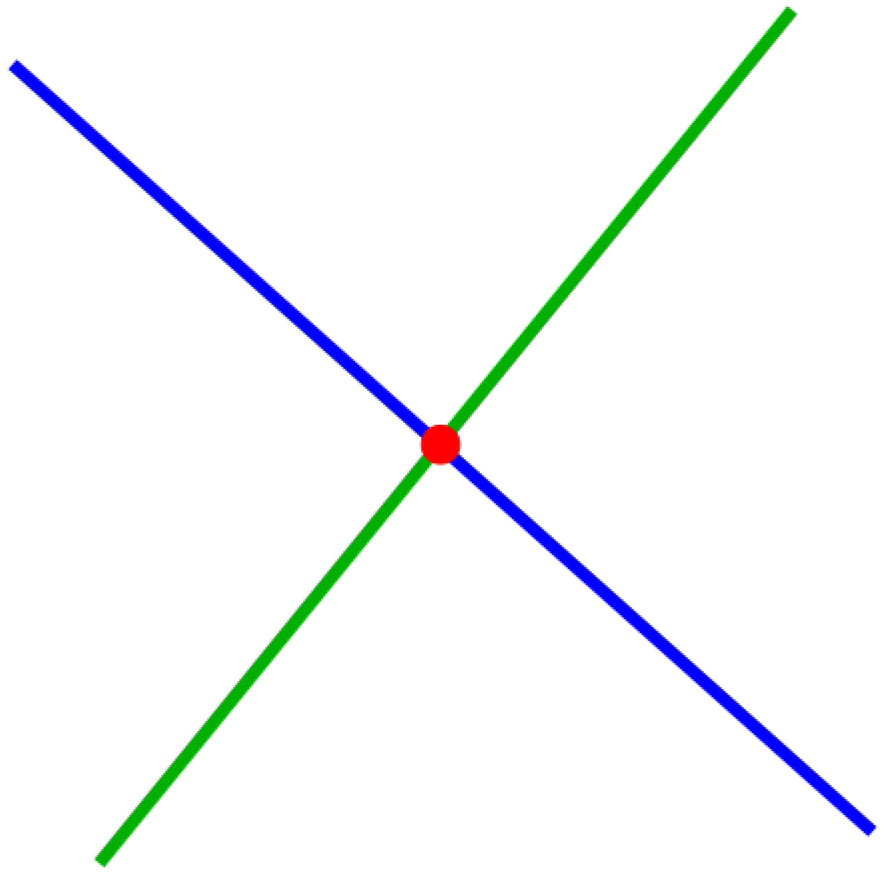
Intersección

¿Qué es?

En geometría, una intersección es un punto, línea recta, curva, superficie, volumen o un plano, que es común a dos o más elementos (como líneas rectas, curvas, planos, superficies, volúmenes o planos)

El caso más simple en geometría euclidiana es la intersección de dos rectas distintas, que o bien es un punto o no existe si las líneas son paralelas.



DOS RECTAS:

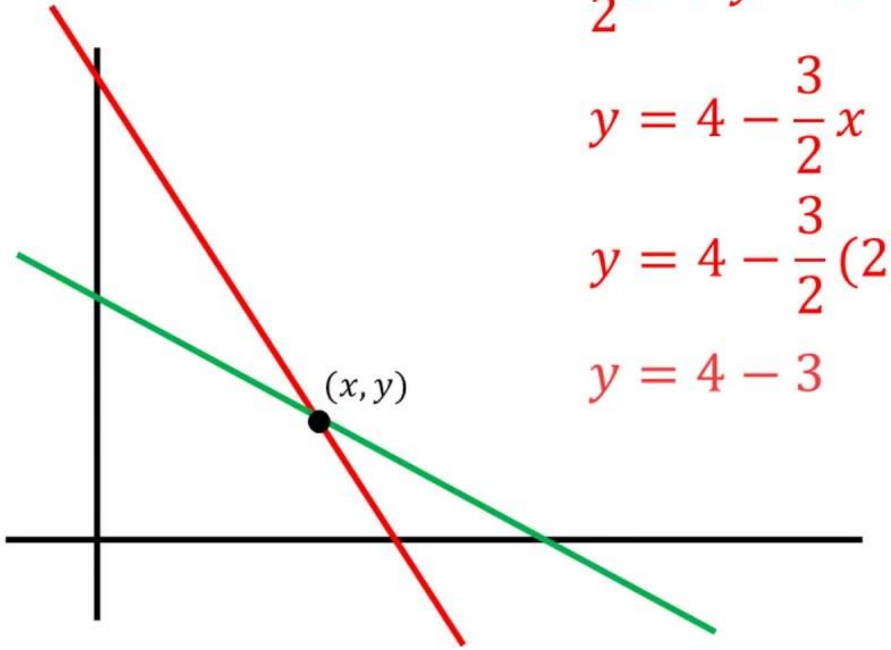
- Para la determinación del punto de intersección de dos líneas no paralelas.

$$a_1x + b_1y = c_1,\; a_2x + b_2y = c_2$$

- Se obtienen, a partir de la regla de Cramer o sustituyendo una variable, las coordenadas del punto de intersección (x_s, y_s):

$$x_s = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y_s = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

NOTA: (SI $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ LAS LÍNEAS SON PARALELAS Y ESTAS FÓRMULAS NO SE PUEDEN USAR PORQUE IMPLICAN DIVIDIR POR 0).



$$\frac{3}{2}x + y = 4$$

$$y = 4 - \frac{3}{2}x$$

$$y = 4 - \frac{3}{2}(2)$$

$$y = 4 - 3$$

$$\frac{1}{2}x + y = 2$$

$$\frac{1}{2}x + 4 - \frac{3}{2}x = 2$$

$$4 - \frac{2}{2}x = 2$$

$$4 - x = 2$$

$$-x = 2 - 4$$

$$-x = -2$$

$$x = 2$$

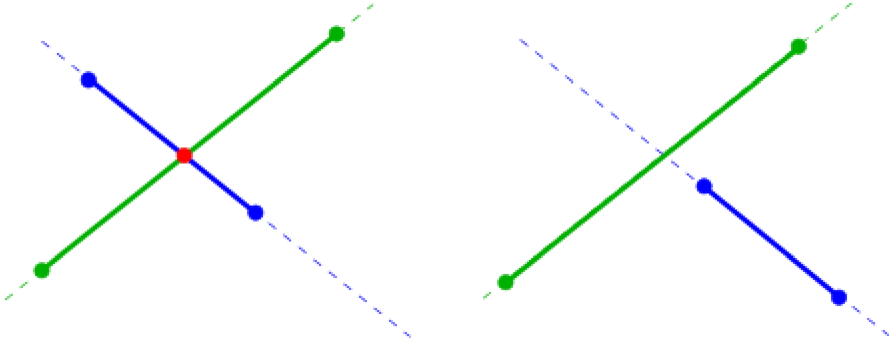
Ejemplo

DOS SEGMENTOS DE RECTA

Para dos segmentos no paralelos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$$

no necesariamente hay un punto de intersección:



Debido a que el punto de intersección

$$(x_0, y_0)$$

de las rectas correspondientes puede no estar contenido en ambos segmentos.

Para comprobarlo se usa la representación paramétrica de las rectas:

$$(x(s), y(s)) = (x_1 + s(x_2 - x_1), y_1 + s(y_2 - y_1)),$$
$$(x(t), y(t)) = (x_3 + t(x_4 - x_3), y_3 + t(y_4 - y_3)).$$

Los segmentos de línea se intersecan solo en un punto común (x_0, y_0) de las líneas correspondientes si los parámetros correspondientes s_0, t_0 cumplen la condición $0 \leq s_0, t_0 \leq 1$.

Los parámetros s_0, t_0 son la solución del sistema lineal:

$$\begin{aligned} s(x_2 - x_1) - t(x_4 - x_3) &= x_3 - x_1, \\ s(y_2 - y_1) - t(y_4 - y_3) &= y_3 - y_1 . \end{aligned}$$

Se puede resolver para s y t usando la regla de Cramer. Si se cumple la condición $0 \leq s_0, t_0 \leq 1$, se inserta s_0 o t_0 en la representación paramétrica correspondiente y se obtiene el punto de intersección (x_0, y_0).

NOTA: TENIENDO EN CUENTA LAS RECTAS, EN LUGAR DE SEGMENTOS DETERMINADOS POR PARES DE PUNTOS, CADA CONDICIÓN $0 \leq s_0, t_0 \leq 1$ SE PUEDE DESCARTAR Y EL MÉTODO PRODUCE EL PUNTO DE INTERSECCIÓN DE LAS LÍNEAS.

EN EL ESPACIO (tres dimensiones).

En el espacio tridimensional, también pueden existir puntos de intersección (puntos comunes) entre las curvas y las superficies.

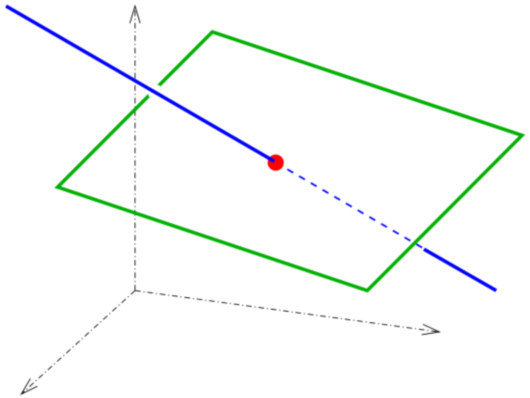
Una recta y un plano:

En tres dimensiones, la intersección de una recta y un plano en posición general es un punto.

Comúnmente, una línea en el espacio se representa paramétricamente $(x(t), y(t), z(t))$ así como un plano mediante una ecuación del tipo $ax + by + cz = d$

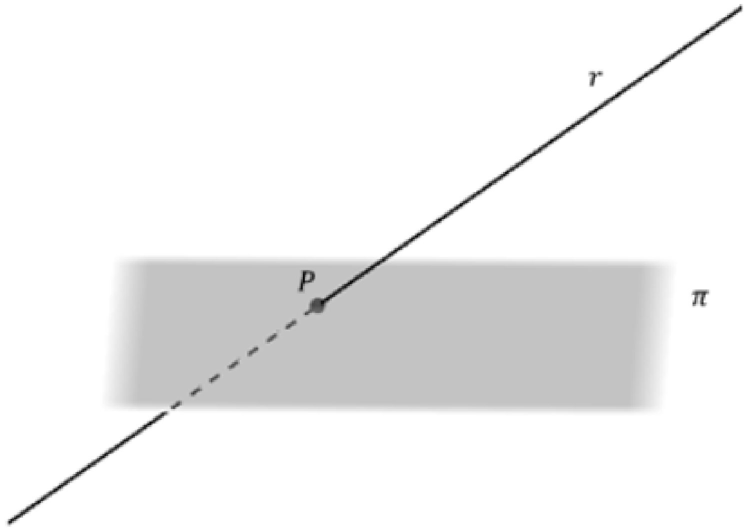
Al sustituir los parámetros en la ecuación, se obtiene la ecuación lineal $ax(t) + by(t) + cz(t) = d$,

con el parámetro t_0 correspondiente al punto de intersección $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$.



CASO 1

Una recta puede ser concurrente con un plano:



Dados

$\pi: 2x-3y+z+1=0$

$r1: (x,y,z)=(0,1,3)+t(1,0,1)$

Escribimos las ecuaciones paramétricas de la recta y las reemplazamos en la ecuación del plano:

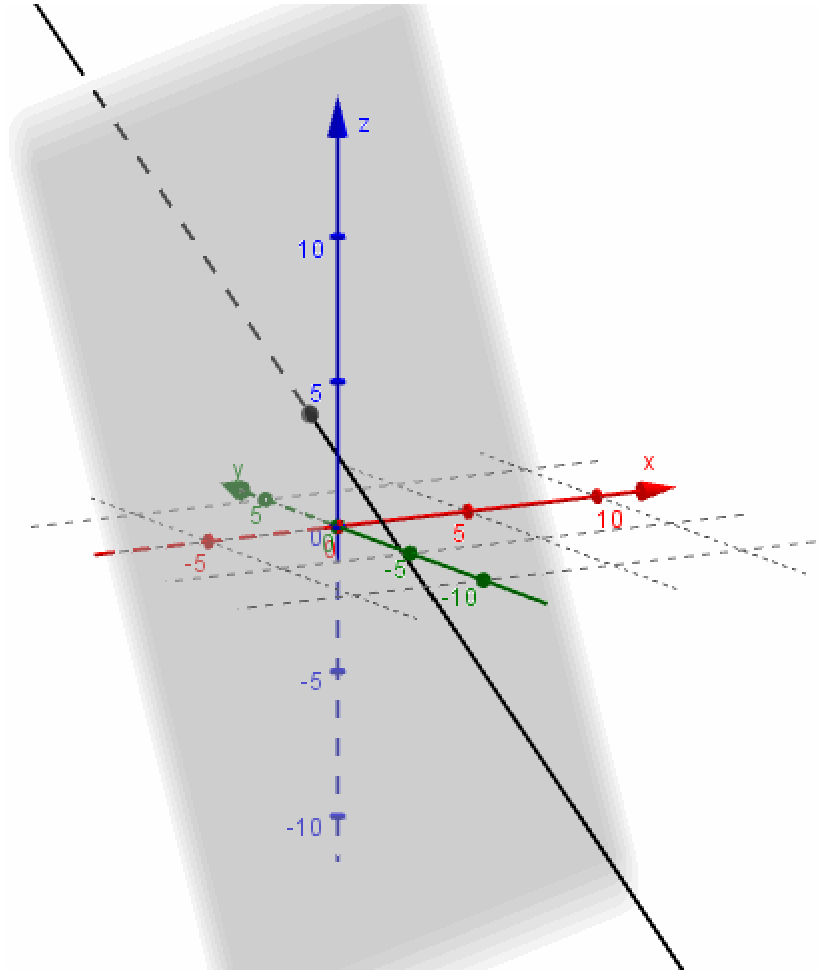
$X=t, \quad y=1, \quad z=3+t$

$2t-3*1+(3+t)*1+1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t=-1/3$

Caso 1

Reemplazando el valor del parámetro t en las ecuaciones de la recta, obtenemos el punto de intersección:

r1∩π={(–1/3,1,8/3)}



CASO 2

Una recta puede estar incluida en un plano:

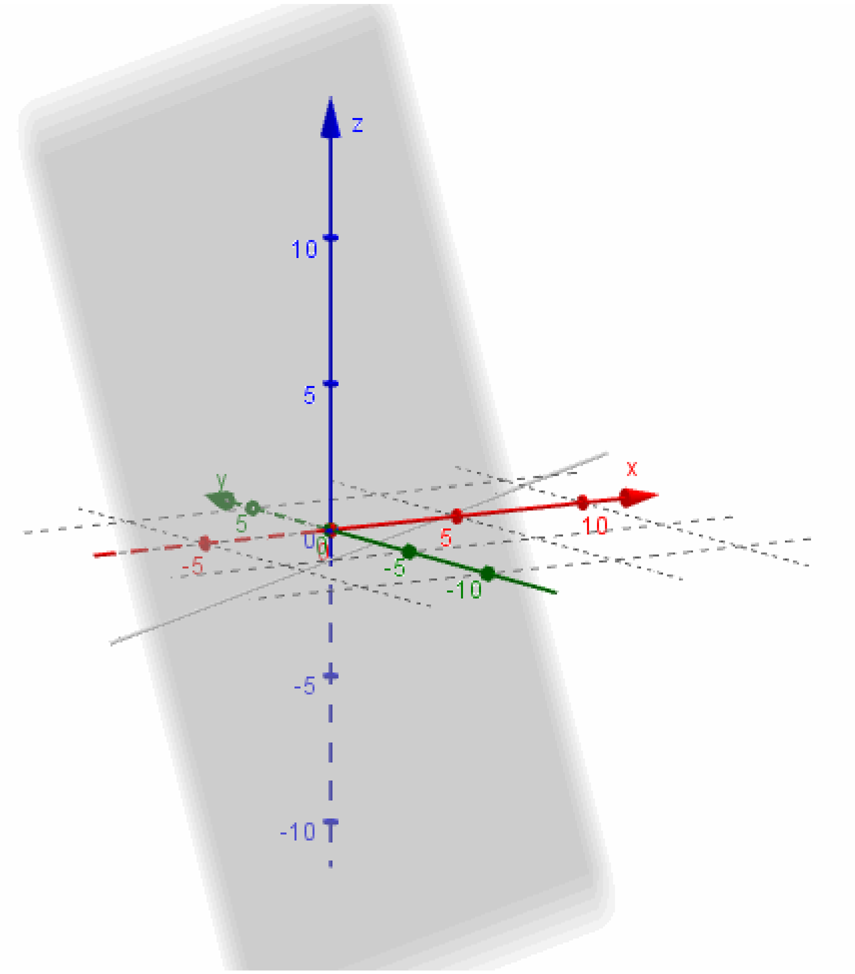
Busquemos ahora la intersección del mismo plano π con la recta $r2:(x,y,z)=(0,0,-1)+\lambda(3,2,0)$

Escribimos las ecuaciones paramétricas: $x=3\lambda$, $y=2\lambda$, $z=-1$

Reemplazamos en la ecuación del plano

$2(3\lambda)-3(2\lambda)-1+1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0=0 \quad \forall\lambda$

Queda una expresión que es verdadera para todo λ. Esto significa que todo punto de la recta verifica la ecuación del plano. En este caso podemos afirmar que la recta está incluida en el plano, por lo tanto: $r2 \cap \pi = r2$



CASO 3

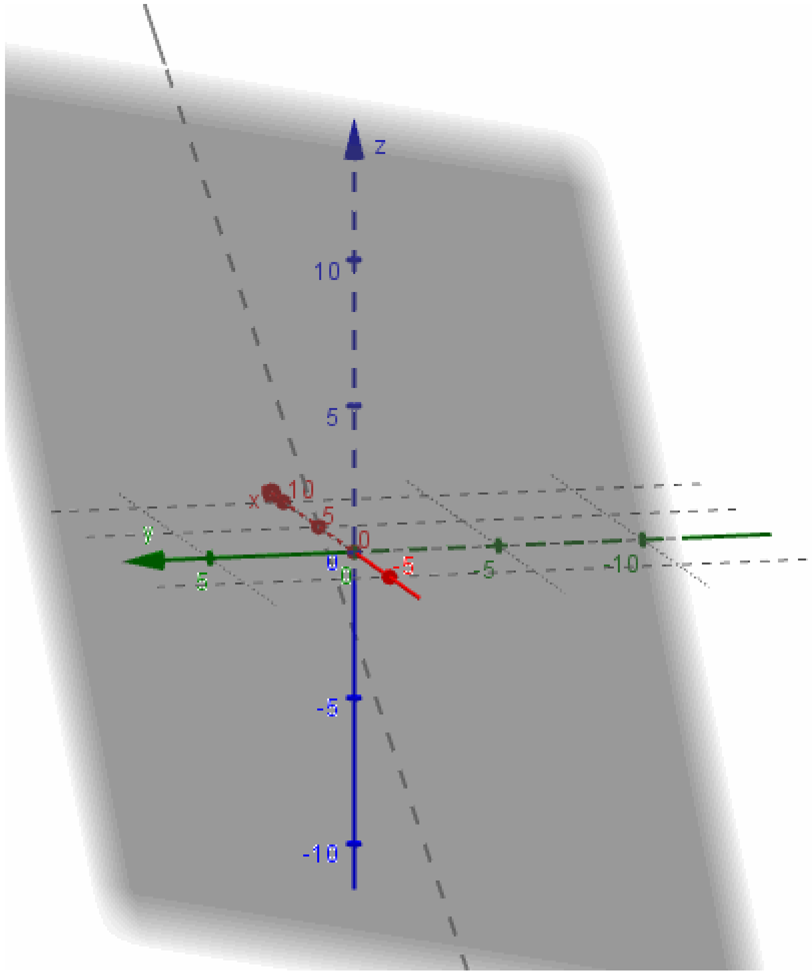
Una recta puede ser paralela a un plano:

Considerando el mismo plano π, hallemos la intersección con la recta r3:$(x,y,z)=(5,0,0)+\beta(0,1,3)$

Reiterando el procedimiento, resulta: $x=5$, $y=\beta$, $z=3\beta$

Nos queda : $10-3\beta+3\beta+1=0 \Rightarrow 11=0$ absurdo

Este absurdo nos indica que la recta y el plano no tienen ningún punto en común, o sea que la recta es paralela al plano y por lo tanto: r∩π=∅



ROTACIONES EN EL PLANO

Sea un vector *A* en el plano cartesiano definido por sus componentes *x* e *y*, descrito vectorialmente a través de sus componentes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}$$

La operación de rotación del punto señalado por este vector alrededor de un eje de giro puede siempre escribirse como la acción de un operador lineal (representado por una matriz) actuando sobre el vector multiplicando al vector: $\mathcal{R}\mathbf{A} = \mathbf{A}'$

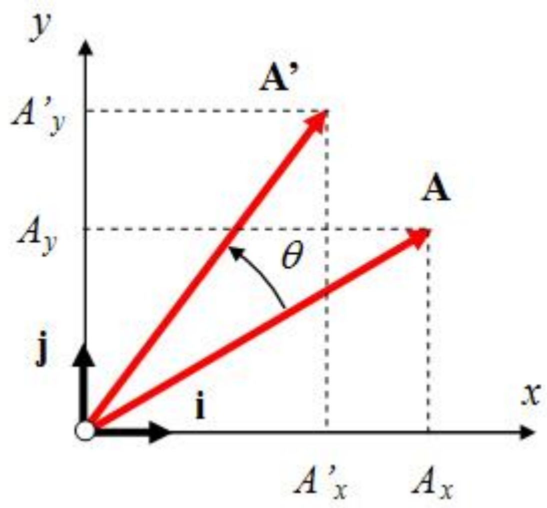
Expresión matricial

En dos dimensiones la matriz de rotación para el vector dado puede escribirse de la manera siguiente:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Al hacer la aplicación del operador, es decir, al multiplicar la matriz por el vector, obtendremos un nuevo vector A' que ha sido rotado en un ángulo θ en sentido antihorario:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_x \\ A'_y \end{bmatrix}$$



siendo

$$A'_x = A_x \cos\theta - A_y \sin\theta$$
$$A'_y = A_x \sin\theta + A_y \cos\theta$$

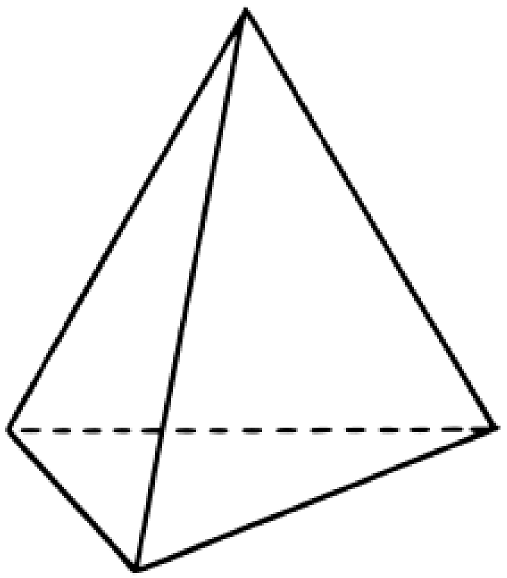
las componentes del nuevo vector después de la rotación.

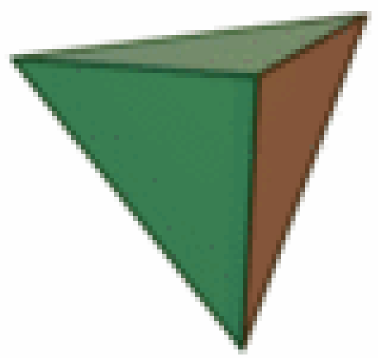
TAREA

Como se realizaría una rotación en sentido horario, y traer un ejemplo

TETRAEDRO

Un **tetraedro** (del griego τέτταρες 'cuatro' y ἕδρα 'asiento, base de apoyo o cara') es un poliedro de cuatro caras. Las caras de un tetraedro son triángulos y en cada vértice concurren tres caras. Si las cuatro caras del tetraedro son triángulos equiláteros, iguales entre sí, el tetraedro se denomina *regular*. Además es un sólido platónico. De otra manera un tetraedro es una pirámide de base triangular.

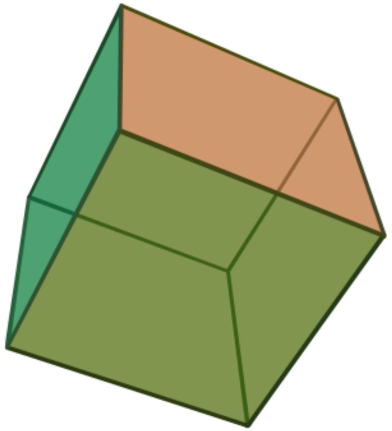




CUBO

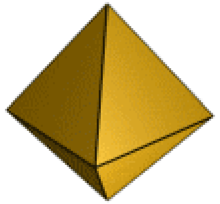
Cubo o **hexaedro regular** es un poliedro limitado por seis caras cuadradas congruentes. Es uno de los denominados sólidos platónicos.

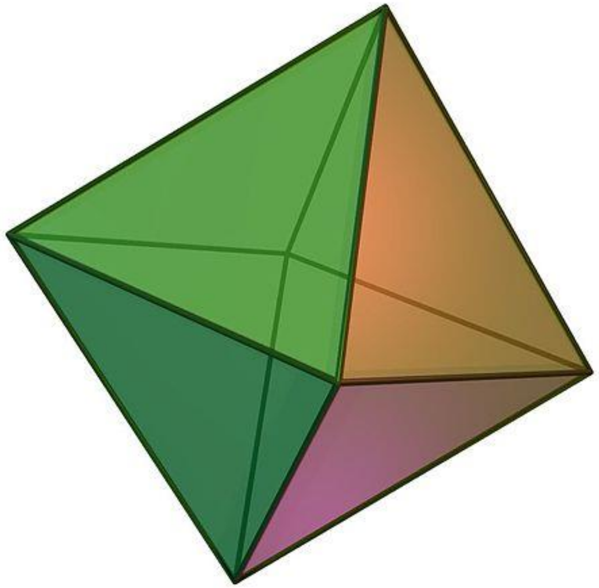
Un cubo, además de ser un hexaedro, puede ser clasificado también como paralelepípedo, recto y rectangular, (brevemente ortoedro [1]) pues todas sus caras son cuadrados y paralelos dos a dos. Incluso, se puede entender como un prisma recto, cuya base es un cuadrado y su altura equivalente al lado de la base.



OCTAEDRO

Un **octaedro** u **octoedro** (del griego ὀκτώ "ocho" y ἕδρα "asiento" o "cara") es un poliedro de ocho caras. Con este número de caras puede ser un poliedro convexo o un poliedro cóncavo. Sus caras pueden ser polígonos de siete lados o más. Si las ocho caras del octaedro son triángulos equiláteros, iguales entre sí, el octaedro es convexo y se denomina **regular**, siendo una figura de los denominados sólidos platónicos.

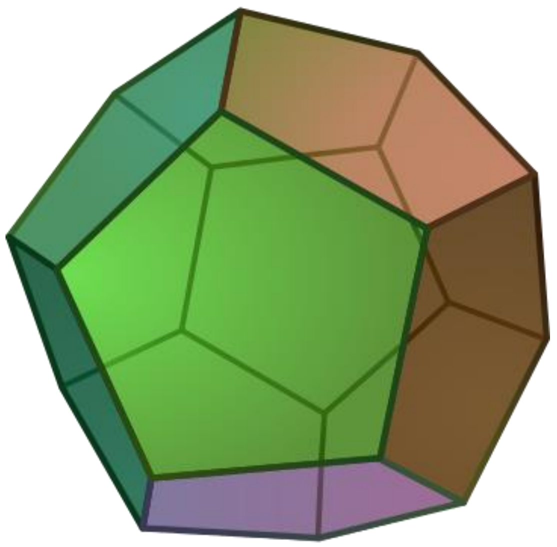


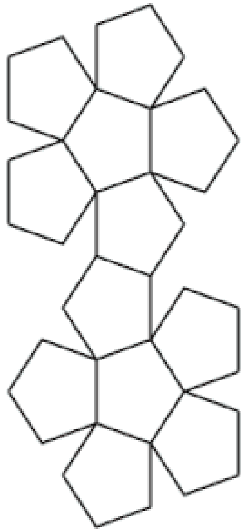


DODECAEDRO

Un **dodecaedro** (del griego δώδεκα, ‘doce’ y ἕδρα; ‘asiento’, ‘posición’, en geometría ‘cara’) es un poliedro de doce caras, convexo o cóncavo. Sus caras han de ser polígonos de once lados o menos. Si las doce caras del dodecaedro son pentágonos regulares, iguales entre sí, el dodecaedro es convexo y se denomina 'regular', siendo entonces uno de los llamados sólidos platónicos.

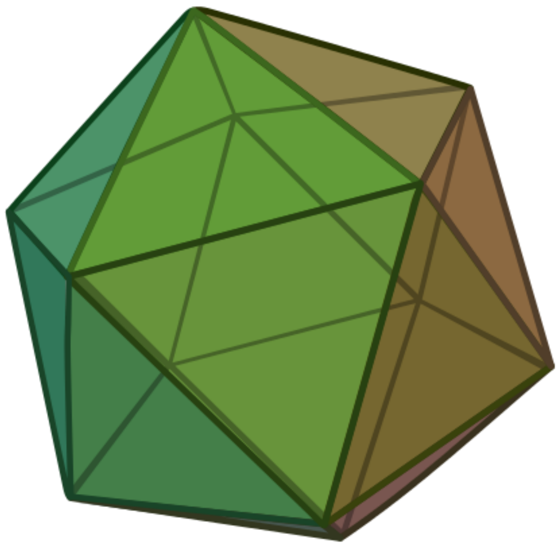
Recientes investigaciones científicas han propuesto que el espacio dodecaédrico de Poincaré sería la forma del Universo y en el año 2008 se estimó la orientación óptima del modelo en el cielo

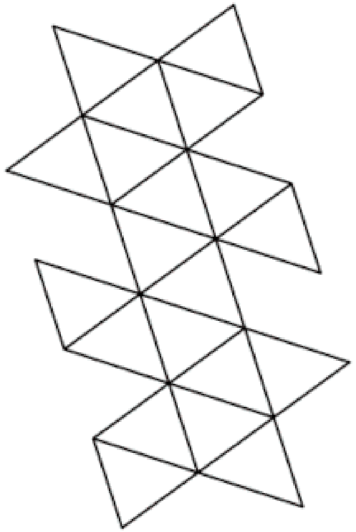


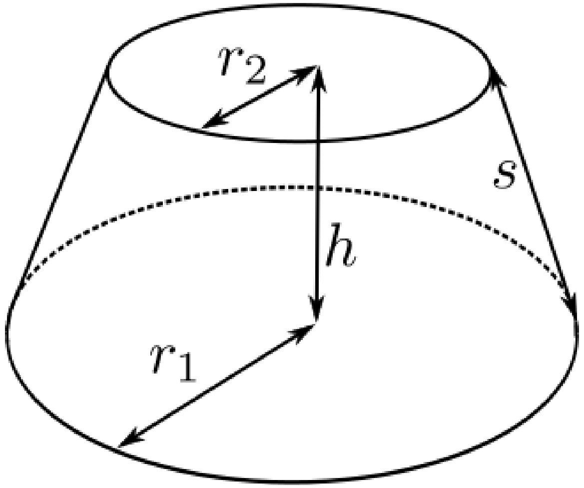


ICOSAEDRO

Un **icosaedro** es un poliedro de veinte caras, convexo o cóncavo. Si las veinte caras del icosaedro son triángulos equiláteros y congruentes, iguales entre sí, el icosaedro es convexo y se denomina *regular*, siendo entonces uno de los llamados sólidos platónicos. El poliedro conjugado del icosaedro es el dodecaedro.







TRONCO DE CONO

El **tronco de cono**, **cono truncado** o **tronco de Garófalo** es el cuerpo que resulta de la rotación de un trapecio rectángulo al usar como eje de giro el lado perpendicular a las bases.

ESFERA

Una **superficie esférica** es una superficie de revolución formada por el conjunto de todos los puntos del espacio que equidistan de un punto llamado *centro*.

Para los puntos cuya distancia es menor que la longitud del radio, se dice que forman el *interior* de la superficie esférica. La unión del interior y la superficie esférica se llama **bola cerrada** en topología, o **esfera**, como en geometría elemental del espacio.[1] Obviamente, la esfera es un sólido geométrico.