Teorema. Si Σ es una superficie simple, su área no depende de la parametrización.

Demostración.

Si $\bar{f}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización de Σ y $\bar{g}: D' \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una reparametrización, existe una biyección $\bar{\varphi}: D' \to D$ de clase $C^1_{D'}$ tal que $\dfrac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(s,t)} \neq 0$ y $\bar{g} = \bar{f} \circ \bar{\varphi}$.

Entonces $$A(\Sigma_{\bar{f}}) = \iint_D \left\| \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} \right\| du\,dv$$

$$\underset{(u,v)=\bar{\varphi}(s,t)}{=} \iint_D \left\| \frac{\partial \bar{g}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{g}}{\partial t} \frac{1}{\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(s,t)}} \right\| \left| \frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(s,t)} \right| ds\,dt$$

$$= \iint_{D'} \left\| \frac{\partial \bar{g}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{g}}{\partial t} \right\| ds\,dt = A(\Sigma_{\bar{g}})$$

Si se tiene una "lámina" delgada con una distribución de masa dada por $\rho: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. ¿Cómo se puede calcular la masa de la "lámina"?

Supongamos que la "lámina" está parametrizada por $\bar{f}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donde por simplicidad tomamos D como un rectángulo.

Consideremos una partición uniforme del triángulo, la cual genera una partición en la superficie, entonces para cada subrectángulo R_{ij} elegimos el vértice (u_i, v_j), de tal forma que en $\bar{f}(u_i, v_j)$ quedan definidos los vectores $\bar{T}_{u_i}$ y $\bar{T}_{v_j}$ tangentes a la superficie.

En consecuencia

$$m(R_{ij}) \approx \rho(\bar{f}(u_i,v_j))\, A(\bar{f}(R_{ij})) \approx \rho(\bar{f}(u_i,v_j))\, A(P_{ij})$$
$$= \rho(\bar{f}(u_i,v_j)) \| \bar{T}_{u_i} \times \bar{T}_{v_j} \| \Delta u \Delta v$$

$$\therefore\ m(\bar{f}(R)) \approx \sum_{i,j=0}^{n-1} \rho(\bar{f}(u_i,v_j)) \| \bar{T}_{u_i} \times \bar{T}_{v_j} \| \Delta u \Delta v$$

Por lo tanto la masa de la "lámina" es igual a $\iint_R \rho(\bar{f}(u,v)) \left\| \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} \right\| du\,dv$.

Definición. Si Σ es una superficie simple parametrizada por $\bar{f}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $\rho: \Sigma \to \mathbb{R}$ una función continua, decimos que

$$\iint_\Sigma \rho\, dA = \iint_D \rho(\bar{f}(u,v)) \left\| \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} \right\| du\,dv$$ es la integral de superficie de la función escalar ρ sobre la superficie Σ.

¿Esta integral depende de la parametrización de Σ?

Teorema. La integral de superficie de una función escalar sobre una superficie Σ no depende de la parametrización de Σ.

Demostración.

Si Σ está parametrizada por $\bar{f}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\rho: \Sigma \to \mathbb{R}$ es una función continua y $\bar{g}: D' \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una reparametrización de Σ, entonces $\left(\begin{array}{l} \bar{\varphi}: D' \to D \text{ tq} \\ \bar{g} = \bar{f} \circ \bar{\varphi} \end{array} \right)$

$$\iint_{\Sigma_{\bar{f}}} \rho dA = \iint_D \rho(\bar{f}(u,v)) \left\| \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} \right\| du dv \overset{(u,v)=\bar{\varphi}(s,t)}{=} \iint_{D'} \rho(\bar{f}(\bar{\varphi}(s,t))) \left\| \left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{g}}{\partial t} \right) \frac{1}{\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(s,t)}} \right\| \left| \frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(s,t)} \right| ds$$

$$= \iint_{D'} \rho(\bar{g}(s,t)) \left\| \frac{\partial \bar{g}}{\partial t} \times \frac{\partial \bar{g}}{\partial s} \right\| ds dt = \iint_{\Sigma_{\bar{g}}} \rho dA.$$

Ejemplo.

Calcular la integral de $\rho: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $\rho(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ sobre la semiesfera unitaria parametrizada por $\bar{f}(u,v) = (\cos u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos v)$ para $0 \le u \le 2\pi$ y $0 \le v \le \frac{\pi}{2}$

$$\iint_\Sigma \rho dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u \operatorname{sen} v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} + \cos v) \operatorname{sen} v \, dv du$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \operatorname{sen}^2 v \, dv du + \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} u \operatorname{sen}^2 v \, dv du + \int_0 \int_0 \cos v \operatorname{sen} v \, dv du$$

$$= -\int_0^{2\pi} \left. \frac{\cos^2 v}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} du = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} du = \pi$$

$$\iint_\Sigma \rho dA = \iint_D \rho(\bar{f}(u,v)) \left\| \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} \right\| du dv$$

Si la integral que da la masa de la superficie se divide por el área de la superficie, se obtiene la densidad promedio de masa de la superficie, es decir,

$$m = \frac{\iint_\Sigma \rho dA}{\iint_\Sigma dA}$$

Definición. Si $\rho: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función continua y Σ es una superficie parametrizada por $\bar{f}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, decimos que

$$\bar{\rho}_{\bar{f}} = \frac{\iint_\Sigma \rho dA}{\iint_\Sigma dA}$$

es el valor medio de la función ρ sobre la superficie Σ

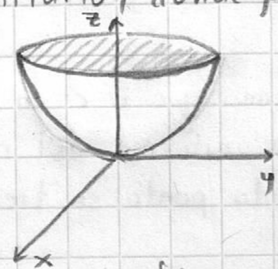
$\frac{25\sqrt{5}-1}{10}+1$

Las coordenadas del centro de masa de una superficie Σ con una distribución de masa dada por $\rho:\Sigma\to\mathbb{R}$ son

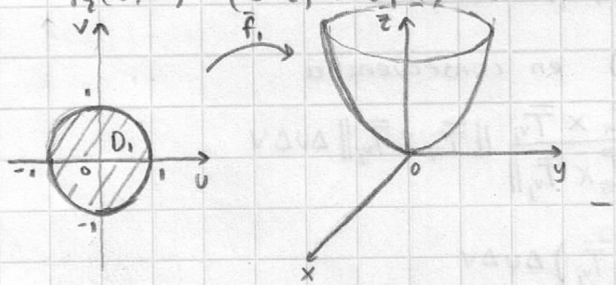
$$\bar{x}=\frac{\iint_\Sigma x\rho(x,y,z)\,dA}{\iint_\Sigma \rho(x,y,z)\,dA},\quad \bar{y}=\frac{\iint_\Sigma y\rho(x,y,z)\,dA}{\iint_\Sigma \rho(x,y,z)\,dA},\quad \bar{z}=\frac{\iint_\Sigma z\rho(x,y,z)\,dA}{\iint_\Sigma \rho(x,y,z)\,dA}$$

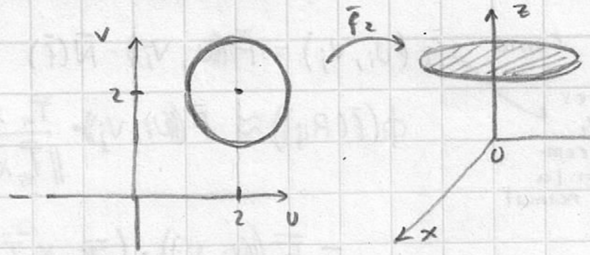
Ejemplo.

Calcular el centro de masa del paraboloide con su tapa, definido en el círculo unitario, donde ρ es constante.



Por la simetría $\bar{x}=0$ y $\bar{y}=0$. Una parametrización de Σ es $\bar{f}:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ dada por $\bar{f}=\bar{f}_1\cup\bar{f}_2$ con $D=D_1\cup D_2$ donde $\bar{f}_1:D_1\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ es una parametrización del paraboloide dada por $\bar{f}_1(u,v)=(\overset{x}{u},\overset{y}{v},\overset{z}{u^2+v^2})$ con $D_1=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2\le 1\}$ y $\bar{f}_2:D_2\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ está dada por $\bar{f}_2(u,v)=(u-2,v-2,1)$ donde $D_2=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid (u-2)^2+(v-2)^2\le 1\}$





Entonces $$\iint_\Sigma z\,dA=\iint_{D_1}(u^2+v^2)\sqrt{4u^2+4v^2+1}\,du\,dv+\iint_{D_2}du\,dv$$

$u=r^2$ $du=2r\,dr$

$dv=\sqrt{1+4r^2}\,r$

$v=\frac{(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}}{8(\frac{3}{2})}$

$$=\int_0^1\int_0^{2\pi}\sqrt{1+4r^2}\,r^3\,d\theta\,dr+\pi=2\pi\int_0^1 r^2\sqrt{1+4r^2}\,r\,dr$$

$$=2\pi\left(\frac{r^2(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}}{12}\Big|_0^1-\frac{1}{6}\int_0^1(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}r\,dr\right)$$

$$=\frac{5\sqrt{5}\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\frac{1}{8(\frac{5}{2})}(1+4r^2)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1+\pi$$

$$=\frac{5\sqrt{5}\pi}{6}-\frac{\pi}{60}5^{\frac{5}{2}}+\frac{\pi}{60}+\pi=\frac{5\sqrt{5}\pi}{6}-\frac{\pi}{60}(25\sqrt{5}-1)+\pi$$

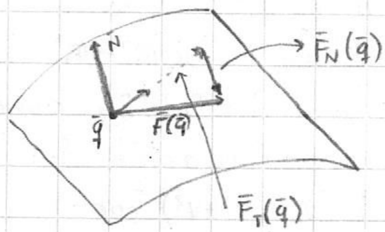
y $$\iint_\Sigma dA=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)+\pi$$

$$=\frac{5\sqrt{5}-25\sqrt{5}+\frac{1}{10}+6}{5\sqrt{5}-1+6}$$

entonces $$\bar{z}=\frac{\frac{5\sqrt{5}\pi}{6}-\frac{\pi}{60}(25\sqrt{5}-1)+\pi}{\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)+\pi}\approx 0.7223$$

Si $\bar{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un campo de velocidades continuo y Σ es una superficie simple parametrizada por $\bar{f}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. ¿Cómo se puede calcular el flujo del campo $\bar{F}$ a través de Σ?

Para cada punto $\bar{q} \in \Sigma$ el vector $\bar{F}(\bar{q})$ se puede descomponer en las componentes $\bar{F}_T(\bar{q})$ y $\bar{F}_N(\bar{q})$, de las cuales $\bar{F}_T(\bar{q})$ está en el plano tangente y $\bar{F}_N(\bar{q})$ es ortogonal al plano tangente en $\bar{q}$, de estas dos componentes la que nos interesa por ser la que permite evaluar el flujo a través de la superficie es $\bar{F}_N(\bar{q})$



Por simplicidad supongamos que D es un rectángulo y tomemos una partición uniforme del rectángulo, entonces como en cada punto se tiene que el flujo en $\bar{q}$ es

$\phi_{\bar{q}} = \bar{F}_N(\bar{q})$ entonces el flujo a través de $\bar{f}(R_{ij})$ es $\phi(\bar{f}(R_{ij})) \approx \bar{F}_N(u_i, v_j)\, A(\bar{f}(R_{ij}))$

como $\bar{F}_N(u_i, v_j) = \bar{F}(\bar{f}(u_i, v_j)) \cdot \bar{N}(\bar{f})$ en consecuencia

que no es un vector, sólo es la componente en la dirección normal

$$\phi(\bar{f}(R_{ij})) \approx \bar{F}(\bar{f}(u_i, v_j)) \cdot \frac{\bar{T}_{u_i} \times \bar{T}_{v_j}}{\|\bar{T}_{u_i} \times \bar{T}_{v_j}\|} \|\bar{T}_{u_i} \times \bar{T}_{v_j}\| \Delta u \Delta v$$

$$= \bar{F}(\bar{f}(u_i, v_j)) \cdot (\bar{T}_{u_i} \times \bar{T}_{v_j}) \Delta u \Delta v$$

Por lo tanto $\displaystyle \phi_{\Sigma_{\bar{f}}} \approx \sum_{i,j=0}^{n-1} \bar{F}(\bar{f}(u_i, v_j)) \cdot (\bar{T}_{u_i} \times \bar{T}_{v_j}) \Delta u \Delta v$

es decir $\displaystyle \phi_{\Sigma_{\bar{f}}} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i,j=0}^{n-1} \bar{F}(\bar{f}(u_i, v_j)) \cdot (\bar{T}_{u_i} \times \bar{T}_{v_j}) \Delta u \Delta v = \iint_D \bar{F}(\bar{f}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}\right) du\, dv$

Si $\bar{F}_N(\bar{f})$ apunta en la misma dirección y sentido que el vector normal a Σ, se dice que el flujo "sale" de la superficie o es positivo; si $\bar{F}_N(\bar{f})$ está en sentido opuesto al vector normal a Σ, se dice que el flujo "entra" a Σ o es negativo.

Definición. Si Σ es una superficie simple orientable parametrizada por $\bar{f}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $\bar{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ decimos que

$\displaystyle \iint_{\Sigma_{\bar{f}}} \bar{F} \cdot dA = \iint_D \bar{F}(\bar{f}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}\right) du\, dv$ es la integral de superficie del campo vectorial $\bar{F}$ sobre Σ.

¿ Depende esta integral de la parametrización de Σ ?

Teorema. Si Σ es una superficie simple orientable cuya orientación está dada por la parametrización $\bar{f}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\bar{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial continuo en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\Sigma \subset \Omega$ y $\bar{g}: D' \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una reparametrización de Σ, entonces

$$\iint_{\Sigma_{\bar{g}}} \bar{F} \cdot dA = \iint_{\Sigma_{\bar{f}}} \bar{F} \cdot dA \quad \text{si } \bar{g} \text{ preserva la orientación de } \Sigma$$

$$\iint_{\Sigma_{\bar{g}}} \bar{F} \cdot dA = -\iint_{\Sigma_{\bar{f}}} \bar{F} \cdot dA \quad \text{si } \bar{g} \text{ invierte la orientación de } \Sigma.$$

Demostración.

Como $\bar{g}$ es una reparametrización de Σ, existe una biyección $\bar{\varphi}: D' \to D$ de clase $C^1_{D'}$ tal que $\dfrac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(s,t)} \neq 0$ y $\bar{g} = \bar{f} \circ \bar{\varphi}$

Entonces

$$\iint_{\Sigma_{\bar{f}}} \bar{F} \cdot dA = \iint_D \bar{F}(\bar{f}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} \right) du\, dv$$

$$\underset{(u,v) = \bar{\varphi}(s,t)}{=} \iint_{D'} \bar{F}(\bar{f}(\bar{\varphi}(s,t))) \cdot \left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{g}}{\partial t} \right) \frac{1}{\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(s,t)}} \left| \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(s,t)} \right| ds\, dt$$

~~decimos que~~ Por lo tanto

$$\iint_{\Sigma_{\bar{f}}} \bar{F} \cdot dA = \iint_{\Sigma_{\bar{g}}} \bar{F} \cdot dA \quad \text{si } \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(s,t)} > 0,$$ es decir si $\bar{g}$ preserva la orientación de Σ.

$$\iint_{\Sigma_{\bar{f}}} \bar{F} \cdot dA = -\iint_{\Sigma_{\bar{g}}} \bar{F} \cdot dA \quad \text{si } \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(s,t)} < 0$$ es decir $\bar{g}$ invierte la orientación de Σ.

Ejemplos.

1. Si Σ es el pedazo de plano $z = \alpha x + \beta y + \delta$ definido en el rectángulo $[a,b] \times [c,d]$ y $\bar{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es el campo vectorial dado por $\bar{F}(x,y,z) = (0,1,0)$

   Calcular el flujo de $\bar{F}$ a través de Σ.

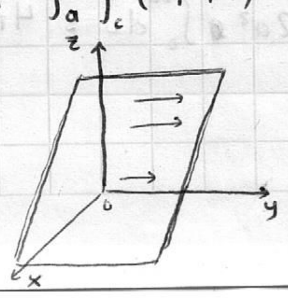
Una parametrización de Σ está dada por $\bar{f}: [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}^3$ tal que $\bar{f}(u,v) = (u, v, \alpha u + \beta v + \delta)$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \end{matrix}$$

Entonces

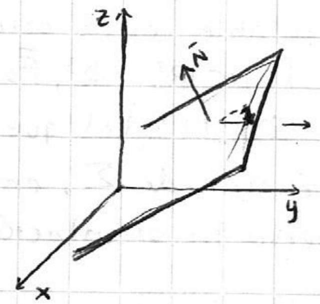
$$\iint_{\Sigma_{\bar{f}}} \bar{F} \cdot dA = \int_a^b \int_c^d (0,1,0) \cdot (-\alpha, -\beta, 1)\, dv\, du = -\beta(b-a)(d-c)$$

i) Si $\beta = 0$, el flujo es cero

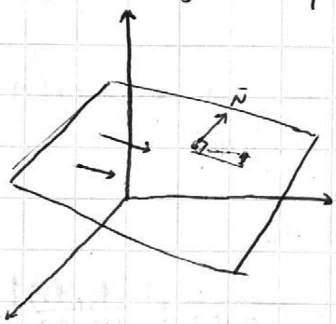


20 hrs después

ii) Si $\beta > 0$, el flujo es negativo



iii) Si $\beta < 0$, el flujo es positivo

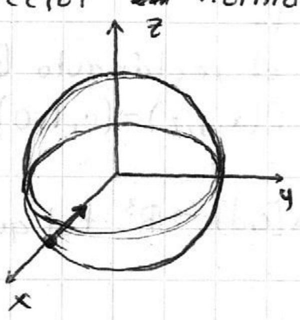


2. Calcular el flujo del campo vectorial $\bar{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ a través de la esfera orientada por los vectores normales apuntando hacia afuera. Si consideramos la parametrización $\bar{f}: [0,2\pi] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por $\bar{f}(u,v) = (a\cos u \operatorname{sen} v, a\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, a\cos v)$ se tiene $x^2+y^2+z^2=a^2$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} = a^2(+\cos u \operatorname{sen}^2 v, + \operatorname{sen}^2 v \operatorname{sen} u, \operatorname{sen} v \cos v)$$

Obtengamos este ~~punto~~ vector en el punto $(a,0,0) = \bar{f}(0, \frac{\pi}{2})$

el vector ~~en~~ normal en este punto es el vector $-a^2(1,0,0)$ que apunta hacia el interior de la esfera.



Entonces

$$\Phi_\Sigma = \iint_\Sigma -\bar{F} \cdot dA = a^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (\cos u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos v) \cdot (\cdot (\cos u \operatorname{sen}^2 v, \operatorname{sen}^2 v \operatorname{sen} u, \cos v \operatorname{sen} v)\, du\, dv$$

$$= a^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (\cos^2 u \operatorname{sen}^3 v + \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen}^3 v + \cos^2 v \operatorname{sen} v)\, dv\, du$$

$$= a^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} v\, dv\, du = 2a^3 \int_0^{2\pi} du = 4\pi a^3$$

3. Si Σ es el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ con sus vectores normales hacia afuera, calcular el flujo del campo $\bar{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $\bar{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Una parametrización de Σ con la orientación dada es $\bar{f}: [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ tal que

$\bar{f}(u, v) = (a\cos v \operatorname{sen} u, b \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, c \cos u)$ $\quad \hat{\imath} \quad \hat{\jmath} \quad \hat{k}$

Tenemos $\frac{\partial \bar{f}}{\partial u} = (a \cos v \cos u, b \cos u \operatorname{sen} v, -c \operatorname{sen} u)$

$\frac{\partial \bar{f}}{\partial v} = (-a \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, b \cos v \operatorname{sen} u, 0)$

Entonces $\frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} = (bc \cos v \operatorname{sen}^2 u, ac \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen} v, ab \operatorname{sen} u \cos u)$

$ab(\cos^2 u \operatorname{sen} u \cos u + \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen} \cos$

en consecuencia

$$\iint_\Sigma \bar{F} \cdot dA = \iint_D (a\cos v \cos u, b \cos u \operatorname{sen} v, +c \cos u) \cdot (bc \cos v \operatorname{sen}^2 u, ac \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen} v, ab \operatorname{sen} u \cos u)$$

$$= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} abc \cos^2 v \cos u \operatorname{sen}^2 u + abc \cos u \operatorname{sen}^2 v \operatorname{sen}^2 u + abc \cos^2 u \operatorname{sen} u)\, du\, dv$$

$$= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} abc \operatorname{sen} u\, dv\, du = 2\pi abc \int_0^\pi \operatorname{sen} u\, du = 4\pi abc$$ F(

Teorema (de Stokes). Si Σ es una superficie simple orientable, parametrizada por $\bar{f}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de clase C_0^2, la cual proporciona la orientación de Σ, $\bar{\lambda}: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ dada por $\bar{\lambda}(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t))$ de clase $C^1_{[a,b]}$ a pedazos que parametriza ∂D^+, $\bar{\mu} = \bar{f} \circ \bar{\lambda}: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ que parametriza $\partial \Sigma^+$

$\bar{F} = (F_1, F_2, F_3)$ y $\bar{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo de clase C^1 en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\Sigma \subset \Omega$, entonces

$$\int_{\partial\Sigma^+} \bar{F} \cdot d\bar{\mu} = \iint_{\Sigma_f} \nabla \times \bar{F} \cdot \underbrace{dA}_{N_f} \quad \text{donde} \quad \nabla \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

el vector $\nabla \times \bar{F}$ se conoce como rotacional de $\bar{F}$.

Demostración

$$\int_{\partial\Sigma^+} \bar{F} \circ d\mu = \int_a^b \bar{F}(\bar{\mu}(t)) \cdot \bar{\mu}'(t)\,dt = \int_a^b \left(F_1(\bar{\mu}(t))\mu_1'(t) + F_2(\bar{\mu}(t))\mu_2'(t) + F_3(\bar{\mu}(t))\mu_3'(t)\right)dt$$

$$= \int_a^b \left(F_1(\bar{\mu}(t)\tfrac{d}{dt}(x(u,v)) + F_2(\bar{\mu}(t))\tfrac{d}{dt}(y(u,v)) + F_3(\bar{\mu}(t))\tfrac{d}{dt}(z(u,v))\right)dt$$

$$= \int_a^b \left(F_1(\bar{\mu}(t))\left(\frac{\partial x(u,v)}{\partial u}\lambda_1'(t) + \frac{\partial x(u,v)}{\partial v}\lambda_2'(t)\right) + F_2(\bar{\mu}(t))\left(\frac{\partial y(u,v)}{\partial u}\lambda_1'(t) + \frac{\partial y(u,v)}{\partial v}\lambda_2'(t)\right) + \right.$$

$$\left. + F_3(\bar{\mu}(t))\left(\frac{\partial z(u,v)}{\partial u}\lambda_1'(t) + \frac{\partial z(u,v)}{\partial v}\lambda_2'(t)\right)\right)dt$$

$$= \int_a^b \left[\left(F_1(\bar{\mu}(t))\frac{\partial x(u,v)}{\partial u} + F_2(\bar{\mu}(t))\frac{\partial y(u,v)}{\partial u} + F_3(\bar{\mu}(t))\frac{\partial z(u,v)}{\partial u}\right)\lambda_1'(t) + \right.$$

$$\left. + \left(F_1(\bar{\mu}(t))\frac{\partial x(u,v)}{\partial v} + F_2(\bar{\mu}(t))\frac{\partial y(u,v)}{\partial v} + F_3(\bar{\mu}(t))\frac{\partial z(u,v)}{\partial v}\right)\lambda_2'(t)\right]dt$$

$$= \int_a^b \left(F_1(\bar{\mu}(t))\frac{\partial x}{\partial u} + F_2(\bar{\mu}(t))\frac{\partial y}{\partial u} + F_3(\bar{\mu}(t))\frac{\partial z}{\partial u},\ F_1(\bar{\mu}(t))\frac{\partial x}{\partial v} + F_2(\bar{\mu}(t))\frac{\partial y}{\partial v} + F_3(\bar{\mu}(t))\frac{\partial z}{\partial v}\right)\cdot(\lambda_1'(t), \lambda_2'(t))\,dt$$

Consideremos el campo

$\bar{G}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $G_1 = F_1(\bar{\mu}(t))\frac{\partial x}{\partial u} + F_2(\bar{\mu}(t))\frac{\partial y}{\partial u} + F_3(\bar{\mu}(t))\frac{\partial z}{\partial u}$ y

$$G_2 = F_1(\bar{\mu}(t))\frac{\partial x}{\partial v} + F_2(\bar{\mu}(t))\frac{\partial y}{\partial v} + F_3(\bar{\mu}(t))\frac{\partial z}{\partial v}$$

Entonces por el Teorema de Green se tiene que la última integral se puede escribir en la forma.

$$\int_a^b \bar{G}\cdot d\bar{\lambda} = \iint_{\partial D^+}\left(\frac{\partial G_2}{\partial u} - \frac{\partial G_1}{\partial v}\right)du\,dv$$

Calculemos $\frac{\partial G_2}{\partial u}$ y $\frac{\partial G_1}{\partial v}$

$$\frac{\partial G_2}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\left(F_1(\bar{\mu})\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(F_2(\bar{\mu})\frac{\partial y}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(F_3(\bar{\mu})\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$= F_1(\bar{\mu}(t))\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right) + F_2(\bar{\mu}(t))\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v} +$$

$$+ \frac{\partial y}{\partial v}\left(\frac{\partial F_2(\bar{\mu}(t))}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F_2(\bar{\mu}(t))}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right) + F_3(\bar{\mu}(t))\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} +$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F_3}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial v} = F_1(\bar{\mu}(t))\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial u} + \frac{\partial x}{\partial u}\left(\frac{\partial F_1(\bar{\mu}(t))}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F_1(\bar{\mu}(t))}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial F_1(\bar{\mu}(t))}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right) +$$

$$+ F_2(\bar{\mu}(t))\frac{\partial^2 y}{\partial v\partial u} + \frac{\partial y}{\partial u}\left(\frac{\partial F_2(\bar{\mu})}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right) + F_3(\bar{\mu}(t))\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u} +$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F_3}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$\begin{array}{l} \qquad\quad \hat{\imath} \quad \hat{\jmath} \quad \hat{k} \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} = (1,0,-1) \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} = (0,1,-1) \end{array} = (1,1,1)$$

$$\bar{N} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1,1,1)$$

Como una parametrización de Σ es $\bar{f}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\bar{f}(u,v) = (u, v, 1-u-v)$ entonces una parametrización de la frontera es $\bar{\mu} = \bar{f} \circ \bar{\lambda} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ tal que $\bar{\mu} = \bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 + \bar{\mu}_3$ donde $\bar{\mu}_1 = \bar{f} \circ \bar{\lambda}_1$, $\bar{\mu}_2 = \bar{f} \circ \bar{\lambda}_2$, $\bar{\mu}_3 = \bar{f} \circ \bar{\lambda}_3$, es decir $\bar{\mu}_1(t) = (t, 0, 1-t)$, $\bar{\mu}_2(t) = (1-t, t, 0)$, $\bar{\mu}_3(t) = (0, 1-t, t)$

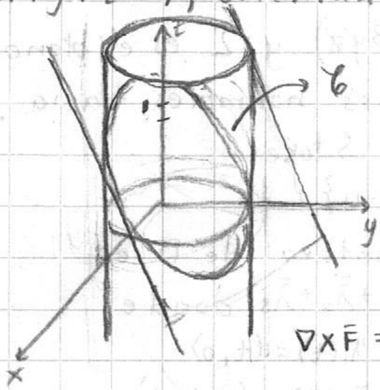
$$\int_{\partial \Sigma^+} \bar{F} \cdot d\bar{\mu} = \int_0^1 (0, 2t(1-t), 0) \cdot (1,0,-1)\,dt + \int_0^1 (t(1-t), 0, 0)(-1,1,0)\,dt + $$
$$+ \int_0^1 (0, 0, 3t(1-t)) \cdot (0,-1,1)\,dt$$
$$= \int_0^1 -t(1-t)\,dt + \int_0^1 3t(1-t)\,dt = 2\int_0^1 (t-t^2)\,dt = t^2\Big|_0^1 - \frac{2t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\iint_{\Sigma_f} \nabla \times \bar{F} \cdot dA = \int_0^1 \int_0^{1-u} (3(1-u-v) - 2u, 0, 2(1-u-v) - u) \cdot (1,1,1)\,dv\,du \qquad \nabla \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & 2xz & 3yz \end{vmatrix}$$

$3-3u-3v-2u$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-u} (3 - 5u - 3v + 2 - 3u - 2v)\,dv\,du \qquad = (3z - 2x, 0, 2z - x)$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-u} (5 - 8u - 5v)\,dv\,du = \int_0^1 \left(5v - 8uv - \frac{5}{2}v^2\right)\Big|_0^{1-u} du$$
$$= \int_0^1 \left(5(1-u) - 8u(1-u) - \frac{5}{2}(1-u)^2\right) du = -\frac{5}{2}(1-u)^2\Big|_0^1 - 4u^2 + \frac{8}{3}u^3\Big|_0^1 + \frac{5}{2}(1-u)^3\Big|_0^1$$
$$= \cancel{\frac{5}{2}} - 4 + \frac{8}{3} - \cancel{\frac{5}{2}} =$$

Ejemplo. Calcular $\int_{\mathscr{C}} \bar{F} \cdot d\bar{\mu}$ orientada positivamente donde $\bar{F}(x,y,z) = (-y^3, x^3, -z^3)$ y $\mathscr{C}$ es la curva que resulta de la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 1$, orientada positivamente.



Como $\mathscr{C}$ es una elipse, una parametrización de la región encerra $\mathscr{C}$ es $\bar{f}: [0,1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por
$\bar{f}(u,v) = (u\cos v, u\,\mathrm{sen}\,v, 1 - u\cos v - u\,\mathrm{sen}\,v)$

Entonces
$$\int_{\mathscr{C}} \bar{F} \cdot d\bar{\mu} = \iint_{\Sigma_{\bar{f}}} \nabla \times \bar{F}(\bar{f}(u,v)) \cdot \bar{N}_f\,du\,dv$$

$$\nabla \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^3 & x^3 & -z^3 \end{vmatrix} = (0, 0, 3x^2 + 3y^2)$$

es decir,
$$\nabla \times \bar{F}(\bar{f}(u,v)) = (0, 0, 3u^2), \quad \bar{N}_{\bar{f}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \cos v & \mathrm{sen}\,v & -\cos v - \mathrm{sen}\,v \\ -u\,\mathrm{sen}\,v & u\cos v & u\,\mathrm{sen}\,v - u\cos v \end{vmatrix}$$
$$= (u, u, u)$$

Se tiene

$$\frac{\partial G_2}{\partial u}-\frac{\partial G_1}{\partial v}=\left(\frac{\partial F_1(\bar{\mu}(t))}{\partial y}-\frac{\partial F_2(\bar{\mu}(t))}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}+\left(\frac{\partial F_1(\bar{\mu}(t))}{\partial z}-\frac{\partial F_3(\bar{\mu}(t))}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}+$$

$$+\left(\frac{\partial F_2(\bar{\mu}(t))}{\partial x}-\frac{\partial F_1(\bar{\mu}(t))}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\left(\frac{\partial F_2(\bar{\mu}(t))}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}+$$

$$+\left(\frac{\partial F_3}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}+\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$=\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)+\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)+\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$$

Como f es de clase C_D^2, las derivadas parciales cruzadas son iguales, por lo que

$$\frac{\partial G_2}{\partial u}-\frac{\partial G_1}{\partial v}=$$

Pero esta expresión es el producto punto de los vectores $\nabla\times\bar{F}$ y $\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$.

En consecuencia

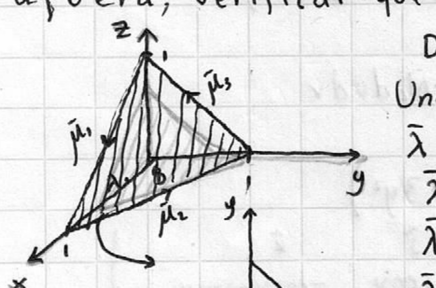
$$\iint_{\partial D^+}\left(\frac{\partial G_2}{\partial u}-\frac{\partial G_1}{\partial v}\right)du\,dv=\iint_{\partial D^+}\nabla\times\bar{F}\cdot\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)du\,dv$$

$$=\iint_{\partial D^+}\nabla\times\bar{F}\cdot\bar{N}_f(u,v)\,du\,dv$$

$$=\iint_{\partial D^+}\nabla\times\bar{F}\cdot dA$$

Ejemplo.

Si $\bar{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ está dado por $\bar{F}(x,y,z)=(xy,\ 2xz,\ 3yz)$ y Σ es el plano $x+y+z=1$ en el primer octante con sus vectores normales hacia afuera, verificar que se cumple el Teorema de Stokes.



$D=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le u\le 1,\ 0\le v\le 1-u\}$

Una parametrización de la frontera de D es $\bar{\lambda}:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ tal que $\bar{\lambda}=\bar{\lambda}_1+\bar{\lambda}_2+\bar{\lambda}_3$ donde

$\bar{\lambda}_1:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ está dada por $\bar{\lambda}_1(t)=(t,0)$

$\bar{\lambda}_2:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ está dada por $\bar{\lambda}_2(t)=(1-t,t)$

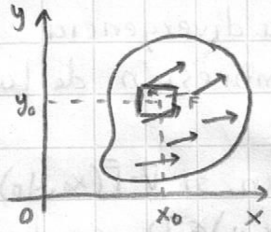
$\bar{\lambda}_3:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ está dada por $\bar{\lambda}_3(t)=(0,1-t)$

Entonces una parametrización de la frontera de Σ es $\bar{\mu}$

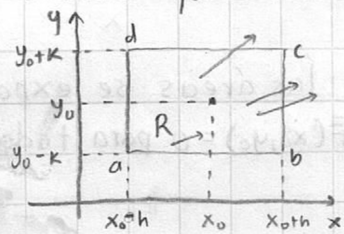
entonces $\int_{\mathcal{C}} \bar{F}\cdot d\bar{\mu} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3u^3 \, dv\, du = 6\pi \int_0^1 u^3\, du = \frac{3}{2}\pi$

La divergencia de un campo vectorial.

Si se tiene un campo continuo de velocidades $\bar{F}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



Nos interesa estimar la cantidad neta de fluido que sale de $R = \{(x,y) \in D \mid x_0 - h \leq x \leq x_0 + h, y_0 - k \leq y \leq y_0 + k\}$



Una estimación de la cantidad neta de fluido que fluye hacia afuera de R, se obtiene al calcular la diferencia entre el fluido que sale y el que entra.

Supongamos que el fluido entra por los lados ab y ad y sale por los lados bc y dc.

La cantidad de fluidos que entra por el lado ab es aproximadamente igual a $2hF_2(x_0, y_0 - k)$.

La cantidad que entra por el lado ad $\approx 2kF_1(x_0 - h, y_0)$

La cantidad que sale por bc $\approx 2kF_1(x_0 + h, y_0)$

La cantidad que sale por dc $\approx 2hF_2(x_0, y_0 + k)$

Entonces la cantidad neta de fluido que sale de R es aproximadamente igual a $2kF_1(x_0+h, y_0) + 2hF_2(x_0, y_0+k) - 2kF_1(x_0-h, y_0) - 2hF_2(x_0, y_0-k)$

Si ahora se divide esta cantidad por el área del rectángulo, se obtiene la cantidad neta de fluido que sale del rectángulo por unidad de área, es decir, esta cantidad es

$$\frac{F_1(x_0+h, y_0) - F_1(x_0-h, y_0)}{2h} + \frac{F_2(x_0, y_0+k) - F_2(x_0, y_0-k)}{2k}$$

Al calcular el límite de esta expresión cuando h, k tienden a cero, se obtiene $\frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x_0, y_0)$

A esta cantidad se le conoce como divergencia del campo vectorial

Definición. Si $\bar{F}: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial diferenciable, decimos que $\operatorname{div} \bar{F} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$ es la divergencia del campo vectorial $\bar{F}$.

Si consideramos

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \quad y \quad \bar{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$$

entonces

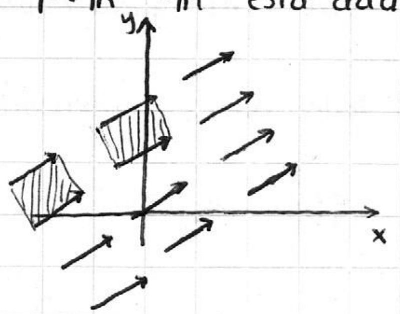
$$\operatorname{div}\bar{F} \equiv \overset{\text{nabla}}{\nabla} \cdot \bar{F} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

Si $\bar{F}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial diferenciable, la divergencia $\nabla \cdot \bar{F}$ se puede ver como la tasa de expansión o de compresión de las áreas en el plano.

Entonces si $\nabla \cdot \bar{F}(x_0, y_0) > 0$ las áreas se expanden, si $\nabla \cdot \bar{F}(x_0, y_0) < 0$ las áreas se comprimen y si $\nabla \cdot \bar{F}(x_0, y_0) = 0$ para todo $(x, y) \in D$, se dice que el campo es incompresible

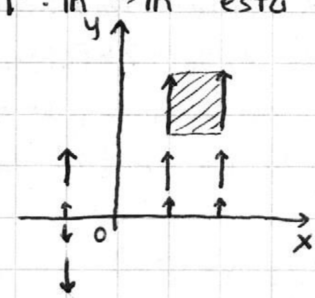
Ejemplos.

1. Si $\bar{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está dado por $\bar{F}(x, y) = (\alpha, \beta)$



Geométricamente $\bar{F}$ es incompresible, lo cual se comprueba al calcular $\nabla \cdot \bar{F}$ y obtener que $\nabla \cdot \bar{F}(x, y) = 0$.

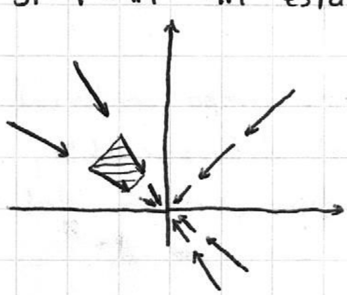
2. Si $\bar{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está dado por $\bar{F}(x, y) = (0, y)$



Se ve que el campo se expande

En efecto $\nabla \cdot \bar{F} = \frac{\partial(0)}{\partial x} + \frac{\partial(y)}{\partial y} = 1 > 0$

3. Si $\bar{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está dado por $\bar{F}(x, y) = (-x, -y)$



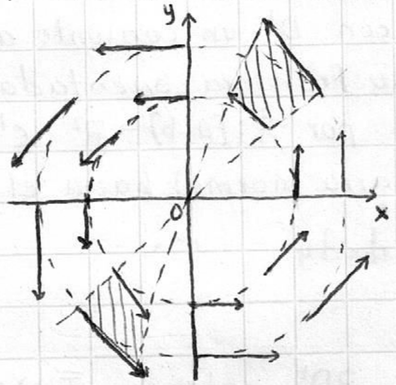
Geométricamente se ve que las áreas se comprimen, lo cual se confirma al obtener que $\nabla \cdot \bar{F} = \frac{\partial(-x)}{\partial x} + \frac{\partial(-y)}{\partial y} = -1 - 1 = -2 < 0$

An

$y' = -\frac{x}{y}$

$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = c$

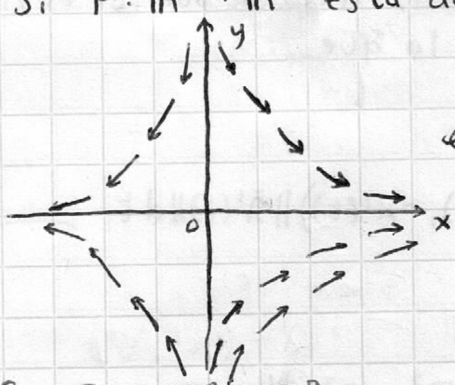
4. Si $\bar{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está dado por $\bar{F}(x,y) = (-y, x)$



$$\nabla \cdot \bar{F} = \frac{\partial(-y)}{\partial x} + \frac{\partial(x)}{\partial y} = 0$$

el campo es incompresible

5. Si $\bar{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está dado por $\bar{F}(x,y) = (x, -y)$

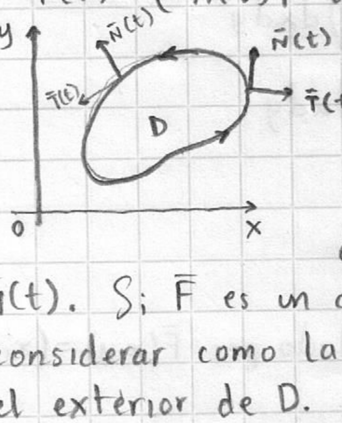


Como $\nabla \cdot \bar{F} = \frac{\partial(x)}{\partial y} + \frac{\partial(-y)}{\partial x} = 0$

entonces las áreas no se expanden ni se comprimen.

Si $\bar{F}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial de clase C^1 por pedazos y D es una región parametrizada por $\bar{\lambda}: [a,b] \to \mathbb{R}^2$, orientada positivamente, entonces $\bar{T}(t) = \frac{\bar{\lambda}'(t)}{\|\bar{\lambda}'(t)\|}$ es un vector unitario tangente a ∂D^+, por lo que si

$\bar{T}(t) = (T_1(t), T_2(t))$ entonces $\bar{N}(t) = (T_2(t), -T_1(t))$ es un vector unitario normal a la superficie, el cual apunta hacia afuera de D.



Entonces $\bar{F}(\bar{\lambda}(t)) \cdot \bar{N}(t)$ es la componente del campo en la dirección del vector unitario $\bar{N}(t)$. Si $\bar{F}$ es un campo de velocidades $\bar{F}(\bar{\lambda}(t)) \cdot \bar{N}(t)$ se puede considerar como la velocidad con la que el fluido fluye hacia el exterior de D.

¿Cuál es la relación de esta cantidad con la divergencia de $\bar{F}$ en D?

Teorema. (Teorema de la Divergencia en el plano). Si $\bar{F}: D' \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial de clase $C^1_{D'}$ con D' un conjunto abierto, $D \subset D'$ un conjunto compacto con su frontera orientada positivamente ∂D^+, parametrizada por $\bar{\lambda}: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ C^1 a pedazos y $\bar{N}(t)$ es el vector unitario normal hacia el exterior de D, entonces $\int_{\partial D^+} \bar{F} \cdot \bar{N}\, d\bar{\lambda} = \iint_D \nabla \cdot \bar{F}\, dx\, dy$

Demostración.

Si $\bar{\lambda}: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ es una parametrización de ∂D^+, entonces $\bar{T}(t) = \dfrac{\bar{\lambda}'(t)}{\|\bar{\lambda}'(t)\|}$ es un vector unitario tangente a D, es decir, $\bar{T}(t)$ se puede escribir en la forma $\bar{T}(t) = \dfrac{1}{\|\bar{\lambda}'(t)\|}(x'(t), y'(t))$ por lo que

$$\bar{N}(t) = \frac{1}{\|\bar{\lambda}'(t)\|}(y'(t), -x'(t))$$

Entonces

$$\int_{\partial D^+} \bar{F} \cdot \bar{N}\, d\bar{\lambda} = \int_a^b \bar{F}(\bar{\lambda}(t)) \cdot \frac{1}{\|\bar{\lambda}'(t)\|}(y'(t), -x'(t))\, \|\bar{\lambda}'(t)\|\, dt$$

$$= \int_a^b \left(F_1(\bar{\lambda}(t))\, y'(t) - F_2(\bar{\lambda}(t))\, x'(t)\right) dt$$

Si consideramos el campo vectorial $\bar{G}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $\bar{G} = (-F_2, F_1)$ como $\int_{\partial D^+} \bar{G} \cdot d\bar{\lambda} = \int \bar{F} \cdot \bar{N}\, d\bar{\lambda}$ y al usar el Teorema de Green en G se obtiene

$$\int_{\partial D^+} \bar{G} \cdot d\bar{\lambda} = \iint_D \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right) dx\, dy$$

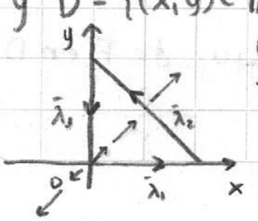
$$= \iint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\partial(-F_2)}{\partial y}\right) dx\, dy$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\right) dx\, dy$$

entonces $\int_{\partial D^+} \bar{F} \cdot \bar{N}\, d\bar{\lambda} = \iint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\right) dx\, dy$

Por lo tanto $\int_{\partial D^+} \bar{F} \cdot \bar{N}\, d\bar{\lambda} = \iint_D \nabla \cdot \bar{F}\, dx\, dy$

Ejemplo. Calcular $\int_{\partial D^+} \bar{F} \cdot \bar{N}\, d\bar{\lambda}$ si $\bar{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está dado por $\bar{F}(x,y) = (x,y)$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x,\ 0 \le y,\ x + y \le 1\}$



$$\int_{\partial D^+} \bar{F} \cdot \bar{N}\, d\bar{\lambda} = \iint_D (2)\, dx\, dy = 2\int_0^1 \int_0^{-x+1} dy\, dx = 2\int (-x+1)\, dx$$

$$= 2\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 1$$

2. Si $\bar{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ está dado por $\bar{F}(x,y)=(-y,x)$ y D es cualquier región compacta en $\mathbb{R}^2$, calcular el flujo a través de D.

El flujo vale cero.

Teorema (de la Divergencia en $\mathbb{R}^3$). Si $\bar{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $\bar{F}=(F_1,F_2,F_3)$ es un campo de clase C^1, $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ es una región elemental por ejemplo del tipo $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x,y\in R, \varphi_1(x,y)\le z\le\varphi_2(x,y)\}$ y Σ es su frontera orientada positivamente con sus vectores normales hacia el exterior parametrizada por $\bar{f}:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, entonces $\iint_{\Sigma_{\bar{f}}}\bar{F}\cdot dA=\iiint_\Omega \nabla\cdot\bar{F}\,dx\,dy\,dz$

Demostración.

Por un lado $\iint_{\Sigma_{\bar{f}}}\bar{F}\cdot dA=\iint_D \bar{F}(\bar{f}(u,v))\cdot\bar{N}_f(u,v)\,du\,dv$

$$=\iint_D \bar{F}(\bar{f}(u,v))\cdot\left(\frac{\partial\bar{f}}{\partial u}\times\frac{\partial\bar{f}}{\partial v}\right)du\,dv$$

$$=\iint_D \bar{F}(\bar{f}(u,v))\cdot\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)du\,dv$$

$$=\iint_D\left(F_1(\bar{f}(u,v))\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+F_2(\bar{f}(u,v))\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+F_3(\bar{f}(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)du\,dv$$

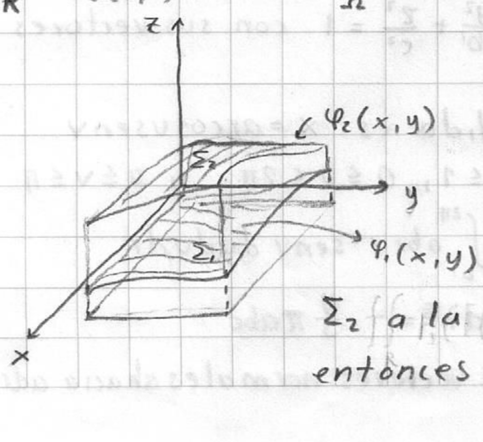
$$=\iint_D F_1(\bar{f}(u,v))\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}du\,dv+\iint_D F_2(\bar{f}(u,v))\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}du\,dv+\iint_D F_3(\bar{f}(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}du\,dv$$

Por otro lado

$$\iiint_\Omega \nabla\cdot\bar{F}\,dx\,dy\,dz=\iiint_\Omega\frac{\partial F_1}{\partial x}dx\,dy\,dz+\iiint_\Omega\frac{\partial F_2}{\partial y}dx\,dy\,dz+\iiint_\Omega\frac{\partial F_3}{\partial z}dx\,dy\,dz$$

Si se demuestran las tres igualdades

$$\iint_R F_1\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}du\,dv=\iiint_\Omega\frac{\partial F_1}{\partial x}dx\,dy\,dz\ \ldots$$



Tenemos que

$$\iiint_\Omega\frac{\partial F_3}{\partial z}dx\,dy\,dz=\iint_R\left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)}\frac{\partial F_3}{\partial z}dz\right)dx\,dy$$

$$=\iint_R\left(F_3(x,y,\varphi_2(x,y))-F_3(x,y,\varphi_1(x,y))\right)dx\,dy$$

Si le llamamos Σ_1 a la tapa inferior de Ω, Σ_2 a la tapa superior y Σ_3 al resto de las tapas, entonces

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad \bar{f}(u,v) = (u, v, \varphi_1(u,v))$$

$$= \left([-\partial z], [\ \ ], \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \right)$$

$$\iint_R F_3(\bar{f}(u,v)) \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\, du\, dv = \iint_{\Sigma_1} (0,0,F_3)\cdot \bar{N}_1\, dA + \iint_{\Sigma_2} (0,0,F_3)\cdot \bar{N}_2\, dA +$$

$$+ \iint_{\Sigma_3} (0,0,F_3)\cdot \bar{N}_3\, dA$$

Como los vectores $(0,0,F_3)$ y $\bar{N}_3$ son ortogonales, $(0,0,F_3)\cdot\bar{N}_3 = 0$

Por lo que la tercera integral es cero

Veamos

$$\iint_{\Sigma_1} (0,0,F_3)\cdot \bar{N}_1\, dA = -\iint_{\Sigma_{\bar{f}_1}} (0,0,F_3(u,v,\varphi_1(u,v)))\cdot \bar{N}_{\bar{f}_1}\, du\, dv$$

$$= -\iint_{\Sigma_{1\bar{f}_1}} F_3(u,v,\varphi_1(u,v)) \underbrace{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}_{=\frac{\partial(u,v)}{\partial(u,v)}} du\, dv = -\iint_{\Sigma_{1\bar{f}_1}} F_3(u,v,\varphi_1(u,v))\, du\, dv = -\iint_R F_3(x,y,\varphi_1(x,y))\, dx\, dy$$

$$\iint_{\Sigma_2} (0,0,F_3)\cdot \bar{N}_2\, du\, dv = \iint_{\Sigma_2 \bar{f}_2} (0,0,F_3)\cdot \bar{N}_{\bar{f}_2}\, du\, dv =$$

$$= \iint_{\Sigma_2 \bar{f}_2} F_3(u,v,\varphi_2(u,v)) \frac{\partial(u,v)}{\partial(u,v)}\, du\, dv = \iint_{\Sigma_2 \bar{f}_2} F_3(u,v,\varphi_2(u,v))\, du\, dv$$

$$= \iint_R F_3(x,y,\varphi_2(x,y))\, dx\, dy$$

$$\int_{\partial D} \bar{F}\cdot dA = \iint_D \bar{F}\cdot\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial u}\times\frac{\partial \bar{f}}{\partial v}\right) du\, dv$$
$$= \iint_D F\cdot\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial u}\times\frac{\partial \bar{f}}{\partial v}\right)\frac{\left\|\frac{\partial \bar{f}}{\partial u}\times\frac{\partial \bar{f}}{\partial v}\right\|}{\left\|\frac{\partial \bar{f}}{\partial u}\times\frac{\partial \bar{f}}{\partial v}\right\|}\, du\, dv$$
$$= \iint_D F\cdot N_f \left\|\frac{\partial \bar{f}}{\partial u}\times\frac{\partial \bar{f}}{\partial v}\right\| du\, dv$$
$$= \iint_D (\bar{F}\cdot\bar{N}_f)\, dA$$

Por lo tanto

$$\iint_R F_3(\bar{f}(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\, du\, dv = \iint_R \left(F_3(x,y,\varphi_2(x,y)) - F_3(x,y,\varphi_1(x,y))\right) dx\, dy$$

$$= \iiint_\Omega \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dx\, dy\, dz$$

1. Si $\bar{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ está dado por $\bar{F}(x,y,z) = (c_1, c_2, c_3)$ entonces $\nabla\cdot\bar{F} = 0$ por lo que el flujo hacia el exterior de cualquier región compacta $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ es igual a cero.

2. Si $\bar{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ está dado por $\bar{F}(x,y,z) = (-x, y, -z)$ calcular el flujo hacia el exterior del elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$ con sus vectores normales hacia afuera.

Una parametrización del elipsoide sólido es $x = ar\cos u \operatorname{sen} v$, $y = br \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$, $z = cr\cos v$, $0\le r\le 1$, $0\le u\le 2\pi$ y $0\le v\le\pi$

Entonces $\iint_\Sigma \bar{F}\cdot dA = -\iiint_\Omega dx\, dy\, dz = -\int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} abc\, r^2 \operatorname{sen} v\, du\, dv\, dr$

$$= -2\pi abc\int_0^1\int_0^\pi r^2 \operatorname{sen} v\, dv\, dr = -4\pi abc\int_0^1 r^2\, dr = -\frac{4}{3}\pi abc$$

ya que la parametrización de vectores normales hacia adentro