

Introdução aos filtros analógicos: análise de circuitos, resposta em frequência e síntese

Osmar Tormena Júnior, Prof. Dr.

2025

Sumário

Lista de Figuras	3
1 Transformada de Laplace	4
1.1 Definição da transformada de Laplace	6
1.2 Transformada inversa de Laplace	8
1.3 Análise de redes através da transformada de Laplace	11
1.4 Alguns detalhes importantes	14
2 Transformada de Fourier	16
2.1 A transformada generalizada de Fourier	17
2.2 A transformada inversa de Fourier	18
2.3 A transformada unitária de Fourier	18
2.4 Cálculo simbólico da transformada de Fourier e sua inversa	20
2.5 A resposta em frequência de circuitos	20
3 Resposta em frequência	24
3.1 O diagrama de Bode	26
3.2 Atraso de fase	30
3.3 Atraso de grupo	30
3.4 Polos da função de transferência	32
4 Aproximações reais	39
4.1 Aproximação de Butterworth	39

Lista de Figuras

1.1	Circuito RC.	4
1.2	Divisor “resistivo” de tensão.	6
1.3	Resposta ao degrau do circuito RC.	10
1.4	Topologia de Cauer, ordem 3.	13
2.1	Resposta em magnitude do circuito RC.	23
2.2	Resposta em fase do circuito RC.	23
3.1	Filtro RC passa-baixas.	24
3.2	Filtro RC passa-altas.	25
3.3	Filtro RC passa-banda.	25
3.4	Filtro RC rejeita-faixa.	25
3.5	Diagrama de Bode do filtro $H_{PB}(\omega)$	28
3.6	Diagrama de Bode do filtro $H_{PA}(\omega)$	28
3.7	Diagrama de Bode do filtro $H_{PF}(\omega)$	29
3.8	Diagrama de Bode do filtro $H_{RF}(\omega)$	29
3.9	Representação do atraso de fase.	30
3.10	Representação do atraso de grupo.	31
3.11	Ilustrando a distorção de fase.	32
3.12	Diagrama de Bode (modificado) de um polo real.	34
3.13	Diagrama de Bode (magnitude) de um sistema subamortecido.	37
3.14	Diagrama de Bode (atraso de grupo) de um sistema subamortecido.	38
4.1	Atenuação do filtro de Butterworth.	40
4.2	Polos de Butterworth no plano s	44

Capítulo 1

Transformada de Laplace

Em unidades curriculares anteriores, foi abordado (dentre outras coisas) a análise de circuitos como o da Figura 1.1.

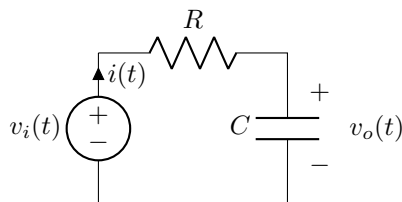


Figura 1.1: Circuito RC.

Pela Lei das Tensões de Kirchhoff, a análise do circuito resulta no seguinte sistema de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares e com Coeficientes Constantes (EDO)

$$\begin{cases} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{RC}i(t) = \frac{1}{R} \frac{dv_i(t)}{dt} \\ \frac{dv_o(t)}{dt} = \frac{1}{C}i(t) \end{cases}, \quad (1.1)$$

cujas soluções (para $t \geq 0$) deve satisfazer a condição inicial $v_o(0)$ — a tensão inicial do capacitor.

A grande maioria dos alunos não tem uma experiência agradável modelando e resolvendo circuitos dessa maneira. Sistemas de EDO são trabalhosos. Há a necessidade de uma apurada intuição para transformar a tensão inicial do capacitor numa condição adequada à solução da corrente de malha $i(t)$ e, posteriormente, para a obtenção analítica de $v_o(t)$.

A transformada de Laplace (TL), é uma ferramenta útil que se aplica muito bem à solução de EDO (ou sistemas de EDO), como a Eq. (1.1). A TL de uma função real $x(t)$ é definida por

$$\boxed{X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt}, \quad (1.2)$$

sendo s uma variável complexa e $X(s)$ uma função complexa — correspondendo à representação de $x(t)$ no domínio de Laplace. Dizemos que $x(t)$ e $X(s)$ formam um par transformado de Laplace $x(t) \longleftrightarrow X(s)$.

O domínio de Laplace não possui uma interpretação física simples. A variável s costuma ser apresentada por sua decomposição cartesiana: parte real (σ) e parte imaginária (ω), na forma

$$s = \sigma + j\omega,$$

com unidades de rad/s.

O poder e a utilidade da TL está na simplificação da trabalho matemático necessário para resolver sistemas como da Eq. (1.1). Por exemplo, pela *propriedade de diferenciação*¹ da TL

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow sX(s) - x(0). \quad (1.3)$$

Assim, aplicando a TL sobre as equações de tensão e corrente sobre um resitor

$$v(t) = Ri(t) \longleftrightarrow V(s) = RI(s)$$

e um capacitor

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \longleftrightarrow I(s) = C(V(s) - v(0)).$$

Tomando *condições iniciais nulas* — $v(0) = 0$, para o capacitor — podemos definir as *impedâncias* ($Z(s) = V(s)/I(s)$) desses elementos como: $Z(s) = R$ para o resitor; e $Z(s) = 1/sC$ para o capacitor. Assim, o circuito da Figura 1.1 pode ser redesenhado como na Figura 1.2.

A representação dos componentes de circuito através de suas impedâncias facilita a análise, pois as regras básicas de análise para redes puramente resistivas valem. Assim, aplicando o resultado do *divisor resistivo de tensão*, podemos escrever

$$V_o(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} V_i(s). \quad (1.4)$$

¹A prova da Eq. (1.3) envolve uma elaborada integração por partes além de uma análise de limites dependendo da continuidade de $x(t)$ na origem ($t = 0$).

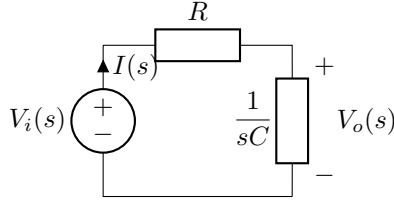


Figura 1.2: Divisor “resistivo” de tensão.

Por definição, a razão entre a TL de uma variável de saída e a TL de uma variável de entrada é chamada de *função de transferência*. Para nossos circuitos, as funções de transferência serão denotadas por $H(s)$. Reescrevendo a Eq. (1.4)

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = H(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}}$$

e simplificando

$$H(s) = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}. \quad (1.5)$$

O circuito da Figura 1.1 é um dos circuitos não-triviais mais simples que podemos esperar analisar. Um entendimento mais robusto da TL e suas aplicações em análise de circuitos são necessários para casos típicos mais intrincados. Para fundamentar essa habilidade, uma mínima revisão teórica (ainda que limitada a aspectos práticos de utilidade imediata) é necessária.

1.1 Definição da transformada de Laplace

Retomando da definição da TL na Eq. (1.2), reescrita abaixo

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt,$$

podemos motivar sua necessidade através de um exemplo simples.

A função *degrau unitário*, também conhecida como função de Heaviside, representada comumente por $u(t)$ é definida por

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0; \\ 1 & t \geq 0; \end{cases}, \quad (1.6)$$

é largamente utilizada para representar acionamentos em circuitos. Sua TL pode ser obtida por

$$\begin{aligned} U(s) &= \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\ &= \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^{\infty} = \frac{e^{-s\infty} - e^{-s0}}{-s}. \end{aligned}$$

Caso $\Re(s) > 0$, temos que $e^{-s\infty} \rightarrow 0$, então

$$U(s) = \frac{1}{s} \quad \Re(s) > 0.$$

A notação $\Re(s) > 0$ representa a *região de convergência* da TL. Ou seja, os valores de s para os quais a relação

$$\boxed{u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s}} \quad (1.7)$$

vale. Em nossos estudos, não haverá a necessidade de considerarmos a região de convergência. Ademais, em várias aplicações, fica pressuposto que a análise se restringe *exclusivamente* para $t \geq 0$, ou mesmo $t > 0$. Em ambos os casos, o degrau unitário se reduz à unidade ($u(t) = 1$), conforme a Eq. (1.6). Assim, pode-se encontrar a Eq. (1.7) na notação alternativa

$$1 \longleftrightarrow \frac{1}{s}. \quad (1.8)$$

A obtenção de pares transformados de Laplace, como a Eq. (1.7) é um simples exercício em Cálculo Diferencial e Integral sobre funções reais. Há uma ampla disponibilidade de tabelas de pares transformados na literatura. Não está no escopo desta unidade curricular a derivação exaustiva desses pares transformados.

Cálculo simbólico da transformada de Laplace

Na eventualidade de um par transformado desconhecido ser necessário, eles podem ser calculados através do Symbolic Math Toolbox do Matlab®. Sua documentação pode ser encontrada em <https://www.mathworks.com/help/symbolic/>.

Como exemplo, vamos repetir a TL do degrau unitário:

```
>> syms s
>> syms t real
```

```
>> u = heaviside(t);
>> U = laplace(u, t, s)
U =
1/s
```

Maiores detalhes sobre o Symbolic Math Toolbox e suas funções serão abordadas em um material dedicado.

1.2 Transformada inversa de Laplace

Vamos tomar agora a função de transferência do circuito da Figura 1.1 e assumir que a tensão de entrada $v_i(t)$ é um degrau unitário. Assim, como $V_o(s) = H(s)V_i(s)$, podemos escrever

$$V_o(s) = \left(\frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} \right) \left(\frac{1}{s} \right).$$

Embora seja possível expandir a multiplicação indicada, isso não avança nossa causa. Desejamos obter a tensão de saída $v_o(t)$ (para $t \geq 0$), porém o que temos é sua representação no domínio de Laplace. Precisamos da transformada inversa!

A transformada inversa de Laplace (TIL) é definida por

$$x(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds, \quad (1.9)$$

que é mais complicada que a Eq. (1.2) que define a TL. Mais importante, a integral é sobre uma variável complexa s e isso a torna (muito) diferente da integração real! Além disso, o parâmetro real σ nos limites de integração pode ser qualquer valor dentro da região de convergência, o que é contraintuitivo².

A solução da Eq. (1.9) foge muito ao ferramental matemático de graduação para Engenharias. Tanto que soluções algebricamente trabalhosas são propostas para sua abordagem — expansão em frações parciais, seguida de busca em tabelas de pares transformados e propriedades. Aqui optarei por um caminho mais simples, do ponto de vista do trabalho algébrico envolvido.

O *teorema dos resíduos de Cauchy* estabelece a seguinte igualdade:

$$\frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds = \sum_{p_k} \text{Res} (X(s)e^{st}; p_k), \quad (1.10)$$

²Afinal, aprendemos que o resultado da integral muda, se mudarmos os limites. Mas esse não é o caso para integrais sobre variáveis complexas.

onde p_k é cada um dos polos de $X(s)$. Polos são as raízes do denominador. A notação $\text{Res}(\cdot)$ representa um *resíduo*, dado por

$$\text{Res}(X(s)e^{st}; p_k) = \lim_{s \rightarrow p_k} ((s - p_k)X(s)e^{st}). \quad (1.11)$$

Em nosso exemplo, os polos de $V_o(s)$ são dois: $p_1 = -\frac{1}{RC}$; e $p_2 = 0$. Assim, temos

$$\begin{aligned} \text{Res}(V_o(s)e^{st}; \frac{-1}{RC}) &= \lim_{s \rightarrow \frac{-1}{RC}} (s + \frac{1}{RC}) \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} \frac{1}{s} e^{st} \\ &= \lim_{s \rightarrow \frac{-1}{RC}} \frac{\frac{1}{RC}}{s} e^{st} \\ &= \frac{\frac{1}{RC}}{-\frac{1}{RC}} = -e^{-t/RC} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \text{Res}(V_o(s)e^{st}; 0) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} \frac{1}{s} e^{st} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} e^{st} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Assim, pelo teorema dos resíduos de Cauchy, $v_o(t)$ para $t \geq 0$ fica dado por

$$v_o(t) = 1 - e^{-t/RC}, \quad (1.12)$$

que possui o aspecto típico da equação de carga de um capacitor. Plotando a Eq. (1.12), produzimos a Figura 1.3.

A análise da Figura 1.3 confirma a ideia da curva de carga de um capacitor. A resposta a um degrau unitário é uma análise temporal de grande relevância, pois o acionamento em degrau modela a mais simples das manobras em um circuito: ligar/desligar um interruptor.

A Eq. (1.12), conforme visualizada na Figura 1.3, também evidencia um aspecto particular da parametrização de *circuitos de primeira ordem*³: a grandeza RC possui dimensão de tempo, em s. É comum denominar a *constante de tempo* $\tau = RC$. Uma aproximação amplamente aceita na literatura especializada é que a resposta de um circuito de ordem unitária é dividida em duas partes: *período transitório* ou *transiente*; e *regime*

³Circuitos que possuem apenas um componente reativo, irredutível por associações.

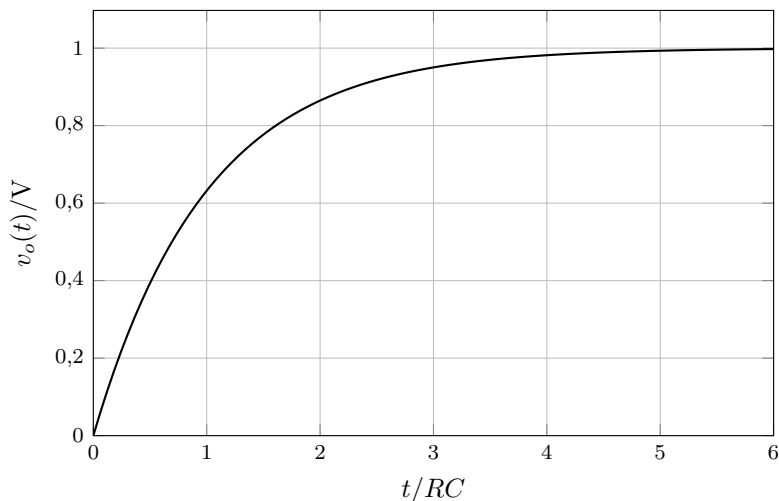


Figura 1.3: Resposta ao degrau do circuito RC.

permanente ou, simplesmente, *regime*. O limite entre essas duas regiões é arbitrário, porém amplamente aceito, com o valor de $t = 5\tau$.

Há diferentes formas de chegarmos à essa (ou qualquer outra) solução:

- através do sistema de EDO da Eq. (1.1) — explorando a resposta natural (solução homogênea) e a resposta forçada (solução particular), sendo capaz de resolver um problema de valor inicial (p.v.i.);
- através da aplicação da TL sobre o sistema de EDO, porém sem anular as condições iniciais — ganha-se a solução do p.v.i. e perde-se a função de transferência;
- como foi feito (anulando as condições iniciais), obtendo uma função de transferência, porém perdendo a solução do p.v.i.;
- através da *integral de convolução*, pela resposta impulsiva $h(t)$.

Essa última opção oferece *insights* únicos, mas é bastante “esotérica”. A TIL pode ser aplicada em $H(s)$ para obter a resposta impulsiva $h(t)$. Problemas de valor inicial necessitam de uma significativa sofisticação matemática e entendimento da função impulso unitário (também chamada de delta de Dirac), denotada por $\delta(t)$.

A função impulso unitário não é uma função no sentido estrito, mas sim uma *distribuição*. Foi desenvolvida originalmente para tratar cargas

pontuais (como elétrons) na Física Quântica. Seu uso ganhou corréncia na teoria de sinais e sistemas lineares e seus fundamentos. Junto da integral de convolução, dada por

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau, \quad (1.13)$$

forneem um resultado poderoso e fundamental.

A questão é: a TL é aplicada justamente para evitarmos as dificuldades com o impulso unitário $\delta(t)$, a resposta ao impulso $h(t)$ e a necessidade de resolver a integral de convolução da Eq. (1.13). Por essa razão, focaremos na função de transferência $H(s)$ e deixaremos as representações temporais em segundo plano.

Cálculo simbólico da transformada inversa de Laplace

Assim como na TL, a TIL também pode ser obtida por meios computacionais. Isso é útil em situações com muitos resíduos (alta ordem no denominador). Além disso, a Eq. (1.11) é, na verdade, apenas o caso mais simples na definição dos resíduos. Sua forma é mais intrincada caso algum dos polos se repita.

Repetindo o cálculo já realizado através do Symbolic Math Toolbox, obtemos

```
>> syms s
>> syms t real
>> syms R C real positive
>> Vo = ((1/R/C)/(s+1/R/C))*(1/s);
>> vo = ilaplace(Vo, s, t)
vo =
1 - exp(-t/(C*R))
```

confirmando o resultado obtido manualmente.

1.3 Análise de redes através da transformada de Laplace

Até o presente momento, nossa análise ficou limitada ao simples circuito da Figura 1.1. A análise simplificada através das impedâncias em s oferece um caminho algebricamente mais curto, ainda que trabalhe com um nível de abstração mais alto.

Caso a tensão de saída não seja tomada sobre o capacitor C , mas sobre o resistor R , toda a análise muda. Porém a obtenção da nova função de transferência é relativamente simples:

$$H(s) = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{RCs}{RCs + 1} = \frac{s}{s + \frac{1}{RC}}.$$

Comparando as duas funções de transferência, vemos que ambas possuem um polo em $s = -1/RC$. Porém, enquanto a primeira possui um numerador constante (ordem zero), a segunda possui um zero — uma raiz do numerador da função de transferência — na origem.

Apesar de estarmos operando sobre o mesmo circuito, a escolha entre as variáveis de entrada ou de saída produzem funções de transferência distintas. Como veremos: o funcionamento e interpretação desses circuitos é completamente diferente.

Apenas para satisfazer uma eventual curiosidade, vamos obter a resposta ao degrau deste circuito:

```
>> syms s
>> syms t real
>> syms R C real positive
>> Vo = (s/(s+1/R/C))*(1/s);
>> vo = ilaplace(Vo, s, t)
vo =
exp(-t/(C*R))
```

Ou seja

$$v_o(t) = e^{-t/RC},$$

o que, após breve consideração, é o resultado óbvio⁴.

Porém, se tivermos uma rede com muitas malhas, ou muitos nós, de maneira que mesmo a análise por impedâncias ainda nos deixa com um significativo problema de Álgebra Linear nas mãos: um grande sistema de equações lineares. A experiência mostra que, mesmo um erro de sinal dos mais inocentes, jogam por terra horas de esforço e são a causa de muita frustração!

Uma ideia interessante é automatizar, computacionalmente, o levantamento da função de transferência a partir de um circuito. Para tal, será utilizada uma *análise de nós modificada*, através do Symbolic Math Toolbox do Matlab[®].

⁴Afinal, a soma das duas soluções deve resultar na unidade, que é o sinal de entrada.

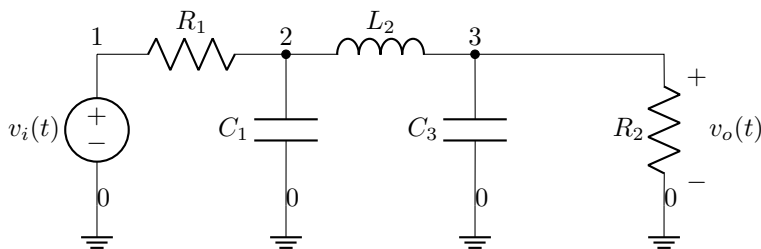


Figura 1.4: Topologia de Cauer, ordem 3.

A netlist

Vamos tomar por exemplo um circuito mais complexo, cuja análise de nós ou de malhas seria mais custosa (e propensa a erros) para fazer à mão. O circuito da Figura 1.4 representa uma topologia padrão para filtros passivos. A obtenção da sua função de transferência é um excelente exercício de avaliação para disciplinas de análise de circuitos elétricos. Porém, nós já estamos um pouco além disso.

Analisando a Figura 1.4, vemos que a rede possui todos os seus nós numerados. Começando pelo terra, com número 0. A sequência dos números é imaterial, desde que sejam valores distintos. Essa enumeração ajuda a descrever o circuito através de uma *netlist*. Até o início da década de 1990, quando computadores com recursos gráficos ainda não eram ubíquos, a descrição de circuitos em simuladores, como o SPICE, era feita dessa forma.

A *netlist* do circuito da Figura 1.4 pode ser escrita como

```
V1 1 0
R1 1 2
C1 2 0
L2 2 3
C3 3 0
R2 3 0
```

e armazenada em um arquivo de texto. Vamos chamá-lo de `teste.cir`⁵ por hora. O formato é simples, a primeira letra codifica o elemento de circuito, seguido por um número de identificação deste elemento. Os dois números subsequentes representam os nós para ligação do polo positivo e negativo, nesta ordem.

⁵A extensão `.cir` é histórica. Ela não muda nada, no entanto. Poderia ser `.txt` ou qualquer outra coisa.

No Matlab®, vamos executar os seguintes comandos:

```
>> fname = "teste.cir";
>> scam
```

O arquivo `teste.cir` deve estar no caminho ou na pasta corrente. Idem para o *script* `scam.m`, que pode ser obtido em <https://github.com/echeever/scam>. Esse *script* processa a *netlist* e retorna, dentre outras coisas, variáveis simbólicas com a tensão de cada nó.

A função de transferência $H(s)$ pode ser obtida pela razão entre a tensão do nó 3 e do nó 1:

```
>> H = v_3/v_1
H =
R2/(R1 + R2 + L2*s + ...
C1*L2*R1*s^2 + C3*L2*R2*s^2 + ...
C1*R1*R2*s + C3*R1*R2*s + ...
C1*C3*L2*R1*R2*s^3)
```

Assim, chegamos (sem grande sofrimento) à função de transferência da Eq. (1.3). Percebemos que $H(s)$ é intrincada em relação aos valores dos componentes de circuito. A escolha desses valores, a partir de uma característica de funcionamento desejada, não parece óbvia.

$$H(s) = \frac{R_2}{C_1 C_3 L_2 R_1 R_2 s^3 + (C_1 L_2 R_1 + C_3 L_2 R_2) s^2 + (L_2 + C_1 R_1 R_2 + C_3 R_1 R_2) s + R_1 + R_2}$$

$$H(s) = \frac{\frac{1}{R_1 C_1 L_2 C_3}}{s^3 + \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_3}\right) s^2 + \left(\frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_3} + \frac{C_1 + C_3}{C_1 L_2 C_3}\right) s + \frac{R_1 + R_2}{R_1 C_1 L_2 R_2 C_3}}. \quad (1.14)$$

1.4 Alguns detalhes importantes

A TL definida na Eq. (1.2) é propriamente chamada de transformada *unilateral* de Laplace. Isso porque seu limite inferior de integração é a origem ($t = 0$). Essa transformada é útil para análise de funções de transferência em sistemas *causais* e também para a solução de p.v.i.

Existe a transformada *bilateral* de Laplace. Nela, o limite inferior de integração é $-\infty$. Ela é mais geral e pode analisar as funções de transferência de sistemas *não-causais*. Porém ela não é capaz de resolver p.v.i.

Quando buscamos uma propriedade ou par transformado de Laplace em alguma referência, é de suma importância averiguarmos qual versão da TL está sendo utilizada. Isso porque há algumas diferenças significativas. Nosso trabalho será feito sempre com a versão unilateral.

Quando expressamos sinais de entrada ou de saída no domínio do tempo, muitas vezes está implícito se o domínio é $-\infty < t < \infty$, ou se é $t \geq 0$. Isso está estreitamente relacionado com o uso do degrau unitário $u(t)$ para segmentar adequadamente a resposta — além disso, também está relacionado com as versões unilateral ou bilateral da TL. Em nossos trabalhos sempre vamos assumir que $t \geq 0$.

Causalidade

Há alguns parágrafos você deve ter lido o termo “causalidade” e se perguntado sobre o significado disso. Um sistema causal é um sistema onde o sinal de saída só responde a uma mudança do sinal de entrada ao mesmo tempo, ou depois, que ela ocorre. Assim, a saída não antecipa a entrada.

Embora a causalidade pareça uma imposição das leis naturais da Física, ela tem implicações significativas na modelagem matemática dos circuitos. Ela define que a região de convergência da TL está sempre à direita do polo mais à direita (no plano s). Assim, a resposta impulsiva do sistema é sempre lateral direita — $h(t) = 0$, para $t < 0$. Por essa razão, podemos usar apenas a versão unilateral da TL e ignorar a versão bilateral.

Estabilidade

Como veremos mais adiante, também desejamos sistemas que sejam *estáveis*. A estabilidade significa que, enquanto a entrada for um sinal de amplitude finita, a saída também será um sinal de amplitude finita. Mais uma vez, parece óbvio, porém há sistemas comuns que não são estáveis.

Estabilidade é uma condição necessária para a convergência da transformada de Fourier e, por consequência, para que um circuito possua resposta em frequência definida. No projeto de filtros, sempre buscamos sistemas estáveis.

A combinação de causalidade e estabilidade implica que as funções de transferência desejáveis possuam *todos* os polos com parte real *estritamente negativa*. Isso produz polinômios em s que são *definidos positivos* e são uma condição para a *realizabilidade* do circuito, já que resistências, capacitâncias e indutâncias são sempre positivas.

Capítulo 2

Transformada de Fourier

No Capítulo anterior foi apresentada uma breve introdução teórica e prática sobre a TL. Como dito, a TL traz várias vantagens na tratativa matemática de um circuito: evita a solução direta das EDO; contorna a necessidade de analisar a integral de convolução, a resposta impulsiva e a singularidade do impulso unitário; além de introduzir o útil conceito de *impedância*, generalizando a resistência para componentes reativos. Tudo isso tem um custo: a interpretação física da TL não é óbvia; e o fato da *Análise Complexa* fazer parte dos seus fundamentos torna a transformada inversa um tanto “esotérica”.

A TL é uma transformação bastante generalista. Quase todas as funções reais $x(t)$ (interessantes num contexto de Engenharia) possuem uma TL $X(s)$ para alguma região de convergência no plano s . A transformada de Fourier (TF), por sua vez, converge apenas para um tipo mais restrito de função. No entanto, a TF descarta a necessidade de *Análise Complexa*, sendo necessários apenas os fundamentos de *Análise Real* comuns nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral para Engenharias. Além disso, a interpretação física da TF é simples e muito útil, com veremos a seguir.

A forma mais comumente utilizada da TF é definida por

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (2.1)$$

onde $X(\omega)$ é uma função complexa sobre a variável real ω . A variável ω possui dimensão de rad/s e pode ser interpretada como frequência. Ou seja, a TF pode ser vista como uma transformação que relaciona uma representação no tempo $x(t)$ com uma representação na frequência $X(\omega)$, através de um par transformado $x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$.

São evidentes os paralelos entre a TL, definida na Eq. (1.2) e a TF, definida na Eq. (2.1). A TF parece ser a TL bilateral tomando $s = j\omega$ (ou seja, anulando a parte real σ). Essa análise possui as seguintes implicações:

1. Para um sinal de tensão $v(t)$ ou de corrente $i(t)$, a TF¹ ($V(\omega)$ ou $I(\omega)$) pode ser interpretada como o conteúdo de frequência (ou *espectro* deste sinal;
2. Para um circuito com resposta impulsiva $h(t)$, caso a Eq. (2.1) seja convergente, sua TF $H(\omega)$ pode ser interpretado como a sua *resposta em frequência*.

Assim, de forma simples, caso a função de transferência $H(s)$ represente um sistema causal e estável, $\sigma = 0$ pertence à região de convergência da TL, de maneira que a substituição

$$s = j\omega, \quad (2.2)$$

é válida. Assim, para esses sistemas, a TF não traz nada de novo: ela é um caso particular da TL. A mesma coisa ocorre para a ampla maioria dos sinais de interesse. Porém, há exceções importantes.

2.1 A transformada generalizada de Fourier

Existem três situações onde a integral de Riemann da Eq. (2.1) não é convergente, porém onde a importância do resultado (até pela obviedade na interpretação) exige ferramentas matemáticas mais sofisticadas: integração de Lebesgue e teoria das distribuições.

No escopo desta unidade curricular, não há justificativa para abordar essas provas em detalhe, de maneira que vamos apenas considerar os seguintes pares como válidos:

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1 \quad (2.3)$$

$$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \quad (2.4)$$

$$u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \quad (2.5)$$

$$e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (2.6)$$

¹Para sinais fisicamente realizáveis, a Eq. (2.1) é sempre convergente.

2.2 A transformada inversa de Fourier

A transformada inversa de Fourier (TIF) fica definida pela substituição de $s = j\omega$ na Eq. (1.9), resultando em

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.7)$$

Como ω é uma variável real, não há nada de especial nesta integração, como ocorre com a TIL da Eq. (1.9).

Analisando as Eqs. (2.1) e (2.7), percebemos que, exceto pelo fator $\frac{1}{2\pi}$, há uma similaridade em sua estrutura: essa similaridade nos leva ao conceito de *dualidade*. Esse conceito é útil para a obtenção de alguns pares transformados de Fourier, bem como na obtenção e interpretação de algumas das propriedades da TF. Existe uma versão *unitária* da TF que, além de deixar a dualidade mais clara, também nos permite visualizar a frequência em uma unidade muito mais conveniente: Hz.

2.3 A transformada unitária de Fourier

Vocês devem estar familiares com a equação $\omega = 2\pi f$, onde ω representa uma frequência radial, dada em rad/s, e f representa a frequência em Hz. Estamos habituados a trabalhar em hertz e a interpretação dos resultados fica muito mais direta, ademais, temos uma dualidade mais limpa.

A TF unitária pode ser definida por

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt, \quad (2.8)$$

enquanto a TIF unitária fica da forma

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df. \quad (2.9)$$

Nesta notação, os pares transformados da versão generalizada de Fourier podem ser reescritos como:

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1 \quad (2.10)$$

$$1 \longleftrightarrow \delta(f) \quad (2.11)$$

$$u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2} \quad (2.12)$$

$$e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow \delta(f - f_0) \quad (2.13)$$

Assim, podemos estabelecer a seguinte estratégia:

1. Usaremos a TL com a notação em s para todas as manipulações algébricas envolvendo sinais e funções de transferência;
2. Quando possível e conveniente, tomaremos $s \mapsto j\omega$ para buscar uma interpretação espectral em nossas análises;
3. Sempre que necessário, para refinar e/ou trazer inteligibilidade à nossa notação, vamos tomar $\omega \mapsto 2\pi f$, especialmente nos passos finais da análise.

Confusão entre as notações

Ao buscar uma referência sobre TF e suas aplicações, pares transformados e suas propriedades, é muito importante prestar atenção na definição usada na TF e TIF. Assim como no caso das versões unilateral e bilateral da TL, a notação pode ser diferente, ambígua e exatamente o oposto do definido aqui.

É comum representar a frequência radial (em rad/s) tanto usando ω , quanto por outra letra grega ν (nu). Por outro lado, a frequência comum (em Hz) é comumente dada por f , porém em alguns contextos, por ν . Não se prenda às variáveis. Averigue sempre a forma das equações das transformadas direta e inversa.

Frequências negativas?

O estudante atento pode ter notado uma curiosidade: a TF prevê a existência de frequências negativas. Elas existem de fato?

Sinais fisicamente realizáveis (assim como sistemas fisicamente realizáveis) são reais, pois o Universo é real. No entanto, os números complexos nos permitem algumas vantagens algébricas e nós nos valemos deles, porém com alguma perda interpretativa por abstração matemática.

Historicamente, a análise de Fourier foi desenvolvida utilizando senos e cossenos. Nesses casos, percebemos que a interpretação de frequências negativas é uma questão sem sentido, pois:

$$\begin{aligned}\cos(-\omega t) &= \cos(\omega t); \\ \sin(-\omega t) &= -\sin(\omega t).\end{aligned}$$

Para um cosseno, a paridade da função torna qualquer frequência negativa indistinguível da frequência positiva correspondente. Já no caso na função seno, uma frequência negativa é indistinguível de uma inversão

de fase de 180° . Ou seja, em ambos os casos, não há *observabilidade* de uma frequência negativa.

Os senos e cossenos possuem expressões complicadas quando são multiplicados entre si. Isso torna a análise de uma transformada *trigonométrica* de Fourier de difícil tratamento analítico. Funções exponenciais, por outro lado, possuem simples propriedades quando são multiplicadas entre si e estão estreitamente relacionadas às funções trigonométricas, pois

$$e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \sin \theta, \quad (2.14)$$

de maneira que a transformada *exponencial* de Fourier ganhou destaque em sua utilização.

Finalmente: sinais reais não possuem frequências negativas e sua representação é um *artefato* da TF. Por outro lado, sinais complexos têm sim frequências positivas e negativas distintas. Porém sinais complexos não existem na prática — apesar de serem um bom modelo matemático em diversas aplicações, especialmente em Telecomunicações.

2.4 Cálculo simbólico da transformada de Fourier e sua inversa

Novamente, assim como na TL e TIL, o Symbolic Math Toolbox do Matlab® nos fornece as funções `fourier()` e `ifourier()` para o cômputo da TF e TIF, respectivamente.

Por padrão, o Matlab® utiliza as definições das Eqs. (2.1) e (2.7). Caso o usuário deseje mudar isso para as definições das Eqs. (2.8) e (2.9), ele deve executar:

```
>> sympref('FourierParameters', ...
           sym([1 -2*pi]));
```

alternativamente, caso queria voltar ao *default*, basta executar:

```
>> sympref('FourierParameters', ...
           sym([1 -1]));
```

Maiores detalhes sobre o uso dessas funções serão abordados em um material à parte.

2.5 A resposta em frequência de circuitos

Retomando a análise do circuito da Figura 1.1, cuja função de transferência da Eq. (1.5) é repetida abaixo para simples referência (lembrando que

$\tau = RC$):

$$H(s) = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{1}{\tau s + 1}.$$

Como se trata de uma função de transferência causal e estável — o polo $s = -1/\tau < 0$ — vale a substituição $s \mapsto j\omega$, de maneira que podemos obter a TF na forma radial

$$H(\omega) = \frac{1}{j\tau\omega + 1}. \quad (2.15)$$

A mistura de uma parametrização temporal τ com uma variável espectral ω não promove a maior clareza. Vamos definir uma frequência $\omega_c = 1/\tau$, dada em rad/s e reescrever a TF

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}. \quad (2.16)$$

Como veremos mais adiante, o parâmetro ω_c é chamado de *frequência de corte*. Porém, sua relação com ω e o valor de $H(\omega)$ não é muito clara, pois $H(\omega)$ é uma função complexa sobre a variável real ω .

Fazendo a decomposição cartesiana² de $H(\omega)$,

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \cdot \frac{1 - j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 - j\frac{\omega}{\omega_c}}; \\ &= \frac{1 + j\frac{-\omega}{\omega_c}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}, \end{aligned}$$

obtemos sua parte real

$$\Re(H(\omega)) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} \quad (2.17)$$

e sua parte imaginária

$$\Im(H(\omega)) = \frac{-\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}. \quad (2.18)$$

² $H(\omega) = \Re(H(\omega)) + j\Im(H(\omega))$

A decomposição cartesiana de $H(\omega)$ não possui interpretação física óbvia, porém costuma ser um passo necessário para chegar à decomposição polar³, dadas por

$$|H(\omega)| = \sqrt{\Re(H(\omega))^2 + \Im(H(\omega))^2}; \quad (2.19)$$

$$\angle H(\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{\Im(H(\omega))}{\Re(H(\omega))} \right). \quad (2.20)$$

Veremos que, na prática, é preferível trabalhar com $|H(\omega)|^2$, pois ele representa o ganho de energia/potência do sistema, trazendo assim uma interpretação física clara. A fase $\angle H(\omega)$ (em rad), embora clara o bastante em seu significado, possui dificuldades interpretativas no impacto de seu resultado.

Para nosso circuito da Figura 1.3, temos então

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}; \quad (2.21)$$

$$\angle H(\omega) = -\tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right), \quad (2.22)$$

que podem ser visualizadas nas Figs 2.1 e 2.2, respectivamente.

A análise das Figs 2.1 e 2.2 evidenciam o comportamento “passa-baixas” da resposta em magnitude do circuito da Figura 1.3. A interpretação da resposta em fase, no entanto, permanece elusiva.

³ $H(\omega) = |H(\omega)|\angle H(\omega)$

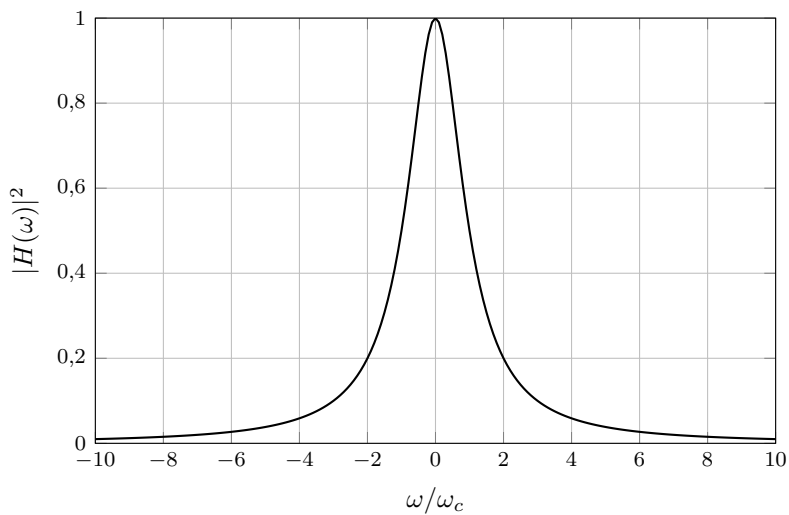


Figura 2.1: Resposta em magnitude do circuito RC.

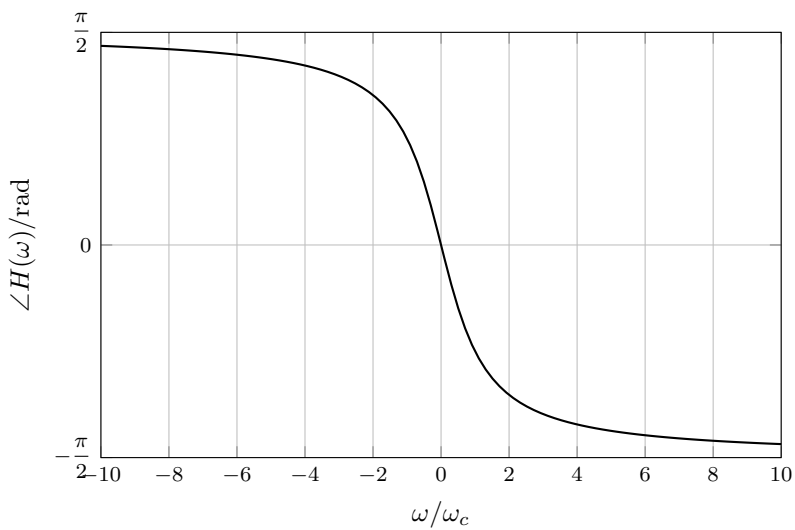


Figura 2.2: Resposta em fase do circuito RC.

Capítulo 3

Resposta em frequência

No último Capítulo, finalizamos a introdução à TF através da sua aplicação na visualização da resposta em frequência do circuito da Figura 1.1. Neste Capítulo seremos um pouco mais amplos e gerais, porém ainda baseados em circuitos RC bastante simples.

As Figuras 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4 representam topologias simples de filtros *passa-baixas*, *passa-altas*, *passa-faixa* e *rejeita-faixa*, respectivamente. Por simplicidade, todos os valores de resistência R e capacitância C são idênticos.

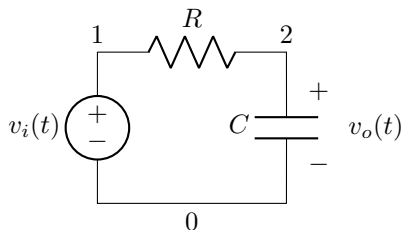


Figura 3.1: Filtro RC passa-baixas.

Lembrando que $\tau = RC$, as funções de transferência dos filtros passa-baixa $H_{PB}(s)$, passa-alta $H_{PA}(s)$, passa-faixa $H_{PF}(s)$ e rejeita-faixa $H_{RF}(s)$ são dadas por

$$H_{PB}(s) = \frac{1}{\tau s + 1}; \quad (3.1)$$

$$H_{PA}(s) = \frac{\tau s}{\tau s + 1}; \quad (3.2)$$

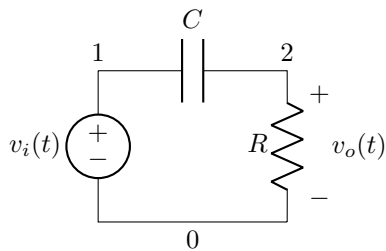


Figura 3.2: Filtro RC passa-altas.

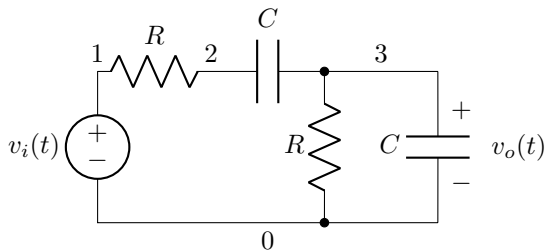


Figura 3.3: Filtro RC passa-banda.

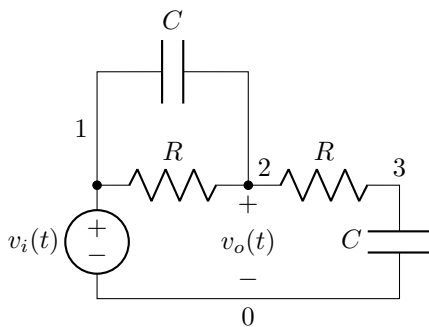


Figura 3.4: Filtro RC rejeita-faixa.

$$H_{\text{PF}}(s) = \frac{\tau s}{\tau^2 s^2 + 3\tau s + 1}; \quad (3.3)$$

$$H_{\text{RF}}(s) = \frac{(\tau s + 1)^2}{\tau^2 s^2 + 3\tau s + 1}. \quad (3.4)$$

Como visto anteriormente, $\omega_c = 1/\tau$. Assim, para a análise de Fourier,

as respostas em frequência dos filtros são:

$$H_{PB}(\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}; \quad (3.5)$$

$$H_{PA}(\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}; \quad (3.6)$$

$$H_{PF}(\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2} + j3\frac{\omega}{\omega_c}}; \quad (3.7)$$

$$H_{RF}(\omega) = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2} + j2\frac{\omega}{\omega_c}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2} + j3\frac{\omega}{\omega_c}}. \quad (3.8)$$

3.1 O diagrama de Bode

O diagrama de Bode representa a resposta em magnitude e em fase de uma função de transferência estável. Considerando que os sistemas sejam reais, as regras de *simetria conjugada* de aplicam à TF, assim:

- a magnitude da TF é par;
- a fase da TF é ímpar.

De maneira que podemos remover as frequências negativas da representação. Ademais, mostra-se útil utilizar um gráfico em escala logarítmica no eixo das frequências. Finalmente, o valor da resposta em magnitude é expresso em decibéis (dB).

As respostas em magnitude, dadas por

$$|H_{PB}(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}; \quad (3.9)$$

$$|H_{PA}(\omega)|^2 = \frac{\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}; \quad (3.10)$$

$$|H_{\text{PF}}(\omega)|^2 = \frac{\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}{1 + 7\frac{\omega^2}{\omega_c^2} + \frac{\omega^4}{\omega_c^4}}; \quad (3.11)$$

$$|H_{\text{RF}}(\omega)|^2 = \frac{1 + 2\frac{\omega^2}{\omega_c^2} + \frac{\omega^4}{\omega_c^4}}{1 + 7\frac{\omega^2}{\omega_c^2} + \frac{\omega^4}{\omega_c^4}}, \quad (3.12)$$

possuem apenas potências pares de ω em sua representação. O que é esperado, dada a paridade simétrica da magnitude. Por outro lado, as respostas em fase

$$\angle H_{\text{PB}}(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right); \quad (3.13)$$

$$\angle H_{\text{PA}}(\omega) = \text{atan2}(\omega_c\omega, \omega^2); \quad (3.14)$$

$$\angle H_{\text{PF}}(\omega) = \text{atan2}\left(\frac{\omega_c^2\omega - \omega^3}{3}, \omega_c\omega^2\right); \quad (3.15)$$

$$\angle H_{\text{RF}}(\omega) = \text{atan2}\left(\frac{\omega_c\omega(\omega^2 - \omega_c^2)}{\omega^4 + 7\omega_c^2\omega^2 + \omega_c^4}, \frac{\omega^4 + 4\omega_c^2\omega^2 + \omega_c^4}{\omega^4 + 7\omega_c^2\omega^2 + \omega_c^4}\right), \quad (3.16)$$

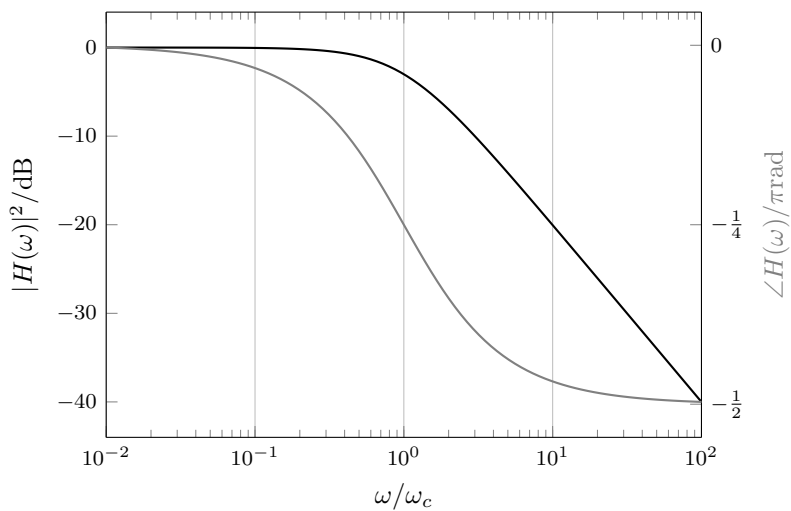
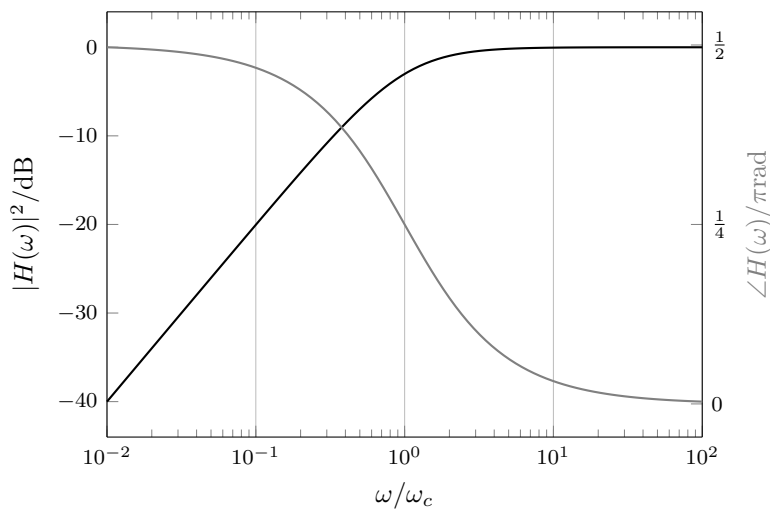
apresentam apenas potências ímpares¹ de ω , dada a anti-simetria de sua paridade.

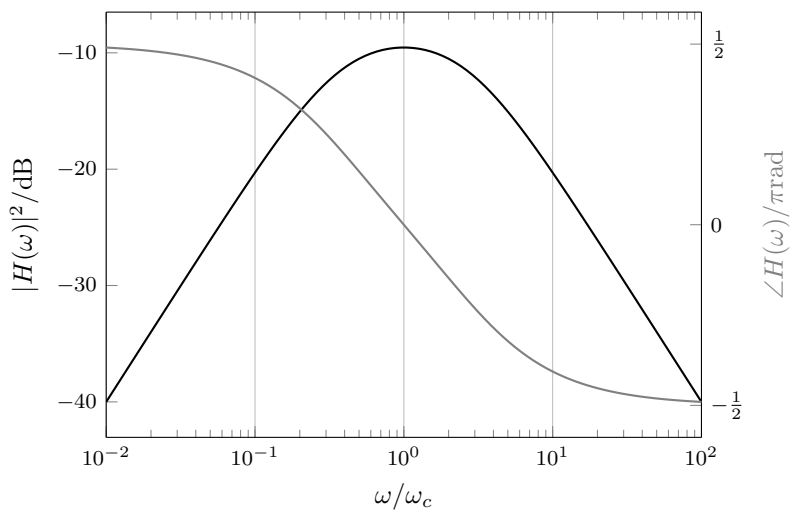
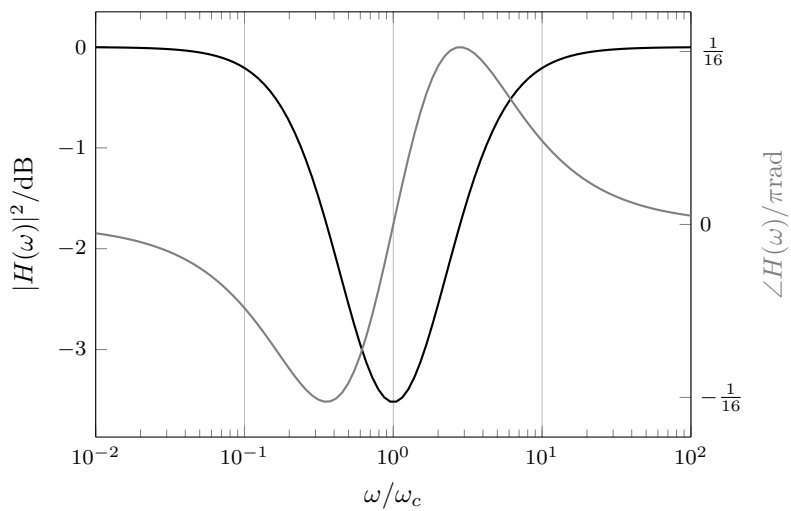
As respostas em magnitude e em fase podem ser visualizadas nos diagramas de Bode das Figuras 3.5–3.8.

A interpretação física da resposta em magnitude é “óbvia”. Ela representa o ganho (ou atenuação) do filtro para uma determinada frequência. Infelizmente, o mesmo não pode ser dito da resposta em fase. Sua interpretação não é tão imediata e o fato de ser dada em radianos não ajuda.

Ainda assim, a fase é um aspecto importantíssimo da resposta do filtro. Para tentar trazer um melhor entendimento, vamos apresentar duas representações alternativas: o *atraso de fase*; e o *atraso de grupo*.

¹O uso da função $\text{atan2}(\cdot)$ mascara essa relação.

Figura 3.5: Diagrama de Bode do filtro $H_{PB}(\omega)$.Figura 3.6: Diagrama de Bode do filtro $H_{PA}(\omega)$.

Figura 3.7: Diagrama de Bode do filtro $H_{PF}(\omega)$.Figura 3.8: Diagrama de Bode do filtro $H_{RF}(\omega)$.

3.2 Atraso de fase

O atraso de fase é definido por

$$\tau_p(\omega) = -\frac{\angle H(\omega)}{\omega}, \quad (3.17)$$

sendo uma grandeza dada em segundos. Embora o atraso de fase seja relevante em algumas aplicações de telecomunicações, seus efeitos não são importantes para a análise de filtros seletivos em frequência. Esse tópico não será expandido.

A Figura 3.9 ilustra o efeito do atraso de fase. Nele um pulso senoidal com envelope gaussiano sofre atraso de fase. Entre as curvas preta e cinza, é possível visualizar o deslocamento, porém este efeito não altera o envelope da função (curvas pontilhadas).

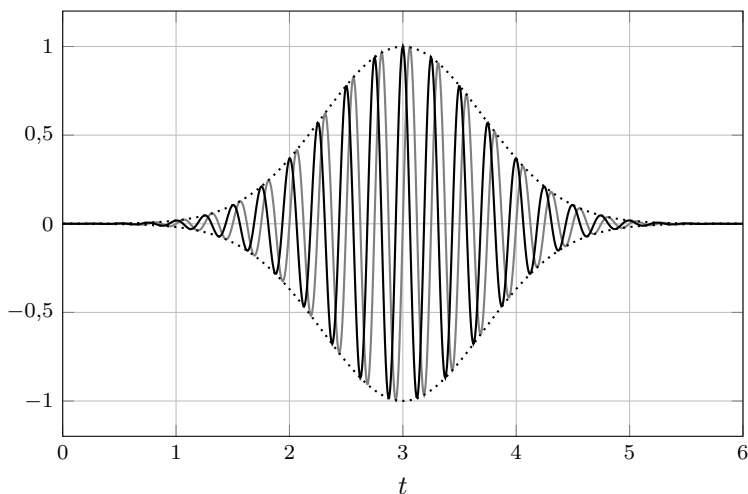


Figura 3.9: Representação do atraso de fase.

3.3 Atraso de grupo

O atraso de fase é definido por

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\angle H(\omega)}{d\omega}, \quad (3.18)$$

sendo uma grandeza dada em segundos. Sua interpretação é de grande valia na análise de filtros seletivos em frequência pois, a *variação do atraso de grupo* indica uma *distorção de fase* do sinal.

Considerando as respostas dos filtros analisados neste Capítulo, os atrasos de grupo podem ser dados por:

$$H_{PB}(\omega) \therefore \tau_g(\omega) = \frac{\tau}{1 + \tau^2 \omega^2}; \quad (3.19)$$

$$H_{PA}(\omega) \therefore \tau_g(\omega) = \frac{\tau}{1 + \tau^2 \omega^2}; \quad (3.20)$$

$$H_{PF}(\omega) \therefore \tau_g(\omega) = \frac{3\tau(1 + \tau^2 \omega^2)}{1 + 7\tau^2 \omega^2 + \tau^4 \omega^4}; \quad (3.21)$$

$$H_{RF}(\omega) \therefore \tau_g(\omega) = \frac{\tau - 8\tau^3 \omega^2 + \tau^5 \omega^4}{(1 + 7\tau^2 \omega^2 + \tau^4 \omega^4)(1 + \tau^2 \omega^2)}. \quad (3.22)$$

A Figura 3.10 ilustra o efeito do atraso de grupo. Aqui percebemos o deslocamento do envelope (linhas pontilhada e tracejada) entre os sinais representados em preto e cinza.

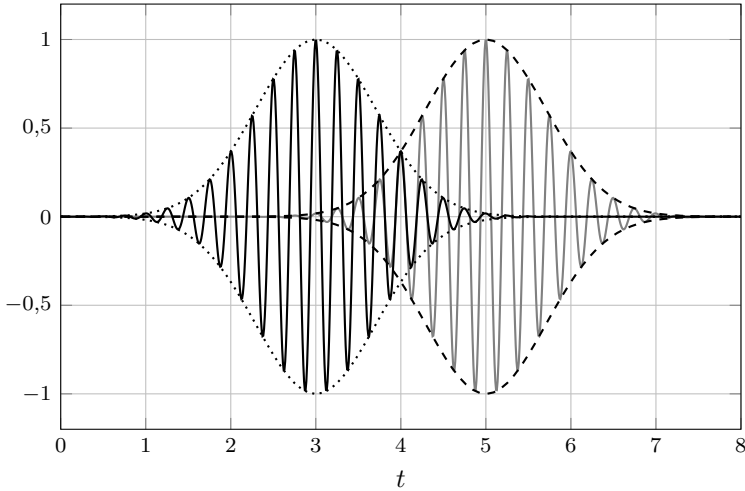


Figura 3.10: Representação do atraso de grupo.

A Figura 3.11 ilustra graficamente os efeitos da distorção de fase pela variação do atraso de grupo. Nela, um sinal bitonal com envelope gaussiano teve a fase de um dos tons alterada. Um ponto notável distinto está no pulso central ($t \approx 2,5$). No sinal original, à esquerda, temos um pico isolado e bem definido. Já no sinal distorcido, à direita, o pico parece ter se

subdividido em dois picos menores (*peak splitting*). Esse fenômeno é típico do mau processamento dos sinais de eletrocardiograma, especialmente no complexo QRS.

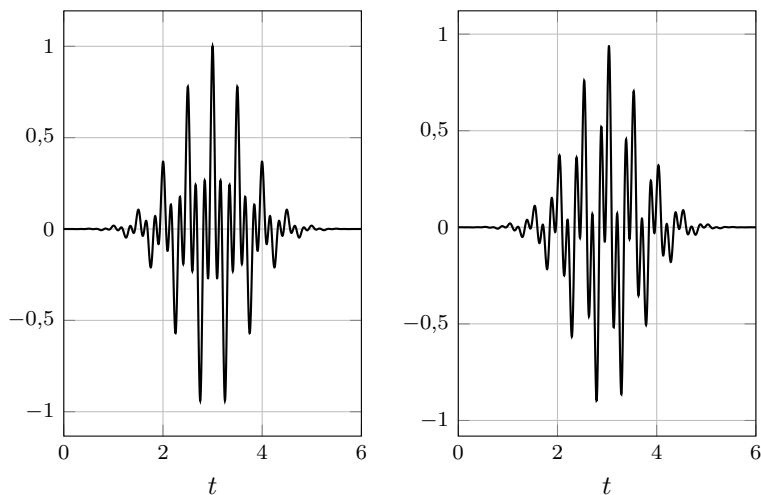


Figura 3.11: Ilustrando a distorção de fase.

3.4 Polos da função de transferência

Uma função de transferência realizável $H(s)$ é formada por: um constante multiplicativa, zeros² e polos³. Respeitando as condições de realizabilidade, o filtro precisa ser causal e estável: de maneira que seus polos *devem* possuir parte real *estritamente negativa*.

Há duas situações possíveis então: polos reais e pares de polos complexos conjugados.

Polos reais

Quando a raiz do denominador é real, o termo pode ser parametrizado por

$$H(s) = \frac{1}{\tau s + 1}, \quad (3.23)$$

²Raízes do polinômio no numerador.

³Raízes do polinômio no denominador.

sendo τ a constante de tempo ($\tau > 0$) e o polo $s = -1/\tau$ é estritamente negativo. Sistemas dessa natureza possuem resposta temporal no formato

$$h(t) = Ae^{-t/\tau} \quad t \geq 0, \quad (3.24)$$

onde A é uma constante a determinar — em conjunto com os outros polos do filtro e eventuais condições iniciais em um p.v.i.

Reparametrizando a constante de tempo como uma frequência de corte $\omega_c = 1/\tau$. Escrevemos a resposta em frequência em termos da resposta em magnitude

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}} \quad (3.25)$$

e do atraso de grupo

$$\tau_g(\omega) = \frac{\tau}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}. \quad (3.26)$$

Considerando que a relação entre a frequência radial e a frequência ordinária (em Hz) é dada por $\omega = 2\pi f$, vamos, mais uma vez, reparametrizar a resposta em magnitude e o atraso de grupo:

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \frac{f^2}{f_c^2}}; \quad (3.27)$$

$$\tau_g(f) = \frac{\tau}{1 + \frac{f^2}{f_c^2}}. \quad (3.28)$$

Finalmente, vamos expressar a resposta em magnitude em decibéis, pois $|H(f)|_{\text{dB}}^2 = 10 \log |H(f)|^2$, de forma que

$$|H(f)|_{\text{dB}}^2 = -10 \log \left(1 + \frac{f^2}{f_c^2} \right). \quad (3.29)$$

E, normalizando o atraso de grupo pela constante de tempo, podemos escrever

$$\frac{\tau_g(f)}{\tau} = \frac{1}{1 + \frac{f^2}{f_c^2}}. \quad (3.30)$$

Com isso, podemos plotar o diagrama de Bode modificado da Figura 3.12. Onde a relação entre os parâmetros τ e f_c é dada por

$$f_c = \frac{1}{2\pi\tau}. \quad (3.31)$$

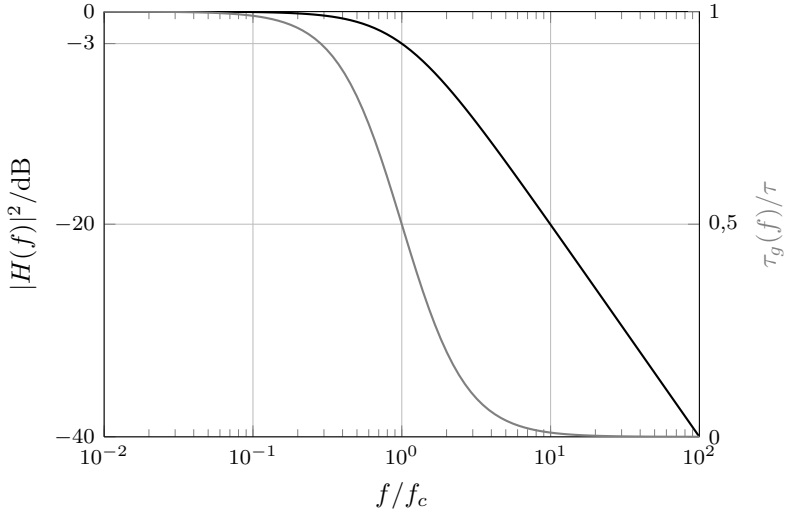


Figura 3.12: Diagrama de Bode (modificado) de um polo real.

A análise da Figura 3.12 evidencia o comportamento assintóticos da resposta em frequência, bem como o critério para a frequência de corte f_c (ou ω_c).

$$f \ll f_c \therefore \frac{f^2}{f_c^2} \rightarrow 0 \implies |H(f)|_{\text{dB}}^2 \approx -10 \log(1) = 0 \text{ dB};$$

$$f \ll f_c \therefore \frac{f^2}{f_c^2} \rightarrow 0 \implies \tau_g(f) \approx \tau;$$

$$f = f_c \therefore \frac{f^2}{f_c^2} = 1 \implies |H(f)|_{\text{dB}}^2 = -10 \log\left(\frac{1}{2}\right) \approx -3 \text{ dB};$$

$$f = f_c \therefore \frac{f^2}{f_c^2} = 1 \implies \tau_g(f) = \frac{\tau}{2};$$

$$f \gg f_c \therefore \left(1 + \frac{f^2}{f_c^2}\right) \rightarrow \frac{f^2}{f_c^2} \implies |H(f)|_{\text{dB}}^2 \approx -20 \log\left(\frac{f}{f_c}\right);$$

$$f \gg f_c \therefore \frac{f^2}{f_c^2} \rightarrow \infty \implies \tau_g(f) \approx 0.$$

Essa análise pode ser compreendida da seguinte forma:

- Para frequências muito menores que a frequência de corte, a resposta em magnitude é plana (0 dB) e o atraso de grupo é constante (τ s);

- Na frequência de corte, o ganho de potência é exatamente 0,5, o que equivale à $-3,01$ dB, aproximadamente. O ganho correspondente em amplitude é de $1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$, aproximadamente 0,707. Na vizinhança da frequência de corte ($\frac{f_c}{10} < f < 10f_c$) também observamos quase a totalidade da variação do atraso de grupo — distorção — do filtro;
- Para frequências muito maiores que a frequência de corte, a resposta em magnitude é uma reta com inclinação de -20 dB/dec (decibéis por década). O atraso de grupo se aproxima, assintoticamente, de zero.

Par de polos complexos conjugados

Quando a raiz do denominador é quadrática e irredutível em reais, é comum parametrizá-la por

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}, \quad (3.32)$$

sendo ω_0 a *frequência natural não-amortecida* ($\omega_0 > 0$ em rad/s) e Q é o fator de qualidade ($Q > 0$ adimensional). A presença de ω_0^2 no numerado apenas normaliza a assíntota da resposta em frequência, como será visto a seguir.

Com um denominador quadrático, há três tipos possíveis de resposta, de acordo com o discriminante Δ da *solução quadrática*⁴

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2, \quad (3.33)$$

de maneira que:

- $\Delta > 0 \implies Q < \frac{1}{2}$ — duas raízes reais e distintas;
- $\Delta = 0 \implies Q = \frac{1}{2}$ — duas raízes reais e iguais;
- $\Delta < 0 \implies Q > \frac{1}{2}$ — um par de raízes complexas conjugadas.

Ambas as soluções com raízes reais não são relevantes ao problema de filtragem analógica — exceto pelo já exposto na Subseção anterior — e não serão consideradas aqui. A solução com um par de raízes complexas conjugadas, por outro lado, é de grande relevância no projeto de filtros analógicos (e digitais). Tais sistemas são chamados *subamortecidos*.

⁴Conhecida no Brasil, incorretamente, como fórmula de Bhaskara.

A resposta temporal de um sistema subamortecido é dada, de uma forma geral, por

$$h(t) = Ae^{-\alpha t} \cos(\beta t + \phi) \quad t \geq 0, \quad (3.34)$$

com A e ϕ constantes a determinar pelo p.v.i., enquanto os parâmetros α e β são dados por:

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q}, \quad (3.35)$$

$$\beta = \frac{\sqrt{4Q^2 - 1}}{2Q} \omega_0. \quad (3.36)$$

Aqui nota-se uma confusão muito comum: a frequência de oscilação β depende de ω_0 mas é diferente dela. A frequência β é chamada de *frequência natural amortecida*. É simples averiguar que se $Q \rightarrow \infty$ então $\beta \rightarrow \omega_0$. Porém o fator de qualidade é limitado por aspectos tecnológicos da construção de circuitos e de componentes realizáveis.

A magnitude quadrática do sistema subamortecido é dada por

$$|H(\omega)|^2 = \frac{\omega_0^4}{\omega^4 + \frac{\omega_0^2 - 2Q^2\omega_0^2}{Q^2}\omega^2 + \omega_0^4}, \quad (3.37)$$

e o atraso de grupo por

$$\tau_g(\omega) = \frac{\frac{\omega_0}{Q}(\omega^2 + \omega_0^2)}{\omega^4 + \frac{\omega_0^2 - 2Q^2\omega_0^2}{Q^2}\omega^2 + \omega_0^4}. \quad (3.38)$$

Aqui, a substituição $\omega = 2\pi f$ não beneficia a análise, de maneira que vamos continuar com ω . A análise dos pontos estacionários (derivada nula) de $|H(\omega)|^2$ revela um novo ponto notável: a *frequência de ressonância* ω_r .

A frequência

$$\omega_r = \frac{\omega_0 \sqrt{4Q^2 - 2}}{2Q}, \quad (3.39)$$

indica um máximo da resposta em magnitude, desde que a condição

$$Q \geq \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (3.40)$$

seja satisfeita — lembrando que já assumimos que $Q > \frac{1}{2}$.

Assim, ressaltar aqui a potencial confusão de “frequências” quando lidamos com sistemas subamortecidos: temos a frequência natural não-amortecida ω_0 ; a frequência natural amortecida β — observada na resposta temporal; e a frequência de ressonância ω_r que é um ponto notável no diagrama de Bode. Tanto β quanto ω_r convergem para ω_0 se $Q \rightarrow \infty$.

O gráfico da Figura 3.13 traz uma pequena coleção de curvas no diagrama de Bode para a resposta em magnitude de um sistema subamortecido com $Q = \{1, 2, 10\}$. Nele observamos o pico de ressonância na resposta em magnitude, cada vez mais pronunciado, conforme Q aumenta. O comportamento assintótico para $\omega \rightarrow 0$ é de assentar em 0 dB, enquanto para $\omega \rightarrow \infty$ temos uma reta de -40 dB/dec

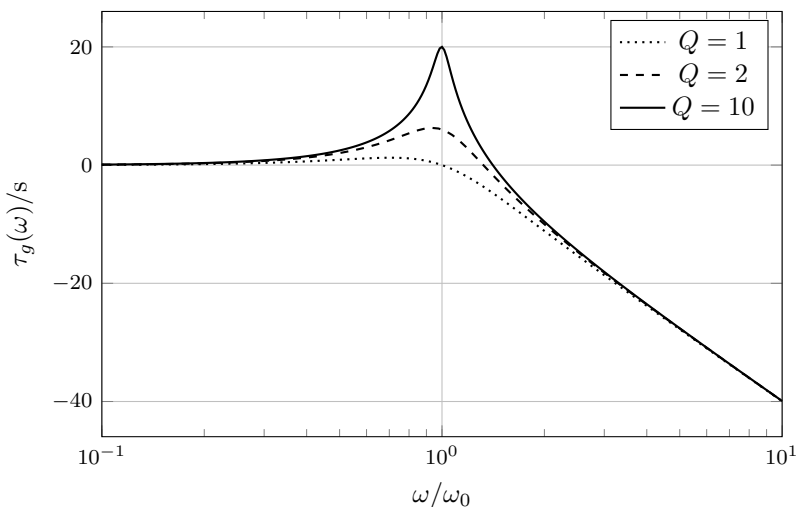


Figura 3.13: Diagrama de Bode (magnitude) de um sistema subamortecido.

Já na Figura 3.14 representa uma coleção de atrasos de grupo para o sistema subamortecido, também para $Q = \{1, 2, 10\}$. Aqui vemos que a variação do atraso de grupo possui comportamento similar ao pico de ressonância. Lembramos que a variação de atraso de grupo se traduz como distorção do sinal pelo filtro.

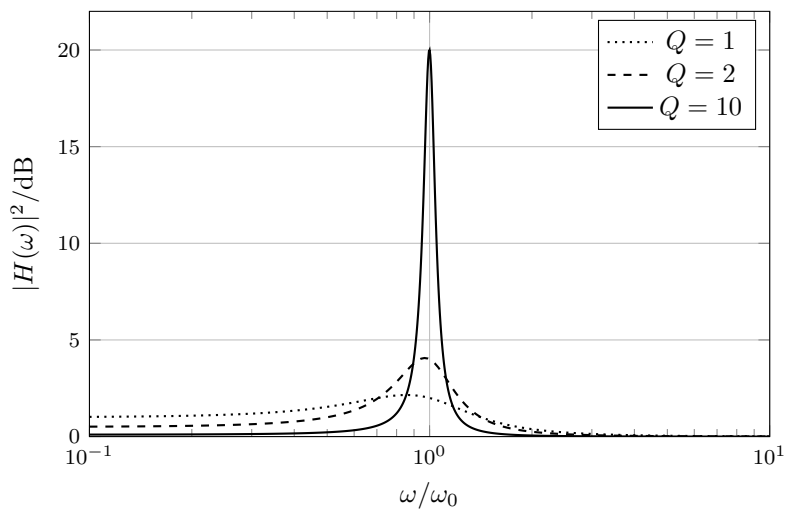


Figura 3.14: Diagrama de Bode (atraso de grupo) de um sistema subamortecido.

Capítulo 4

Aproximações reais

No Capítulo anterior, foi analisado em detalhe a resposta em frequência de circuitos com polos reais ou pares de polos complexos conjugados. A literatura especializada oferece grande abundância de circuitos que implementam funções de transferência dessa natureza, porém, isso nem sempre é suficiente para atender às especificações de um problema de filtragem.

Neste Capítulo, discutiremos a questão da especificação de uma resposta em frequência, bem como a ideia das aproximações reais do problema de filtragem analógica seletiva em frequência.

Para simplicidade do desenvolvimento matemático, as aproximações serão vistas tomando um *protótipo passa-baixas normalizado*, ou seja, um filtro passa-baixas cuja frequência de corte é de 1 rad/s ($\approx 0,16$ Hz).

Adicionalmente, por simplicidade da notação, vamos definir uma grandeza chamada de *atenuação*, denotada por $A(\omega)$. Sua relação com a magnitude quadrática é dada por

$$A(\omega) = \frac{1}{|H(\omega)|^2}. \quad (4.1)$$

A seguir serão discutidas e apresentadas as particularidades das aproximações de Butterworth, Chebyshev e Bessel. Essas aproximações possuem equacionamento mais simples, pois seus filtros passa-baixa possuem apenas polos (*all-poles*).

4.1 Aproximação de Butterworth

Em 1930 o físico inglês Stephen Butterworth publicou um artigo intitulado “*On the Theory of Filter Amplifiers*”. Neste trabalho, Butterworth defendeu a ideia que bons filtros não apresentam oscilação na resposta em

magnitude, ou seja, possuem resposta monotônica. Um filtro passa-baixas de Butterworth possui resposta em magnitude estritamente decrescente em função da frequência.

A solução apresentada por Butterworth para um protótipo passa-baixas normalizado possui a seguinte resposta em magnitude:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^{2N}}, \quad (4.2)$$

onde $N \in \mathbb{N}^*$ é a ordem¹ do filtro.

A atenuação do filtro é dada então por $A(\omega) = 10 \log_{10}(1 + \omega^{2N})$. A inspeção da Figura 4.1 indica que não há oscilações na resposta em magnitude — a atenuação é uma função crescente de ω . Independente da ordem N , a atenuação sempre vale 3 dB para $\omega = 1$ rad/s.

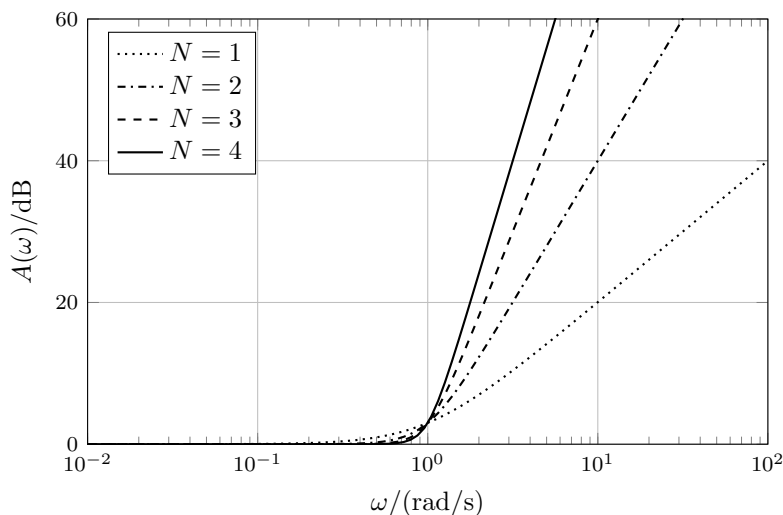


Figura 4.1: Atenuação do filtro de Butterworth.

O filtro de Butterworth é conhecido por ter *banda de passagem maximamente plana*. Isso significa que para frequências abaixo da frequência de corte, o ganho é tão próximo da unidade (0 dB) quanto possível. A análise

¹Equivalente ao número de componentes reativos irreduzíveis por associação.

das derivadas de $A(\omega)$ na origem indicam isso:

$$\begin{aligned}\frac{d^0 A(\omega)}{d\omega^0} &= 1 + \omega^{2N} \implies \left. \frac{d^0 A(\omega)}{d\omega^0} \right|_{\omega=0} = 1; \\ \frac{d^1 A(\omega)}{d\omega^1} &= 2N\omega^{2N-1} \implies \left. \frac{d^1 A(\omega)}{d\omega^1} \right|_{\omega=0} = 0; \\ \frac{d^2 A(\omega)}{d\omega^2} &= 2N(2N-1)\omega^{2N-2} \implies \left. \frac{d^2 A(\omega)}{d\omega^2} \right|_{\omega=0} = 0; \\ &\dots \\ \frac{d^{2N} A(\omega)}{d\omega^{2N}} &= (2N)! \implies \left. \frac{d^{2N} A(\omega)}{d\omega^{2N}} \right|_{\omega=0} = (2N)!.\end{aligned}$$

Na origem, $A(\omega)$ é unitária, porém todas as suas derivadas são nulas, exceto a de mais alta ordem $(2N)$. Isso indica uma forte tendência em manter o ganho unitário.

Os polos do filtro de Butterworth

A aproximação de Butterworth parece estar embasada em boas ideias. Resta a questão: “qual a função de transferência que possui uma resposta desse tipo?” Vamos discutir aqui, em detalhe, como são calculados os polos de Butterworth.

Conforme visto anteriormente, a resposta em frequência $H(\omega)$ é uma função complexa sobre a variável real ω . Assim, sua magnitude quadrática pode ser escrita como $|H(\omega)|^2 = H(\omega)\overline{H(\omega)}$, onde $\overline{(\cdot)}$ denota a conjugação complexa.

Em razão das propriedades de simetria conjugada da TF, chegamos à equivalência $\overline{H(\omega)} = H(-\omega)$. Com isso, chegamos à relação

$$\begin{aligned}|H(\omega)|^2 &= H(\omega)\overline{H(\omega)}; \\ &= H(\omega)H(-\omega); \\ &= H(s)H(-s) \Big|_{s=j\omega}.\end{aligned}$$

Assim, da mesma maneira que fazemos o mapeamento $s = j\omega$, podemos

fazer o mapeamento inverso $\omega = -js$. Reescrevendo Eq. (4.2):

$$\begin{aligned} H(s)H(-s) &= \frac{1}{1 + (-js)^{2N}}; \\ &= \frac{1}{1 + (-1)^{2N} j^{2N} s^{2N}}; \\ &= \frac{1}{1 + (-1)^N s^{2N}}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Os polos de $H(s)H(-s)$ são as raízes de $1 + (-1)^N s^{2N}$, que podem ser escritos por:

$$\begin{aligned} 1 + (-1)^N s^{2N} &= 0; \\ (-1)^N s^{2N} &= -1; \\ (-1)^{2N} s^{2N} &= -1(-1)^N; \\ s^{2N} &= (-1)^{N+1}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Vamos analisar esses polos para $N = \{1, 2, 3, 4\}$ e averiguar se há algum *insight*.

Tomando $N = 1$,

$$\begin{aligned} p^2 &= (-1)^2; \\ p^2 &= 1; \\ p^2 &= \exp(j(0 + 2\pi k)); \\ p_k &= \exp(j\pi k) \text{ para } k = 0, 1; \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$p_k = \pm 1. \quad (4.6)$$

Tomando agora $N = 2$,

$$\begin{aligned} p^4 &= (-1)^3; \\ p^4 &= -1; \\ p^4 &= \exp(j(\pi + 2\pi k)); \\ p_k &= \exp\left(j\frac{\pi}{4} + j\frac{\pi}{2}k\right) \text{ para } k = 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Tomando então $N = 3$,

$$\begin{aligned} p^6 &= (-1)^4; \\ p^6 &= 1; \\ p^6 &= \exp(j(0 + 2\pi k)); \\ p_k &= \exp\left(j\frac{\pi}{3}k\right) \text{ para } k = 0, \dots, 5. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Tomando finalmente $N = 4$,

$$\begin{aligned} p^8 &= (-1)^5; \\ p^8 &= -1; \\ p^8 &= \exp(j(\pi + 2\pi k)); \\ p_k &= \exp\left(j\frac{\pi}{8} + j\frac{\pi}{4}k\right) \text{ para } k = 0, \dots, 7. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Analisando as equações anteriores, é possível generalizar² a equação dos polos de $H(s)H(-s)$ para

$$p_k = \exp\left(j\frac{N+1}{2N}\pi + k\frac{1}{N}\pi\right) \text{ para } k = 0, 1, \dots, 2N-1, \quad (4.10)$$

sendo que $H(s)H(-s)$ pode ser escrita como:

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{\prod_{k=0}^{2N-1} (s - p_k)}. \quad (4.11)$$

A Figura 4.2 ilustra as posições dos polos de $H(s)H(-s)$ para $N = \{1, 2, 3, 4\}$. Nela, percebemos polos simétricos em relação à origem do plano s . Sem perda de generalidade, vamos considerar que $H(s)$ contém os polos causais e estáveis à esquerda do eixo $j\omega$, enquanto $H(-s)$ contém os polos não-causais e estáveis (ou causais e instáveis) à direita do eixo $j\omega$.

Com isso, podemos chegar às seguintes relações para o filtro de Butterworth de ordem N :

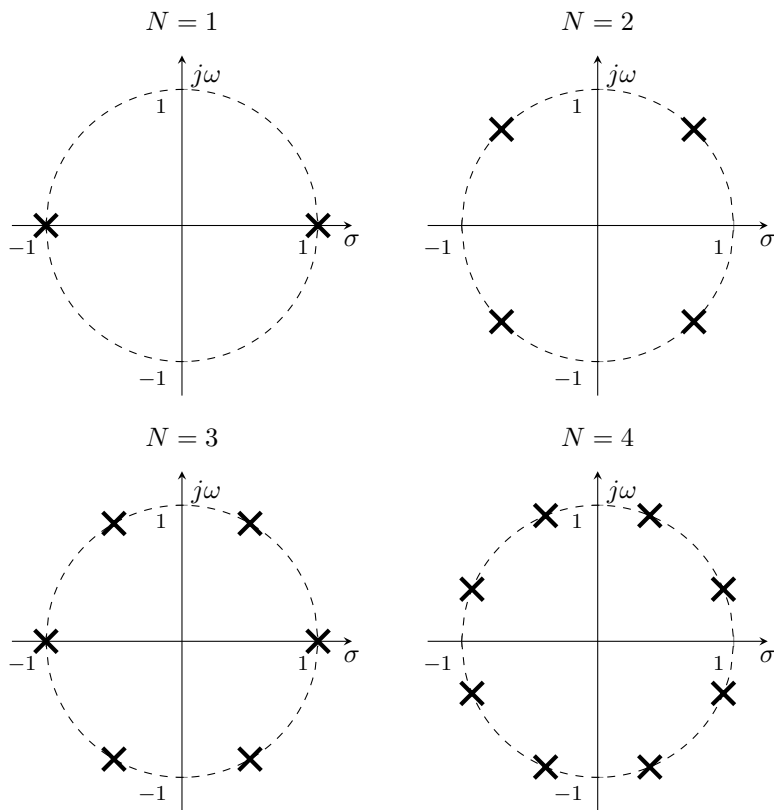
$$p_k = \exp\left(j\frac{N+1}{2N}\pi + k\frac{1}{N}\pi\right) \text{ para } k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.12)$$

com a função de transferência dada por

$$H(s) = \frac{1}{\prod_{k=0}^{N-1} (s - p_k)}. \quad (4.13)$$

No Matlab®, o Signal Processing Toolbox implementa a Eq. (4.12) através da função `buttap()`.

²Com algum esforço e inspiração matemática.

Figura 4.2: Polos de Butterworth no plano s .