Introdução aos filtros analógicos: análise de circuitos, resposta em frequência e síntese

Osmar Tormena Júnior, Prof. Dr.

2025

Sumário

Capítulo 1

Transformada de Laplace

Em unidades curriculares anteriores, foi abordado (dentre outras coisas) a análise de circuitos como o da Figura 1.1.

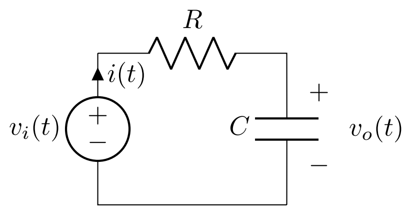

Figura 1.1: Circuito RC.

Pela Lei das Tensões de Kirchoff, a análise do circuito resulta no seguinte sistema de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares e com Coeficientes Constantes (EDO)

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{RC}i(t) = \dfrac{1}{R}\dfrac{\mathrm{d}v_i(t)}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}v_o(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{C}i(t) \end{cases}, \tag{1.1}$$

cuja solução (para $t \geq 0$) deve satisfazer a condição inicial $v_o(0)$ — a tensão inicial do capacitor.

A grande maioria dos alunos não tem uma experiência agradável modelando e resolvendo circuitos dessa maneira. Sistemas de EDO são trabalhosos. Há a necessidade de uma apurada intuição para transformar a tensão inicial do capacitor numa condição adequada à solução da corrente de malha $i(t)$ e, posteriormente, para a obtenção analítica de $v_o(t)$.

A transformada de Laplace (TL), é uma ferramenta útil que se aplica muito bem à solução de EDO (ou sistemas de EDO), como a Eq. (1.1). A TL de uma função real $x(t)$ é definida por

$$\boxed{X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t}, \tag{1.2}$$

sendo s uma variável complexa e $X(s)$ uma função complexa — correspondendo à representação de $x(t)$ no domínio de Laplace. Dizemos que $x(t)$ e $X(s)$ formam um par transformado de Laplace $x(t) \longleftrightarrow X(s)$.

O domínio de Laplace não possui uma interpretação física simples. Seu poder e utilidade está na simplificação da trabalho matemático necessário para resolver sistemas como da Eq. (1.1). Por exemplo, pela *propriedade de diferenciação*[1] da TL

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \longleftrightarrow sX(s) - x(0). \tag{1.3}$$

Assim, aplicando a TL sobre as equações de tensão e corrente sobre um resitor

$$v(t) = Ri(t) \longleftrightarrow V(s) = RI(s)$$

e um capacitor

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \longleftrightarrow I(s) = C(V(s) - v(0)).$$

Tomando *condições iniciais nulas* — $v(0) = 0$, para o capacitor — podemos definir as *impedâncias* ($Z(s) = V(s)/I(s)$) desses elementos como: $Z(s) = R$ para o resistor; e $Z(s) = 1/sC$ para o capacitor. Assim, o circuito da Figura 1.1 pode ser redesenhado como na Figura 1.2.

[1] A prova da Eq. (1.3) envolve uma elaborada integração por partes além de uma análise de limites dependendo da continuidade de $x(t)$ na origem ($t = 0$).

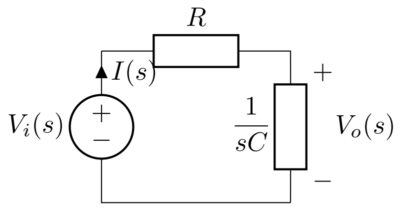

Figura 1.2: Divisor "resistivo" de tensão.

A representação dos componentes de circuito através de suas impedâncias facilita a análise, pois as regras básicas de análise para redes puramente resistivas valem. Assim, aplicando o resultado do *divisor resistivo de tensão*, podemos escrever

$$V_o(s) = \frac{\frac{1}{sc}}{R + \frac{1}{sC}} V_i(s). \tag{1.4}$$

Por definição, a razão entre a TL de uma variável de saída e a TL de uma variável de entrada é chamada de *função de transferência*. Para nossos circuitos, as funções de transferência serão denotadas por $H(s)$. Reescrevendo a Eq. (1.4)

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = H(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}}$$

e simplificando

$$H(s) = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}. \tag{1.5}$$

O circuito da Figura 1.1 é um dos circuitos não-triviais mais simples que podemos esperar analisar. Um entendimento mais robusto da TL e suas aplicações em análise de circuitos são necessários para casos típicos mais intricados. Para fundamentar essa habilidade, uma mínima revisão teórica (ainda que limitada a aspectos práticos de utilidade imediata) é necessária.

1.1 Definição da transformada de Laplace

Retomando da definição da TL na Eq. (1.2), reescrita abaixo

$$X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t,$$

podemos motivar sua necessidade através de um exemplo simples.

A função *degrau unitário*, também conhecida como função de Heaviside, representada comumente por $u(t)$ é definida por

$$\boxed{u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0; \\ 1 & t \geq 0; \end{cases}}, \tag{1.6}$$

é largamente utilizada para representar acionamentos em circuitos. Sua TL pode ser obtida por

$$\begin{aligned} U(s) &= \int_0^\infty u(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty = \frac{e^{-s\infty} - e^{-s0}}{-s}. \end{aligned}$$

Caso $\Re(s) > 0$, temos que $e^{-s\infty} \to 0$, então

$$U(s) = \frac{1}{s} \quad \Re(s) > 0.$$

A notação $\Re(s) > 0$ representa a *região de convergência* da TL. Ou seja, os valores de s para os quais a relação

$$\boxed{u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s}} \tag{1.7}$$

vale. Em nossos estudos, não haverá a necessidade de considerarmos a região de convergência. Ademais, em várias aplicações, fica pressuposto que a análise se restringe *exclusivamente* para $t \geq 0$, ou mesmo $t > 0$. Em ambos os casos, o degrau unitário se reduz à unidade ($u(t) = 1$), conforme a Eq. (1.6). Assim, pode-se encontrar a Eq. (1.7) na notação alternativa

$$1 \longleftrightarrow \frac{1}{s}. \tag{1.8}$$

A obtenção de pares transformados de Laplace, como a Eq. (1.7) é um simples exercício em Cálculo Diferencial e Integral sobre funções reais. Há uma ampla disponibilidade de tabelas de pares transformados na literatura. Não está no escopo desta unidade curricular a derivação exaustiva desses pares transformados.

Cálculo simbólico da transformada de Laplace

Na eventualidade de um par transformado desconhecido ser necessário, eles podem ser calculados através do Symbolic Math Toolbox do Matlab®. Sua documentação pode ser encontrada em `https://www.mathworks.com/help/symbolic/`.

Como exemplo, vamos repetir a TL do degrau unitário:

```
>> syms s
>> syms t real
>> u = heaviside(t);
>> U = laplace(u, t, s)
U =
1/s
```

Maiores detalhes sobre o Symbolic Math Toolbox e suas funções serão abordadas em um material dedicado.

1.2 Transformada inversa de Laplace

Vamos tomar agora a função de transferência do circuito da Figura 1.1 e assumir que a tensão de entrada $v_i(t)$ é um degrau unitário. Assim, como $V_o(s) = H(s)V_i(s)$, podemos escrever

$$V_o(s) = \left(\frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}\right)\left(\frac{1}{s}\right).$$

Embora seja possível expandir a multiplicação indicada, isso não avança nossa causa. Desejamos obter a tensão de saída $v_o(t)$ (para $t \geq 0$), porém o que temos é sua representação no domínio de Laplace. Precisamos da transformada inversa!

A transformada inversa de Laplace (TIL) é definida por

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}\,\mathrm{d}s}, \tag{1.9}$$

que é substancialmente mais complicada que a Eq. (1.2) que define a TL. Mais importante, a integral é sobre uma variável complexa s e isso a torna (muito) diferente da integração real! Além disso, o parâmetro real σ nos limites de integração pode ser qualquer valor dentro da região de convergência, o que é contraintuitivo[2].

A solução da Eq. (1.9) foge muito ao ferramental matemático de graduação para Engenharias. Tanto que soluções algebricamente trabalhosas são propostas para sua abordagem — expansão em frações parciais, seguida de busca em tabelas de pares transformados e propriedades. Aqui optarei por um caminho mais simples, do ponto de vista do trabalho algébrico envolvido.

O *teorema dos resíduos de Cauchy* estabelece a seguinte igualdade:

$$\frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}\,\mathrm{d}s = \sum_{p_k} \mathrm{Res}\left(X(s)e^{st}; p_k\right), \tag{1.10}$$

onde p_k é cada um dos polos de $X(s)$. Polos são as raízes do denominador. A notação $\mathrm{Res}(\cdot)$ representa um *resíduo*, dado por

$$\mathrm{Res}\left(X(s)e^{st}; p_k\right) = \lim_{s\to p_k}\left((s-p_k)X(s)e^{st}\right). \tag{1.11}$$

Em nosso exemplo, os polos de $V_o(s)$ são dois: $p_1 = -\frac{1}{RC}$; e $p_2 = 0$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left(V_o(s)e^{st}; \tfrac{-1}{RC}\right) &= \lim_{s\to\frac{-1}{RC}} \left(s + \tfrac{1}{RC}\right)\frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}\frac{1}{s}e^{st} \\
&= \lim_{s\to\frac{-1}{RC}} \frac{\frac{1}{RC}}{s}e^{st} \\
&= \frac{\frac{1}{RC}}{-\frac{1}{RC}} = -e^{-t/RC}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left(V_o(s)e^{st}; 0\right) &= \lim_{s\to 0} s\frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}\frac{1}{s}e^{st} \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}e^{st} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Assim, pelo teorema dos resíduos de Cauchy, $v_o(t)$ para $t \geq 0$ fica dado por

$$v_o(t) = 1 - e^{-t/RC}, \tag{1.12}$$

que possui o aspecto típico da equação de carga de um capacitor. Plotando a Eq. (1.12), produzimos a Figura 1.3.

A análise da Figura 1.3 confirma a ideia da curva de carga de um capacitor. A resposta a um degrau unitário é uma análise temporal de grande relevância, pois o acionamento em degrau modela a

[2] Afinal, aprendemos que o resultado da integral muda, se mudarmos os limites. Mas esse não é o caso para integrais sobre variáveis complexas.

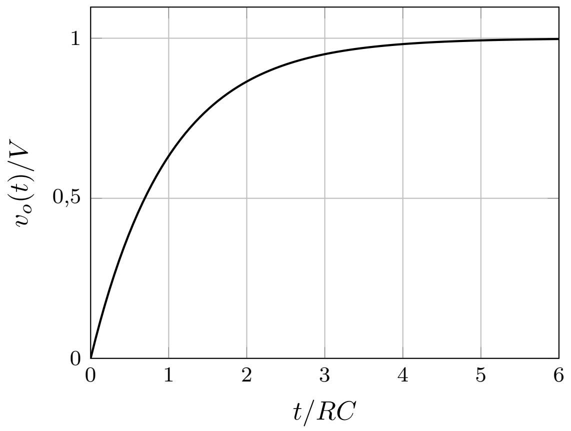

Figura 1.3: Resposta ao degrau do circuito RC teste teste teste.

mais simples das manobras em um circuito: ligar/desligar um interruptor.

Há diferentes formas de chegarmos à essa (ou qualquer outra) solução:

- através do sistema de EDO da Eq. (1.1) — explorando a resposta natural (solução homogênea) e a resposta forçada (solução particular), sendo capaz de resolver um problema de valor inicial (p.v.i.);
- através da aplicação da TL sobre o sistema de EDO, porém sem anular as condições iniciais — ganha-se a solução do p.v.i. e perde-se a função de transferência;
- como foi feito (anulando as condições iniciais), obtendo uma função de tranferência, porém perdendo a solução do p.v.i.;
- através da *integral de convolução*, pela resposta impulsiva $h(t)$.

Essa última opção oferece *insights* únicos, mas é bastante "esotérica". A TIL pode ser aplicada em $H(s)$ para obter a resposta impulsiva $h(t)$. Problemas de valor inicial necessitam de uma significativa sofisticação matemática e entendimento da função impulso unitário (também chamada de delta de Dirac), denotada por $\delta(t)$.

A função impulso unitário não é uma função no sentido estrito, mas sim uma *distribuição*. Foi desenvolvida originalmente para tratar cargas pontuais (como elétrons) na Física Quântica. Seu uso ganhou corrência na teoria de sinais e sistemas lineares e seus fundamentos. Junto da integral de convolução, dada por

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau}, \tag{1.13}$$

fornecem um resultado poderoso e fundamental.

A questão é: a TL é aplicada justamente para evitarmos as dificuldades com o impulso unitário $\delta(t)$, a resposta ao impulso $h(t)$ e a necessidade de resolver a integral de convolução da Eq. (1.13). Por essa razão, focaremos na função de transferência $H(s)$ e deixaremos as representações temporais em segundo plano.

Cálculo simbólico da transformada inversa de Laplace

Assim como na TL, a TIL também pode ser obtida por meios computacionais. Isso é últil em situações com muitos resíduos (alta ordem no denominador). Além disso, a Eq. (1.11) é, na verdade, apenas o caso mais simples na definição dos resíduos. Sua forma é mais intricada caso algum dos polos se repita.

Repetindo o cálculo já realizado através do Symbolic Math Toolbox, obtemos

```
>> syms s
>> syms t real
>> syms R C real positive
>> Vo = ((1/R/C)/(s+1/R/C))*(1/s);
>> vo = ilaplace(Vo, s, t)
vo =
1 - exp(-t/(C*R))
```

confirmando o resultado obtido manualmente.

1.3 Análise de redes através da transformada de Laplace

Até o presente momento, nossa análise ficou limitada ao simples circuito da Figura 1.1. A análise simplificada através das impedâncias em s oferece um caminho algebricamente mais curto, ainda que trabalhe com um nível de abstração mais alto.

Caso a tensão de saída não seja tomada sobre o capacitor C, mas sobre o resitor R, toda a análise muda. Porém a obtenção da nova função de transferência é relativamente simples:

$$H(s) = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{RCs}{RCs + 1} = \frac{s}{s + \frac{1}{RC}}.$$

Comparando as duas funções de transferência, vemos que ambas possuem um polo em $s = -1/RC$. Porém, enquanto a primeira possui um numerador constante (ordem zero), a segunda possui um zero — uma raiz do numerador da função de transferência — na origem.

Apesar de estarmos operando sobre o mesmo circuito, a escolha entre as variáveis de entrada ou de saída produzem funções de transferência distintas. Como veremos: o funcionamento e interpretação desses circuitos é completamente diferente.

Apenas para satisfazer uma eventual curiosidade, vamos obter a resposta ao degrau deste circuito:

```
>> syms s
>> syms t real
>> syms R C real positive
>> Vo = (s/(s+1/R/C))*(1/s);
>> vo = ilaplace(Vo, s, t)
vo =
exp(-t/(C*R))
```

Ou seja

$$v_o(t) = e^{-t/RC},$$

o que, após breve consideração, é o resultado óbvio[3].

Porém, se tivermos uma rede com muitas malhas, ou muitos nós, de maneira que mesmo a análise por impedâncias ainda nos deixa com um significativo problema de Álgebra Linear nas mãos: um grande sistema de equações lineares. A experiência mostra que, mesmo um erro de sinal dos mais inocentes, jogam por terra horas de esforço e são a causa de muita frustração!

Uma ideia interessante é automatizar, computacionalmente, o levantamento da função de transferência a partir de um circuito. Para tal, será utilizada uma *análise de nós modificada*, através do Symbolic Math Toolbox do Matlab®.

A netlist

Vamos tomar por exemplo um circuito mais complexo, cuja análise de nós ou de malhas seria mais custosa (e propensa a erros) para fazer à mão. O circuito da Figura 1.4 representa uma topologia padrão para filtros passivos. A obtenção da sua função de transferência é um excelente exercício de avaliação para disciplinas de análise de circuitos elétricos. Porém, nós já estamos um pouco além disso.

Analisando a Figura 1.4, vemos que a rede possui todos os seus nós numerados. Começando pelo terra, com número 0. A sequência dos números é imaterial, desde que sejam valores distintos. Essa enumeração ajuda a descrever o circuito através de uma *netlist*. Até o início da década de 1990, quando computadores com recursos gráficos ainda não eram ubíquos, a descrição de circuitos em simuladores, como o SPICE, era feita dessa forma.

A *netlist* do circuito da Figura 1.4 pode ser escrita como

```
V1 1 0
R1 1 2
C1 2 0
L2 2 3
C3 3 0
R2 3 0
```

e armazenada em um arquivo de texto. Vamos chamá-lo de `teste.cir`[4] por hora. O formato é simples, a primeira letra codifica o elemento de circuito, seguido por um número de identificação deste elemento. Os dois números subsequentes representam os nós para ligação do polo positivo e negativo, nesta ordem.

No Matlab®, vamos executar os seguintes comandos:

```
>> fname = "teste.cir";
>> scam
```

O arquivo `teste.cir` deve estar no caminho ou na pasta corrente. Idem para o *script* `scam.m`, que pode ser obtido em `https://github.com/echeever/scam`. Esse *script* processa a *netlist* e retorna, dentre outras coisas, variáveis simbólicas com a tensão de cada nó.

A função de transferência $H(s)$ pode ser obtida pela razão entre a tensão do nó 3 e do nó 1:

```
>> H = v_3/v_1
H =
```

[3]Afinal, a soma das duas soluções deve resultar na unidade, que é o sinal de entrada.

[4]A extensão `.cir` é histórica. Ela não muda nada, no entanto. Poderia ser `.txt` ou qualquer outra coisa.

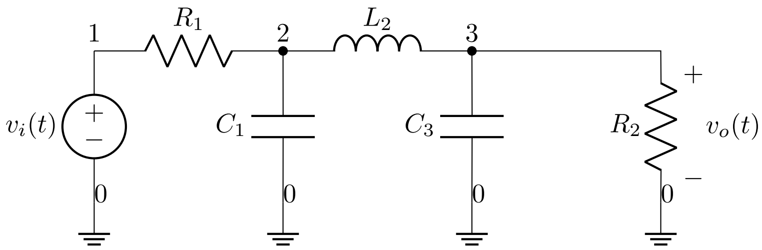

Figura 1.4: Topologia de Cauer, ordem 3.

```
R2/(R1 + R2 + L2*s + ...
C1*L2*R1*s^2 + C3*L2*R2*s^2 + ...
C1*R1*R2*s + C3*R1*R2*s + ...
C1*C3*L2*R1*R2*s^3)
```

Assim, chegamos (sem sofrimento) à função de transferência da Eq. (1.14). Percebemos que $H(s)$ é intricada em relação aos valores dos componentes de circuito. A escolha desses valores, a partir de uma característica de funcionamento desejada, não parece óbvia.

1.4 Alguns detalhes importantes

A TL definida na Eq. (1.2) é propriamente chamada de transformada *unilateral* de Laplace. Isso porque seu limite inferior de integração é a origem ($t = 0$). Essa transformada é útil para análise de funções de transferência em sistemas *causais* e também para a solução de p.v.i.

Existe a transformada *bilateral* de Laplace. Nela, o limite inferior de integração é $-\infty$. Ela é mais geral e pode analisar as funções de tranferência de sistemas *não-causais*. Porém ela não é capaz de resolver p.v.i.

Quando buscamos uma propriedade ou par transformado de Laplace em alguma referência, é de suma importância averiguarmos qual versão da TL está sendo utilizada. Isso porque há algumas diferenças significativas. Nosso trabalho será feito sempre com a versão unilateral.

Quando expressamos sinais de entrada ou de saída no domínio do tempo, muitas vezes está implícito se o domínio é $-\infty < t < \infty$, ou se é $t \geq 0$. Isso está estreitamente relacionado com o uso do degrau unitário $u(t)$ para segmentar adequadamente a resposta — além disso, também está relacionado com as versões unilateral ou bilateral da TL. Em nossos trabalhos sempre vamos assumir que $t \geq 0$.

Causalidade

Há alguns parágrafos você deve ter lido o termo "causalidade" e se perguntado sobre o significado disso. Um sistema causal é um sistema onde o sinal de saída só responde a uma mudança do sinal de entrada ao mesmo tempo, ou depois, que ela ocorre. Assim, a saída não antecipa a entrada.

Embora a causalidade pareça uma imposição das leis naturais da Física, ela tem implicações significativas na modelagem matemática dos circuitos. Ela define que a região de convergência da TL está sempre à direita do polo mais à direita (no plano s). Assim, a resposta impulsiva do sistema é sempre lateral direita — $h(t) = 0$, para $t < 0$. Por essa razão, podemos usar apenas a versão unilateral da TL e ignorar a versão bilateral.

Estabilidade

Como veremos mais adiante, também desejamos sistemas que sejam *estáveis*. A estabilidade significa que, enquanto a entrada for um sinal de amplitude finita, a saída também será um sinal de amplitude finita. Mais uma vez, parece óbvio, porém há sistemas comuns que não são estáveis.

Estabilidade é uma condição necessária para a convergência da tranformada de Fourier e, por consequência, para que um circuito possua resposta em frequência definida. No projeto de filtros, sempre buscamos sistemas estáveis.

A combinação de causalidade e estabilidade implica que as funções de transferência desejáveis possua *todos* os polos com parte real *estritamente negativa*. Isso produz polinômios em s que são *definidos*

$$
\begin{aligned}
H(s) &= \frac{R_2}{C_1C_3L_2R_1R_2s^3 + (C_1L_2R_1 + C_3L_2R_2)s^2 + (L_2 + C_1R_1R_2 + C_3R_1R_2)s + R_1 + R_2} \\
&= \frac{\dfrac{1}{R_1C_1L_2C_3}}{s^3 + \left(\dfrac{1}{R_1C_1} + \dfrac{1}{R_2C_3}\right)s^2 + \left(\dfrac{1}{R_1C_1R_2C_3} + \dfrac{C_1 + C_3}{C_1L_2C_3}\right)s + \dfrac{R_1 + R_2}{R_1C_1L_2R_2C_3}}.
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

positivos e são uma condição para a *realizabilidade* do circuito, já que resistências, capacitâncias e indutâncias são sempre positivas.

Capítulo 2

Transformada de Fourier