1. Suponga que la función de densidad conjunta (discreta) para dos v.a. X y Y está dada por:

$$P(X=i,Y=j)=\binom{j}{i}e^{-2\lambda}\frac{\lambda^j}{j!},\qquad 0\le i\le j$$

a) Encuentre la función de densidad de X
$f_X(i)=P(X=i)=\sum\limits_{j=i}^{\infty}\binom{j}{i}e^{-2\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}=\sum\limits_{j=i}^{\infty}\frac{j!}{i!(j-i)!}e^{-2\lambda}\frac{\lambda^i\lambda^{j-i}}{j!}=\frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}\sum\limits_{j=i}^{\infty}\frac{\lambda^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda}=\frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}\sum\limits_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}$
Así. $f_X(i)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$. $X\sim Poisson(\lambda)$

b) Encuentre la función de densidad de Y
$f_Y(j)=P(Y=j)=\sum\limits_{i=0}^{j}\binom{j}{i}e^{-2\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}=e^{-2\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}\sum\limits_{i=0}^{j}\binom{j}{i}=e^{-2\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}2^j=e^{-2\lambda}\frac{(2\lambda)^j}{j!}$
Así. $f_Y(j)=e^{-2\lambda}\frac{(2\lambda)^j}{j!}$. $Y\sim Poisson(2\lambda)$

c) Encuentre la función de densidad de $Y-X$
Sabemos que $Y\ge X$. Así tenemos que $0\le Y-X\le Y$
Así podemos ver que:
$P(Y-X=k)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}P(X=i|Y-X=k)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}P(X=i\wedge Y=k+i)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\binom{k+i}{i}e^{-2\lambda}\frac{\lambda^{k+i}}{(k+i)!}=$
$=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{(k+i)!}{(i!)(k!)}e^{-2\lambda}\frac{\lambda^{k+i}}{(k+i)!}=\sum\limits_{i=0}^{\infty}e^{-2\lambda}\frac{\lambda^k\lambda^i}{(i!)(k!)}=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\sum\limits_{i=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$
Así $f_{Y-X}(k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. $X+Y\sim Poisson(\lambda)$

2. Sean X y Y v.a. independientes, cada una con distribución binomial de parámetros (n,p) y (m,p) respectivamente.

a) Demuestra que la suma $X+Y$ distribuye binomial de parámetros $(n+m,p)$
Como X,Y son independientes, tenemos que
$f_{X,Y}(i,j)=f_X(i)f_Y(j)=\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\binom{m}{j}p^j(1-p)^{m-j}=\binom{n}{i}\binom{m}{j}p^{i+j}(1-p)^{n+m-(i+j)}$
$P(X+Y=k)$ lo podemos separar en 2 casos.
Caso 1: $k\le n$
$P(X+Y=k)=\sum\limits_{i=0}^{k}P(X=i|X+Y=k)=\sum\limits_{i=0}^{k}P(X=i\wedge Y=k-i)=\sum\limits_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}p^k(1-p)^{n+m-k}=$
$=p^k(1-p)^{n+m-k}\sum\limits_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=p^k(1-p)^{n+m-k}\binom{n+m}{k}$
Caso 2: $n<k$
$P(X+Y=k)=\sum\limits_{i=0}^{n}P(X=i|X+Y=k)=\sum\limits_{i=0}^{n}P(X=i\wedge Y=k-i)=\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}p^k(1-p)^{n+m-k}=$
$=p^k(1-p)^{n+m-k}\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=p^k(1-p)^{n+m-k}\binom{n+m}{k}$
Así $X+Y\sim Bin(n+m,p)$

b) Da una explicación de manera probabilística de lo sucedido.
Pues X son n eventos Bernoulli independientes y Y son m eventos Bernoulli independientes, ambos tipos con probabilidad p de éxito. La variable $X+Y$ modela los n eventos Bernoulli de X con los m eventos de Y, es decir, modela $n+m$ eventos Bernoulli independientes entre sí, con la misma probabilidad, p. Por lo que $X+Y$ no tiene de otra más que distribuirse binomial con parámetros $(n+m,p)$

3. Sean X y Y v.a. con función de densidad conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} x+y & si \quad 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\\ 0 & e.o.c.\end{cases}$$

a) ¿X y Y son independientes?
No.

b) Encuentre la función de densidad de X

$f_X(x) = \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)dy = \int_0^1 x + ydy = xy + \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1 = x + \frac{1}{2}.$

$$f_X(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

c) Encuentre $P(X + Y < 1)$

$P(X+Y<1) = \int_0^1 \int_0^{1-y} f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-y} x + ydxdy = \int_0^1 \left.\frac{x^2}{2} + xy\right|_0^{1-y} dy =$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-y)^2 + 2y(1-y)dy = \frac{1}{2}\int_0^1 1 - 2y + y^2 + 2y - 2y^2 dy = \frac{1}{2}\int_0^1 1 - y^2 dy = \frac{1}{2}(y - \frac{y^3}{3})\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$

4. Sean X y Y v.a. con función de densidad conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 12xy(1-x) & si \quad 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

a) ¿X y Y son independientes?
Sí.

b) Encuentre $E[X]$

$E[X] = \int\int xf_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 x[12xy(1-x)]dydx = 6\int_0^1 (y^2)\Big|_0^1 x^2(1-x)dx = 6\int_0^1 x^2 - x^3dx =$

$= 6(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4})\Big|_0^1 = 6(\frac{1}{12}) = \frac{1}{2}$

c) Encuentre $E[Y]$

$E[Y] = \int\int yf_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 12xy^2(1-x)dydx = 4\int_0^1 y^3\Big|_0^1 x - x^2dx = 4\int_0^1 x - x^2dx =$

$= 4(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3})\Big|_0^1 = 4(\frac{1}{6}) = \frac{2}{3}$

d) Encuentre $Var(X)$

$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = E[X^2] - E[X]^2 = \int\int x^2 f_{X,Y}(x,y)dxdy - \frac{1}{4} = \int_0^1\int_0^1 x^2 12xy(1-x)dxdy - \frac{1}{4} =$

$= 6\int_0^1 x^3(1-x)dx - \frac{1}{4} = 6\int_0^1 x^3 - x^4dx - \frac{1}{4} = 6(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5})\Big|_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{6}{20} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

e) Encuentre $Var(Y)$

$Var(Y) = E[Y^2] - E[Y]^2 = \int\int y^2 f_{X,Y}(x,y)dxdy - \frac{4}{9} = 12\int_0^1\int_0^1 y^3x(1-x)dydx - \frac{4}{9} = 3\int_0^1 x - x^2dx - \frac{4}{9} =$

$= 3(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3})\Big|_0^1 - \frac{4}{9} = 3(\frac{1}{6}) - \frac{4}{9} = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$