ЛР 2. Методы дихотомии, Ньютона, простых итераций.

ПИН-21 Чендемеров Алексей

March 26, 2021

[213]:
```
import numpy as np
import sympy as sp
import math
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
plt.rcParams["figure.figsize"] = (15,10)
plt.rcParams['lines.linewidth'] = 2
```

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$$

[132]:
```
def f(x: float) -> float:
    return x**3 -3*x**2-9*x-5
x = np.linspace(-10, 10, num=150)
y = np.fromiter(map(f, x), float)
```

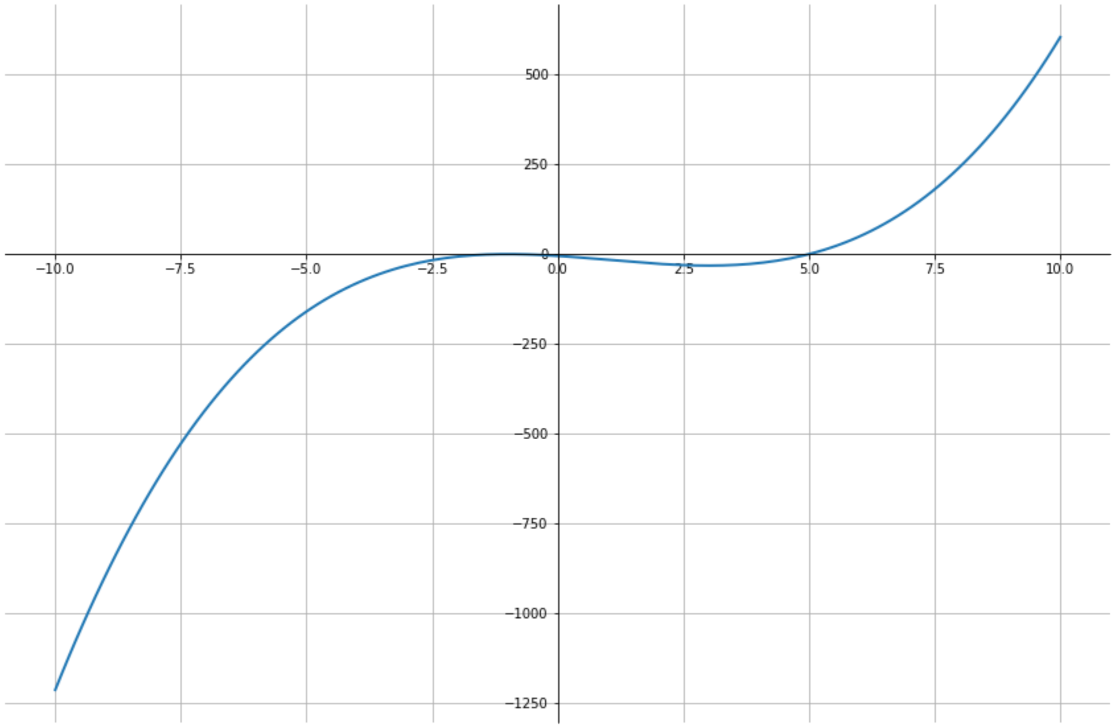
[133]:
```
def xp(a: list[float]) -> float:
    n = len(a) - 1
    return 1 + 1 / abs(a[n])  * max(*map(abs, a[:n]))

print(xp([-5, -9, -3, 1]))
```

```
10.0
```

$$x_p \leq 10.0$$

[134]:
```
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(1,1,1)
ax.spines['left'].set_position('zero')
ax.spines['bottom'].set_position('zero')
ax.spines['right'].set_color('none')
ax.spines['top'].set_color('none')
ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')
ax.yaxis.set_ticks_position('left')
ax.grid()
ax.plot(x,y)
```

[134]:
```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x7f8429a72820>]
```



$$x_1 \in [-2.5, 0]$$
$$x_2 \in [2.5, 5.0]$$

[135]:
```
p = np.array([1, -3, -9, -5])
roots = np.roots(p)

print(sorted([*map(np.round, roots)]))
```

```
[(-1+0j), (-1-0j), (5+0j)]
```

$$x_{1,2} = -1$$
$$x_3 = 5$$

[136]:
```
def bisection_method(f, xl: float, xr: float, epsilon: float, max_iter: int) ->
↪tuple[float, int]:
    for n in range(0, max_iter):
        xd = xr - xl
        xd = xd / 2
        xm = xl + xd
        if abs(f(xm)) <= epsilon:
            return xm, n + 1
        else:
```

```python
            if np.sign(f(xl)) != np.sign(f(xm)):
                xr = xm
            else:
                xl = xm
    return None, max_iter

x_3, N = bisection_method(f, 4.0, 5.5, 1e-16, 500)
print(x_3, N)
```

```
5.0 50
```

1 Метод бисекции

$$x_L = 4.0 \quad x_R = 5.5$$

$$x_3 = 5 \quad (\varepsilon = 10^{-16})$$

$$N = 50 \;\; (\text{кол-во итераций})$$

[137]:
```python
def newton_method(f, Df, x0: float, epsilon: float, max_iter: int) ->
 ↪tuple[float, int]:
    N = 0
    xn = x0
    for n in range(0,max_iter):
        fxn = f(xn)
        if abs(fxn) < epsilon:
            return xn, n + 1
        Dfxn = Df(xn)
        if Dfxn == 0:
            return None, n + 1
        xn = xn - fxn/Dfxn
    return None, max_iter

def newton_method_modified(f, x0: float, epsilon: float, max_iter: int) ->
 ↪tuple[float, int]:
    N = 0
    xn = x0
    dx = epsilon
    for n in range(0,max_iter):
        fxn = f(xn)
        if abs(fxn) < epsilon:
            return xn, n + 1
        Dfxn = f(xn+dx) - f(xn)
        if Dfxn == 0:
            return None, n + 1
        xn = xn - fxn*dx/Dfxn
    return None, max_iter
```

```
x = sp.Symbol('x')
sym_f = x**3 -3*x**2-9*x-5
sym_Df = sym_f.diff(x)
f = lambdify(x, sym_f, 'numpy')
Df = lambdify(x, sym_Df, 'numpy')

x_1, N = newton_method_modified(f, -2.5, 1e-10, 500)
print(x_1, N)

x_3, N = newton_method(f, Df, 5.5, 1e-16, 500)
print(x_3, N)
```

```
-1.000003663214419 20
5.0 6
```

2 Метод Ньютона модифицированный

$$x_0 = -1.5$$

$$x_{1,2} = -1 \quad (\varepsilon = 10^{-10})$$

$$N = 14 \ \text{(кол-во итераций)}$$

При большей точности метод не работает, т.к. знаменатель становится слишком маленьким (равным 0)

3 Метод Ньютона

$$x_0 = 5.5$$

$$x_3 = 5 \quad (\varepsilon = 10^{-16})$$

$$N = 6 \ \text{(кол-во итераций)}$$

[185]:
```
def my_sqrt(phi, a: float,  x0: float, epsilon: float, max_iter: int) -> float:
    xn = x0
    for n in range(0, max_iter):
        if abs(xn ** 2 - a) < epsilon:
            return xn, n + 1
        xn = phi(xn)
    return None, max_iter

a = 16
phi = lambda x: 1/ 2 * (a / x + x)
x, N = my_sqrt(phi, a, 1.5, 1e-16, 500)
print(x, N)
```

```
4.0 7
```

4 Метод простой итерации для нахождения квадратного корня

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(\frac{a}{x} + x)$$

$$a = 16$$

$$x_0 = 1.5$$

$$x = 4.0 \quad (\varepsilon = 10^{-16})$$

$$N = 7 \ \text{(кол-во итераций)}$$

[196]:
```
def estimate_area_of_convergence(sym_f):
    sym_Df = sym_f.diff(x)
    f = lambdify(x, sym_f, 'numpy')
    Df = lambdify(x, sym_Df, 'numpy')
    x1 = sp.solveset(sp.Eq(sym_Df, -1), 'x')
    x2 = sp.solveset(sp.Eq(sym_Df, 1), 'x')
    return sorted([*x1, *x2])

a = 16
x = sp.Symbol('x')
sym_f = x**2 + x - a
x1, x2 = estimate_area_of_convergence(sym_f)
print(x1, x2)
```

```
-1 0
```

5 Оценка сходимости представления

$$a = 16$$

$$\varphi(x) = x^2 + x - a$$

$$x \in [-1, 0] - \text{область сходимости}$$

Т.к. это представление квадратного корня из a , a должно лежать в отрезке $[0, 1]$

[211]:
```
a = 0.5
phi = lambda x: x**2 + x - a
x, N = my_sqrt(phi, a, 0.5, 1e-15, 5000)
print(x, N)
```

```
-0.7071067811865479 41
```

6 В области сходимости всё нормально считается.

$$a = 0.5$$

$$\varphi(x) = x^2 + x - a$$

$$x \in [-1, 0] - \text{область сходимости}$$

$$x_0 = 0.5$$

$$x = -0.7071067811865479 \quad (\varepsilon = 10^{-15}) - \text{при } \varepsilon = 10^{-16} \text{ не считает даже при 5000 итераций}$$

$$N = 41 \ \ (\text{кол-во итераций})$$

[212]:
```
a = 0.5
phi = lambda x: x**2 + x - a
x, N = my_sqrt(phi, a, 10, 1e-16, 100)
print(x, N)
```

```
---------------------------------------------------------------------------
OverflowError                             Traceback (most recent call last)
<ipython-input-212-5b3c388ccf02> in <module>
      1 a = 0.5
      2 phi = lambda x: x**2 + x - a
----> 3 x, N = my_sqrt(phi, a, 10, 1e-16, 100)
      4 print(x, N)

<ipython-input-185-57a3e808c9cd> in my_sqrt(phi, a, x0, epsilon, max_iter)
      2     xn = x0
      3     for n in range(0, max_iter):
----> 4         if abs(xn ** 2 - a) < epsilon:
      5             return xn, n + 1
      6         xn = phi(xn)

OverflowError: (34, 'Numerical result out of range')
```

7 Вне области сходимости происходит переполнение.

$$a = 0.5$$

$$\varphi(x) = x^2 + x - a$$

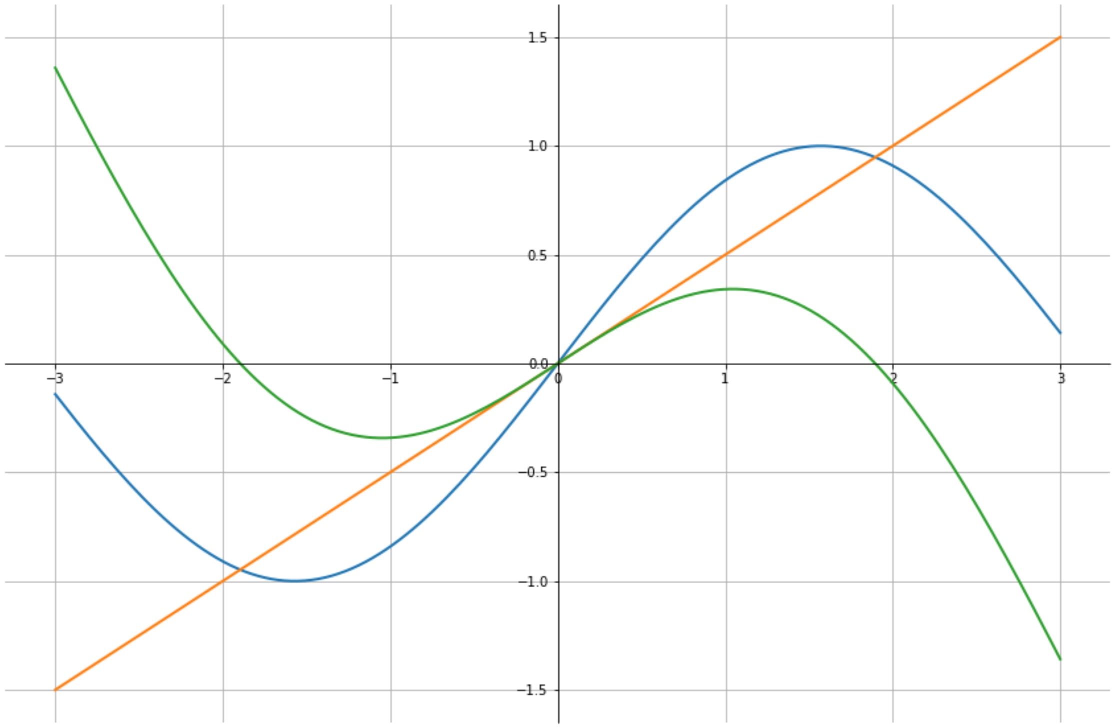
$$x \in [-1, 0] - \text{область сходимости}$$

$$x_0 = 10$$

$$x = None \quad \text{Произошло переполнение}$$

[223]:
```
x = np.linspace(-3, 3, num=150)
y1 = np.fromiter(map(math.sin, x), float)
y2 = np.fromiter(map(lambda x: x / 2, x), float)
y3 = np.fromiter(map(lambda x: math.sin(x)- x / 2, x), float)

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(1,1,1)
ax.spines['left'].set_position('zero')
ax.spines['bottom'].set_position('zero')
ax.spines['right'].set_color('none')
ax.spines['top'].set_color('none')
ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')
ax.yaxis.set_ticks_position('left')
ax.grid()
ax.plot(x,y1)
ax.plot(x,y2)
ax.plot(x,y3)
```

[223]:
```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x7f8428a1aac0>]
```



Примерные корни:

$$x_1 = -1.9$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 1.9$$

[226]:
```
x_1, N = bisection_method(lambda x: math.sin(x) - x / 2, -3, -1, 1e-16, 500)
print(x_1, N)

x_2, N = bisection_method(lambda x: math.sin(x) - x / 2, -0.5, 0.5, 1e-16, 500)
print(x_2, N)

x_3, N = bisection_method(lambda x: math.sin(x) - x / 2, 1, 3, 1e-16, 500)
print(x_3, N)
```

```
-1.895494267033981 51
0.0 1
1.895494267033981 51
```

8 Метод бисекции

$$x_L = -3 \quad x_R = -1$$
$$x_1 = -1.895494267033981 \quad (\varepsilon = 10^{-16})$$
$$N = 51 \ \text{(кол-во итераций)}$$

$$x_L = -0.5 \quad x_R = 0.5$$
$$x_2 = 0.0 \quad (\varepsilon = 10^{-16})$$
$$N = 50 \ \text{(кол-во итераций)}$$

$$x_L = 1 \quad x_R = 3$$
$$x_3 = 1.895494267033981 \quad (\varepsilon = 10^{-16})$$
$$N = 51 \ \text{(кол-во итераций)}$$

[230]:

```
x = sp.Symbol('x')
sym_f = sin(x) - x / 2
sym_Df = sym_f.diff(x)
f = lambdify(x, sym_f, 'numpy')
Df = lambdify(x, sym_Df, 'numpy')

x_1, N = newton_method(f, Df, -3, 1e-16, 500)
print(x_1, N)

x_2, N = newton_method(f, Df, 0.5, 1e-16, 500)
print(x_2, N)

x_3, N = newton_method(f, Df, 3, 1e-16, 500)
print(x_3, N)
```

```
-1.895494267033981 6
0.0 5
1.895494267033981 6
```

9 Метод Ньютона

$$x_0 = -3$$
$$x_1 = -1.895494267033981 \quad (\varepsilon = 10^{-16})$$
$$N = 6 \ \text{(кол-во итераций)}$$

$$x_0 = 0.5$$
$$x_2 = 0.0 \quad (\varepsilon = 10^{-16})$$

$$N = 5 \ \text{(кол-во итераций)}$$

$$x_0 = 3$$
$$x_3 = 1.8954942670339981 \quad (\varepsilon = 10^{-16})$$
$$N = 6 \ \text{(кол-во итераций)}$$

[241]:
```python
def iteration_method(phi, f,  x0: float, epsilon: float, max_iter: int) ->␣
↪float:
    xn = x0
    for n in range(0, max_iter):
#         print(xn, f(xn))
        if abs(f(xn)) < epsilon:
            return xn, n + 1
        xn = phi(xn)
    return None, max_iter

a = 16
phi = lambda x: 2*math.sin(x)
f = lambda x:  math.sin(x) - x/2

x_1, N = iteration_method(phi, f, -3, 1e-15, 10000)
print(x_1, N)

x_3, N = iteration_method(phi, f, 3, 1e-15, 10000)
print(x_3, N)
```

```
-1.8954942670339798 77
1.8954942670339798 77
```

10 Метод простых итераций

$$x_0 = -3$$
$$x_1 = -1.8954942670339798 \quad (\varepsilon = 10^{-15})$$
$$N = 77 \ \text{(кол-во итераций)}$$

$$x_0 = 3$$
$$x_3 = 1.8954942670339798 \quad (\varepsilon = 10^{-15})$$
$$N = 77 \ \text{(кол-во итераций)}$$