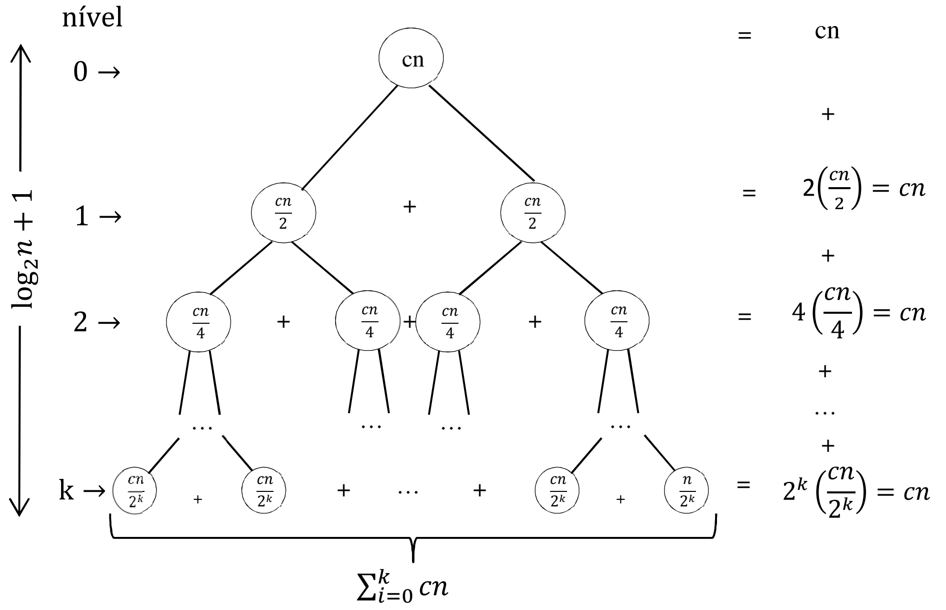
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA – UFSC- CTC
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
PROJETO E ANÁLISE DE ALGORITMO
Prof. Alexandre Gonçalves Silva
Aluno: Osmar de Oliveira Braz Junior

Questão 6

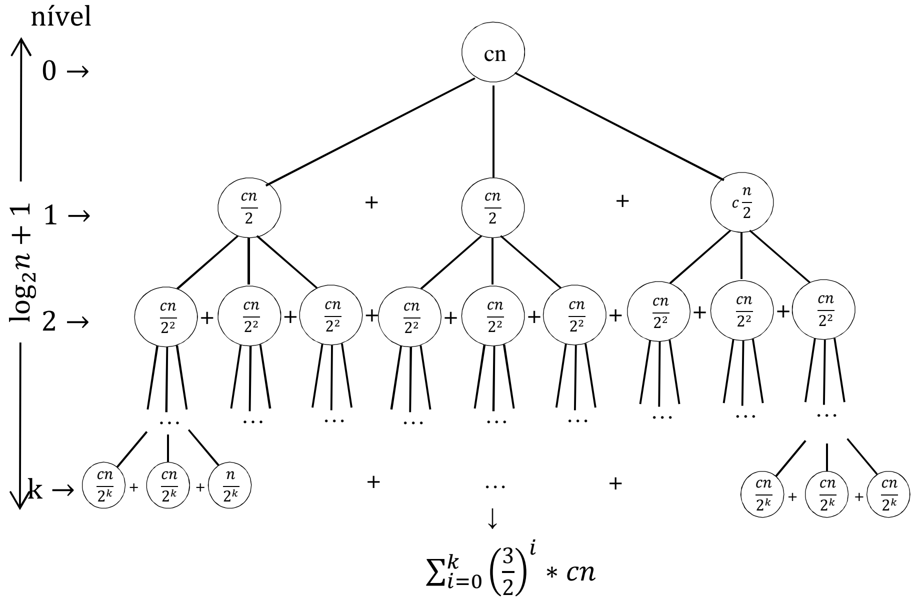
6. Use o **método de árvore de recursão** para determinar o tempo de execução dos algoritmos expressos pelas recorrências abaixo:

***(a)* T(n) = 2T(n/2) + Θ(n) (merge sort)**



Temos,
Para $\frac{n}{2^k}$ =1 <=> k = $\log_2 n$
Temos $k = \log_2 n$ //Níveis
Não precisa de somatório por que foi simplificado
$T(n) = \mathrm{c}n + 2\left(\frac{cn}{2}\right) + 4\left(\frac{cn}{4}\right) + \cdots + \Theta(n)$
$T(n) = \mathrm{c}n + \mathrm{cn} + cn + \cdots + \Theta(n)$
$T(n) = \mathrm{k} * \ \mathrm{c}n + \Theta(n)$
Substituindo $k = \log_2 n$ em $T(n) = \mathrm{k} * \ \mathrm{c}n + \Theta(n)$
$T(n) = \log_2 n * \ \mathrm{c}n + \Theta(n)$
Desprezando o termo de menor grau tempos:
$T(n) = cn * \log_2 n$
$T(n) = \Theta(n * \log_2 n)$

***(b)* T(n) = 3T(n/2) + Θ(n)**



= cn

+

$= 3 * \left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{1} cn$

+

$= 9 * \left(\frac{n}{4}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{2} * cn$

+

…

+

$= 3^{k} * \left(\frac{n}{2^{k}}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{k} * cn$

Onde k=log n

Fórmula do i-ésimo passo

$T(n) = \left(\frac{3}{2}\right)^{(i-1)} * cn + \left(\frac{3}{2}\right)^{(i-2)} * cn + \left(\frac{3}{2}\right)^{(0)} * cn$

$T(n) = cn * [\left(\frac{3}{2}\right)^{(i-1)} + \left(\frac{3}{2}\right)^{(i-2)} + \cdots + \left(\frac{3}{2}\right)^{(0)}]$

$T(n) = cn * \sum_{i=0}^{k}\left(\frac{3}{2}\right)^{i}$

$\sum_{i=0}^{k} x^{i} = 1 + x + x^{2} + \ldots + x^{k}$ //A.5 Página 832 CLRS (3ed)

$\sum_{i=0}^{k} x^{i} = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}$

A série geométrica x =$\frac{3}{2}$

Temos,

Para $\frac{n}{2^{k}}$ =1 <=> k = $\log_2 n$ níveis

Substituindo na fórmula do somatório

$T(n) = cn * \sum_{i=0}^{k}\left(\frac{3}{2}\right)^{i}$

$T(n) = cn * \frac{x^{k+1}-1}{x-1}$

$T(n) = cn * \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}-1}{\frac{3}{2}-1}$ //MMC de 2 e 1

$T(n) = cn * \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}-1}{\frac{3-2}{2}}$ //Subtrai 3-2

$T(n) = cn * \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}-1}{\frac{1}{2}}$ //Dividir por ½ é igual a multiplicar por 2

$T(n) = 2cn * (\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} - 1)$ //Distribui a exponencial na fração (3/2)

$T(n) = 2cn * (\left(\frac{3^{k+1}}{2^{k+1}}\right) - 1)$ //Multiplica por 2

$T(n) = cn * (\left(2 * \frac{3^{k+1}}{2^{k+1}}\right) - 2)$ //Retira 1 do expoente de 2

$T(n) = cn * (\left(\frac{3^{k+1}}{2^{k}}\right) - 2)$ //Retira 1 do expoente de 2

Trocando $\mathrm{k} = \log_2 n$

$T(n) = cn * (\frac{3^{\log_2 n+1}}{2^{\log_2 n}} - 2)$

$T(n) = cn * (\frac{3.3^{\log_2 n}}{2^{\log_2 n}} - 2)$

$T(n) = cn * (\frac{3.n^{\log_2 3}}{2.n^{\log_2 2}} - 2)$

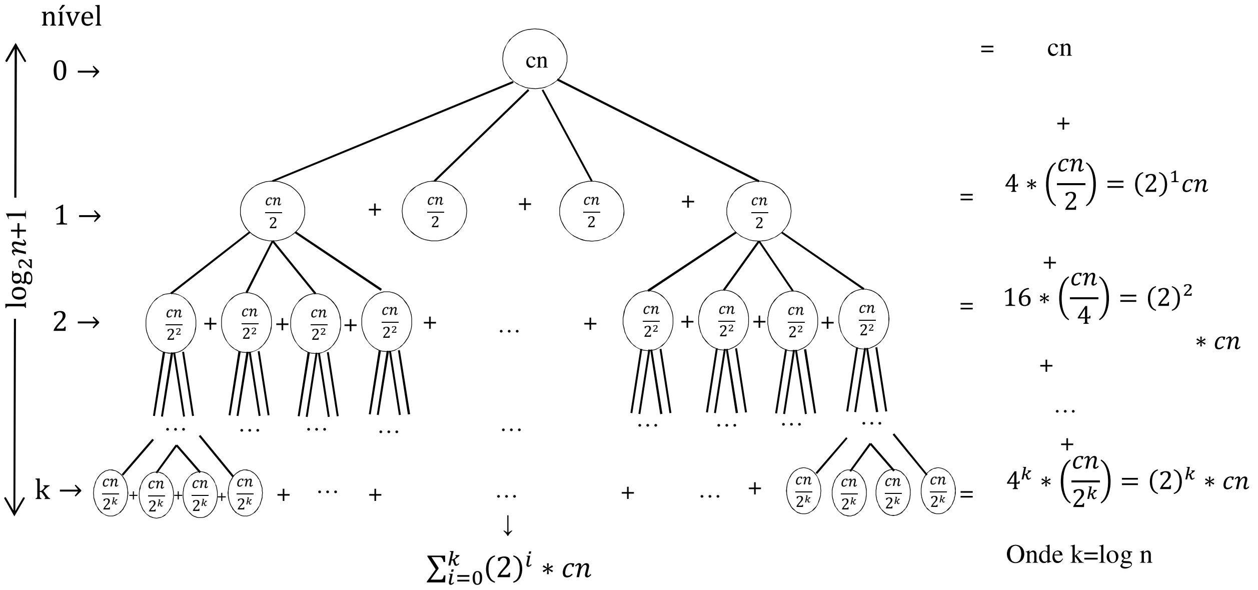
$T(n) = cn * (\frac{3.n^{\log_2 3}}{2.n^1} - 2)$

$T(n) = 2n * (\frac{3.n^{\log_2 3}}{2n}) - 2n$ //Corta 2n

$T(n) = 3cn^{\log_2 3} - 2cn$

$T(n) = \Theta(n^{\log_2 3})$

(c) **T(n) = 4T(n/2) + Θ(n)**



Fórmula do i-ésimo passo

$T(n) = (2)^{(i-1)} * cn + (2)^{(i-2)} * cn + (2)^{(0)} * cn$

$T(n) = cn * [(2)^{(i-1)} + (2)^{(i-2)} + \cdots + (2)^{(0)}]$

$T(n) = cn * \sum_{i=0}^{k}(2)^i$

$\sum_{i=0}^{k} x^i = 1 + x + x^2 + \ldots + x^k$ //A.5 Página 832 CLRS (3ed)

$\sum_{i=0}^{k} x^i = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}$

A série geométrica x =2

Temos,

Para $\frac{n}{2^k}$ =1 <=> k = $\log_2 n$ níveis

Substituindo na fórmula do somatório

$T(n) = cn * \sum_{i=0}^{k}(2)^i$

$T(n) = cn * \frac{x^{k+1}-1}{x-1}$

$T(n) = cn * \frac{2^{k+1}-1}{2-1}$

$T(n) = cn * \frac{2^{k+1}-1}{1}$

$T(n) = cn * (2^{k+1} - 1)$

Trocando k = $\log_2 n$

$T(n) = cn * (2^{\log_2 n+1} - 1)$

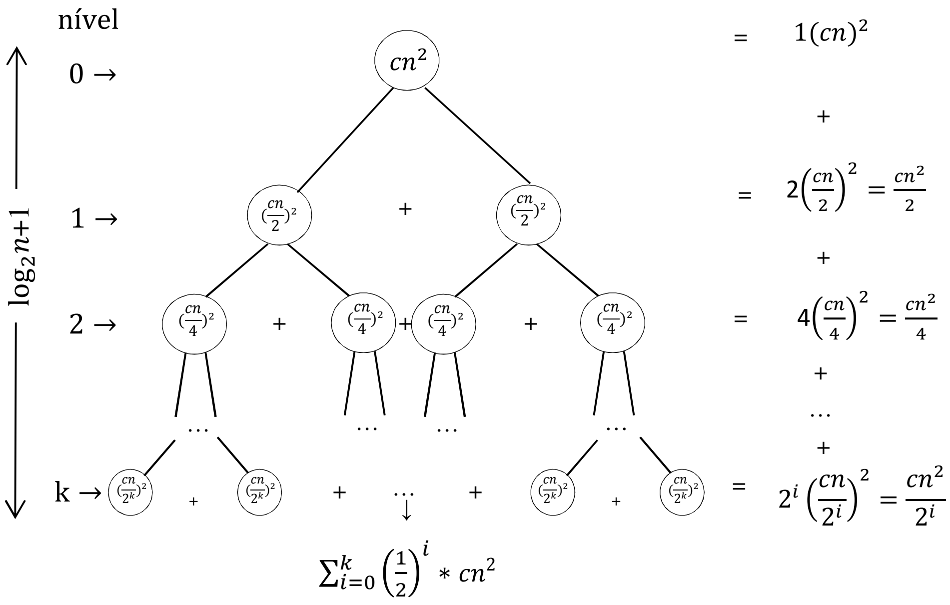
$T(n) = cn * (2.n^{\log_2 2} - 1)$

$T(n) = cn * (2.n^1 - 1)$

$T(n) = 2.cn^2 - n$

$T(n) = \Theta(n^2)$

(d) **T(n) = 2T(n/2) + Θ(n^2)**



Fórmula do i-ésimo passo

$T(n) \; = \; \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} * cn^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{(i-2)} * cn^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{(0)} * cn^2$

$T(n) = cn^2 * [\left(\frac{1}{2}\right)^{(i-1)} + \left(\frac{1}{2}\right)^{(i-2)} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{(0)}]$

$T(n) = cn^2 * \sum_{i=0}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^i$

$\sum_{i=0}^{k} x^i \; = 1 + x + x^2 + \ldots + \; x^k$ //A.5 Página 832 CLRS (3ed)

$\sum_{i=0}^{k} x^i \; = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}$

A série geométrica x =$\frac{1}{2}$

Temos,

Para $\frac{n}{2^k}$ =1 <=> k = $\log_2 n$ níveis

Substituindo na fórmula do somatório

$T(n) = cn^2 * \sum_{i=0}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^i$

$T(n) = cn^2 * \frac{x^{k+1}-1}{x-1}$

$T(n) = cn^2 * \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}-1}{\frac{1}{2}-1}$ //MMC de 2 e 1

$T(n) = cn^2 * \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}-1}{\frac{1-2}{2}}$ //Subtrai 1-2

$T(n) = cn^2 * \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}-1}{-\frac{1}{2}}$ //Dividir por -½ é igual a multiplicar por -2

$T(n) = -2cn^2 * (\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} - 1)$ //Distribui a exponencial na fração (1/2)

$T(n) = -2cn^2 * (\left(\frac{1^{k+1}}{2^{k+1}}\right) - 1)$ //1 elevando a k+1 é 1

$T(n) = -2cn^2 * (\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) - 1)$

Trocando k = $\log_2 n$

$T(n) = -2cn^2 * (\left(\frac{1}{2^{\log_2 n+1}}\right) - 1)$ // Expoente +1 é uma multiplicação da base

$T(n) = -2cn^2 * ((\frac{1}{2.2^{\log_2 n}}) - 1)$ //Propriedade (funções exponencial e logarítmica são inversas $a = b^{(\log_b a)}$ => $2^{(\log_2 n)} = n^1$

$T(n) = -2cn^2 * ((\frac{1}{2.n^1}) - 1)$ // Retira o 1 do expoente

$T(n) = -2cn^2 * ((\frac{1}{2n}) - 1)$ //Multiplicar por 2cn^2

$T(n) = -2cn^2 * ((\frac{1}{2n}) - 1)$ //Multiplicar por 2cn^2

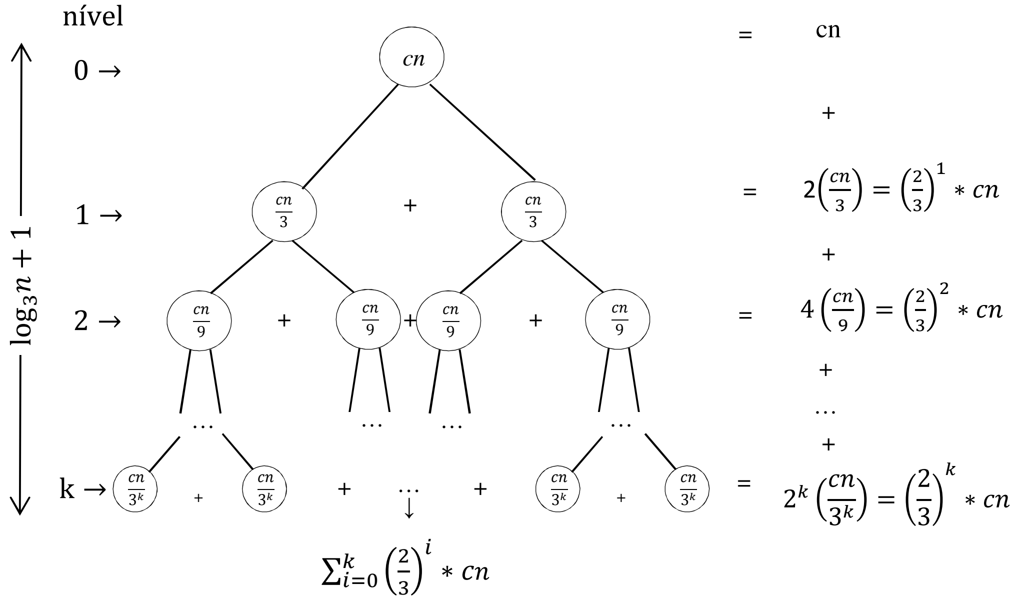
$T(n) = -\frac{2cn^2}{2n} + 2cn^2$ //Elimina 2 com 2 e um n com n

$T(n) = -cn + 2cn^2$ //Reordena os elementos

$T(n) = 2cn^2 - cn$

$T(n) = \Theta(n^2)$

***(e)* T(n) = 2T(n/3) + Θ(n)**



Fórmula do i-ésimo passo

$T(n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} * cn + \left(\frac{2}{3}\right)^{(i-2)} * cn + \left(\frac{2}{3}\right)^{(0)} * cn$

$T(n) = n * [\left(\frac{2}{3}\right)^{(i-1)} + \left(\frac{2}{3}\right)^{(i-2)} + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{(0)}]$

$T(n) = cn * \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{2}{3}\right)^i$

$\sum_{i=0}^{k} x^i = 1 + x + x^2 + \ldots + x^k$ //A.5 Página 832 CLRS (3ed)

$\sum_{i=0}^{k} x^i = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}$

A série geométrica x =$\frac{2}{3}$

Temos,

Para $\frac{n}{3^k}$ =1 <=> k = $\log_3 n$ níveis

Substituindo na fórmula do somatório

$T(n) = cn * \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^i$

$T(n) = cn * \frac{x^{k+1}-1}{x-1}$

$T(n) = cn * \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}-1}{\frac{2}{3}-1}$ //MMC de 3 e 1

$T(n) = cn * \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}-1}{\frac{2-3}{3}}$ // Subtrai 2- 3

$T(n) = cn * \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}-1}{-\frac{1}{2}}$ //Dividir por -1/2 é igual multiplicar -2

$T(n) = -2cn * (\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} - 1)$ //Distribui

$T(n) = -2cn * (\left(\frac{2^{k+1}}{3^{k+1}}\right) - 1)$

Trocando k = $\log_2 n$

$T(n) = -3cn * (\left(\frac{2^{\log_3 n+1}}{3^{\log_3 n+1}}\right) - 1)$

$T(n) = -3cn * (\left(\frac{2.2^{\log_3 n}}{3.3^{\log_3 n}}\right) - 1)$

$$T(n) = -3cn * ((\frac{2.n^{\log_3 2}}{3.n^{\log_3 3}}) - 1)$$
$$T(n) = -3cn * ((\frac{2.n^{\log_3 2}}{3.n^1}) - 1)$$
$$T(n) = -3cn * \left(\frac{2.n^{\log_3 2}}{3.n^1}\right) + 3cn$$
$$T(n) = -2cn^{\log_3 2} + 3cn$$
$$T(n) = \Theta(n)$$