2. VECTORES

2.1 SISTEMAS DE REFERENCIA

En Física se tratan problemas relacionados con la descripción del movimiento de un objeto en el espacio, por lo que se requiere un método para conocer la posición de ese objeto. Para esto se definen los sistemas de coordenadas y marcos de referencia. Un sistema de coordenadas usado para indicar las posiciones en el espacio consta de:

1. Un punto de referencia fijo O, llamado origen.
2. Un conjunto de ejes o direcciones con una escala apropiada.
3. Instrucciones sobre como identificar un punto en el espacio respecto al origen y a los ejes.

2.1.1 Coordenadas cartesianas o rectangulares

Un sistema de coordenadas frecuentemente usado es el sistema de ***coordenadas cartesiano o rectangular***, que se muestra en la figura 2.1, con ejes *x* saliendo del plano de la figura, eje *y* horizontal y eje *z* vertical. En este sistema un punto *P* arbitrario se identifica con tres coordenadas identificadas por (*x,y,z*), con los valores positivos de los ejes hacia fuera del plano de la figura, hacia la derecha y hacia arriba, respectivamente en cada eje, como se indica en la figura 2.1. Es el espacio común en el que vivimos, se llama espacio tridimensional porque tiene tres dimensiones, para indicarlo usamos en símbolo 3D. En ocasiones bastan dos o una coordenadas para fijar la posición del objeto, estos se llaman espacio bidimensional (2D) o unidimensional (1D), respectivamente.

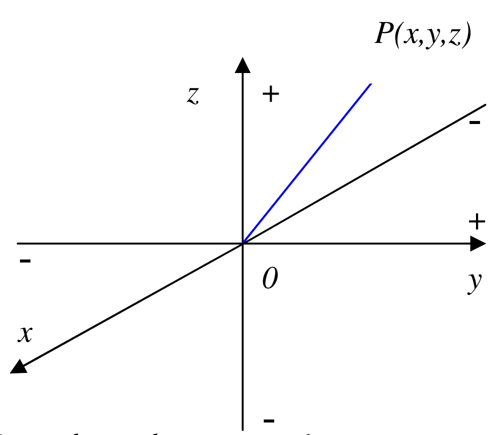


Figura 2.1. Coordenadas cartesianas en tres dimensiones

2.1.2 Coordenadas polares

Otro sistema de coordenadas conocido es el de las ***coordenadas polares*** (r,θ) (gráfico 2), donde r es la distancia desde el origen al punto (x,y), generalmente llamado radio, y θ el ángulo entre el eje x y r, por convención, considerado positivo cuando es medido en sentido antihorario desde el eje x hacia r. La relación entre las coordenadas cartesianas y polares es:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\cos\theta$$

$$\tan\theta = \frac{x}{y},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

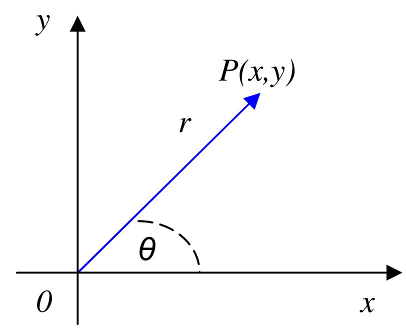


Gráfico 1.2. Coordenadas polares

De paso aprovechemos de recordar el teorema de Pitágoras y las funciones trigonométricas básicas seno, coseno y tangente, que se definen para un triángulo rectángulo, como el que se muestra en la figura 2.3, estas son:

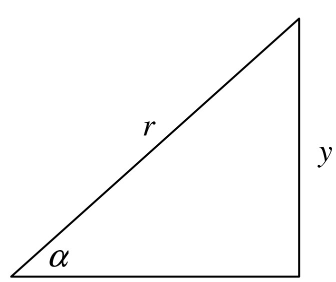


Figura 2.3 Triángulo rectángulo

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$sen\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{y}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{x}{r}$$

$$\tan\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{y}{x}$$

2.2 CONCEPTOS BÁSICOS DE VECTORES

Las magnitudes físicas con las que trataremos en el curso pueden ser escalares o vectoriales. Las ***magnitudes físicas escalares*** quedan completamente definidas mediante un número y sus respectivas unidades de medida, por ejemplo la densidad del agua de 1 gr/cm^3 o la temperatura del aire de 20°C, son un escalar.

Para las ***magnitudes físicas vectoriales*** debe especificarse su ***magnitud*** (un número con sus unidades), su ***dirección*** (un número que puede ser un ángulo si el espacio es bi o tridimensional) y su ***sentido*** (que indica hacia adonde se dirige o apunta el vector), por ejemplo una velocidad de 80 Km. /h hacia el noreste. Un vector se representa gráficamente como un trazo dirigido (flecha) y se simboliza mediante letra mayúscula o minúscula, con una flecha sobre la letra o escrita en negrita. La longitud de la flecha indica la magnitud relativa del vector, el punto desde donde se comienza a dibujar el vector se llama ***punto de aplicación***, la dirección se mide desde algún eje de referencia, generalmente horizontal, el sentido esta dado por la punta de la flecha y la recta sobre la cual se ubica el vector se llama ***línea de acción***. En la figura 2, el vector ***A*** tiene magnitud *A*, su punto de aplicación es *O* y su dirección es θ grados sobre la horizontal.

Igualdad de vectores

Dos o más vectores son iguales si: a) apuntan en la misma dirección, b) si sus magnitudes son iguales. En la figura 3,

$$\vec{a} = \vec{b} = \vec{c} = \vec{d}$$

Independientemente de la ubicación de los vectores en el espacio.

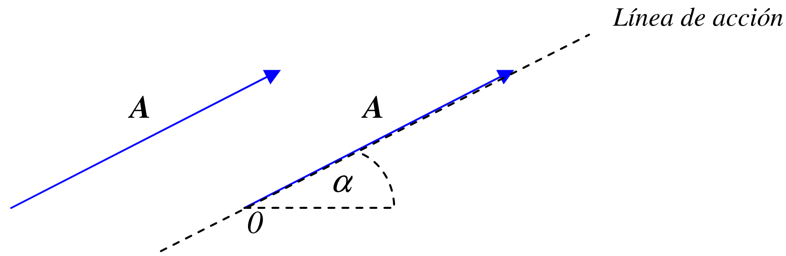


Figura 1.2 Representación de un vector

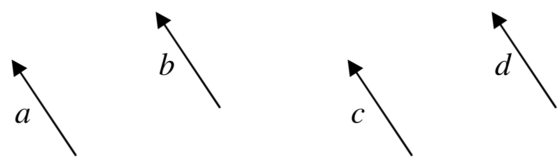


Figura 2.2. Igualdad de vectores

Multiplicación de un vector por un escalar

El resultado de multiplicar un vector por un escalar es un vector, de magnitud distinta y de dirección igual (o contraria) al vector original. En la figura 4, se muestra que:

$$\vec{b} = 2\vec{b} \ \text{y} \ \vec{D} = -\frac{2}{3}\vec{d}$$

Figura 2.3. Multiplicación de vectores por un escalar

Vectores especiales

- Vector nulo: es un vector de magnitud igual a cero (0).
- Vector unitario: vector de magnitud igual a uno (1).

Adición de vectores y algunas de sus propiedades.

Los vectores se pueden sumar en forma geométrica por diversos métodos, tales como los que se muestran en la figura 2.5, a) el método del polígono o b) el método del paralelogramo.

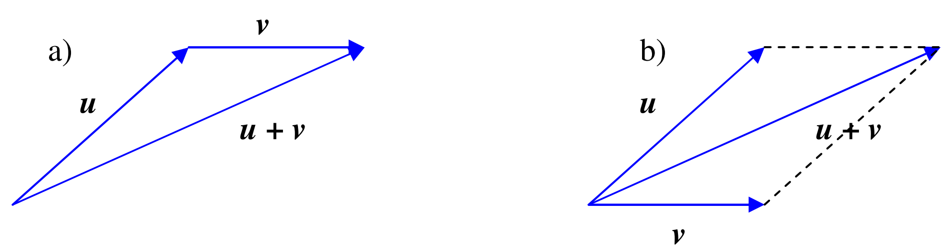


Figura 2.4. Adición de vectores

Además los vectores cumplen con las siguientes propiedades del álgebra:

- Conmutatividad de la suma:
- $\boldsymbol{a + b = b + a}$.
- Asociatividad de la suma:
  $\boldsymbol{a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)}$.
- Distributividad de la multiplicación por un escalar en la suma de vectores.
- Conmutatividad del producto:
  $\boldsymbol{a \cdot b = b \cdot a\ ,\ a \cdot a = a^2}$.
- Asociatividad del producto:
  $\boldsymbol{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$
- Inverso aditivo: si $\boldsymbol{a + b = 0}$, entonces $\boldsymbol{b}$ es el inverso aditivo de $\boldsymbol{a}$ y se escribe $\boldsymbol{b = -a}$.
- La resta de vectores es un caso especial de adición, donde el vector restando se suma con su inverso aditivo:
  $\boldsymbol{a - b = a + (- b)}$.
- La división entre vectores no está definida.

Representación de los vectores en coordenadas cartesianas

Las componentes vectoriales de un vector son aquellas que sumadas dan como resultado el vector original. Las componentes vectoriales de un vector en el espacio se calculan a lo largo de un conjunto de 3 líneas mutuamente perpendiculares que se cortan en un mismo punto, es decir en líneas paralelas a los ejes de un sistema de coordenadas cartesiano. Los vectores unitarios y las componentes vectoriales del vector ***A*** en estas direcciones se designan por *k, j, i* y por *Ax*, *Ay*, *Az*, respectivamente, tal que:

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

En el plano *(x, y)* de la figura 9, se tiene:

$$Vector: \qquad \vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$

$$Componentes: \; A_x = A\cos\alpha, \quad A_y = Asen\alpha$$

$$Magnitud: \qquad A = \sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2}$$

$$Dirección: \qquad \tan\alpha = \frac{A_y}{A_x}$$

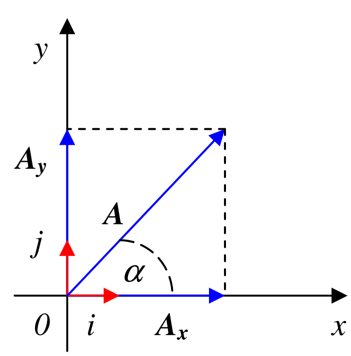


Gráfico 2.2. Componentes de un vector

Igualdad de vectores

Dos vectores son iguales si todas sus componentes son iguales, esto es, ***A = B;*** si *Ax = Bx, Ay = By* y *Az = Bz.*

Suma, resta y multiplicación por un escalar

Se opera sobre las componentes escalares análogas de los vectores. Para el caso tridimensional se realizan tres operaciones escalares por cada operación vectorial.

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) + (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}$$

$$\vec{A} - \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) - (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$\vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x)\hat{i} + (A_y - B_y)\hat{j} + (A_z - B_z)\hat{k}$$

$$\lambda\vec{A} = (\lambda\vec{A}_x)\hat{i} + (\lambda\vec{A}_y)\hat{j} + (\lambda\vec{A}_z)\hat{k}$$

Producto escalar entre vectores.

El producto escalar entre vectores da como resultado un escalar, se lee *A punto B,* y se define como:

$$\vec{\hat{B}} \cdot \vec{A} = AB\cos\alpha$$

Donde *A* y *B* es la magnitud y *α* es el ángulo entre los vectores ***A*** y ***B.***

Aplicado a vectores unitarios y a las componentes de un vector, se tiene:

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$$

$$\vec{B} \cdot \vec{A} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Producto vectorial de vectores.

El producto vectorial entre vectores da como resultado un vector, se lee *A cruz B,* y se define como:

$$\vec{C} = \vec{B}\,x\,\vec{A}, \quad con\left|\vec{C}\right| = AB\,sen\alpha$$

Donde *A* y *B* es la magnitud y *α* es el ángulo entre los vectores ***A*** y ***B,*** y la dirección de ***C*** esta dada por la regla de la mano derecha o del tornillo derecho, ***C*** es un vector perpendicular al plano formado por ***A*** y ***B***. El producto vectorial se calcula resolviendo el siguiente determinante:

$$\vec{B}\,x\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Aplicado a vectores unitarios, se obtiene que:

$$\hat{i}\;x\;\hat{i} = \hat{j}\;x\;\hat{j} = \hat{k}\;x\;\hat{k} = 0$$

$$\hat{i}\;x\;\hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{j}\;x\;\hat{k} = \hat{i}, \quad \hat{k}\;x\;\hat{i} = \hat{j}$$

Ejemplo 2.1:

Calcular las siguientes operaciones vectoriales de suma y resta donde $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ son los vectores que se muestran en la figura 2.1:

a) $\vec{A} + \vec{B}$; b) $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$; c) $\vec{A} - \vec{B}$, d) $\vec{A} + \vec{B} - \vec{C}$ e) $\vec{A} + 3\vec{B} - \frac{1}{2}(\vec{C} - 3\vec{D} + \vec{A})$

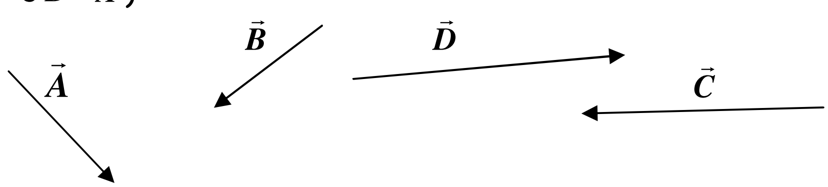
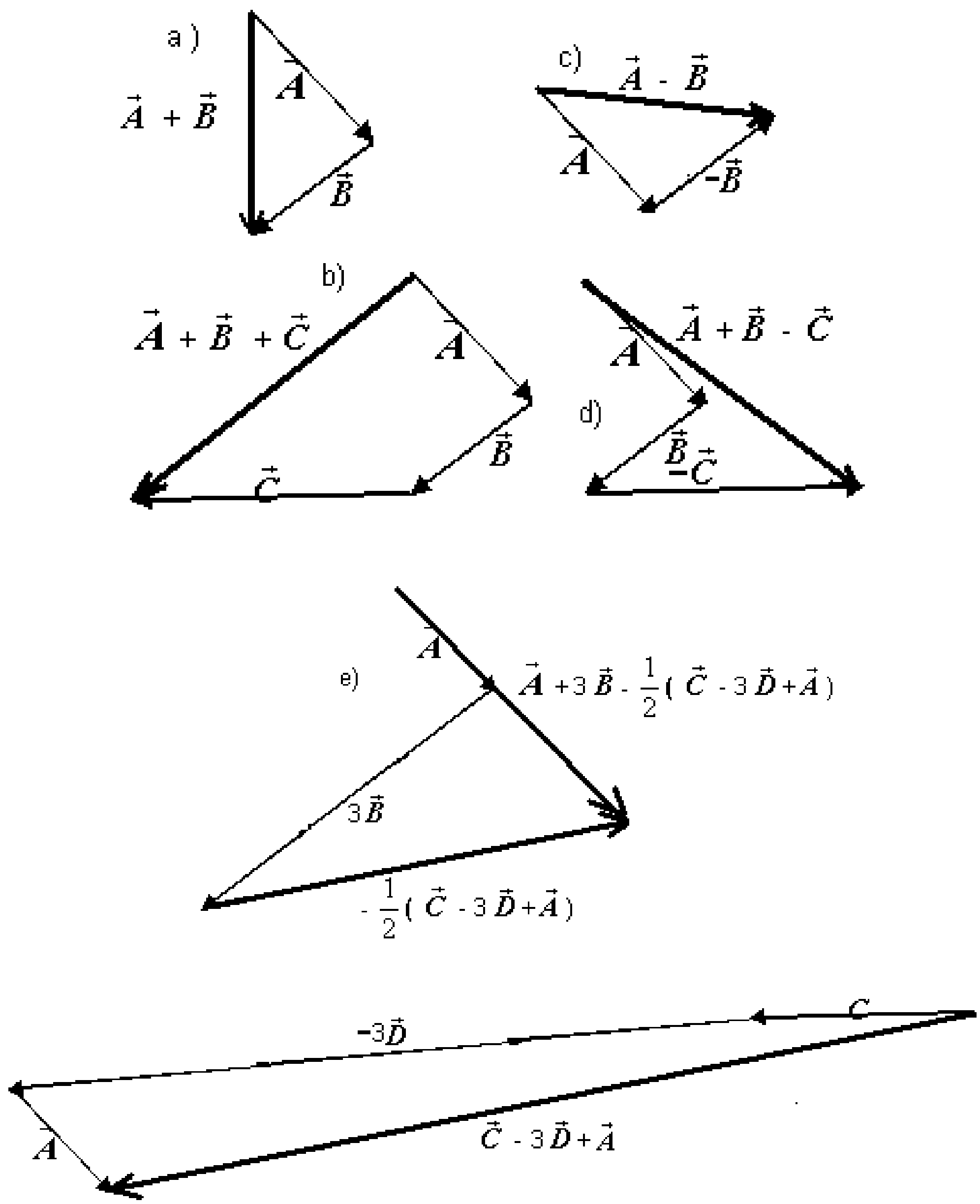


Figura 2.6

Solución:



Ejemplo 2.2:

Un automovilista sale de una estación, avanza 10 km a 20^0 al norte del este, luego 12 km a 36^0 norte del este, después toma un rumbo a 30^0 al norte del oeste y recorre 8 km, luego avanza a 18 km al oeste, y finalmente recorre 24 km a 26^0 al oeste del sur. Use el método de componentes para determinar la magnitud y dirección del vector resultante, dibuje el diagrama de la suma vectorial.

Solución:

Sea A = 10 km; componentes del vector $\vec{A}$:

A_x = (10km)($\cos 20^0$) = 9.40 km, A_y= (10km)($\mathrm{sen}20^0$) = 3.42 km,

Sea B = 12 km; componentes del vector $\vec{B}$ a 36^0

B_x = (12km)($\cos 36^0$)= 9.71 km; B_y= (12km)($\mathrm{sen}36^0$) = 7.05 km.

Sea C = 8 km; componentes del vector $\vec{C}$ a 30^0

C_x = (-8km)($\cos 30^0$)= -6.93 km; C_y= (8km)($\mathrm{sen}30^0$) = 4.00 km.

Sea D = 18 km; componentes del vector $\vec{D}$ a 180^0

D_x = (18km)($\cos 180^0$)= -18.00 km; D_y= 0

Sea E = 24 km; componentes del vector $\vec{E}$ a 26^0 al oeste del sur:

E_x = (-24km)($\mathrm{sen}26^0$)= -10.5 km; E_y= (-24km)($\cos 26^0$) = -21.6 km.

Entonces las componentes de la resultante: R

R_x = 9.40 km + 9.71 km - 6.93 km -18.00 km -10.5 km = -16.3 km.

R_y = 3.42 km + 7.05 km + 4.00 km + 0 -21.6 km = -7.13 km

La magnitud del vector resultante es:

$$R = \sqrt{(-16.3km)^2 + (-7.13km)^2} = 17.8km$$

y la dirección: $\theta = \tan^{-1}(\frac{-7.13}{-16.3}) \approx 23.6^0$ al sur del oeste, ó 203^0 medido sobre el eje +x.

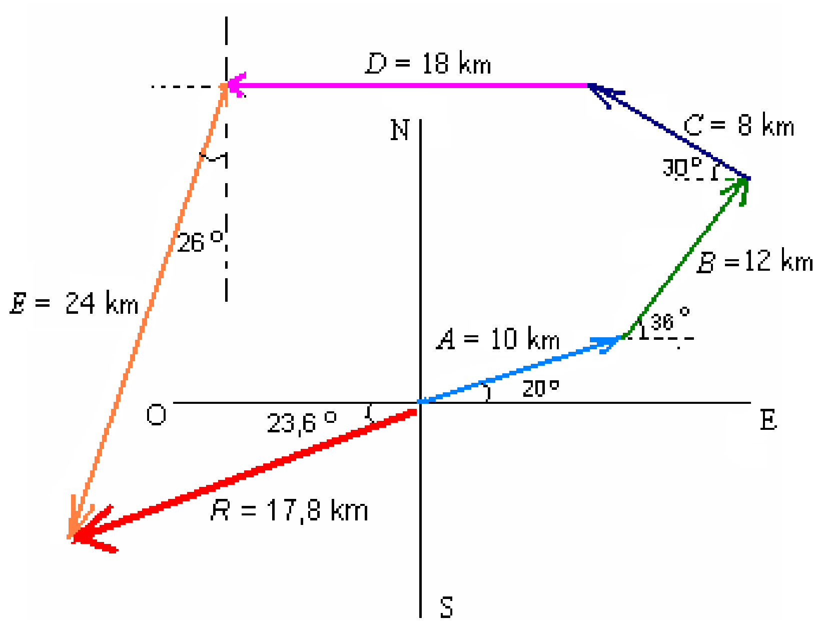


Figura 2.7

Ejemplo 2.3:

Sean los siguientes vectores: $\vec{A}$ = 5,0$\hat{i}$ - 6,5$\hat{j}$ y $\vec{B}$ = -3,5$\hat{i}$ +7,0$\hat{j}$. Un tercer vector $\vec{C}$ está en el plano xy y es perpendicular a $\vec{A}$, el producto escalar de $\vec{C}$ con $\vec{B}$ es 15.0. Con esta información, obtenga las componentes del vector $\vec{C}$.

Solución:

$\vec{A}$ y $\vec{C}$ son perpendiculares, entonces:

Si $\vec{A} \cdot \vec{C} = 0.$ entonces sus componentes también son iguales a cero:

$A_x C_x + A_y C_y = 0,$

como: A_x= 5,0 y B_y= - 6,5

Entonces: $5{,}0 C_x - 6{,}5 C_y = 0$ (a)

y

$\vec{B} \cdot \vec{C} = 15{,}0$

Entonces: $-3{,}5 C_x + 7{,}0 C_y = 15{,}0$ (b)

se obtiene un sistema de dos ecuaciones (a) y (b) con dos incógnitas C_x y C_y:

$$\begin{cases} 5{,}0 C_x - 6{,}5 C_y = 0 \\ -3{,}5 C_x + 7{,}0 C_y = 15{,}0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema

$$C_x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -6{,}5 \\ 15{,}0 & 7{,}0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5{,}0 & -6{,}5 \\ -3{,}5 & 7{,}0 \end{vmatrix}} = \frac{0 + 97{,}5}{35{,}0 - 22{,}75} = \frac{97{,}5}{12{,}25} = 7{,}96$$

$$C_y = \frac{\begin{vmatrix} 5{,}0 & 0 \\ 3{,}5 & 15{,}0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5{,}0 & -6{,}5 \\ -3{,}5 & 7{,}0 \end{vmatrix}} = \frac{75{,}0 + 0}{35{,}0 - 22{,}75} = \frac{75{,}0}{12{,}25} = 6{,}12$$

se obtiene: $C_x = 7{,}96$ y $C_y = 6{,}12$.

Ejemplo 2.4:

Si **A=(6i-8j)** unidades, **B=(-8i+3j)** unidades y **C=(26i+19j)** unidades, determine los valores de a y b de forma tal que $a\vec{A} + b\vec{B} + \vec{C} = 0$.

Solución:

$$\vec{A} = (6\hat{i} - 8\hat{j});\ \vec{B} = (-8\hat{i} + 3\hat{j});\ \vec{C} = (26\hat{i} + 19\hat{j})$$

$$a\vec{A} + b\vec{B} + \vec{C} = 0$$

$$\Rightarrow (6a\hat{i} - 8a\hat{j}) + (-8b\hat{i} + 3b\hat{j}) + (26\hat{i} + 19\hat{j}) = 0$$

$$(6a - 8b + 26)\hat{i} + (-8a + 3b + 19)\hat{j} = (0\hat{i} + 0\hat{j})$$

$$\begin{array}{l} 6a - 8b + 26 = 0 \\ -8a + 3b + 19 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 6a - 8b = -26 \\ -8a + 3b = -19 \end{array}$$

$$\Rightarrow a = \frac{-26 + 8b}{6}$$

$$-8\left(\frac{-26 + 8b}{6}\right) + 3b = -19 \rightarrow\Rightarrow \frac{104}{3} - \frac{32b}{3} + \frac{9b}{3} = -19$$

$$\Rightarrow -23b = -57 - 104 \Rightarrow b = \frac{161}{23} \Rightarrow b = 7$$

$$\therefore a = \frac{-26 + 8\times 7}{6} \quad \Rightarrow \quad a = 5$$

Entonces: $5\vec{A} + 7\vec{B} + \vec{C} = 0$