1. (a) Determinar para que valores de p y q existen las siguientes integrale de Lebesgue:

$$\int_0^1 x^p(1-x)^q$$

Como $x \in [0,1]$, $0 \leq x, 1-x \leq 1$, si $p, q \geq 1$ tenemos $0 \leq x^p, (1-x)q \leq 1$

$$0 \leq \int_0^1 x^p(1-x)^q \leq \int_0^1 1 = 1$$

Si $p+q=1$ con $p,q>0$

$$0 \leq \int_0^1 x^p(1-x)^p \leq ||x^p||_{1/p}||(1-x)^q||_{1/q} = (\int_0^1 x)^p(\int_0^1 1-x)^q = \frac{1}{2^{p+q}}$$

(b)

2. Demostrar que $||f+g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$
Sabemos que para $x \in R^n$
$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$
Así $||f+g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$

3. Si $f \in L^1$ y $g \in L^\infty$, entonces

$$\int |fg| \leq ||f||_1 \cdot ||g||_\infty$$

Por monotonía, tenemos:

$$|fg| = |f||g| \leq |f| \cdot ||g||_\infty$$

$$\int |fg| \leq \int |f| \cdot ||g||_\infty = ||f||_1 \cdot ||g||_\infty$$

4. (a) Demostrar la desigualdad de Minkowski para $0 < p < 1$.
Lema: Sea $0 < p < 1$ y $q = 1-p$, entonces

$$\int |fg| \geq ||f||_p \cdot ||g||_q$$

Sean $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} \Rightarrow q = \frac{p}{p-1} < 0$
$p' = \frac{1}{p}$ y $q' = 1 - q = -\frac{1}{p-1}$
Además $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = p + \frac{1}{1-q} = p + \frac{1}{1-\frac{p}{p-1}} = p - p + 1 = 1$
Así tenemos:

$$\int |f|^p = \int |fg|^p \cdot |g|^{-p} \leq \text{(Hölder) } ||(|fg|^p)||_{p'} \cdot ||(|g|^{-p})||_{q'}$$
$$= \Big(\int (|fg|^p)^{p'}\Big)^{1/p'} \cdot \Big(\int |g|^{-pq'}\Big)^{1/q'}$$
$$= \Big(\int |fg|\Big)^p \cdot \Big(\int |g|^{\frac{p}{p-1}}\Big)^{1-p}$$

Así tenemos:

$$\Big(\int |f|^p\Big)\Big(\int |g|^q\Big)^{p-1} \leq \Big(\int |fg|\Big)^p$$

Sacando raíz p

$$\int |fg| \geq ||f||_p||g||_q$$

Supongamos que si $f, g \in L^p$, entonces $(f+g) \in L^p$
Sea $q = \frac{p}{p-1}$, entonces $|f+g|^{p-1} \in L^p$ y

$$\Big|\Big||f+g|^{p-1}\Big|\Big|_q = \Big(\int (|f+g|^{p-1})^q\Big)^{1/q} = \Big(\int |f+g|^p\Big)^{(p-1)/p} = ||f+g||_p^{p-1}$$

Así tenemos que:

$$\begin{aligned} ||f+g||_p^p = \int |f+g|^p &= \int |f+g| \cdot |f+g|^{p-1} \\ &= \int (f+g) \cdot |f+g|^{p-1} \\ &= \int f|f+g|^{p-1} + \int g|f+g|^{p-1} \\ \text{Lema } &\geq ||f||_p||f+g||_p^{p-1} + ||g||_p||f+g||_p^{p-1} \end{aligned}$$

Así tenemos:

$$||f+g||_p \geq ||f||_p + ||g||_q$$

Cumpliendose la igualdad si $||f+g||_p = 0$

(b) Demostrar que si $f \in L^p$, $g \in L^p$ entonces $f+g \in L^p$ para $0 < p < 1$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} |f(x)+g(x)|^p \leq &(|f(x)|+|g(x)|)^p \leq (2\max\{|f(x)|, |g(x)|\})^p = 2^p \max\{|f(x)|^p, |g(x)|^p\} \\ \leq &2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p) \quad \square \end{aligned}$$

5. Sea E medible con medida finita y $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$. Entonces $L^{p_2} \subset L^{p_1}$. Más aún

$$||f||_{p_1} \leq c||f||_{p_2}$$

para toda $f \in L^{p_2}$ con $c = (m(E))^{\frac{p_2-p_1}{p_1p_2}}$ si $p_2 < \infty$ y $c = (m(E))^{\frac{1}{p_1}}$ si $p_2 = \infty$.
Caso 1: $p_2 < \infty$
Si $f \in L^{p_2}$, entonces $|f|^{p_1} \in L^{p_2/p_1}$ y

$$\Big|\Big||f|^{p_1}\Big|\Big|_{p_2/p_1} = \Big(\int |f|^{p_2}\Big)^{p_1/p_2} = ||f||_{p_2}^{p_1}$$

Por Hölder tenemos

$$||f||_{p_1}^{p_1} = \int_E |1 \cdot f|^{p_1} \leq ||1_E||_{p_2/(p_2-p_1)}\Big|\Big||f|^{p_1}\Big|\Big|_{p_2/p_1} = (m(E))^{\frac{p_2-p_1}{p_2}}||f||_{p_2}^{p_1}$$

Así tenemos

$$||f||_{p_1} \leq (m(E))^{\frac{p_2-p_1}{p_1p_2}}||f||_{p_2}$$

Caso 2: $p_2 = \infty$

$$\begin{aligned} ||f||_{p_1} =& \Big(\int_E |f|^{p_1} \Big)^{1/p_1} \\ \text{monotonia } \leq& \Big(\int_E 1 \cdot ||f||_{\infty}^{p_1} \Big)^{1/p_1} = (m(E))^{\frac{1}{p_1}} ||f||_{\infty} \end{aligned}$$

6. Sea $f_n \to f$ en L^p, $1 \leq p < \infty$ y sea g_n una sucesión de funciones medibles tales que $|g_n| \leq M$, para toda n, y $g_n \to g$ casi donde sea. Entonces $g_n f_n \to gf$ en L^p.
   Por hipótesis tenemos:
   $$\begin{aligned} ||f_n - f||_p < \frac{\epsilon}{2M} \qquad & n \geq N_f \\ |g_n(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{2||f||_p} \qquad & n \geq N_g \text{ c.d.s} \end{aligned}$$
   Sea $n \geq \max\{N_f, N_g\}$, así tenemos:
   $$\begin{aligned} ||g_n(x)f_n - g(x)f||_p =& ||g_n(x)f_n - g_n(x)f + g_n(x)f - g(x)f||_p \\ \leq& ||g_n(x)f_n - g_n(x)f||_p + ||g_n(x)f - g(x)f||_p \\ =& |g_n(x)|||f_n - f||_p + |g_n(x) - g(x)|||f||_p \\ =& M(\frac{\epsilon}{2M}) + \frac{\epsilon}{2||f||_p}||f||_p = \epsilon \end{aligned}$$

7. **Definición**. Si un espacio X equipado con una medida μ tiene un sistema numerable A de subconjuntos medibles $A_1, A_2, ...,$ tales que dada cualquier $\epsilon > 0$ y cualquier subconjunto medible $M \subset X$, existe un $A_k \in A$ que satisface la desigualdad
   $$\mu(M \triangle A_k) < \epsilon.$$
   Entonces se dice que μ tiene una base numerable, que consiste de todos los subconjuntos $A1, A2, ...,$
   Demostrar que la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ tiene una base numerable.
   Sabemos que $\mathbb{Q}$ es numerable, entonces $\mathbb{Q}^2$ es numerable. Los abiertos (q_1, q_2) son numerables.
   Sea $f : \{(q_1, q_2)\} \to \mathbb{N}$
   Además sabemos que si M es medible, dado $\epsilon > 0$, hay una unión finita de intervalos U, tal que $m(U \triangle M) \leq \frac{\epsilon}{2}$. (parcial 2, proposición 3.15 Royden 2da Edición)
   Sea $U = \bigcup I_i$, con $I_i = (a_i, b_i)$.
   Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ existen $q_i^1 \leq a_i \leq b_i \leq q_i^2$ con $a_i - q_i^1 \leq \frac{\epsilon}{2^{i+1}}$ y $q_i^2 - b_i \leq \frac{1}{2^{i+2}}$, así $m((q_i^1, q_i^2) - I_i) < \frac{\epsilon}{2^{i+1}}$.
   Sea $Q = \bigcup((q_i^1, q_i^2))$
   Así $m(M \triangle Q) = m(M \triangle \bigcup[(q_i^1, a_i) \cup I_i \cup (b_i, q_i^2)]) \leq m((q_i^1, a_i) \cup (b_i, q_i^2)) + m(M \triangle Q) \leq \sum \frac{\epsilon}{e^{i+1}} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ Sea $A = \bigcup(q_i^1, q_i^2)$, definimos $g(A) = \prod p_{f((q_i^1, q_i^2))}$ con $p_{f((q_i^1, q_i^2))}$ el $f((q_i^1, q_i^2))$-ésimo primo.
   La medida de Lebesgue tiene una base numerable.

8. Sea $\{\Phi_n\}$ una sucesión de funciones de variación acotada en $[a, b]$, que convergen a una función Φ en cada punto de $[a, b]$. Suponer que la sucesión de variaciones totales $T_a^b(\Phi_n)$ es

acotada. Demostrar que Φ es de variación acotada en $[a,b]$.
Sabemos que existe $M \in \mathbb{R}$ con $T_a^b(\Phi_n) \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Sea $P = \{a = x_0, ..., xm = b\}$ una partición de $[a,b]$.
De modo que para cada x_i, existe N_i tal que

$$|\Phi(x_i) - \Phi_n(x_i)| \leq \frac{\epsilon}{2m} \qquad n \geq N_i$$

Sea $N = \max\{N_i | i = 1, ..., m\}$
Así tenemos que si $n \geq N$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} |\Phi(x_i) - \Phi(x_{i-1})| &= \sum_{i=1}^{m} |\Phi(x_i) - \Phi_n(x_i) + \Phi_n(x_i) - \Phi_n(x_{i-1}) + \Phi_n(x_{i-1}) - \Phi(x_{i-1})| \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} |\Phi(x_i) - \Phi_n(x_i)| + |\Phi_n(x_i) - \Phi_n(x_{i-1})| + |\Phi_n(x_{i-1}) - \Phi(x_{i-1})| \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} \frac{\epsilon}{2m} + |\Phi_n(x_i) - \Phi_n(x_{i-1})| + \frac{\epsilon}{2m} = M + \epsilon\end{aligned}$$

Por lo que Φ es de variación acotada.

9. Para $1 \leq p < \infty$, denotamos l_p al espacio de sucesiones $\{\xi_n\}$ tal que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty$

(a) Probar la desigualdad de Minkowski para sucesiones.
Sean $x, y \in l_p$
Caso 1: $p = 1$

$$||x + y||_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| + |y_n| = ||x||_1 + ||y||_1$$

Caso 2: $p > 1$
Sabemos que en $\mathbb{R}^n$ se cumple la desigualdad de Minkowski. (Por Cálculo III)
Puesto que elevar a la $\frac{1}{p}$ es continua se obtiene:

$$\begin{aligned}||x + y||_p =& (\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^p)^{1/p} = (\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} |x_j + y_J|^p)^{1/p} = \\ (\text{continuidad de } \frac{1}{p}) =& \lim_{n\to\infty} (\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p)^{1/p} \\ (\text{Minkowsy en } \mathbb{R}^n) \leq& \lim_{n\to\infty} ((\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p)^{1/p} + \sum_{j=1}^{n} |y_j|^p)^{1/p}) \\ (\text{continuidad}) =& ||x||_p + ||y||_p\end{aligned}$$

(b) Probar la desigualdad de Hölder para sucesiones.
Sean $p, q \in (1, \infty)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y sean $x \in l_p$ y $y \in l_q$

Sabemos que en $\mathbb{R}^n$ se cumple la desigualdad de Hölder (Calculo III) y la norma es continua.

$$||xy||_1 = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}|x_jy_j| =\leq \lim_{n\to\infty}(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^p)^{1/p}(\sum_{j=1}^{n}|y_j|^q)^{1/q} = ||x||_p||y||_q$$

Sean $p=1$ y $q=\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|xy| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|x|||y||_\infty = ||x||_1||y||_\infty$$

10.

11. Investiga y enuncia el Teorema de Representación de Riesz.
Sean H un espacio de Gilbert (Espacio de Banach cuya norma es inducida por un producto interior) y $T : H \to \mathbb{R}$ una función lineal y continua. Entonces existe un único $w \in H$, tal que

$$Tu = \langle w, u\rangle \qquad \forall u \in H$$

Sea T dicha función. Denotamos por $V = \ker T$. **Caso 1:** $V = H$
$w = 0$ cumple con lo que buscamos.
Caso 2: $V \neq H$
Como $V + V^\perp = H$, $\exists w_0 \in V^\perp$ con $w_0 \neq 0$ y $||w_0|| = 1$.
Así $T(w_0) \neq 0$. Sea $w = (Tw_0)w_0$.
Por otro lado

$$T(u - \frac{Tu}{Tw_0}w_0) = Tu - \frac{Tu}{Tw_0}Tw_0 = 0$$

Es decir $u - \frac{Tu}{Tw_0}w_0 \in V$ y $w \in V^\perp$.
Por lo que

$$\begin{aligned}\langle w, u\rangle =&\langle w, u - \frac{Tu}{Tw_0}w_0\rangle + \frac{Tu}{Tw_0}\langle w, w_0\rangle = \frac{Tu}{Tw_0}\langle w, w_0\rangle = \frac{Tu}{Tw_0}\langle (Tw_0)w_0, w_0\rangle \\ =&Tu\langle w_0, w_0\rangle = Tu||w_0|| = Tu\end{aligned}$$

Supongamos que w' también cumple que $Tu = \langle w', u\rangle$
Para todo $u \in H$ tenemos.

$$0 = Tu - Tu = \langle w, u\rangle - \langle w', u\rangle = \langle w - w', u\rangle$$

En específico para $u = w - w'$, es decir,

$$0 = \langle w - w', w - w'\rangle = ||w - w'||$$

Así $w = w'$

12. (a) Demostrar que para las funciones $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f_n(x)\begin{cases} 1 - nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

$||f_n||_\infty = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$ pero $||f_n||_1 = \dfrac{1}{2n}$.
Como la función es no negativa y monótona decreciente,

$$||f_n||_\infty = \max_{x\in[0,1]}\{f(x)\} = f(0) = 1$$

Como la función es no negativa, $||f||_1$ es el área bajo la curva (la integral) y la curva que realiza la función f_n es un triángulo de base $\frac{1}{n}$ y altura 1, $||f||_1 = \dfrac{1}{2n}$

(b) Demostrar que el conjunto de todos los polinomios en $[a,b]$ con coeficientes racionales es denso en L^2
Sea $f \in L^2$
Como $f \in L^2$, $f \in L^1$, f es medible.
Por el segundo principio de Littlewood existe $g \in C^0_{[a,b]}$ tal que $|f-g| < \frac{\epsilon}{\sqrt{b-a}}$
Así

$$||f-g||_2 = \Big(\int_a^b |f-g|^2\Big)^{1/2} < \Big(\int_a^b \frac{\epsilon^2}{b-a}\Big)^{1/2} = \epsilon$$

Por lo que $C^0_{[a,b]}$ es denso en L^2, por el teorema de Stone-Weierstrass (Análisis matemático I), los polinomios con coeficientes reales son densos en las continuas y como $\mathbb{Q}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$ (Análisis Matemático I), los polinomios con coeficientes racionales son densos en los polinomios con coeficientes reales.
Así los polinomios con coeficientes racionales, son densos en L^2

13. (a) Demostrar que lo convergencia en la norma $||\cdot||_1$ no necesariamente implica la convergencia en la norma $||\cdot||_2$

Sea $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$

$f_n \to 0 \in L^1$

$$||f_n|| = \int_0^{1/n} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\sqrt{x}\Big|_0^{1/n} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

la cual tiende a cero, cuando n tiende e infinito, pero

$$||f_n||_2 = (\int_0^{1/n} \frac{1}{x})^{1/2} = \infty$$

$f_n \to 0 \in L^1$, pero $f_n \not\to 0 \in L^2$

(b) Demostrar que para toda $f \in C_0[a,b]$ se tiene que

$$||f||_s \le (b-a)^{(r-s)/rs}||f||_r \text{ para } 1 \le s < r < \infty$$

y

$$||f||_s \le (b-a)^{1/s}||f||_r \text{ para } 1 \le s < p = \infty$$

Es un caso particular del ejercicio 5. donde E es el intervalo (a,b).

14. Sean $f, g \in L^p$ con $1 \leq p \leq \infty$. Demostrar que

(a) $h(x) = \max\{f(x), g(x)\} \in L^p$

$$h(x) = \frac{|f(x) - g(x)| + f(x) + g(x)}{2}$$

Así tenemos que como $||\cdot||_p$ es una norma se cumple:

$$\begin{aligned} ||h||_p =&||\frac{|f-g|+f+g}{2}||_p \leq \frac{1}{2}(\||f-g|\|_p + \|f\|_p + \|g\|_p) \\ \leq&\frac{1}{2}(\|f\|_p + \|g\|_p + \|f\|_p + \|g\|_p) = ||f||_p + ||g||_p \end{aligned}$$

$h \in L^p$

(b) Sean $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ dos sucesiones en L^p con $1 \leq p \leq \infty$ tales que $f_n \to f \in L^p$ y $g_n \to g \in L^p$. Escribimos $h_n(x) = \max\{f_n(x), g_n(x)\} \in L^p$, probar que $h_n \to h \in L^p$. Como $f_n \to f$ y $g_n \to g$, existen N_f, N_g tales que:

$$||f_n - f|| \leq \frac{\epsilon}{2} \qquad n > N_f$$

$$||g_n - g|| \leq \frac{\epsilon}{2} \qquad n > N_g$$

Sea $N = \max\{N_g, N_f\}$ y $n > N$

$$\begin{aligned} |h_n - h||_p =&||\frac{|f_n - g_n| + f_n + g_n}{2} - \frac{|f-g|+f+g}{2}||_p \\ =&\frac{1}{2}|||f_n - g_n| - |f-g| + (f_n - f) + (g_n - g)||_p \\ \leq&\frac{1}{2}(|||f_n - f + g - g_n|||_p + ||f_n - f||_p + ||g_n - g||_p) \\ \leq&||f_n - f|| + ||g_n - g|| < \epsilon \end{aligned}$$

(c) Sea $\{f_n\}$ una sucesión en L^p con $1 \leq p \leq \infty$ y $\{g_n\}$ una sucesión acotada en L^∞. Supongamos que $f_n \to f \in L^p$ $g_n \to g$ c. t. p. Demostrar que $f_n g_n \to fg \in L^p$. Ejercicio 6 de la tarea.

15. Probar que L^2 es separable.
Sabemos por 12.b que los polinomios con coeficientes racionales son densos en L^2. P.D. los polinomios con coeficientes racionales son numerable.
Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ biyectiva.
Sea $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$
Sea $g(P) = \prod p_{i+1}^{f(a_i)}$ donde p_i es el i-ésimo primo.
Los polinomios con coeficientes racionales son numerables.

16. Demostrar que L^∞ es completo.
Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en L^∞, para $n \in \mathbb{N}$, existe k_n con $|f_i(x) - f_j(x)| \leq ||f_i - f_j|| < \frac{1}{n}$ si $i, j \geq k_n$, salvo un conjunto $Z_{i,j}$ de medida cero. Sea $Z_n = \bigcup Z_{i,j}$, unión numerable de conjuntos de medida cero, Z_n es de medida cero. Sea $Z = \bigcup Z_n$ union numerable de conjuntos de medida cero, es de medida cero.
Si $x \in Z^c$, $\{f_i(x)\}$, converge a un punto $f(x)$, pues los reales son completos. Si $x \in Z$, $f(x) = 0$, así construimos una función.
Por otro lado

$$|f(x) - f_k(x)| = \lim_{i \to \infty} |f_i(x) - f_k(x)| \leq \frac{1}{n} \quad \text{si } m \geq k_n \text{ c.t.p.}$$

$$||f||_\infty = ||(f - f_k) + f_k||_\infty \leq ||f - f_k||_\infty + ||f_k||_\infty \leq \frac{1}{n} + ||f_k||_\infty$$