



Отчёт по второму заданию по курсу Алгоритмика «Построение минимального покрывающего графа»

Аят Оспанов

617 гр., ММП, ВМК МГУ, Москва

21 ноября 2017 г.

Содержание

1	Постановка задачи	1
2	Описание метода решения	1
2.1	Алгоритм MST-Kruskal	2
2.2	Оценка времени	2
3	Эксперименты	2
4	Реализация программы	2

1 Постановка задачи

Имеется связный неориентированный граф $G = (V, E)$, где V – множество городов России, E – множество ребер, образованных всеми парами городов. Для каждого ребра $(u, v) \in E$ известна длина в километрах. Граф представлен в виде списка троек (город, город, расстояние).

В графе G нужно выделить связный подграф $T = (V, E')$, $E' \subset E$, общая длина которого минимальна. Поскольку подграф T ациклический и связный, он является деревом. Это дерево называется минимальным покрывающим деревом графа G .

2 Описание метода решения

В качестве алгоритма, находящего минимальное покрывающее дерево был реализован алгоритм Крускала, описанный в [1, стр. 668-670]. Идея алгоритма:

- В самом начале каждая вершина образует дерево
- Далее пытаемся объединить вершины в деревья самым минимальным ребром
- Если ребро соединяет две вершины из разных деревьев, то сливаем их в одно дерево

2.1 Алгоритм MST-Kruskal

```
A = ∅  
for каждой вершины v ∈ V do  
    Make-Set(v)  
end for  
Отсортировать ребра в неубывающем порядке по весу  
for каждого ребра (u, v) ∈ E do  
    if Find-Set(u) ≠ Find-Set(v) then  
        A = A ∪ (u, v)  
        Union(u, v)  
    end if  
end for
```

2.2 Оценка времени

Сортировка ребер занимает время $O(E \log E)$. Работа с непересекающимися множествами [1, раздел 21.3] требует времени $O((V + E)\alpha(V))$, где α – медленно растущая функция. Т.к. G – связный граф, то справедливо соотношение $|E| \geq |V| - 1$. Т.о. работа над непересекающимися множествами требует времени $O(E\alpha(V))$. Кроме того, т.к. $\alpha(|V|) = O(\log V) = O(\log E)$, общее время работы метода равняется $O(E \log E)$. Также учитывая, что $|E| < |V|^2$, время работы можно записать как $O(E \log V)$.

3 Эксперименты

Для проведения экспериментов были сгенерированы полносвязные графы с количеством вершин 500, 1000, ..., 5000, с шагом 500. В итоге были замерены время работы и построены графики теоретического времени и фактического. В результате асимптотика времени работы совпало с теоретической оценкой до некоторой константы (Рис. 1а). Подбрав константу, можно видеть, что время работы совпадает (Рис. 1б).

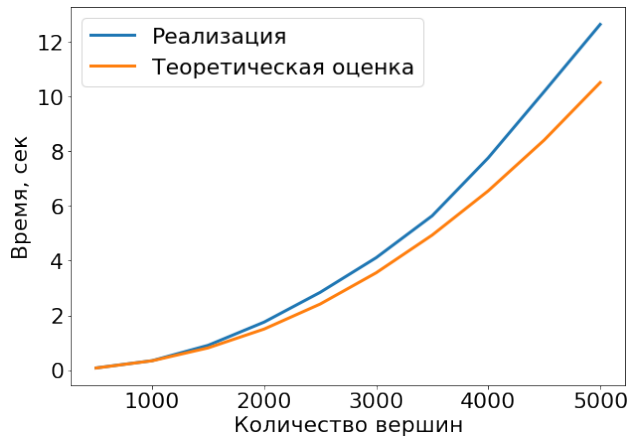
4 Реализация программы

Программа была реализована по алгоритмам, данных в книге [1, разделы 21.3, 23.2]. Также для удобства были написаны классы Edge и Graph. Edge – реализация ребра, которая имеет операцию сравнения по весу. Graph – реализация графа: умеет считывать с файла и записывать в файл граф.

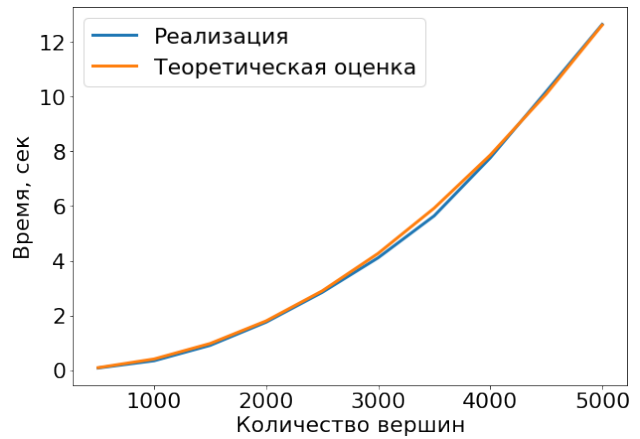
Компиляция: `g++ main.cpp utils.cpp -o kruskal`

Вход программы: файл содержащий список ребер построчно в формате:

город город расстояние



(а) Без подбора константы



(б) С подбором константы

Рис. 1: Время работы программы

Выход программы: файл output.txt. Первая строка файла – общая длина ребер покрывающего дерева, далее – ребра формате «город (номер) – город (номер)».

Запуск: `./kruskal <путь до файла с данными>`.

Например `./kruskal data/cities.txt`

Список литературы

- [1] Кормен Т.Х. и др. Алгоритмы: построение и анализ, 3-е изд., Москва, «И. Д. Вильямс», 2016. – 1328 с.