

1. (a) Determinar para que valores de p y q existen las siguientes integrales de Lebesgue:

$$\int_0^1 x^p(1-x)^q$$

Como $x \in [0, 1]$, $0 \leq x, 1-x \leq 1$, si $p, q \geq 1$ tenemos $0 \leq x^p, (1-x)^q \leq 1$

$$0 \leq \int_0^1 x^p(1-x)^q \leq \int_0^1 1 = 1$$

Si $p+q=1$ con $p, q > 0$

$$0 \leq \int_0^1 x^p(1-x)^q \leq \|x^p\|_{1/p} \|(1-x)^q\|_{1/q} = \left(\int_0^1 x\right)^p \left(\int_0^1 (1-x)\right)^q = \frac{1}{2^{p+q}}$$

(b)

2. Demostrar que $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

Sabemos que para $x \in \mathbb{R}^n$

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

Así $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

3. Si $f \in L^1$ y $g \in L^\infty$, entonces

$$\int |fg| \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$$

Por monotonía, tenemos:

$$|fg| = |f||g| \leq |f| \cdot \|g\|_\infty$$

$$\int |fg| \leq \int |f| \cdot \|g\|_\infty = \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$$

4. (a) Demostrar la desigualdad de Minkowski para $0 < p < 1$.

Lema: Sea $0 < p < 1$ y $q = 1-p$, entonces

$$\int |fg| \geq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Sean $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} \Rightarrow q = \frac{p}{p-1} < 0$

$p' = \frac{1}{p}$ y $q' = 1 - q = -\frac{1}{p-1}$

Además $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = p + \frac{1}{1-q} = p + \frac{1}{1-\frac{p}{p-1}} = p - p + 1 = 1$

Así tenemos:

$$\begin{aligned} \int |f|^p &= \int |fg|^p \cdot |g|^{-p} \leq (\text{Hölder}) \|(|fg|^p)\|_{p'} \cdot \|(|g|^{-p})\|_{q'} \\ &= \left(\int (|fg|^p)^{p'} \right)^{1/p'} \cdot \left(\int |g|^{-pq'} \right)^{1/q'} \\ &= \left(\int |fg| \right)^p \cdot \left(\int |g|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{1-p} \end{aligned}$$

Así tenemos:

$$\left(\int |f|^p\right)\left(\int |g|^q\right)^{p-1} \leq \left(\int |fg|\right)^p$$

Sacando raíz p

$$\int |fg| \geq \|f\|_p \|g\|_q$$

Supongamos que si $f, g \in L^p$, entonces $(f + g) \in L^p$

Sea $q = \frac{p}{p-1}$, entonces $|f + g|^{p-1} \in L^p$ y

$$\left\| |f + g|^{p-1} \right\|_q = \left(\int (|f + g|^{p-1})^q \right)^{1/q} = \left(\int |f + g|^p \right)^{(p-1)/p} = \|f + g\|_p^{p-1}$$

Así tenemos que:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int |f + g|^p = \int |f + g| \cdot |f + g|^{p-1} \\ &= \int (f + g) \cdot |f + g|^{p-1} \\ &= \int f|f + g|^{p-1} + \int g|f + g|^{p-1} \\ \text{Lema } &\geq \|f\|_p \|f + g\|_p^{p-1} + \|g\|_p \|f + g\|_p^{p-1} \end{aligned}$$

Así tenemos:

$$\|f + g\|_p \geq \|f\|_p + \|g\|_q$$

Cumpliendo la igualdad si $\|f + g\|_p = 0$

(b) Demostrar que si $f \in L^p$, $g \in L^p$ entonces $f + g \in L^p$ para $0 < p < 1$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^p &\leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq (2 \max\{|f(x)|, |g(x)|\})^p = 2^p \max\{|f(x)|^p, |g(x)|^p\} \\ &\leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p) \quad \square \end{aligned}$$

5. Sea E medible con medida finita y $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$. Entonces $L^{p_2} \subset L^{p_1}$. Más aún

$$\|f\|_{p_1} \leq c \|f\|_{p_2}$$

para toda $f \in L^{p_2}$ con $c = (m(E))^{\frac{p_2-p_1}{p_1 p_2}}$ si $p_2 < \infty$ y $c = (m(E))^{\frac{1}{p_1}}$ si $p_2 = \infty$.

Caso 1: $p_2 < \infty$

Si $f \in L^{p_2}$, entonces $|f|^{p_1} \in L^{p_2/p_1}$ y

$$\left\| |f|^{p_1} \right\|_{p_2/p_1} = \left(\int |f|^{p_2} \right)^{p_1/p_2} = \|f\|_{p_2}^{p_1}$$

Por Hölder tenemos

$$\|f\|_{p_1}^{p_1} = \int_E |1 \cdot f|^{p_1} \leq \|1_E\|_{p_2/(p_2-p_1)} \| |f|^{p_1} \|_{p_2/p_1} = (m(E))^{\frac{p_2-p_1}{p_2}} \|f\|_{p_2}^{p_1}$$

Así tenemos

$$\|f\|_{p_1} \leq (m(E))^{\frac{p_2-p_1}{p_1 p_2}} \|f\|_{p_2}$$

Caso 2: $p_2 = \infty$

$$\|f\|_{p_1} = \left(\int_E |f|^{p_1} \right)^{1/p_1}$$

$$\text{monotonía} \leq \left(\int_E 1 \cdot \|f\|_{\infty}^{p_1} \right)^{1/p_1} = (m(E))^{\frac{1}{p_1}} \|f\|_{\infty}$$

6. Sea $f_n \rightarrow f$ en L^p , $1 \leq p < \infty$ y sea g_n una sucesión de funciones medibles tales que $|g_n| \leq M$, para toda n , y $g_n \rightarrow g$ casi donde sea. Entonces $g_n f_n \rightarrow g f$ en L^p .

Por hipótesis tenemos:

$$\|f_n - f\|_p < \frac{\epsilon}{2M} \quad n \geq N_f$$

$$|g_n(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{2\|f\|_p} \quad n \geq N_g \text{ c.d.s}$$

Sea $n \geq \max\{N_f, N_g\}$, así tenemos:

$$\begin{aligned} \|g_n(x)f_n - g(x)f\|_p &= \|g_n(x)f_n - g_n(x)f + g_n(x)f - g(x)f\|_p \\ &\leq \|g_n(x)f_n - g_n(x)f\|_p + \|g_n(x)f - g(x)f\|_p \\ &= \|g_n(x)\| \|f_n - f\|_p + \|g_n(x) - g(x)\| \|f\|_p \\ &= M \left(\frac{\epsilon}{2M} \right) + \frac{\epsilon}{2\|f\|_p} \|f\|_p = \epsilon \end{aligned}$$

7. **Definición.** Si un espacio X equipado con una medida μ tiene un sistema numerable A de subconjuntos medibles A_1, A_2, \dots , tales que dada cualquier $\epsilon > 0$ y cualquier subconjunto medible $M \subset X$, existe un $A_k \in A$ que satisface la desigualdad

$$\mu(M \Delta A_k) < \epsilon.$$

Entonces se dice que μ tiene una base numerable, que consiste de todos los subconjuntos A_1, A_2, \dots ,

Demostrar que la medida de Lebesgue en \mathbb{R} tiene una base numerable.

Sabemos que \mathbb{Q} es numerable, entonces \mathbb{Q}^2 es numerable. Los abiertos (q_1, q_2) son numerables.

Sea $f : \{(q_1, q_2)\} \rightarrow \mathbb{N}$

Además sabemos que si M es medible, dado $\epsilon > 0$, hay una unión finita de intervalos U , tal que $m(U \Delta M) \leq \frac{\epsilon}{2}$. (parcial 2, proposición 3.15 Royden 2da Edición)

Sea $U = \bigcup I_i$, con $I_i = (a_i, b_i)$.

Como \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R} existen $q_i^1 \leq a_i \leq b_i \leq q_i^2$ con $a_i - q_i^1 \leq \frac{\epsilon}{2^{i+1}}$ y $q_i^2 - b_i \leq \frac{1}{2^{i+2}}$, así $m((q_i^1, q_i^2) - I_i) < \frac{\epsilon}{2^{i+1}}$.

Sea $Q = \bigcup ((q_i^1, q_i^2))$

Así $m(M \Delta Q) = m(M \Delta \bigcup [(q_i^1, a_i) \cup I_i \cup (b_i, q_i^2)]) \leq m((q_i^1, a_i) \cup (b_i, q_i^2)) + m(M \Delta Q) \leq \sum \frac{\epsilon}{2^{i+1}} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ Sea $A = \bigcup (q_i^1, q_i^2)$, definimos $g(A) = \prod p_{f((q_i^1, q_i^2))}$ con $p_{f((q_i^1, q_i^2))}$ el $f((q_i^1, q_i^2))$ -ésimo primo.

La medida de Lebesgue tiene una base numerable.

8. Sea $\{\Phi_n\}$ una sucesión de funciones de variación acotada en $[a, b]$, que convergen a una función Φ en cada punto de $[a, b]$. Suponer que la sucesión de variaciones totales $T_a^b(\Phi_n)$ es

acotada. Demostrar que Φ es de variación acotada en $[a, b]$.

Sabemos que existe $M \in \mathbb{R}$ con $T_a^b(\Phi_n) \leq M \forall n \in \mathbb{N}$.

Sea $P = \{a = x_0, \dots, x_m = b\}$ una partición de $[a, b]$.

De modo que para cada x_i , existe N_i tal que

$$|\Phi(x_i) - \Phi_n(x_i)| \leq \frac{\epsilon}{2m} \quad n \geq N_i$$

Sea $N = \max\{N_i | i = 1, \dots, m\}$

Así tenemos que si $n \geq N$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m |\Phi(x_i) - \Phi(x_{i-1})| &= \sum_{i=1}^m |\Phi(x_i) - \Phi_n(x_i) + \Phi_n(x_i) - \Phi_n(x_{i-1}) + \Phi_n(x_{i-1}) - \Phi(x_{i-1})| \\ &\leq \sum_{i=1}^m |\Phi(x_i) - \Phi_n(x_i)| + |\Phi_n(x_i) - \Phi_n(x_{i-1})| + |\Phi_n(x_{i-1}) - \Phi(x_{i-1})| \\ &\leq \sum_{i=1}^m \frac{\epsilon}{2m} + |\Phi_n(x_i) - \Phi_n(x_{i-1})| + \frac{\epsilon}{2m} = M + \epsilon \end{aligned}$$

Por lo que Φ es de variación acotada.

9. Para $1 \leq p < \infty$, denotamos l_p al espacio de sucesiones $\{\xi_n\}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty$

(a) Probar la desigualdad de Minkowski para sucesiones.

Sean $x, y \in l_p$

Caso 1: $p = 1$

$$\|x + y\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| + |y_n| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

Caso 2: $p > 1$

Sabemos que en \mathbb{R}^n se cumple la desigualdad de Minkowski. (Por Cálculo III)

Puesto que elevar a la $\frac{1}{p}$ es continua se obtiene:

$$\begin{aligned} \|x + y\|_p &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^p \right)^{1/p} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p \right)^{1/p} = \\ &(\text{continuidad de } \frac{1}{p}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p \right)^{1/p} \\ &(\text{Minkowsy en } \mathbb{R}^n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^p \right)^{1/p} \right) \\ &(\text{continuidad}) = \|x\|_p + \|y\|_p \end{aligned}$$

(b) Probar la desigualdad de Hölder para sucesiones.

Sean $p, q \in (1, \infty)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y sean $x \in l_p$ y $y \in l_q$

Sabemos que en \mathbb{R}^n se cumple la desigualdad de Hölder (Calculo III) y la norma es continua.

$$\|xy\|_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n |x_j y_j| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^q \right)^{1/q} = \|x\|_p \|y\|_q$$

Sean $p = 1$ y $q = \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |xy| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x\| \|y\|_{\infty} = \|x\|_1 \|y\|_{\infty}$$

10. Sean $\alpha > 0$ y $\beta > 0$. Escribimos

$$f(x) = (1 + |x|^{\alpha})^{-1} (1 + |\log|x||^{\beta}), x \in \mathbb{R}.$$

Bajo que condiciones $f \in L^p$.

Como la función es par, basta con hacer el análisis sobre la parte positiva.

La pregunta que nos haremos es bajo qué condiciones $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1 + |\log x|^{\beta}}{1 + x^{\alpha}} \right\|_p &\leq \left\| \frac{1}{1 + x^{\alpha}} \right\|_p + \left\| \frac{|\log x|^{\beta}}{1 + x^{\alpha}} \right\|_p \\ \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1 + x^{\alpha}} \right)^p &\leq \int_0^1 \left(\frac{1}{1 + x^{\alpha}} \right)^p + \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x^{\alpha}} \right)^p \end{aligned}$$

Y esto es finito si $\alpha p > 1$

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{|\log x|^{\beta}}{1 + x^{\alpha}} \right)^p \leq \int_0^{\infty} \left(\frac{x^{\beta}}{1 + x^{\alpha}} \right)^p \leq \int_0^1 \left(\frac{x^{\beta}}{1 + x^{\alpha}} \right)^p + \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x^{\alpha-\beta}} \right)^p$$

Y esto es finito cuando $(\alpha - \beta)p > 1$

11. Investiga y enuncia el Teorema de Representación de Riesz.

Sean H un espacio de Hilbert (Espacio de Banach cuya norma es inducida por un producto interior) y $T : H \rightarrow \mathbb{R}$ una función lineal y continua. Entonces existe un único $w \in H$, tal que

$$Tu = \langle w, u \rangle \quad \forall u \in H$$

Sea T dicha función. Denotamos por $V = \ker T$. **Caso 1:** $V = H$

$w = 0$ cumple con lo que buscamos.

Caso 2: $V \neq H$

Como $V + V^{\perp} = H$, $\exists w_0 \in V^{\perp}$ con $w_0 \neq 0$ y $\|w_0\| = 1$.

Así $T(w_0) \neq 0$. Sea $w = (Tw_0)w_0$.

Por otro lado

$$T(u - \frac{Tu}{Tw_0} w_0) = Tu - \frac{Tu}{Tw_0} Tw_0 = 0$$

Es decir $u - \frac{Tu}{Tw_0} w_0 \in V$ y $w \in V^{\perp}$.

Por lo que

$$\begin{aligned} \langle w, u \rangle &= \langle w, u - \frac{Tu}{Tw_0} w_0 \rangle + \frac{Tu}{Tw_0} \langle w, w_0 \rangle = \frac{Tu}{Tw_0} \langle w, w_0 \rangle = \frac{Tu}{Tw_0} \langle (Tw_0)w_0, w_0 \rangle \\ &= Tu \langle w_0, w_0 \rangle = Tu \|w_0\|^2 = Tu \end{aligned}$$

Supongamos que w' también cumple que $Tu = \langle w', u \rangle$

Para todo $u \in H$ tenemos.

$$0 = Tu - Tu = \langle w, u \rangle - \langle w', u \rangle = \langle w - w', u \rangle$$

En específico para $u = w - w'$, es decir,

$$0 = \langle w - w', w - w' \rangle = \|w - w'\|^2$$

Así $w = w'$

12. (a) Demostrar que para las funciones $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

$$\|f_n\|_\infty = 1 \text{ para toda } n \in \mathbb{N} \text{ pero } \|f_n\|_1 = \frac{1}{2n}.$$

Como la función es no negativa y monótona decreciente,

$$\|f_n\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} \{f_n(x)\} = f_n(0) = 1$$

Como la función es no negativa, $\|f\|_1$ es el área bajo la curva (la integral) y la curva que realiza la función f_n es un triángulo de base $\frac{1}{n}$ y altura 1, $\|f\|_1 = \frac{1}{2n}$

- (b) Demostrar que el conjunto de todos los polinomios en $[a, b]$ con coeficientes racionales es denso en L^2

Sea $f \in L^2$

Como $f \in L^2$, $f \in L^1$, f es medible.

Por el segundo principio de Littlewood existe $g \in C_{[a,b]}^0$ tal que $|f - g| < \frac{\epsilon}{\sqrt{b-a}}$

Así

$$\|f - g\|_2 = \left(\int_a^b |f - g|^2 \right)^{1/2} < \left(\int_a^b \frac{\epsilon^2}{b-a} \right)^{1/2} = \epsilon$$

Por lo que $C_{[a,b]}^0$ es denso en L^2 , por el teorema de Stone-Weierstrass (Análisis matemático I), los polinomios con coeficientes reales son densos en las continuas y como \mathbb{Q}^n es denso en \mathbb{R}^n (Análisis Matemático I), los polinomios con coeficientes racionales son densos en los polinomios con coeficientes reales.

Así los polinomios con coeficientes racionales, son densos en L^2

13. (a) Demostrar que la convergencia en la norma $\|\cdot\|_1$ no necesariamente implica la convergencia en la norma $\|\cdot\|_2$

$$\text{Sea } f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$$f_n \rightarrow 0 \in L^1$$

$$\|f_n\|_2 = \int_0^{1/n} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \sqrt{x} \Big|_0^{1/n} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

la cual tiende a cero, cuando n tiende a infinito, pero

$$\|f_n\|_2 = \left(\int_0^{1/n} \frac{1}{x}\right)^{1/2} = \infty$$

$f_n \rightarrow 0 \in L^1$, pero $f_n \not\rightarrow 0 \in L^2$

(b) Demostrar que para toda $f \in C_0[a, b]$ se tiene que

$$\|f\|_s \leq (b-a)^{(r-s)/rs} \|f\|_r \text{ para } 1 \leq s < r < \infty$$

y

$$\|f\|_s \leq (b-a)^{1/s} \|f\|_r \text{ para } 1 \leq s < p = \infty$$

Es un caso particular del ejercicio 5. donde E es el intervalo (a, b) .

14. Sean $f, g \in L^p$ con $1 \leq p \leq \infty$. Demostrar que

(a) $h(x) = \max\{f(x), g(x)\} \in L^p$

$$h(x) = \frac{|f(x) - g(x)| + f(x) + g(x)}{2}$$

Así tenemos que como $\|\cdot\|_p$ es una norma se cumple:

$$\begin{aligned} \|h\|_p &= \left\| \frac{|f - g| + f + g}{2} \right\|_p \leq \frac{1}{2} (\|f - g\|_p + \|f\|_p + \|g\|_p) \\ &\leq \frac{1}{2} (\|f\|_p + \|g\|_p + \|f\|_p + \|g\|_p) = \|f\|_p + \|g\|_p \end{aligned}$$

$h \in L^p$

(b) Sean $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ dos sucesiones en L^p con $1 \leq p \leq \infty$ tales que $f_n \rightarrow f \in L^p$ y $g_n \rightarrow g \in L^p$. Escribimos $h_n(x) = \max\{f_n(x), g_n(x)\} \in L^p$, probar que $h_n \rightarrow h \in L^p$.

Como $f_n \rightarrow f$ y $g_n \rightarrow g$, existen N_f, N_g tales que:

$$\|f_n - f\| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad n > N_f$$

$$\|g_n - g\| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad n > N_g$$

Sea $N = \max\{N_g, N_f\}$ y $n > N$

$$\begin{aligned} \|h_n - h\|_p &= \left\| \frac{|f_n - g_n| + f_n + g_n}{2} - \frac{|f - g| + f + g}{2} \right\|_p \\ &= \frac{1}{2} \| |f_n - g_n| - |f - g| + (f_n - f) + (g_n - g) \|_p \\ &\leq \frac{1}{2} (\|f_n - f + g - g_n\|_p + \|f_n - f\|_p + \|g_n - g\|_p) \\ &\leq \|f_n - f\| + \|g_n - g\| < \epsilon \end{aligned}$$

- (c) Sea $\{f_n\}$ una sucesión en L^p con $1 \leq p \leq \infty$ y $\{g_n\}$ una sucesión acotada en L^∞ . Supongamos que $f_n \rightarrow f \in L^p$ $g_n \rightarrow g$ c. t. p. Demostrar que $f_n g_n \rightarrow fg \in L^p$. Ejercicio 6 de la tarea.

15. Probar que L^2 es separable.

Sabemos por 12.b que los polinomios con coeficientes racionales son densos en L^2 . P.D. los polinomios con coeficientes racionales son numerable.

Sea $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ biyectiva.

Sea $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

Sea $g(P) = \prod p_{i+1}^{f(a_i)}$ donde p_i es el i -ésimo primo.

Los polinomios con coeficientes racionales son numerables.

16. Demostrar que L^∞ es completo.

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en L^∞ , para $n \in \mathbb{N}$, existe k_n con $|f_i(x) - f_j(x)| \leq ||f_i - f_j|| < \frac{1}{n}$ si $i, j \geq k_n$, salvo un conjunto $Z_{i,j}$ de medida cero. Sea $Z_n = \bigcup Z_{i,j}$, unión numerable de conjuntos de medida cero, Z_n es de medida cero. Sea $Z = \bigcup Z_n$ union numerable de conjuntos de medida cero, es de medida cero.

Si $x \in Z^c$, $\{f_i(x)\}$, converge a un punto $f(x)$, pues los reales son completos. Si $x \in Z$, $f(x) = 0$, así construimos una función.

Por otro lado

$$|f(x) - f_k(x)| = \lim_{i \rightarrow \infty} |f_i(x) - f_k(x)| \leq \frac{1}{n} \quad \text{si } m \geq k_n \text{ c.t.p.}$$

$$||f||_\infty = ||(f - f_k) + f_k||_\infty \leq ||f - f_k||_\infty + ||f_k||_\infty \leq \frac{1}{n} + ||f_k||_\infty$$