = $4\left([4\left(T\left(\frac{n}{4}\right)\right) + \left(\frac{n}{2}\right)^2 \log_2\left(\frac{n}{2}\right)]\right) + n^2 \log_2 n$

  Simplificando

  T(n) = $4^2T\left(\frac{n}{4}\right) + 4\left(\frac{n}{4}\right)^2 \log_2\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \log_2 n$

- Agora substituindo o valor de T(n/4) em

  T(n) = $4\left(4T\left(\frac{n}{4}\right) + \left(\frac{n}{2}\right)^2 \log_2\left(\frac{n}{2}\right)\right) + n^2 \log_2 n$

  Temos

  T(n) = $4\left(4\left(4T\left(\frac{n}{8}\right) + \left(\frac{n}{4}\right)^2 \log_2(\frac{n}{4})\ \right) + \left(\frac{n}{2}\right)^2 \log_2\left(\frac{n}{2}\right)]\right) + n^2 \log_2 n$

  Simplificando

  T(n) = $4\left(4^2T\left(\frac{n}{8}\right) + 4\left(\frac{n}{4}\right)^2 \log_2\left(\frac{n}{4}\right)\right) + \left(\frac{n}{2}\right)^2 \log_2\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \log_2 n$

  T(n) = $4^3T\left(\frac{n}{8}\right) + 4^2\left(\frac{n}{4}\right)^2 \log_2\left(\frac{n}{4}\right) + 4^1\left(\frac{n}{2}\right)^2 \log_2\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \log_2 n$

  T(n) = $4^3T\left(\frac{n}{8}\right) + 4^2\left(\frac{n}{4}\right)^2 \log_2\left(\frac{n}{4}\right) + 4^1\left(\frac{n}{2}\right)^2 \log_2\left(\frac{n}{2}\right) + 4^0\left(\frac{n}{1}\right)^2 \log_2\left(\frac{n}{1}\right)$//Distribui a exponenciação

  T(n) = $4^3T\left(\frac{n}{8}\right) + 4^2\left(\frac{n^2}{4^2}\right) \log_2\left(\frac{n}{4}\right) + 4^1\left(\frac{n^2}{4^1}\right) \log_2\left(\frac{n}{2}\right) + 4^0\left(\frac{n^2}{4^0}\right) \log_2\left(\frac{n}{1}\right)$ //Corta 4^i

  T(n) = $4^3T\left(\frac{n}{8}\right) + n^2 \log_2\left(\frac{n}{4}\right) + n^2 \log_2\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \log_2\left(\frac{n}{1}\right)$ //Transforma o denominador em 2^i

  T(n) = $4^3T\left(\frac{n}{2^3}\right) + n^2 \log_2\left(\frac{n}{2^2}\right) + n^2 \log_2\left(\frac{n}{2^1}\right) + n^2 \log_2\left(\frac{n}{2^0}\right)$ //Isola n^2

T(n) = $4^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + n^2[\log_2\left(\frac{n}{2^2}\right) + \log_2\left(\frac{n}{2^1}\right) + \log_2\left(\frac{n}{2^0}\right)]$ //Propriedade de log $(\frac{a}{b}) = \log a - \log b$

T(n) = $4^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + n^2[(\log_2 \mathrm{n} - \log_2 2^2) + n^2(\log_2 \mathrm{n} - \log_2 2^1) + n^2(\log_2 \mathrm{n} - \log_2 2^0)]$

T(n) = $4^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + n^2[(\log_2 \mathrm{n} - \log_2 2^2) + (\log_2 \mathrm{n} - \log_2 2^1) + (\log_2 \mathrm{n} - \log_2 2^0)]$

T(n) = $4^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + n^2[(\log_2 n - 2) + (\log_2 n - 1) + (\log_2 n - 0)]$ //calcula o log 2

T(n) = $4^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + n^2[(\log_2 n + \log_2 n + \log_2 n) + (-2-1-0)]$ //agrupa termos semelhantes

T(n) = $4^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + n^2[(\log_2 n + \log_2 n + \log_2 n) + (-2-1-0)]$ //Soma os logs

T(n) = $4^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + n^2[3\log_2 n + (-2-1-0)]$ //Inverte o sinal

T(n) = $4^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + n^2[3\log_2 n - 2 - 1 - 0]$ //Temos uma PA de 0 até 2

T(n) = $4^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + n^2[3\log_2 n - 3]$ //Multiplica por n^2

T(n) = $4^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + n^2 3\log_2 n - n^2 3$

5) Identifique a fórmula do i-ésimo passo

$T(n) = 4^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + n^2\, i \log_2 n - n^2[i - 1 + i - 2 + \cdots + 1 + 0]$

$T(n) = 4^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + n^2\, i \log_2 n - n^2$ [Somatório da PG a1=0 q=1/2]]

$T(n) = 4^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + n^2\, i \log_2 n - n^2\ [\sum_{i=0}^{(k-1)} i]$

Calculado para n=8

T(8)= $4 * T\left(\frac{8}{2}\right) + 8^2 \log 8$//i=3

T(8)= $4 * T(4) + 8^2 4$

T(4)= $4 * T\left(\frac{4}{2}\right) + 4^2 \log 4$//i=2

T(4)= $4 * T(2) + 4^2 2$

T(2)=$4 * T\left(\frac{2}{2}\right) + 2^2 \log 2$//i=1

T(2)=$4 * T(1) + 2^2 1$

T(1) = 1

T(2)= $4 * 1 + 2^2 1$

T(4) =$4 * 4 * 1 + 2^2 \log 2 + 4^2 2$

T(8) =$4 * 4 * 4 * 1 + 2^2 1 + 4^2 2 + 8^2 4$

6) Descubra o valor de i de forma a igualar o parâmetro de T(x) ao parâmetro (valor de n) no caso base

$T\left(\frac{n}{2^i}\right)$ ⇔ T(1) ⇔ 1

$\frac{n}{2^i}$ = 1

$\frac{n}{2^i}$= 1

n = 2^i => $x = b^a$ equivale $a = log_b x$

$i = log_2 n$

7) substitua o valor de i na fórmula do i-ésimo caso

$T(n) = 4^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + n^2\, i \log_2 n - n^2\, [(i-2) + (i-1) + .. + 0]$

Forma geral

$T(n) = 4^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + n^2 i\, \log_2 n - n^2[2 + 1 + 0]$

Considerando

$\sum_{i=1}^{k} i = ai + \ldots + an$ //A.1 Página 832 CLRS (3ed)

$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{1}{2}k(k+1)$

A série aritmética

$-n^2 * (\sum_{i=1}^{k-1} i) = -n^2 * (2 + 1)$

//Substituindo na fórmula do somatório

$-n^2 * (\sum_{i=1}^{k-1} i) = -n^2 * \frac{1}{2}(k-1)((k-1)+1)$ //Soma +1 e -1

$-n^2 * (\sum_{i=1}^{k-1} i) = -n^2 * \frac{1}{2}(k-1)(k)$ //multiplica k

$-n^2 * (\sum_{i=1}^{k-1} i) = -n^2 * \frac{1}{2}(k^2 - k)$ //divide por 2

$-n^2 * (\sum_{i=1}^{k-1} i) = -n^2 * \frac{(k^2-k)}{2}$

Substituindo k = $\log_2 n$

$-n^2 * (\sum_{i=1}^{k-1} i) = -n^2 * \frac{((\log_2 n)^2 - (\log_2 n))}{2}$

//Substituindo o resultado do somatório na fórmula do i-ésimo caso

$T(n) = 4^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + n^2\, i \log_2 n - n^2\, [\sum_{i=0}^{(k-1)} i]$

$T(n) = 4^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + n^2\, i \log_2 n - n^2 * \frac{((\log_2 n)^2 - (\log_2 n))}{2}$

Considerando i= $\log_2 n$

$T(n) = 4^{log_2 n} T\left(\frac{n}{2^{log_2 n}}\right) + n^2\, \log_2 n * \log_2 n - n^2 * \frac{((\log_2 n)^2 - (\log_2 n))}{2}$ //Propriedade(funções exponencial e logarítmica são inversas $a = b^{(\log_b a)}$ => $4^{\log_2 n} = n^{\log_2 4} = n^2$

$T(n) = n^2 T\left(\frac{n}{2^{log_2 n}}\right) + n^2\, (\log_2 n)^2 - n^2 * \frac{((\log_2 n)^2 - (\log_2 n))}{2}$ //Propriedade(funções exponencial e logarítmica são inversas $a = b^{(\log_b a)}$ => $2^{\log_2 n} = n^{\log_2 2} = n^1$

$T(n) = n^2 T\left(\frac{n}{n}\right) + n^2\, (\log_2 n)^2 - n^2 * \frac{((\log_2 n)^2 - (\log_2 n))}{2}$ // n/n igual a 1

$T(n) = n^2 T(1) + n^2\, (\log_2 n)^2 - n^2 * \frac{((\log_2 n)^2 - (\log_2 n))}{2}$ // T(1) = 1

$T(n) = n^2 * 1 + n^2 (\log_2 n)^2 - n^2 * \frac{((\log_2 n)^2 - (\log_2 n))}{2}$ // Subtrai os logs

$T(n) = n^2 + n^2 (\log_2 n)^2 - n^2 * \frac{((\log_2 n)^2 - (\log_2 n))}{2}$ // MDC de 1, 1, 2

$T(n) = \frac{2n^2 + 2n^2(\log_2 n)^2 - n^2(\log_2 n)^2 + n^2(\log_2 n)}{2}$ // Soma termos semelhantes

$T(n) = \frac{2n^2 + n^2(\log_2 n)^2 + n^2(\log_2 n)}{2}$ // Isola n^2

$T(n) = n^2 * (\frac{2 + (\log_2 n)^2 + (\log_2 n)}{2})$

8) Logo a complexidade da fórmula,

T(n) = $T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2 \log n \in \Theta(n^2 \log n)$

9) Prova por indução,
Passo base: para n = 1, o resultado esperado é k

$T(n) = n^2 * (\frac{2+(\log_2 n)^2+(\log_2 n)}{2})$

$T(n) = 1^2 * (\frac{2+(\log_2 1)^2+(\log_2 1)}{2})$

$T(n) = 1 * (\frac{2+(0)^2+(0)}{2})$

$T(n) = 1 * (\frac{2}{2})$

$T(n) = 1 * 1$

$T(1)$ = 1 (correto)

Passo indutivo: por hipótese de indução, assumimos que a fórmula está correta para n/4, isto é, $T\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)^2 * (\frac{2+\left(\log_2\left(\frac{n}{2}\right)\right)^2+\left(\log_2\left(\frac{n}{2}\right)\right)}{2})$. Então, temos que verificar se $T(n) = n^2 * (\frac{2+(\log_2 n)^2+(\log_2 n)}{2})$, sabendo-se que T(n) =$4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \log n$ e partindo da H.I. que $T\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)^2 * (\frac{2+\left(\log_2\left(\frac{n}{2}\right)\right)^2+\left(\log_2\left(\frac{n}{2}\right)\right)}{2})$.

T(n)=$4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \log n$ //trocar T(n/2) por $T\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)^2 * (\frac{2+\left(\log_2\left(\frac{n}{2}\right)\right)^2+\left(\log_2\left(\frac{n}{2}\right)\right)}{2})$

T(n)=$4\left(\left(\frac{n}{2}\right)^2 * (\frac{2+\left(\log_2\left(\frac{n}{2}\right)\right)^2+\left(\log_2\left(\frac{n}{2}\right)\right)}{2})\right) + n^2 \log n$ //Distribui exponencial

T(n)=$4\left(\frac{n^2}{4} * \frac{2+\left(\log_2\left(\frac{n}{2}\right)\right)^2+(\log_2\left(\frac{n}{2}\right))}{2}\right) + n^2 \log n$ //Multiplica por 4

T(n)=$\left(4\frac{n^2}{4} * (\frac{2+\left(\log_2\left(\frac{n}{2}\right)\right)^2+\left(\log_2\left(\frac{n}{2}\right)\right)}{2})\right) + n^2 \log n$ //Corta o 4

T(n)=$\left(n^2 * (\frac{2+\left(\log_2\left(\frac{n}{2}\right)\right)^2+\left(\log_2\left(\frac{n}{2}\right)\right)}{2})\right) + n^2 \log n$ //Propriedade de log $(\frac{a}{b}) = \log a - \log b$

T(n)=$\left(n^2 * (\frac{2+\left(\log_2 n - \log_2 2\right)^2+\left(\log_2 n - \log_2 2\right)}{2})\right) + n^2 \log n$ // Calcula log 2=1

T(n)=$\left(n^2 * (\frac{2+\left(\log_2 n-1\right)^2+\left(\log_2 n - 1\right)}{2})\right) + n^2 \log n$ //Troca $(\log_2 n - 1)^2$por$(\log_2 n - 1) * (\log_2 n - 1)$

T(n)=$\left(n^2 * (\frac{2+\left(\log_2 n-1\right)*\left(\log_2 n-1\right)+\left(\log_2 n - 1\right)}{2})\right) + n^2 \log n$ //Multiplica $(\log_2 n - 1) * (\log_2 n - 1)$

T(n)=$\left(n^2 * (\frac{2+\left(\log_2 n*\log_2 n-\log_2 n-\log_2 n+1\right)+\left(\log_2 n - 1\right)}{2})\right) + n^2 \log n$ //Retira os parênteses

T(n)=$\left(n^2 * (\frac{2+\log_2 n*\log_2 n-\log_2 n-\log_2 n+1+\log_2 n-1}{2})\right) + n^2 \log n$ //$\log_2 n * \log_2 n = (\log_2 n)^2$

T(n)=$\left(n^2 * (\frac{2+\left(\log_2 n\right)^2-\log_2 n-\log_2 n+1+\log_2 n-1}{2})\right) + n^2 \log n$ //+1 e -1

T(n)=$\left(n^2 * (\frac{2+\left(\log_2 n\right)^2-\log_2 n-\log_2 n+\log_2 n}{2})\right) + n^2 \log n$ //-log n +log n

T(n)=$\left(n^2 * (\frac{2+\left(\log_2 n\right)^2-\log_2 n}{2})\right) + n^2 \log n$ //multiplica n^2

T(n)=$\frac{n^2(2+(\log_2 n)^2-\log_2 n))}{2}+n^2\log n$ //MDC 2 e 1

T(n)=$\frac{n^2(2+(\log_2 n)^2-\log_2 n))+2n^2\log n}{2}$ // Multiplica n^2

T(n)=$\frac{n^2\left(2+(\log_2 n)^2-\log_2 n\right)+2n^2\log n}{2}$ //Multiplica n^2

T(n)=$\frac{2n^2+n^2(\log_2 n)^2-n^2\log_2 n+2n^2\log n}{2}$ //soma elementos semelhantes -n^2 log com +2n^2 log n

T(n)==$\frac{2n^2+n^2(\log_2 n)^2+n^2\log_2 n}{2}$ //Isola n^2

T(n)==$\frac{n^2(2+(\log_2 n)^2+\log_2 n)}{2}$ //Isola n^2 para fora da fração

T(n)=$n^2*(\frac{2+(\log_2 n)^2+\log_2 n}{2})$ (Passo indutivo provado)

Demonstrado que $4T\left(\frac{n}{4}\right)+n^2\log n$ =$n^2*(\frac{2+(\log_2 n)^2+\log_2 n}{2})$ para n >= 1