Ejemplo.

Resolver la ecuación $\left(x^2+\frac{y}{x}\right)dx-(x\,\text{sen}\,y+1)dy=0$ a través de un factor de integración que sólo dependa de x.

$$\frac{\partial\left(x^2+\frac{y}{x}\right)}{\partial y}=\frac{1}{x} \quad y \quad \frac{\partial(x\,\text{sen}\,y+1)}{\partial x}=\text{sen}\,y$$

$$\frac{\frac{1}{x}+\text{sen}\,y}{-(x\,\text{sen}\,y+1)}=\frac{\frac{1+x\,\text{sen}\,y}{x}}{-x\,\text{sen}\,y+1}=-\frac{1}{x}$$

$$\mu(x)=e^{-\int\frac{1}{x}dx}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x},$$

Al multiplicar la ecuación por $\frac{1}{x}$ queda en la forma

$$\left(x+\frac{y}{x^2}\right)dx-\left(\text{sen}\,y+\frac{1}{x}\right)dy=0 \quad \text{que es exacta.}$$

Consideremos $f(x,y)$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x}=x+\frac{y}{x^2}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}=-\text{sen}\,y-\frac{1}{x}$ por lo que

$f(x,y)=\cos y-\frac{y}{x}+h(x)$ en consecuencia

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y}{x^2}+h'(x) \quad \text{luego} \quad h'(x)=x$$

de donde se obtiene

$$h(x)=\frac{x^2}{2}$$

Por lo tanto la solución es

$$\cos y-\frac{y}{x}+\frac{x^2}{2}=c$$

2. μ sólo depende de y. En este caso la ecuación (*) queda como

$$\mu(y)\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=-M\frac{d\mu(y)}{dy}$$

Por lo tanto $\mu(y)=e^{\int\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}dy}$ si $\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{N}$ sólo depende de y.

Ejemplo.

Determinar un factor integrante que sólo dependa de y, para la ecuación

$$y(3x^2+y)dx+x(2x^2+3y)dy=0$$

$$\frac{\frac{\partial(2x^3+3xy)}{\partial x}-\frac{\partial(3yx^2+y^2)}{\partial y}}{3x^2y+y^2}=\frac{(6x^2+3y)-(3x^2+2y)}{3x^2y+y^2}=\frac{3x^2+3y-2y}{3x^2y+y^2}$$

$$=\frac{3x^2+y}{y(3x^2+y)}=\frac{1}{y}$$

Por lo tanto $\mu(y)=y$

3. μ sólo depende z donde $z = z(x,y)$. En este caso la ecuación (*) queda

$$\mu(z)\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{\partial \mu(z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} - M\frac{\partial \mu(z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$= \left(N\frac{\partial z}{\partial x} - M\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{d\mu(z)}{dz}$$

Luego $\displaystyle \frac{d\mu(z)}{\mu(z)} = \left(\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial z}{\partial x} - M\frac{\partial z}{\partial y}}\right)dz$

Por lo tanto $\displaystyle \mu(z) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial z}{\partial x} - M\frac{\partial z}{\partial y}}\,dz}$ si $\displaystyle \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial z}{\partial x} - M\frac{\partial z}{\partial y}}$ sólo depende de z.

Ejemplos

1. Resolver $(3y^2 - x)dx + (2y^3 - 6xy)dy = 0$ a través de un factor integrante $\mu = \mu(z)$ con $z = x + y^2$

$$\frac{\frac{\partial(3y^2-x)}{\partial y} - \frac{\partial(2y^3-6xy)}{\partial x}}{(2y^3-6xy) - (3y^2-x)(2y)} = \frac{6y + 6y}{\underbrace{2y^3 - 6xy - 6y^3 + 2xy}_{-4xy-6y^2}} = \frac{12y}{2y(-2y^2-2x)} = -\frac{3}{x+y^2} = -\frac{3}{z}$$

Por lo tanto $\displaystyle \mu(z) = \frac{1}{(x+y^2)^3}$

La ecuación queda

$$\frac{3y^2-x}{(x+y^2)^3}dx + \frac{2y^3-6xy}{(x+y^2)^3}dy = 0$$

$$\frac{6y(x+y^2)^3 - 3(x+y^2)^2(2y)(3y^2-x)}{(x+y^2)^6}$$

Consideremos $f(x,y)$ tal que $\displaystyle \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3y^2-x}{(x+y^2)^3}$ y $\displaystyle \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y^3-6xy}{(x+y^2)^3}$

$(6y - 6x)(x+y^2)^3 - 3(x+y^2)^2 2(2y^3 - 6xy)$

Integremos la primera ecuación

$x + y^2 = u^3$

$$f(x,y) = \int \frac{3y^2-x}{(x+y^2)^3}dx = \int \frac{3y^2}{(x+y^2)^3}dx - \int \frac{x+y^2-y^2}{(x+y^2)^3}dx$$

$$= -\frac{3}{2}(x+y^2)^{-2} + \frac{1}{x+y^2} - \frac{1}{2}\frac{y^2}{(x+y^2)^2} + g(y)$$

$$= -2y^2(x+y^2)^{-2} + \frac{1}{x+y^2} + g(y)$$

Luego $\displaystyle \frac{\partial f}{\partial y} = -2y^2\left(-2\frac{2y}{(x+y^2)^3}\right) - 4y(x+y^2)^{-2} - \frac{2y}{(x+y^2)^2} + g'(y)$

$$= \frac{2y^3 - 6xy}{(x+y^2)^3} = \frac{-6y}{(x+y^2)^2} + \frac{8y^3}{(x+y^2)^3} + g'(y)$$

$$\frac{-6xy}{(x+y^2)^3} = -\frac{6y}{(x+y^2)^2} + \frac{6y^3}{(x+y^2)^3} + g'(y)$$

$$\cancel{\frac{-6xy}{(x+y^2)^3}} = \frac{\cancel{-6y(x+y^2)+6y^3}}{(x+y^2)^3} + g'(y) = 0$$

$$f(x,y) = -\frac{2y^2}{(x+y^2)^2} + \frac{1}{x+y^2} = C$$

Determinar el valor de k tal que las ecuaciones

$$(6xy^3+\cos y)dx + (2kx^2y^2 - x\,\text{sen}\,y)dy = 0$$

$$(y^3+kxy^4-2x)dx + (3xy^2+20x^2y^3)dy = 0$$ sean exactas

$$\frac{\partial(6xy^3+\cos y)}{\partial y} = 18xy^2 - \text{sen}\,y$$

$$\frac{\partial(2kx^2y^2 - x\,\text{sen}\,y)}{\partial x} = 4kxy^2 - \text{sen}\,y$$

$$18 = 4k$$

$$\frac{9}{2} = \frac{18}{4} = k$$

$$\frac{\partial(y^3+kxy^4-2x)}{\partial y} = 3y^2+4kxy^3 \qquad \frac{\partial(3xy^2+20x^2y^3)}{\partial x} = 3y^2+40xy^3$$

$$k = 10$$

Resolver $(-xy\,\text{sen}\,x + 2y\cos x)dx + 2x\cos x\,dy = 0$ por medio de un factor de integración de la forma $\mu=\mu(z)$ con $z=xy$

$$\frac{\dfrac{\partial(-xy\,\text{sen}\,x+2y\cos x)}{\partial y} - \dfrac{\partial\, 2x\cos x}{\partial x}}{2xy\cos x - (-xy\,\text{sen}\,x+2y\cos x)x} = \frac{-x\,\text{sen}\,x + \cancel{2\cos x} - \cancel{2\cos x} + 2x\,\text{sen}\,x}{2xy\cos x + x^2y\,\text{sen}\,x - 2xy\cos x}$$

$$= \frac{x\,\text{sen}\,x}{x^2y\,\text{sen}\,x} = \frac{1}{xy}$$

$$\mu(z) = e^{\int \frac{1}{z}dz} = xy$$

La ecuación queda

$(-x^2y^2\,\text{sen}\,x + 2y^2x\cos x)dx + 2x^2y\cos x\,dy = 0$ que es exacta

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y\cos x$ entonces

$$f(x,y) = \int 2x^2y\cos x\,dy = x^2y^2\cos x + h(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2\cos x - x^2y^2\,\text{sen}\,x + h'(x)$$

$$= -x^2y^2\,\text{sen}\,x + 2y^2x\cos x$$ por lo tanto $h'(x)=0$

entonces $f(x,y) = x^2y^2\cos x = c$

Resolver la ecuación

$$x\,dx + y\,dy + (x^2+y^2)\,dx = 0$$

Por medio de un factor integrante $\mu = \mu(z)$ con $z = x^2+y^2$

$$\frac{\dfrac{\partial(x+x^2+y^2)}{\partial y} - \dfrac{\partial y}{\partial x}}{2yx - (x^2+y^2+x)2y} = \frac{2y}{2yx - 2yx^2 - 2y^3 - 2yx} = \frac{2y}{-2y(x^2+y^2)} = -\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\mu(z) = e^{-\int \frac{1}{z}\,dz} = \frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\frac{1}{x^2+y^2}(x+x^2+y^2)\,dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} \quad ; \quad f(x,y) = \int \frac{y}{x^2+y^2}\,dy = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + h(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\cancel{x}}{(x^2+y^2)} + h'(x) = \frac{\cancel{x} + x^2+y^2}{x^2+y^2}$$

$$h'(x) = 1$$

$$h(x) = x$$

la solución es $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + x = c$

Consideremos un campo de fuerzas $\bar{F}: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, sabemos que el trabajo para llevar una partícula de masa a lo largo de una curva $\mathcal{C}$ parametrizada por $\bar{\lambda}:[a,b] \to \mathbb{R}^3$ desde un punto $\bar{P}_1$ a un punto $\bar{P}_2$ sobre la curva es

$$W_{\bar{P}_1\bar{P}_2} = \int_{\bar{\lambda}} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda} = \int_a^b \bar{F}(\bar{\lambda}(t))\cdot\bar{\lambda}'(t)\,dt$$ pero $\bar{F} = m\,\bar{\lambda}''(t)$ entonces

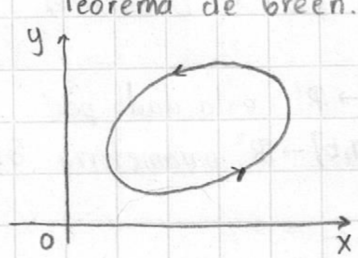
$$W_{\bar{P}_1\bar{P}_2} = m\int_a^b \bar{\lambda}''(t)\cdot\bar{\lambda}'(t)\,dt = \frac{m}{2}\int_a^b \frac{d}{dt}\left(\bar{\lambda}'(t)\cdot\bar{\lambda}'(t)\right)dt$$

$$= \frac{m}{2}\int_a^b \frac{d}{dt}\|\bar{\lambda}'(t)\|^2\,dt = \frac{m}{2}\left(\|\bar{\lambda}'(b)\|^2 - \|\bar{\lambda}'(a)\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}m\,(v(b))^2 - \frac{1}{2}m\,(v(a))^2$$

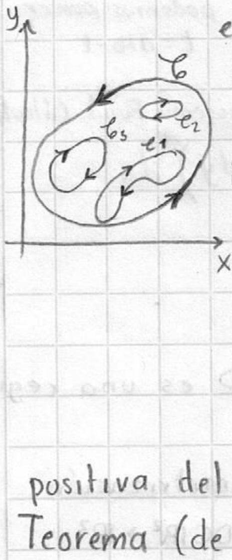
es decir, el trabajo es igual a la diferencia de las energías cinéticas.

Teorema de Green.



Definición. Si $\mathcal{C}$ es una curva simple cerrada en el plano xy, parametrizada por $\bar{\lambda}:[a,b] \to \mathbb{R}^2$ e imaginamos que caminamos sobre la curva con la cabeza hacia la dirección positiva del eje z, decimos que $\mathcal{C}$ tiene orientación positiva si la región D interior a $\mathcal{C}$ siempre queda a la izquierda, y se denota $\mathcal{C}^+$, en el caso contrario se dice que tiene orientación negativa y se donata $\mathcal{C}^-$

Definición. Si $\mathcal{C}$ es una curva simple cerrada en $\mathbb{R}^2$ y se tiene un cierto número de curvas $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$ simples cerradas en $\mathbb{R}^2$ tales que



i) $\mathcal{C}_i$ está en el interior de $\mathcal{C}$ para $i=1,\dots,n$

ii) $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j = \phi$ para $i \neq j$

iii) $\mathcal{C}_i$ está en el exterior de $\mathcal{C}_j$, decimos que el conjunto de puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $(x,y) \in (\operatorname{Int}\mathcal{C} - \bigcup \operatorname{Int}\mathcal{C}_i) \cup \mathcal{C}$. es un conjunto compacto en $\mathbb{R}^2$.

Si D es una región compacta en $\mathbb{R}^2$, decimos que la frontera D (∂D) está orientada positivamente, si al recorrer $\mathcal{C}$ y cada una de las $\mathcal{C}_i$ con la cabeza hacia la parte positiva del eje z, el interior de la región D siempre queda a la izquierda

Teorema (de Green). Si $\bar{F}: D' \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial de clase $C^1_{D'}$ $(\bar{F} = (F_1, F_2))$ y $D \subset D'$ es una región compacta, cuya frontera está orientada positivamente ∂D^+, entonces

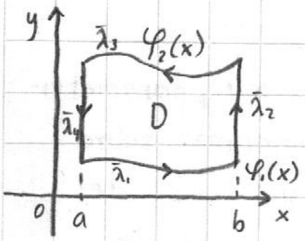
$$\int_{\partial D^+} \bar{F} \cdot d\bar{\lambda} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\,dy$$ donde $\bar{\lambda}:[a,b] \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1 a pedazos parametriza ∂D^+.

La demostración la haremos en base a los dos resultados siguientes.

Teorema. Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función de clase C'_D y D es una región del tipo I, entonces

$$\int_{\partial D^+} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda} = -\iint_D \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\,dy$$ donde $\bar{F}: D\subset\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está dado por $\bar{F} = (f, 0)$ y $\bar{\lambda}:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ parametriza ∂D^+

Demostración.



Si $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_4$

donde $\bar{\lambda}_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ está dada por $\bar{\lambda}_1(t) = (t, \varphi_1(t))$

$\bar{\lambda}_2 : [\varphi_1(b), \varphi_2(b)] \to \mathbb{R}^2$ está dada por $\bar{\lambda}_2(t) = (b, t)$

$\bar{\lambda}_3 : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ está dada por $\bar{\lambda}_3(t) = (a+b-t, \varphi_2(a+b-t))$

$\bar{\lambda}_4 : [\varphi_1(a), \varphi_2(a)] \to \mathbb{R}^2$ está dada por $\bar{\lambda}_4(t) = (a, \varphi_1(a)+\varphi_2(a)-t)$

entonces $\int_{\partial D^+} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda} = \int_{\bar{\lambda}} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda} = \int_{\bar{\lambda}_1} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda} + \int_{\bar{\lambda}_2} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda} + \int_{\bar{\lambda}_3} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda} + \int_{\bar{\lambda}_4} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda}.$

$$\int_{\partial D^+} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda} = \int_{\bar{\lambda}_1} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda} + \int_{\bar{\lambda}_3} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda} = \int_a^b (f(t,\varphi_1(t)), 0)\cdot(1, \varphi_1'(t))\,dt +$$

$$+\int_a^b (f(a+b-t, \varphi_2(a+b-t)), 0)\cdot(-1, -\varphi_2'(a+b-t))\,dt$$

$$= -\int_a^b \big(f(a+b-t, \varphi_2(a+b-t)) - f(t, \varphi(t))\big)\,dt$$

como a,b son ctes, podemos poner $t = a+b-t$

$$= -\int_a^b \big(f(t,\varphi_2(t)) - f(t,\varphi_1(t))\big)\,dt$$

Por el Teorema Fund. Cálculo

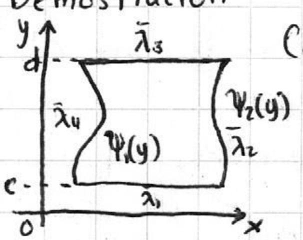
$$= -\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} \frac{\partial f}{\partial y}\,dy\right)dt = -\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial f}{\partial y}\,dy\right)dx$$

$$= -\iint_D \frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy$$

Teorema. Si $f: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es una función de clase C'_D y D es una región del tipo II, entonces

$$\int_{\partial D^+} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda} = \iint_D \frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy$$ donde $\bar{\lambda}$ es una parametrización de la frontera de D orientada positivamente y $\bar{F}: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ está dado por $\bar{F}(x,y) = (0, f)$

Demostración



Consideremos $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_4$ donde $\bar{\lambda}_1 : [\Psi_1(c), \Psi_2(c)] \to \mathbb{R}^2$

$\bar{\lambda}_1(t) = (t, c)$

$\bar{\lambda}_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^2$ está dada por $\bar{\lambda}_2(t) = (\Psi_2(t), t)$

$\bar{\lambda}_3 : [\Psi_1(d), \Psi_2(d)] \to \mathbb{R}^2$ está dada por $\bar{\lambda}_3(t) = (\Psi_1(d)+\Psi_2(d)-t, d)$

$\bar{\lambda}_4 : [c,d] \to \mathbb{R}^2$ está dada por $\bar{\lambda}_4(t) = (\Psi_1(c+d-t), c+d-t)$

Entonces

$$\int_{\partial D^+} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda} = \int_{\bar{\lambda}_1} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda} + \int_{\bar{\lambda}_2} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda} + \int_{\bar{\lambda}_3} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda} + \int_{\bar{\lambda}_4} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda}$$

$$= \int_{\bar{\lambda}_2} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda} + \int_{\bar{\lambda}_4} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda} = \int_c^d (0, f(\bar{\lambda}_2(t)))\cdot \bar{\lambda}_2'(t)\,dt + \int_c^d (0, f(\bar{\lambda}_4(t)))\cdot \bar{\lambda}_4'(t)\,dt$$

$$= \int_c^d (0, f(\psi_2(t), t))\cdot(\psi_2'(t), 1)\,dt$$

$$+ \int_c^d (0, f(\psi_1(c+d-t), c+d-t)\cdot(\psi_1'(c+d-t), 1)(-1)\,dt$$

$$= \int_c^d (f(\psi_2(t), t) - f(\psi_1(t), t))\,dt = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(t)}^{\psi_2(t)} \frac{\partial f}{\partial x}\,dx\right) dt$$

$$= \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy = \iint_D \frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy$$

Demostración (Teorema de Green) del tipo III)

Escribamos el campo vectorial $\bar{F} = (F_1, F_2)$ en la forma $\bar{F} = (F_1, 0) + (0, F_2)$. Entonces $\int_{\partial D^+} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda} = \int_{\partial D^+} ((F_1, 0) + (0, F_2))\cdot d\bar{\lambda}$

$$= \int_{\partial D^+} (F_1, 0)\cdot d\bar{\lambda} + \int_{\partial D^+} (0, F_2)\cdot d\bar{\lambda}$$

$$= -\iint_D \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dx\,dy + \iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x}\,dx\,dy$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Ejemplos.

1. Calular la integral de línea del campo $\bar{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $\bar{F}(x,y) = (x^2y + 2xy,\ 2xy + xy^2)$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ orientada positivamente.

$$\int_{\partial D^+} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda} = \iint_D (2y + y^2 - (x^2 + 2x))\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2r(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta) + r^2\operatorname{sen}^2\theta - r^2\cos^2\theta)\,r\,d\theta\,dr$$

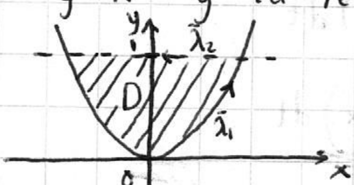
$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (-r^3(\cos 2\theta) + 2r^2(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta))\,d\theta\,dr$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{-r^3}{2}\operatorname{sen}2\theta\Big|_0^{2\pi} + 2r^2\left(-\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\Big|_0^{2\pi}\right)\right) dr = 0$$

2. Calcular la integral de línea del campo vectorial $\bar{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dado por $\bar{F}(x,y)=(e^x\operatorname{sen}y+e^y\cos x,\ e^x\cos y+e^y\operatorname{sen}x)$ a lo largo de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ orientada positivamente.

$$\int_{\partial D^+}\bar{F}\cdot d\bar{\lambda}=\iint_D\left(\cos y\, e^x+e^y\cos x-e^x\cos y-e^y\cos x\right)dx\,dy=0$$

3. Verificar el Teorema de Green para el campo vectorial dado por $\bar{F}(x,y)=(3xy+y^2,\ y^3)$ y D la región comprendida entre la parábola $y=x^2$ y la recta $y=1$ $\quad x^2=1$



$$\iint_D\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint_D(-3x-2y)\,dx\,dy$$

$$=-3\iint_D x\,dx\,dy-2\iint_D y\,dx\,dy=-3\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}x\,dy\,dx-2\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}y\,dy\,dx$$

$$=-3\int_{-1}^{1}(x-x^3)\,dx-2\int_{-1}^{1}(1-x^4)\,dx=-2+\frac{2}{5}=-\frac{8}{5}$$

Por otro lado si $\bar{\lambda}=\bar{\lambda}_1+\bar{\lambda}_2$ donde $\bar{\lambda}_1:[-1,1]\to\mathbb{R}^2$ está dada por $\bar{\lambda}_1(t)=(t,t^2)$ $\bar{\lambda}_2:[-1,1]\to\mathbb{R}^2$ está dada por $\bar{\lambda}_2(t)=(-t,1)$ se tiene

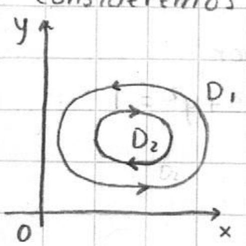
$$\int_{\bar{\lambda}}\bar{F}\cdot d\bar{\lambda}=\int_{\bar{\lambda}_1}\bar{F}\cdot d\bar{\lambda}_1+\int_{\bar{\lambda}_2}\bar{F}\cdot d\bar{\lambda}_2=\int_{-1}^{1}\bar{F}(\bar{\lambda}_1(t))\cdot\bar{\lambda}_1'(t)\,dt+\int_{-1}^{1}\bar{F}(\bar{\lambda}_2(t))\cdot\bar{\lambda}_2'(t)\,dt$$

$$=\int_{-1}^{1}(3t^3+t^4,\ t^6)\cdot(1,2t)\,dt+\int_{-1}^{1}(-3t+1,1)\cdot(-1,0)\,dt$$

$$=\int_{-1}^{1}(3t^3+t^4+2t^7)\,dt+\int_{-1}^{1}(3t-1)\,dt=\left(\frac{3}{4}t^4+\frac{t^5}{5}+\frac{1}{4}t^8\right)\Big|_{-1}^{1}+\frac{3}{2}t^2-t\,\Big|_{-1}^{1}$$

$$=\frac{2}{5}-2=-\frac{8}{5}$$

Consideremos dos regiones D_1 y D_2 del tipo III tales que $D_2\subset D_1$



Si $D=D_1-\operatorname{Int}D_2$ y se toma la frontera de D orientada positivamente, entonces D es una región compacta de $\mathbb{R}^2$.

Si $\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2$ y $\bar{\lambda}_3$ parametrizan a ∂D_1^+, ∂D_2^+ y ∂D_2^-, entonces la parametrización $\bar{\lambda}$ de ∂D^+ se puede escribir en la forma $\bar{\lambda}=\bar{\lambda}_1\cup\bar{\lambda}_3$. Si $\bar{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ es un campo vectorial, entonces

$$\iint_D\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint_{D_1}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dx\,dy-\iint_{D_2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$=\int_{\partial D_1^+}\bar{F}\cdot d\bar{\lambda}-\int_{\partial D_2^+}\bar{F}\cdot d\bar{\lambda}=\int_{\bar{\lambda}_1}\bar{F}\cdot d\bar{\lambda}-\int_{\bar{\lambda}_2}\bar{F}\cdot d\bar{\lambda}$$

$$=\int_{\bar{\lambda}_1}\bar{F}\cdot d\bar{\lambda}+\int_{\bar{\lambda}_3}\bar{F}\cdot d\bar{\lambda}=\int_{\bar{\lambda}}\bar{F}\cdot d\bar{\lambda}$$

Ejemplo.

Calcular el área de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\qquad x = a\cos t,\ y = b\,\mathrm{sen}\,t$

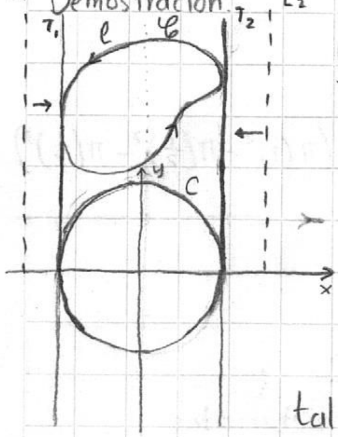
$\cos^2 t + \mathrm{sen}^2 t = 1$

$$A(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D^+} (ba\cos^2 t + ab\,\mathrm{sen}^2 t)\,dt \qquad \bar{\lambda}(t) = (a\cos t,\ b\,\mathrm{sen}\,t)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (ab)\,dt = ab\pi$$

Teorema. (Desigualdad isoperimétrica). Si $\mathscr{C}$ es una curva simple cerrada en $\mathbb{R}^2$ cuya longitud es ℓ y el área encerrada por $\mathscr{C}$ es A, entonces $\ell^2 \geq 4\pi A$. La igualdad se da si y sólo si $\mathscr{C}$ es un círculo.

Demostración.



Consideremos dos rectas paralelas L_1 de un lado de la curva $\mathscr{C}$ y L_2 en el lado opuesto.

Acerquemos las rectas L_1 y L_2 hacia $\mathscr{C}$ hasta que cada una de ellas sea tangente a la curva y llamémoslas T_1 y T_2 para especificar que son rectas tangentes a la curva.

Tracemos una recta perpendicular a T_1 y T_2 de tal forma que la distancia desde cualquier punto de $\mathscr{C}$ hasta la recta sea mayor que un medio de la distancia entre T_1 y T_2. Sobre esa recta, en el punto medio entre T_1 y T_2 construyamos una recta paralela a T_1 y T_2. A la primera recta identifiquémosla como el eje x de un sistema coordenado y a la segunda como el eje y.

Con centro en el origen del sistema tracemos un círculo de radio $r = \frac{1}{2} d(T_1, T_2)$. $\mathscr{C}$ y C no se intersectan.

Si $\bar{\lambda} : [0, \ell] \to \mathbb{R}^2$ la parametrización de $\mathscr{C}$ por longitud de arco, entonces $\|\bar{\lambda}'(s)\| = 1$, para todo $s \in [0, \ell]$.

Para dar una parametrización $\bar{\mu}$ del círculo podemos elegir $\lambda_1(s) = x(s)$ como la primera coordenada de $\bar{\mu}$, por lo que $\bar{\mu} : [0, \ell] \to \mathbb{R}^2$, está dada por $\bar{\mu}(s) = (x(s), \tilde{y}(s))$. El área encerrada por la curva $\mathscr{C}$ es

$A = \int_0^{\ell} x(s)y'(s)\,ds$ y el área del círculo es πr^2, por lo que

$$A + \pi r^2 = \int_0^{\ell} x(s)y'(s)\,ds - \int_0^{\ell} x'(s)\tilde{y}(s)\,ds = \int_0^{\ell} (x(s)y'(s) - x'(s)\tilde{y}(s))\,ds$$

Hemos demostrado que el Teorema de Green se cumple para regiones compactas con un hoyo.

Con este método usado recursivamente se puede demostrar que el Teorema de Green se cumple para regiones compactas con n hoyos.

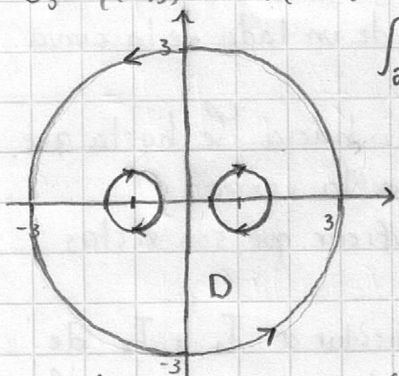
Ejemplo.

Calcular la integral de línea del campo vectorial $\bar{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dado por $\bar{F}(x,y)=(-y,x)$ a lo largo de la frontera orientada positivamente de la región $D=D_1-(\operatorname{Int}D_2\cup \operatorname{Int}D_3)$

donde $D_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 9\}$

$D_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2\leq \frac{1}{4}\}$

$D_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2+y^2\leq \frac{1}{4}\}$



$$\int_{\partial D^+}\bar{F}\cdot d\bar{\lambda}=\iint_D\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$=\iint_D(1+1)\,dx\,dy=2\iint_D dx\,dy=2\left(\pi(3)^2-\pi\left(\tfrac{1}{2}\right)^2-\pi\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\right)$$

$$=17\pi$$

Consideremos una región compacta D en $\mathbb{R}^2$ y los campos vectoriales $\bar{F}_1,\bar{F}_2,\bar{F}_3:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dados por $\bar{F}_1(x,y)=(0,x)$, $\bar{F}_2(x,y)=(-y,0)$ y $\bar{F}_3=(-y,x)$

Entonces $\displaystyle\int_{\partial D^+}\bar{F}_1\cdot d\bar{\lambda}=\iint_D dx\,dy=A(D)=\int_{\bar{\lambda}}(0,x(t))\cdot(x'(t),y'(t))\,dt=\int_a^b x(t)\,y'(t)\,dt$

$$\int_{\partial D^+}\bar{F}_2\cdot d\bar{\lambda}=\iint_D dx\,dy=A(D)=\int_{\bar{\lambda}}(-y(t),0)\cdot(x'(t),y'(t))\,dt=$$

$$\int_{\partial D^+}\bar{F}_3\cdot d\bar{\lambda}=2\iint_D dx\,dy=2A(D)$$

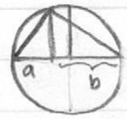
donde $\bar{\lambda}$ es la parametrización de la frontera de D orientada positivamente.

Si escribimos explícitamente la integral en el último caso

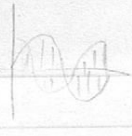
$$2A(D)=\int_{\partial D^+}(-y(t),x(t))\cdot(x'(t),y'(t))\,dt$$

$$=\int_{\partial D^+}\left(x(t)\,y'(t)-x'(t)\,y(t)\right)dt$$

entonces $\displaystyle A(D)=\frac{1}{2}\int_{\partial D^+}\left(x(t)\,y'(t)-x'(t)\,y(t)\right)dt$



$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$



$\int_0^{2\pi} sen = -\cos\Big|_0^{2\pi} = 0$

$\int f \leq \int |f| \leq |\int f| \quad \int \cos$

$\sqrt{x^2} = |x|$

$$\leq \int_0^{\ell} \sqrt{(x(s)y'(s) - x'(s)\tilde{y}(s))^2}\, ds$$

$$\leq \int_0^{\ell} \sqrt{(x^2(s) + \tilde{y}^2(s))(x'^2(s) + y'^2(s))}\, ds$$

$$= \int_0^{\ell} \|\bar{\mu}(s)\| \|\bar{\lambda}'(s)\| ds = \int_0^{\ell} \|\bar{\mu}(s)\| ds = r\ell \quad \therefore \quad \frac{A + \pi r^2}{2} \leq \frac{r\ell}{2}$$

Pero la media geométrica es menor o igual que la media geométrica.

$\sqrt{\pi r^2 A} \leq \frac{r^2\ell^2}{24}$; ya que $\sqrt{\underbrace{\pi r^2}_{b} \underbrace{A}_{a}} \leq \frac{\pi r^2 + A}{2}$

Por lo tanto

$$\ell^2 \geq 4\pi A$$

Por otro lado si $\mathcal{C}$ es un círculo se da la igualdad

$$\ell^2 = 4\pi A$$

Demostremos que si se da la igualdad $\mathcal{C}$ es una circunferencia, es decir, que $\bar{\lambda} : [0, \ell] \to \mathbb{R}^2$ parametriza una circunferencia o lo que es lo mismo

$$(x(s))^2 + (y(s))^2 = r^2$$

Como $A = \frac{\ell^2}{4\pi}$ entonces $A\pi = \frac{\ell^2}{4}$ de donde se obtiene

$$\sqrt{A\pi r^2} = \frac{r\ell}{2}$$

Por lo que $\frac{r\ell}{2} \leq \frac{A + \pi r^2}{2}$ es decir, $r\ell \leq A + \pi r^2$

pero como cualquier curva cerrada $\mathcal{C}$ se tiene

$$A + \pi r^2 \leq r\ell.$$

Entonces todas las desigualdades que nos llevaron a concluir que $A + \pi r^2 \leq r\ell$ deben ser igualdades. En particular se tiene

$$x(s)y'(s) - x'(s)\tilde{y}(s) = \sqrt{(x(s)y'(s) - x'(s)\tilde{y}(s))^2}$$
$$= \sqrt{(x^2(s) + \tilde{y}^2(s))(x'^2(s) + y'^2(s))}$$

$$x^2 y'^2 - 2xy'x'\tilde{y} + x'^2\tilde{y}^2 = x^2x'^2 + x'^2\tilde{y}^2 + x^2y'^2 + \tilde{y}^2y'^2$$

$$0 = x^2x'^2 + y'^2\tilde{y}^2 + 2xy'x'\tilde{y}$$

$$0 = (xx' + y'\tilde{y})^2 \quad \therefore \quad xx' + y'\tilde{y} = 0$$

de donde se concluye que $x(s)x'(s) + \tilde{y}(s)y'(s) = 0$

Luego $x^2(s)x'^2(s) = \tilde{y}^2(s)y'^2(s)$ al sumar en ambos lados $x^2(s)y'^2(s)$

se obtiene $x^2(s)(x'^2(s) + y'^2(s)) = y'^2(s)(\tilde{y}^2(s) + x^2(s))$

es decir $\frac{x(s)}{y'(s)} = \frac{\sqrt{\tilde{y}^2(s) + x^2(s)}}{\sqrt{x'^2(s) + y'^2(s)}}$ en consecuencia $\frac{x(s)}{y'(s)} = \pm r$

Al intercambiar los ejes x y y, se obtiene

$\frac{y(s)}{x'(s)} = \pm r$ por lo tanto $x^2(s) + y^2(s) = r^2$.

es decir, la curva $\mathcal{C}$ es un círculo.

Demostración del Teorema de cambio de variables para integrales dobles.

Teorema. Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continua en las variables x y y, $\overline{T}: D^* \subset \mathbb{R}^2 \to D$ es una transformación inyectiva de clase $C^1_{D^*}$ cuya derivada es invertible y manda de manera continua los puntos de D^* en D, es decir, $\overline{T}(u,v) = (x,y) = (\varphi(u,v), \psi(u,v))$ para todo $(x,y) \in D^*$, entonces
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

Demostración.

Como vamos a requerir que $\overline{T}$ sea de clase $C^2_{D^*}$, supongamos que $\overline{T}$ lo es. Si $\bar{\lambda}: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ es una parametrización de la frontera de D orientada positivamente y $\bar{\mu}: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ tal que $\bar{\mu}(t) = \overline{T}^{-1}(\bar{\lambda}(t))$.

Supongamos que $\det \overline{T}'(u,v) > 0$ para todo $(u,v) \in D^*$, entonces $\bar{\mu}$ parametriza la frontera de D^* orientada positivamente.

Consideremos el campo vectorial $\overline{F}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $\overline{F} = (F_1, F_2)$ donde $F_1(x,y) = 0$ y F_2 es tal que $\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = f(x,y)$ para todo $(x,y) \in D$.

Entonces
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\,dy$$
$$= \int_a^b F_2(\bar{\lambda}(t))\, \lambda_2'(t)\,dt$$
$$= \int_a^b F_2(\bar{\lambda}(t)) \frac{d}{dt} \psi(\bar{\mu}(t))\,dt = \int_a^b F_2(\overline{T}(\bar{\mu}(t))) \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}(\bar{\mu}(t))\mu_1'(t) + \frac{\partial \psi}{\partial v}(\bar{\mu}(t))\mu_2'(t) \right) dt$$
$$= \int_a^b \left(F_2(\overline{T}(u,v)) \frac{\partial \psi}{\partial u}(\bar{\mu}(t))\mu_1'(t) + F_2(\overline{T}(u,v)) \frac{\partial \psi}{\partial v}(\bar{\mu}(t))\mu_2'(t) \right) dt$$

Esta última expresión es la integral de línea del campo
$\left(F_2(\overline{T}(u,v)) \frac{\partial \psi}{\partial u}(\bar{\mu}(t)),\ F_2(\overline{T}(u,v)) \frac{\partial \psi}{\partial v}(\bar{\mu}(t)) \right)$ a lo largo de $\bar{\mu}(t)$, entonces la igualdad siguiente es

$$= \int_{\bar{\mu}} \left(F_2(\overline{T}(u,v)) \frac{\partial \psi}{\partial u}(\bar{\mu}(t)),\ F_2(\overline{T}(u,v)) \frac{\partial \psi}{\partial v}(\bar{\mu}(t)) \right) \cdot d\bar{\mu}$$
$$= \iint_{D^*} \left(\frac{\partial}{\partial u}\left(F_2(\overline{T}(u,v)) \frac{\partial \psi}{\partial v}(\bar{\mu}(t)) \right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(F_2(\overline{T}(u,v)) \frac{\partial \psi}{\partial u}(\bar{\mu}(t)) \right) \right) du\,dv$$
$$= \iint_{D^*} \left(F_2(\overline{T}(u,v)) \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v}(\bar{\mu}(t)) + \frac{\partial F_2(\overline{T}(u,v))}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v}(\bar{\mu}(t)) - F_2(\overline{T}(u,v)) \frac{\partial^2 \psi}{\partial v \partial u}(\bar{\mu}(t)) - \frac{\partial F_2}{\partial v}(\overline{T}(u,v)) \frac{\partial \psi}{\partial u}(\bar{\mu}(t)) \right) du$$

$$= \iint_{D^*} \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}(\bar{\mu}(t)) \frac{\partial F_2}{\partial u}(\bar{T}(u,v)) - \frac{\partial}{\partial u} \psi(\bar{\mu}(t)) \frac{\partial F_2}{\partial v}(\bar{T}(u,v))\right) du\,dv$$

$$= \iint_{D^*} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(\bar{T}(u,v)) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \frac{\partial \psi}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v)\right)\right) du\,dv$$

$$= \iint_{D^*} f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

Rotación de un campo vectorial

Si $\bar{F}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un campo ~~vectorial~~ de velocidades y $\mathcal{C}$ es una curva parametrizada por $\bar{\lambda}: [a,b] \to \mathbb{R}^2$, sabemos que

$$\int_{\bar{\lambda}} \bar{F} \cdot d\bar{\lambda} = \int_a^b \bar{F}(\bar{\lambda}(t)) \cdot \bar{\lambda}'(t)\, dt$$

Definición. Si $\bar{F}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un campo continuo de velocidades y $\mathcal{C}$ es una curva simple cerrada, parametrizada por $\bar{\lambda}: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ tal que $\bar{\lambda}_{[a,b]} \subset D$ orientada positivamente, decimos que $\int_{\bar{\lambda}} \bar{F} \cdot d\bar{\lambda}$ es la circulación del campo $\bar{F}$ a lo largo de la curva $\mathcal{C}$.

Ejemplo.

1. Calcular la circulación del campo $\bar{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $\bar{F}(x,y) = (a,b)$ a lo largo de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ orientada positivamente.

Circulación $\bar{F}(\bar{\lambda}) = \int_{\partial D^+} \bar{F} \cdot d\bar{\lambda}$

$$= \int_0^{2\pi} (a,b) \cdot (-a\,\text{sen}\,t, b\cos t)\, dt$$

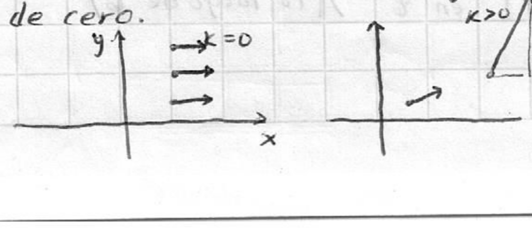
$$= \int_0^{2\pi} (-a^2 \text{sen}\,t + b^2 \cos t)\, dt = 0$$

2. Calcular la circulación del campo $\bar{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $\bar{F}(x,y) = (1, kx)$ para $k \in \mathbb{R}$ a lo largo de
   i) un círculo con centro en el origen
   ii) un círculo con centro en (x_0, y_0)

i) Circulación $\bar{F}(\bar{\lambda}) = \int_0^{2\pi} (1, kr\cos t) \cdot (-r\,\text{sen}\,t, r\cos t)\, dt$

$$= \int_0^{2\pi} kr^2 \cos^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} kr^2 \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = kr^2 \pi$$

Si $k = 0$ la circulación es cero y si $k \neq 0$, la circulación es diferente de cero.



ii) $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

$x = r\cos t + x_0$

$y = r\,\mathrm{sen}\,t + y_0$

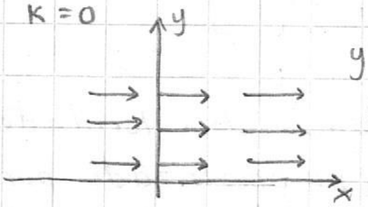
$\mathrm{Circ}\,\bar{F}(\tilde{\lambda}) = \int_0^{2\pi} (1, r\cos t + x_0)(-r\,\mathrm{sen}\,t, r\cos t)\,dt$

$= \int_0^{2\pi} (-r\,\mathrm{sen}\,t + r^2\cos^2 t + r x_0 \cos t)\,dt$

es decir No depende del centro del círculo

¿Cuáles son las líneas de flujo de $\bar{F}(x,y) = (1, kx)$?

i) Si $k=0$

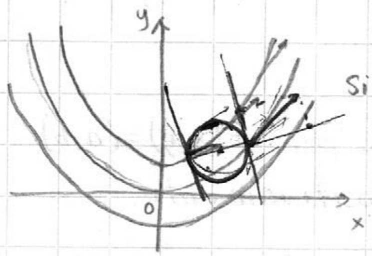


$y'(x) = 0$

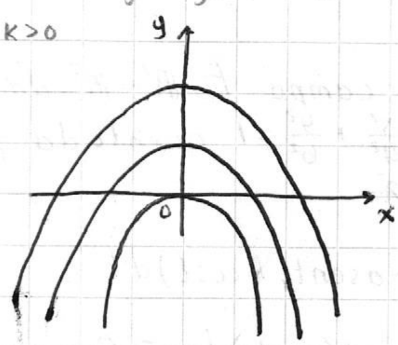
Luego $y(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$

ii) Si $k \neq 0$ se tiene $y'(x) = \frac{kx}{1}$

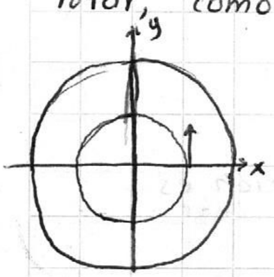
Luego $y(x) = \frac{k}{2}x^2 + c$



Si $k>0$



Si $\bar{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es el campo de velocidades dado por $\bar{F}(x,y) = (-y, x)$ y $\tilde{\lambda}: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ parametriza la curva de contacto de un pedazo de corcho circular que flota en el fluido, dado que la circulación es igual a $2\pi r^2$. entonces el corcho no sólo se desplaza sino que además puede rotar; como además $\|\bar{F}(x,y)\| = r = v$.



Sabemos que $v = \omega r$ con ω la velocidad angular,

Luego $\omega = 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi r^2}\right)(2\pi r^2)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\text{área contenida en } \mathcal{C}}\right)\left(\text{Circulación a lo largo de } \mathcal{C}\right)$

$x - x_0$ $x = r\cos\theta + x_0$

Definición. Si $\bar{F}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un campo continuo y $\mathscr{C}$ es una curva simple cerrada orientada positivamente por $\bar{\lambda}: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ tal que $\bar{\lambda}_{[a,b]} \subset D$, decimos que la rotación del campo $\bar{F}$ alrededor de $\mathscr{C}$ que se denota $\text{rtc}\,\bar{F}(\bar{\lambda})$ es

$$\frac{1}{A(\mathscr{C})}\int_{\lambda} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda}, \text{ es decir, } \quad \text{rtc}\,\bar{F}(\bar{\lambda}) = \frac{1}{A(\mathscr{C})}\int_{\bar{\lambda}} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda}$$

Ejemplo.

Calcular la rotación del campo $\bar{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $\bar{F}(x,y) = (1, kx)$ para $k \in \mathbb{R}$ alrededor de

i) Un círculo con centro en el ~~orig~~ origen

ii) un círculo con centro en (x_0, y_0)

En ambos casos si $k \neq 0$

$$\text{rtc}\,\bar{F}(\bar{\lambda}) = \frac{1}{\pi r^2} k\pi r^2 = k$$

¿Cómo definir la rotación de un campo $\bar{F}$ en un punto $(x_0,y_0) \in D$?

Dado $(x_0,y_0) \in D$, tomemos una bola con centro en (x_0,y_0) y de radio ε, $B((x_0,y_0);\varepsilon) = B_\varepsilon$ tal que $B_\varepsilon \subset D$, entonces

$$\text{rtc}\,\bar{F}(\partial B_\varepsilon^+) = \frac{1}{\pi\varepsilon^2}\int_{\partial B_\varepsilon^+} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda}$$ donde $\bar{\lambda}: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ está dada por $\bar{\lambda}(t) = (\varepsilon\cos t + x_0, \varepsilon\,\text{sen}\,t + y_0)$ en consecuencia

$$\text{rtc}\,\bar{F}((x_0,y_0)) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi\varepsilon^2}\int_{\bar{\lambda}} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi\varepsilon^2}\iint_{B_\varepsilon}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi\varepsilon^2}\left(\pi\varepsilon^2\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(\xi,\eta) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(\xi,\eta)\right)\right)$$

como F_1 y F_2 son continuas

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(\xi,\eta) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(\xi,\eta)\right) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x_0,y_0) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Ejemplo.

Calcular el rotacional del campo $\bar{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$\bar{F}(x,y) = (e^x\,\text{sen}\,y - e^y\,\text{sen}\,x,\ e^x\cos y + e^y\cos x)$$

$$\text{rtc}\,\bar{F}(x_0,y_0) = (e^x\cos y - e^y\,\text{sen}\,x - e^x\cos y + e^y\,\text{sen}\,x) = 0$$

Definición. Si $\bar{F}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un campo tal que $\text{rtc}\,\bar{F}((x,y)) = 0$, decimos que $\bar{F}$ es un campo irrotacional.

Ejemplo. Los campos $\bar{F}_1$ y $\bar{F}_2$, dados por $\bar{F}_1(x,y) = (-y, x)$ y $\bar{F}_2 = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ tienen las mismas líneas de flujo, pero $\bar{F}_2$ es irrotacional y $\bar{F}_1$ no lo es.

$$\text{rtc}\,F_1 = \left(\frac{\partial F_{11}}{\partial y} - \frac{\partial F_{12}}{\partial x}\right) = 2 \quad \text{luego} \quad \text{rtc}\,\bar{F}_2 = \left(\frac{(x^2+y^2) - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{x^2+y^2 - 2y^2}{(x^2+y^2)}\right) = 0$$

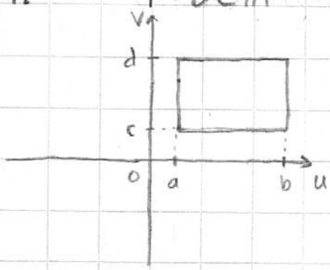
Superficies en $\mathbb{R}^3$.

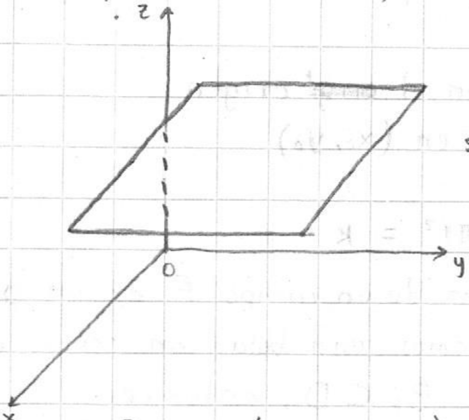
De manera informal se puede decir que una superficie es un objeto "bidimensional" inmerso en $\mathbb{R}^3$.

Definición. Si $D \subset \mathbb{R}^2$ es una región del tipo III y $\bar{f}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\bar{f}(u,v) = (f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v))$ es una función inyectiva, de clase C'_D, es decir, $f_1, f_2, f_3 \in C'_D$ tal que $\frac{\partial \bar{f}}{\partial u}$ y $\frac{\partial \bar{f}}{\partial v}$ son linealmente independientes, decimos que la imagen de $\bar{f}$, $\Sigma = \bar{f}(D)$ es una superficie simple en $\mathbb{R}^3$. A $\bar{f}$ se le llama parametrización de Σ.

Ejemplos

1. $\bar{f}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\bar{f}(u,v) = (u, v, \alpha u + \beta v + \delta)$ y $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le u \le b, c \le v \le d\}$

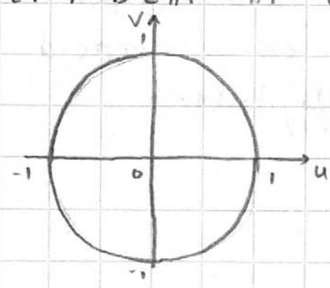


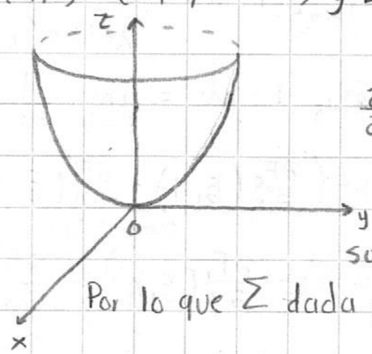


$\frac{\partial \bar{f}}{\partial u} = (1, 0, \alpha)$, $\frac{\partial \bar{f}}{\partial v} = (0, 1, \beta)$

son linealmente independientes.

2. $\bar{f}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\bar{f}(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$ y $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \le 1\}$





los vectores

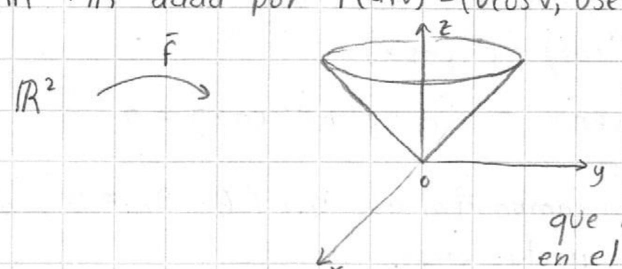
$\frac{\partial \bar{f}}{\partial u} = (1, 0, 2u)$

$\frac{\partial \bar{f}}{\partial v} = (0, 1, 2v)$

son linealmente independientes.

Por lo que Σ dada por $\bar{f}$ es una superficie simple.

3. $\bar{f}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\bar{f}(u,v) = (u\cos v, u\,\mathrm{sen}\, v, u)$ y $D = \mathbb{R}^2$



$\frac{\partial \bar{f}}{\partial u} = (\cos v, \mathrm{sen}\, v, u)$

$\frac{\partial \bar{f}}{\partial v} = (-u\,\mathrm{sen}\, v, u\cos v, 0)$

que no son linealmente independientes en el origen.

4. $\bar{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\bar{f}(u,v) = (u, v, |u| + |v|)$