UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA – UFSC- CTC
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
PROJETO E ANÁLISE DE ALGORITMO
Prof. Alexandre Gonçalves Silva
Aluno: Osmar de Oliveira Braz Junior

Questão 5

5. Use o **teorema mestre** para determinar o tempo de execução dos algoritmos expressos pelas recorrências abaixo:

(Manber)- (slide 72 aula0825)
$\mathrm{T(n)} = \mathrm{aT}\left(\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{b}}\right) + c\, n^k$
$f(n) = cn^k$

Onde, a >= 1, e b >=2, k >=0, onde a e b são números naturais e c>0 um número real positivo.
Para saber se o Teorema Mestre pode ser aplicado ou não, temos que ter as constantes a ≥ 1 e b >= 2 e a função f(n) assintoticamente positiva.

Caso 1, se $log_b\, a\ > k$ ou $a > b^k$ então T está em $\Theta(n^{log_b\, a})$
Caso 2, se $log_b\, a\ = k$ ou $a = b^k$ então T está em $\Theta(n^k \log n)\ ou\ \Theta(n^{log_b\, a} \log n)$
Caso 3, se $log_b\, a\ < k$ ou $a < b^k$ então T está em $\Theta(n^k)$

(CLRS)-(slide 78 aula0825)
Sejam a >= 1 e b >1 constantes, seja f (n) uma função e seja T(n) definida para os inteiros não-negativos pela relação de recorrência
$\mathrm{T(n)} = \mathrm{aT}\left(\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{b}}\right) + \mathrm{f}(n)$
Então T(n) pode ser limitada assintoticamente da seguinte maneira:
Caso 1: se $f(n)\ \epsilon\ \mathrm{O}\left(n^{log_b\, a-\epsilon}\right)$ para alguma constante ϵ > 0, então $T(n) \epsilon\ \Theta\left(n^{log_b\, a}\right)$
Caso 2: se $f(n)\ \epsilon\ \Theta\left(n^{log_b\, a}\right)$, então $T(n) \epsilon\ \Theta\left(n^{log_b\, a}\ log_2\, n\right)$
Caso 3: se $f(n)\ \epsilon\ \Omega(n^{log_b\, a+\epsilon})$, para alguma constante ϵ > 0 e se $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$, para alguma constante c <1 e para n suficientemente grade, então $T(n) \epsilon\ \Theta(f(n))$

***(a)* T(n) = T(n/2) + Θ(1)**
R.:
a=1
b=2
f(n)= 1
$\Theta\left(n^{log_b\, a}\right) = \Theta(n^{log_2\, 1}) = \Theta(n^0) = 1$
Compara:
$f(n) = \Theta(n^{log_b\, a})$ ou seja,
1 = $\Theta(1)$ // É igual, portanto é o Caso 2 do Teorema Mestre

Temos o Caso 2 do Teorema Mestre, portanto
T(n) = T(n/2) + Θ(1)
$\mathrm{T(n)} = \Theta(n^{log_b\, a} * log_2\, n)$
$\mathrm{T(n)} = \Theta(1 * log_2\, n)$
$\mathrm{T(n)} = \Theta(log_2\, n)$
Então, $\mathrm{T(n)} = \Theta\big(\mathrm{f(n)}\big) = \Theta(log_2\, n)$

//CLRS
$f(n) \in \Theta(n^{log_b a})$
$1 = n^{log_b a}$
$1 = n^{log_2 1}$
$1 = n^0$
$1 = 1$

$f(n) = \Theta\left(n^{log_b a}\ log_2 n\right)$
$f(n) = \Theta\left(n^{log_2 1}\ log_2 n\right)$
$f(n) = \Theta(n^0\ log_2 n)$
$f(n) = \Theta(1 * log_2 n)$
$f(n) = \Theta(log_2 n)$. está ok
Então T(n)= $\Theta\big(\mathrm{f(n)}\big) = \Theta(log_2 n)$.

***(b)* T(n) = 2T(n/2) + n^3**
R.:
a=2
b=2
k=3 //Expoente de n
f(n) = n^3
$\Theta(n^{log_b a})$= $\Theta(n^{log_2 2})$=$\Theta(n^1)$=$\Theta(n)$
Compara:
$\mathrm{f(n)}\ =\ \Theta(n^{log_b a})$ ou seja,
n^3 <> $\Theta(n)$ // Não é igual portanto não é o Caso 2 do Teorema Mestre
$log_b a > k$ //Caso 1
$log_2 2 > 3$
$1 > 3$ //Portanto não é o caso 1
$log_b a < k$ //Caso 3
$log_2 2 < 3$
$1 < 3$ //Portanto é o caso 3

Temos o Caso 3 do Teorema Mestre, portanto
f(n) $\in \Omega(\ n^{log_b a+\varepsilon})$
$n^3 = n^{log_b a+\varepsilon}$
$n^3 = n^{log_2 2+\varepsilon}$
$3 = 1 + \varepsilon$
$\varepsilon = 3 - 1$
$\varepsilon = 2$

$f(n) = \Omega\left(n^{log_b a+\epsilon}\right)$
$f(n) = \Omega(n^{1+2})$. Se ϵ=2
$f(n) = \Omega(n^3)$. está ok
Então T(n)= $\Theta\big(\mathrm{f(n)}\big) = \Theta((n^3)$.

***(c)* T(n) = T(9n/10) + n**
R.:
a=1
b=9/10
k=1 //Expoente de n
f(n)= n

$\Theta(n^{log_b a})$= $\Theta(n^{log_{\frac{9}{10}} 1}) = \Theta(n^0)$= 1
Compara:
f(n) = $\Theta(n^{log_b a})$ ou seja,
n <> $\Theta(1)$ // Não é igual, portanto não é o Caso 2 do Teorema Mestre
$log_b\, a > k$ //Caso 1
$log_{\frac{9}{10}} 1 > k$
0 > 1 //Portanto não é o caso 1
$log_b\, a < k$ //Caso 3
$log_{\frac{9}{10}} 1 < k$
0 < 1 //Portanto é o caso 3

Temos o Caso 3 do Teorema Mestre, portanto
f(n) ∈ $\Omega(n^{log_b a+\varepsilon})$
$n = n^{log_b a+\varepsilon}$
$n^1 = n^{log_{\frac{9}{10}} 1+\varepsilon}$
$1 = log_{\frac{9}{10}} 1 + \varepsilon$
$1 = 0 + \varepsilon$
$\varepsilon = 1$

$f(n) = \Omega(n^{log_b a+\epsilon})$
$f(n) = \Omega(n^{0+\epsilon})$. Se ϵ=1
$f(n) = \Omega(n^1)$. está ok
Então $\mathrm{T(n)} = \Theta(\mathrm{f(n)}) = \Theta(n)$.

***(d)* T(n) = 16T(n/4) + n^2**
R.:
a=16
b=4
k=2 //Expoente de n
f(n) = n^2
$\Theta(n^{log_b a})$= $\Theta(n^{log_4 16})$=$\Theta(n^2)$
Compara:
f(n) = $\Theta(n^{log_b a})$ ou seja,
n^2 = $\Theta(n^2)$ //É igual portanto é o Caso 2 do Teorema Mestre

Temos o Caso 2 do Teorema Mestre, portanto
T(n) = 16T(n/4) + n^2
T(n) = $\Theta(n^{log_b a} * log_2 n)$
T(n) = $\Theta(n^2 * log_2 n)$
T(n) = $\Theta(n^2\, log_2 n)$
Então T(n)= $\Theta(\mathrm{f(n)}) = \Theta(n^2\, log_2 n)$

***(e)* T(n) = 7T(n/3) + n^2**
R.:
a=7
b=3
k=2 //Expoente de n
f(n) = n^2
$\Theta(n^{log_b a})$= $\Theta(n^{log_3 7})$=$\Theta(n^{1,771243749})$ => $log_3 7$ =1,771243749

Compara:
f(n) = Θ($n^{log_b a}$) ou seja,
n^2 = Θ($n^{log_3 7}$)
n^2 <> Θ($n^{1,771243749}$) // Não é igual portanto não é o Caso 2 do Teorema Mestre
$log_b a > k$ //Caso 1
$log_3 7 > k$
1,771243749 > 2 //Portanto não é o caso 1
$log_b a < k$ //Caso 3
$log_3 7 < k$
1,771243749 < 2 //Portanto é o caso 3

//CLRS
f(n) ∈ O($n^{log_b a+ε}$)
$n^2 = n^{log_b a+ε}$
$2 = log_b a + ε$
$2 = log_3 7 + ε$
$2 = 1,771243749 + ε$
$ε = 2 - 1,771243749$
$ε = 0,228756251$

Temos o Caso 3 do Teorema Mestre, portanto

T(n) = 7T(n/3) + n^2
T(n) = Θ($n^{log_b a+\epsilon}$)
T(n) = Θ($n^{1,771243749+0,228756251}$)

T(n) = Θ(n^2)
Então T(n)= $\Theta(\mathrm{f(n)}) = \Theta(n^2)$

***(f)* T(n) = 7T(n/2) + $\mathbf{n^2}$**
R.:
a=7
b=2
k=2 //Expoente de n
f(n) = O(n^2)
Θ($n^{log_b a}$)= Θ($n^{log_2 7}$) => $log_2 7$ =2,807354922
Compara:
f(n) = Θ($n^{log_b a}$) ou seja,
n^2 <> $n^{log_2 7}$ // Não é igual portanto não é o Caso 2 do Teorema Mestre
$log_b a > k$ //Caso 1
$log_2 7 > k$
2,807354922 > 1 //Portanto é o caso 1
$log_b a < k$ //Caso 3
$log_2 7 < k$
2,807354922 < 1 //Portanto não é o caso 3

Temos o Caso 1 do Teorema Mestre, portanto
T(n) = T(n/2) + Θ(1)
Então T(n)= $\Theta(\mathrm{f(n)}) = \Theta(n^{log_2 7})$

***(g)* T(n) = 2T(n/4) + $\sqrt{n}$**

R.:

T(n) = 2T(n/4) + $n^{\frac{1}{2}}$
a=2
b=4
k=$\frac{1}{2}$ //Expoente de n
f(n)= $n^{\frac{1}{2}}$
$\Theta(n^{log_b a})$= $\Theta(n^{log_4 2}) = \Theta(n^{\frac{1}{2}})$ =>$log_4 2 = 0{,}5$
Compara:
f(n) = $\Theta(n^{log_b a})$ ou seja,
$n^{\frac{1}{2}}$ = $\Theta\left(n^{\frac{1}{2}}\right)$ // É igual portanto é o Caso 2 do Teorema Mestre

Temos o Caso 2 do Teorema Mestre, portanto
T(n) = 2T(n/4) + $n^{\frac{1}{2}}$
T(n) = $\Theta(n^{log_b a} * log_2 n)$
T(n) = $\Theta(n^{\frac{1}{2}} * log_2 n)$
T(n) = $\Theta(n^{\frac{1}{2}}\ log_2 n)$
Então T(n)= $\Theta(\mathrm{f(n)}) = \Theta\left(n^{\frac{1}{2}} log_2 n\right)$ ou $\Theta(\sqrt{n}\, log_2 n)$

***(h)* T(n) = 3T(n/2) + n log n**
R.:
a=3
b=2
k=1 //Expoente de n
f(n)= $n \log n$
$\Theta(n^{log_b a})$= $\Theta(n^{log_2 3})$=$\Theta(n^{1{,}584962501})$ => $log_2 3$ =1,584962501
Compara:
f(n) = $\Theta(n^{log_b a})$ ou seja,
$n \log n$ <> $\Theta(n^{log_2 3})$ // Não é igual, portanto não é o Caso 2 do Teorema Mestre
$log_b a > k$ //Caso 1
$log_2 3 > 1$
1,584962501 > 1 //Portanto é o caso 1
$log_b a < k$ //Caso 3
$log_2 3 < 1$
1,584962501 < 1 //Portanto não é o caso 3

Temos o Caso 1 do Teorema Mestre, portanto
T(n) = $\Theta(n^{log_b a})$
Então T(n) = $\Theta(n^{log_2 3})$ ou T(n) = $\Theta(n^{1{,}584962501})$

***(i)* T(n) = 4T(n/2) + $n^2\sqrt{n}$**
R.:
T(n) = 4T(n/2) + $n^2.n^{\frac{1}{2}}$
T(n) = 4T(n/2) + $n^{2+\frac{1}{2}}$
T(n) = 4T(n/2) + $n^{\frac{4+1}{2}}$
T(n) = 4T(n/2) + $n^{\frac{5}{2}}$

a=4
b=2
k=$\frac{5}{2}$ //Expoente de n
f(n)= $n^{\frac{5}{2}}$
$\Theta(n^{\log_b a})$= $\Theta(n^{\log_2 4}) = \Theta(n^2)$ =>$\log_2 4 = 2$
Compara:
f(n) = $\Theta(n^{\log_b a})$ ou seja,
$n^{\frac{5}{2}}$ <> $\Theta(n^2)$ // Não é igual portanto não é o Caso 2 do Teorema Mestre
$\log_b a > k$ //Caso 1
$\log_2 4 > \frac{5}{2}$
2 > $\frac{5}{2}$ //Portanto não é o caso 1
$\log_b a < k$ //Caso 3
$\log_2 4 < \frac{5}{2}$
2 < $\frac{5}{2}$ //Portanto é o caso 3

Temos o Caso 3 do Teorema Mestre, portanto
T(n) = $\Theta(n^k)$
Então T(n)= $\Theta(\mathrm{f(n)}) = \Theta(n^{\frac{5}{2}})$

***(j)* T(n) = 27T(n/3) + n^3**
R.:
a=27
b=3
k=3
f(n) = n^3
$\Theta(n^{\log_b a})$= $\Theta(n^{\log_3 27}) = \Theta(n^3)$
Compara:
f(n) = $\Theta(n^{\log_b a})$ ou seja,
n^3 = $\Theta(n^3)$ // É igual portanto é o Caso 2 do Teorema Mestre

Temos o Caso 2 do Teorema Mestre, portanto
T(n) = 27T(n/3) + n^3
T(n) = $\Theta(n^{\log_b a} * \log_2 n)$
T(n) = $\Theta(n^3 * \log_2 n)$
Então T(n)= $\Theta(\mathrm{f(n)}) = \Theta(n^3 \log_2 n)$

***(k)* T(n) = 64T(n/4) + n^2**
R.:
a=64
b=4
k=2 //Expoente de n
f(n) = n^2
$\Theta(n^{\log_b a})$= $\Theta(n^{\log_4 64}) = \Theta(n^3)$
Compara:
f(n) = $\Theta(n^{\log_b a})$ ou seja,

n^2 <> $\Theta(n^3)$ // Não é igual, portanto não é o Caso 2 do Teorema Mestre
$log_b\, a > k$ //Caso 1
$log_4\, 64 > 2$
3 > 2 //Portanto é o caso 1
$log_b\, a < k$ //Caso 3
$log_2\, 4 < 2$
3 < 2 //Portanto não é o caso 3

Temos o Caso 1 do Teorema Mestre, portanto
T(n) = $\Theta(n^{log_b\, a})$
T(n) = $\Theta(n^{log_4\, 64})$
Então T(n)= $\Theta(\text{f(n)}) = \Theta(n^3)$

***(l)* T(n) = 4T(n/2) + n^2 log n**
R.:
a=4
b=2
k=? //Expoente de n
$f(n) = n^2\, log_2\, n$

1ª Forma de resolução
Compara:
f(n) = $\Theta(n^{log_b\, a})$ ou seja,
n^2 log n <> $\Theta(n^2)$ // Não é igual portanto não é o Caso 2 do Teorema Mestre
$log_b\, a >?$ //Caso 1
$log_2\, 4 >?$
2 > ? //Portanto não é o caso 1
$log_b\, a < k$ //Caso 3
$log_2\, 4 <?$
2 < ? //Portanto não é o caso 3
Desta forma não foi possível resolver pela falta de k.

2ª Forma de resolução
Compara:
$n^{log_b\, a+\epsilon} = f(n) = n^2\, log_2\, n$ para encontrar ϵ:
$n^{log_2\, 4+\epsilon} = n^2\, log_2\, n$
$n^{2+\epsilon} = n^2\, log_2\, n$
$\epsilon > 0$, caso 3 (a ser testado)

Verificando se o valor de c<1:
$af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$
$4f\left(\frac{n}{2}\right) \leq cf(n)$
$4\left(\frac{n}{2}\right)^2 log_2\left(\frac{n}{2}\right) \leq c\, n^2 log_2\, n$
$n^2(log_2 n - log_2\, 2) \leq c\, n^2 log_2\, n$
$log_2 n - 1 \leq c\, log_2\, n$
$\frac{log_2 n-1}{log_2\, n} \leq c$

Observe que o denominador $(log_2\, n)$ sempre excederá o numerador $(log_2 n - 1)$ em uma unidade. Conclui-se que a fração sempre será menor que 1, confirmando que c<1.

Resumindo, ϵ >0, c<1, portanto Caso 3 (confirmado)

Então T(n)= $\Theta\left(\mathrm{f(n)}\right) = \Theta(n^2 log_2 n)$