8- feb - 2011

Teorema. Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es acotada en R y es continua excepto en un número finito de puntos de R, entonces f es integrable en R.

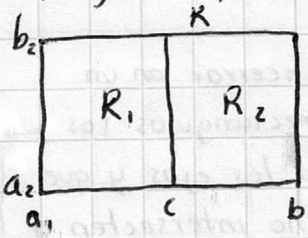
Demostración.

Teorema. Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continua y $R = R_1 \cup R_2$ es un rectángulo en D y R_1, R_2 son rectángulos cuya intersección no contiene rectángulos, entonces

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{R_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{R_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

Demostración.

Supongamos que por ejemplo $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, $R_1 = [a_1, c] \times [a_2, b_2]$ y $R_2 = [c, b_1] \times [a_2, b_2]$



Como f es continua uniformemente en R, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{2A_R}$$

si $\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| < \delta(\varepsilon)$

Consideremos ~~una~~ particiones uniformes P_1, P_2 y P de R_1, R_2 y R_3 respectivamente de n^2 rectángulos.

con n de tal forma que $\|P\| < \delta(\varepsilon)$

Si $P' = P_1 \cup P_2 \cup P$, entonces P' es un refinamiento de P_1, P_2 y P, denotemos los rectángulos en P' de la forma $R_{k\ell}$ donde $k = 1, \dots, m$ y $\ell = 1, \dots, n$ con $m > n$. Entonces

$$\bar{S}(f; P') - \underline{S}(f; P') = \sum_{k,\ell=1}^{m,n} (M_{k\ell}(f) - m_{k\ell}(f)) A_{k\ell}$$

$$= \sum_{\substack{k,\ell=1 \\ R_{k\ell} \subset R_1}} (M_{k\ell}(f) - m_{k\ell}(f)) A_{k\ell} + \sum_{\substack{k,\ell=1 \\ R_{k\ell} \subset R_2}}^{m,n} (M_{k\ell}(f) - m_{k\ell}(f)) A_{k\ell}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2A_R} \sum_{\substack{k\ell=1 \\ R_{k\ell} \subset R_1}} A_{k\ell} + \frac{\varepsilon}{2A_R} \sum_{R_{k\ell} \subset R_2} A_{k\ell}$$

$$= \cancel{\frac{\varepsilon}{2A_R}(A_{R_1} + A_{R_2})} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Pero eso no nos sirve para demostrar que $\iint_R = \iint_{R_1} + \iint_{R_2}$ sólo para mostrar que es integrable.

Pero $S(f;P') = \sum_{k,l=1}^{m,n} f(\xi_{kl}, \eta_{kl}) A_{kl} = \sum_{R_{kl}\subset R_1} f(\xi_{kl}, \eta_{kl}) A_{kl} +$

$$+ \sum_{R_{kl}\subset R_2} f(\xi_{kl}, \eta_{kl}) A_{kl}$$

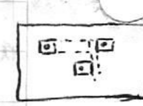
Por lo que $\lim_{\|P\|\to 0} S^R(f;P') = \lim_{\|P\|\to 0} \left(S^{R_1}(f;P') + S^{R_2}(f;P')\right)$

es decir, $\lim_{n\to\infty} S^R(f;P') = \lim_{n\to\infty}\left(S^{R_1}(f;P') + S^{R_2}(f;P')\right) = \lim_{n\to\infty} S^{R_1}(f;P') + \lim_{n\to\infty} S^{R_2}(f;P')$

Por lo tanto $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{R_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{R_2} f(x,y)\,dx\,dy$

Teorema. Si $f: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es acotada ~~continua~~ en un rectángulo $R\subset D$ y continua en R excepto en un número finito de N puntos, entonces f es integrable en R.

Demostración.

Cada uno de los N puntos donde f es discontinua se puede encerrar en un rectángulo cuya diagonal sea menor que $\sqrt{\frac{\varepsilon}{2N(M_R(f)-m_R(f))}}$ los N rectángulos los debemos construir de tal forma que sus lados sean paralelos a los ejes y que las prolongaciones de los lados de cada una de ellos no intersecten a los otros.  En $R - \bigcup_{k=1}^{n} R_k$ f es continua uniformemente por lo que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon)>0$ tal que $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)| < \varepsilon/2A_R$ si $\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\| < \delta(\varepsilon)$

Si se hace una partición de rectángulo R de tal forma que $\|P\| < \delta(\varepsilon)$, entonces si consideramos P junto con los N rectángulos ajustados hacia abajo, se obtiene una partición P' de R tal que

$$\bar{S}(f;P') - \underline{S}(f;P') = \sum_{i,j=1}^{n,m} (M_{ij}(f) - m_{ij}(f)) A_{ij} = \sum_{R_{ij}\neq R_k} (M_{ij}(f)-m_{ij}(f)) A_{ij} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} (M_k(f) - m_k(f)) A_{R_k} < \frac{\varepsilon}{2A_R}\sum_{R_{ij}\neq R_k} A_{ij} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} (M_R(f) - m_R(f)) A_{R_k}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + (M_R(f)-m_R(f)) \sum_{k=1}^{N} A_{R_k}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + (M_R(f)-m_R(f))\, N\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{2N(M_R(f)-m_R(f))}}\right)^2 = \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Por lo tanto f es integrable en R.

8 - feb - 2011

Teorema. Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función acotada en $R \subset D$ y continua en R excepto sobre los puntos de una sucesión convergente $\{\bar{x}_n\}$ en R, entonces f es integrable en R.

Demostración.

Como $\{\bar{x}_n\}$ es convergente en R a un cierto $\bar{l} \in R$, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\|\bar{x}_n - \bar{l}\| < \varepsilon$ para todo $n > N(\varepsilon)$

los N puntos que posiblemente quedan fuera de la bola $B(\bar{l}, r<$ los podemos encerrar en N rectángulos cuya diagonal sea menor que $\sqrt{\frac{\varepsilon}{3N(M_R(f)-m_R(f))}}$

En $R - \left(B(\bar{l};r) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{N} R_k\right)\right)$ la función es continua uniformemente por lo que existe $\delta(\varepsilon)$ tal que $|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \frac{\varepsilon}{3A_R}$ si $\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\| < \delta(\varepsilon)$

Como los puntos que están en la bola $B(\bar{l};r)$ se pueden encerrar en un cuadrado de lado $2r$, entonces

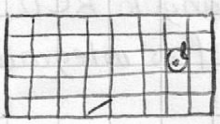
Demostración.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que $|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \frac{\varepsilon}{3A_R}$

si $\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\| < \delta(\varepsilon)$

Como $\{\bar{x}_n\}$ es convergente para $\varepsilon' > 0$ existe $N(\varepsilon')$ tal que

si $n > N(\varepsilon')$ $\|\bar{x}_n - \bar{l}\| <$ $\varepsilon' = \sqrt{\frac{\varepsilon}{3(M_R(f)-m_R(f))}}$



Hagamos una partición P tal que $\|P\| < \min\left\{\delta(\varepsilon), \sqrt{\frac{\varepsilon}{3(M_R(f)-m_R(f))}}\right\}$ entonces a lo más hay $N \geq N(\varepsilon')$ ~~puntos en el~~ rectángulos en los cuales hay puntos con discontinuidades de f.

Por lo que $\bar{S}(f;P) - \underline{S}(f;P) = \sum_{i,j=1}^{n,m} (M_{ij}(f) - m_{ij}(f)) A_{ij}$ $\quad c = \text{cuadrado}$

$$= \sum_{(f \in C) \subset R_{ij}} (M_{ij}(f) - m_{ij}(f)) A_{ij} + (M_c(f) - m_c(f)) A_c + \sum_{k=1}^{N} (M_k(f) - m_k(f)) A_k$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + N(M_R(f) - m_R(f))(\min)^2$$

Pero si consideramos una partición P' que refina los rectángulos donde hay al menos un punto de discontinuidad, ~~esta~~ de tal forma $\|P'\| < \frac{\min}{\sqrt{N}}$, entonces $\bar{S}(f;P') - \underline{S}(f;P') < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

Por lo tanto f es integrable en R

TRAER LIBRO CAZADORES

9 - feb - 11

Definición. Decimos que $A \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto de contenido cero si para cada $\varepsilon > 0$ $\exists$ ~~existe~~ un número finito N de rectángulos tales que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{N} R_k \quad y \quad \sum_{k=1}^{N} A_{R_k} < \varepsilon$$

Ejemplos

1. Si A está compuesto por un número finito de puntos, A es un conjunto de contenido cero

En efecto, dado $\varepsilon > 0$ con centro en cada uno de los N puntos se puede construir un rectángulo cuya diagonal sea menor que $\sqrt{\frac{\varepsilon}{N}}$. En consecuencia

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{N} R_k \quad y \quad \sum_{k=1}^{N} A_{R_k} < \sum_{k=1}^{N} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{N}}\right)^2 = \varepsilon$$

2. Si A está formado por una sucesión convergente $\{\bar{x}_n\}$ en $\mathbb{R}^2$, A es un conjunto de contenido cero.

En efecto, dado $\varepsilon > 0$ existe $N(\varepsilon) > 0$ tal que $\| \bar{x}_n - \bar{\ell} \| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$ para $n > N(\varepsilon)$, es decir fuera del cuadrado cuyo lado es menor $\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$ quedan a lo más $N(\varepsilon)$ puntos cada uno de los cuales se puede encerrar en un rectángulo cuya diagonal es menor $\sqrt{\frac{\varepsilon}{2N}}$.

Teorema. Si $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continua en un rectángulo $R \subset D$ excepto en un conjunto de contenido cero, entonces f es integrable en R

Demostración.

Como el conjunto de discontinuidades de f en R es un conjunto de contenido cero, dado $\varepsilon > 0$ existen N rectángulos tales que $R \subset \bigcup_{k=1}^{N} R_k$ y además $\sum_{k=1}^{N} A_{R_k} < \dfrac{\varepsilon}{2(M_R(f) - m_R(f))}$ y como f es continua uniformemente en $R - \bigcup_{k=1}^{N} R_k$ entonces existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \dfrac{\varepsilon}{2A_R}$ si $\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| < \delta(\varepsilon)$. Si tomamos una partición P tal que $\|P\| < \delta(\varepsilon)$ y contemple los N rectángulos donde hay puntos de discontinuidad de f, se tiene

$$\bar{S}(f; P) - \underline{S}(f; P) = \sum_{R_{ij} \neq R_k} (M_{ij}(f) - m_{ij}(f)) A_{ij} + \sum_{R_k} (M_k(f) - m_k(f)) A_k$$

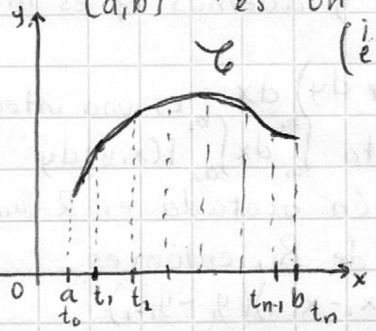
$$< \frac{\varepsilon}{2A_R} \sum_{R_{ij} \neq R_k} A_{ij} + (M_R(f) - m_R(f)) \sum_{R_k} A_{R_k} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Por lo tanto f es integrable en R

55 4491-1947

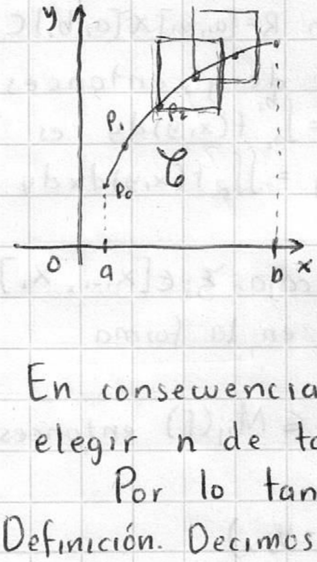
Kudriátsev
10-feb-2011

Definición. Decimos que una curva $\mathcal{C}$ en $\mathbb{R}^2$ dada por $\bar{f}=[a,b]\to\mathbb{R}^2$ es una curva rectificable, si $\{\ell_P\}$ donde $\ell_P=\sum_{k=1}^{n}\|\bar{f}(t_i)-\bar{f}(t_{i-1})\|$ y P es una partición de $[a,b]$ es un conjunto acotado.
(i.e. existe su longitud)



Teorema. Una curva $\mathcal{C}$ en $\mathbb{R}^2$ rectificable es un conjunto de contenido cero.

Demostración.



A partir de uno de los extremos de la curva, sobre ella se toman n puntos espaciados uniformemente, es decir, si ℓ es la longitud de la curva, $d(P_{k-1},P_k)$ sobre la curva es $\frac{\ell}{n}$. Ahora con centro en cada punto construimos un cuadrado de lado $\frac{2\ell}{n}$, de tal forma que cualquier punto de $\mathcal{C}$ está en al menos un cuadrado.

En consecuencia $\sum_{k=1}^{n}A_{R_k}=\frac{4\ell^2}{n}$ por lo que dado $\varepsilon>0$, podemos elegir n de tal forma que $\frac{4\ell^2}{n}<\varepsilon$. Basta con que $n>\frac{4\ell^2}{\varepsilon}$

Por lo tanto $\mathcal{C}$ es de contenido cero

Definición. Decimos que $A\subset\mathbb{R}^2$ es un conjunto de medida cero en $\mathbb{R}^2$, si dado $\varepsilon>0$ existe un conjunto numerable de rectángulos tales que $A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}R_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty}A_{R_k}<\varepsilon$

Teorema. Si $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es una función acotada y $R\subset D$ es un rectángulo, entonces f es integrable en R si y sólo si el conjunto de discontinuidades de f es un conjunto de medida cero

Revisar Apostol

11-Feb-2011

Definición. Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función acotada en un rectángulo $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset D$ tal que f es integrable con respecto de y para cada x fijo, es decir, queda definida $g: [a_1, b_1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy$ y además g es integrable, decimos que $\int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy\right)dx$ es una integral iterada de f en R y se denota $\int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy$

Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función acotada en $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset D$ y P es cualquier partición de R, entonces

$$\bar{S}(f; P) = \sum_{i,j=1}^{n,m} M_{ij}(f, P) A_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n,m} M_{ij}(f)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sum_{j=1}^{m} M_{ij}(f)(y_j - y_{j-1})$$

Teorema. Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función integrable en $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset D$ y para cada x fijo es integrable respecto de y, entonces la función $g: [a_1, b_1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy$ es integrable y además $\int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$

Demostración.

Como f es integrable respecto de y en R, para cada partición P escoja $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ y tenemos que $\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)\,dy$ la podemos escribir en la forma

$$\boxed{g(\xi_i)} = \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)\,dy = \mu_{ij}(y_j - y_{j-1})$$ donde $m_{ij}(f) \leq \mu_{ij} \leq M_{ij}(f)$ entonces

$$\underline{S}(f; P) \leq S(f; P) \leq \bar{S}(f; P)$$

pero $$S(f; P) = \sum_{i,j=1}^{n,m} \mu_{ij} A_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n,m} \mu_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n,m} (x_i - x_{i-1}) \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)\,dy$$

Como f es integrable en R, entonces $\lim_{\|P\| \to 0} S(f; P) = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$

es decir $$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i,j=1}^{n,m} (x_i - x_{i-1}) \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)\,dy = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

11 - feb - 2011

Teorema. Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función integrable en $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ tal que es integrable para cada y fija con respecto de x, entonces la función $g: [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$ dada por $g(y) = \int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx$ es integrable y además

$$\int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

Demostración.

Se hace en forma parecida a la del Teorema anterior.

<u>Teorema de Fubini.</u>

Teorema. Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continua ~~en~~ y $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ es un rectángulo, entonces $\left[\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx\,dy\right]$

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

Demostración.

Como f es continua en R, entonces para cada x fija $f(x,y)$ es continua, por lo que es integrable, es decir, $g(x) = \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy$ está bien definida por lo que $g: [a_1, b_1] \to \mathbb{R}$ es una función continua, en consecuencia, existe

$$\int_{a_1}^{b_1} g(x)\,dx = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy\right)dx = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

De la misma forma se llega al resultado

$$\int_{a_2}^{b_2} g(y)\,dy = \int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx\right)dy = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

Por lo tanto $\int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx\,dy$

Teorema. Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función integrable en $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, es integrable para cada x fijo con respecto a y, y para cada y fijo es integrable con respecto a x entonces

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

14-feb-2011

$x \ln x$

Ejemplos

1. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{1+x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \\ 5, & \text{si } (x,y) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \end{cases} \qquad R = [0,1] \times [0,1]$$

Sí es integrable porque el conjunto de discontinuidades tiene contenido cero, entonces

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{xy}{1+x^2+y^2}\,dx \right) dy = \int_0^1 y \left(\tfrac{1}{2} \ln(1+x^2+y^2) \Big|_0^1 \right) dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 y \left(\ln(2+y^2) - \ln(1+y^2) \right) dy$$

$$= \frac{1}{4} \left((2+y^2)(\ln(2+y^2)-1) - (1+y^2)(\ln(1+y^2)-1) \right) \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{4} \left(3(\ln 3 - 1) - 2(\ln 2 - 1) - (2(\ln 2 - 1) + 1) \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(3\ln 3 - 3 - 4\ln 2 + 2 + 1 + 1 \right) = \frac{1}{4}(3\ln 3 - 4\ln 2)$$

2. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 3y^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases} \qquad R = [0,1] \times [0,1]$$

~~La integral existe para cada x fija existe, pero para cada y fija no.~~

Sí existe $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy \right) dx$, pero la función no es integrable

Calculemos $\overline{S}(f;P)$ y $\underline{S}(f;P)$ para cualquier partición P de R

$$\overline{S}(f;P) = \sum_{i,j=1}^{n,m} M_{ij}(f) A_{ij} = \sum_{y_j \le \frac{\sqrt{3}}{3}} A_{ij} + \sum_{y_j > \frac{\sqrt{3}}{3}} 3y_j^2 A_{ij}$$

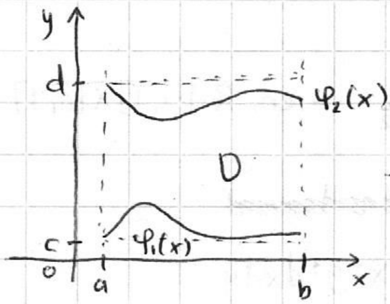
$$\underline{S}(f;P) = \sum_{i,j=1}^{n,m} m_{ij}(f) A_{ij} = \sum_{y_j \le \frac{\sqrt{3}}{3}} 3y_j^2 A_{ij} + \sum_{y_j > \frac{\sqrt{3}}{3}} A_{ij}$$

por lo que $\overline{S}(f;P) - \underline{S}(f;P) = \sum_{y_j \le \frac{\sqrt{3}}{3}} (1 - 3y_j^2) A_{ij} + \sum_{y_j > \frac{\sqrt{3}}{3}} (3y_j^2 - 1) A_{ij} > 0.14$

Veamos para que valor de y_j

por ejemplo $3y_j^2 > \frac{3}{2}$. Es mayor que $\frac{3}{2}$ para $y_j > \frac{\sqrt{2}}{2}$

14 - feb - 2011



entonces definimos

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{si } (x,y) \in D \\ 0, & \text{si } (x,y) \in (R - D) \end{cases}$$

Teorema. Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrable y D es una región elemental del tipo I, entonces

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

Demostración.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f^*(x,y)\,dx\,dy$$

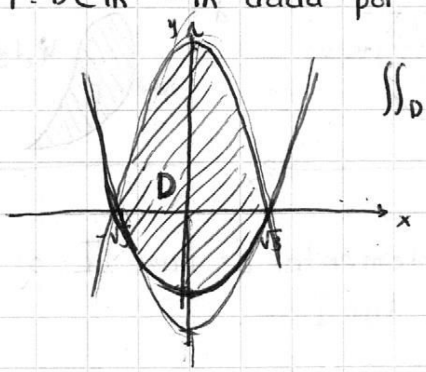
$$= \int_a^b \left(\int_c^d f^*(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_c^{\varphi_1(x)} f^*(x,y)\,dy \; + \right.$$

$$\left. \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f^*(x,y)\,dy + \int_{\varphi_2(x)}^{d} f^*(x,y)\,dy \right) dx$$

$$= \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f^*(x,y)\,dy\,dx$$

Ejemplos.

1. $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 + y$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3};\ x^2 - 3 \le y \le 3 - x^2\}$



$$\iint_D (x^2 + y)\,dx\,dy = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{x^2-3}^{3-x^2} (x^2 + y)\,dy\,dx$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(x^2 y + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{x^2-3}^{3-x^2} dx$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(x^2(3 - x^2) + \frac{(3-x^2)^2}{2} - x^2(x^2 - 3) - \frac{(x^2-3)^2}{2} \right) dx$$

$$= \Big(x^3 - \frac{x^5}{5} - \frac{x^5}{5} + x^3 + \frac{9}{2}x + x^3 + \frac{x^5}{10} -$$

$$\left(\frac{x^5}{10} - x^3 + \frac{9}{2}x \right) \Big|$$

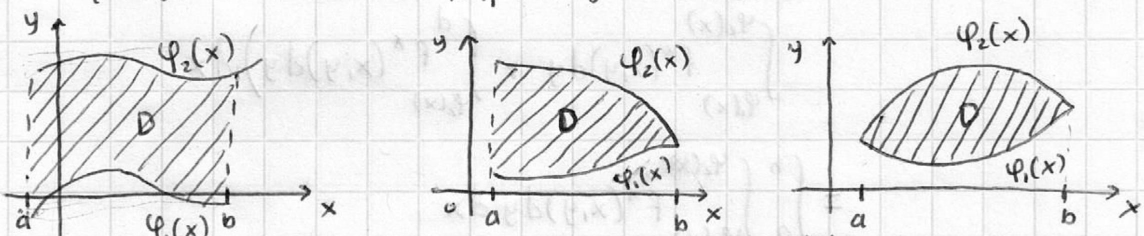
$$= \left(2x^3 - \frac{2x^5}{5} + 2x^3 + 9x + \frac{1}{5}x^5 \right) \Bigg|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}$$

3. $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x,y)=\begin{cases} x^2y^2, & \text{si } y>\frac{1}{2} \\ 10 & \text{si } y\leq \frac{1}{2}\end{cases} \quad \text{en } R=[-1,1]\times[0,1]$$

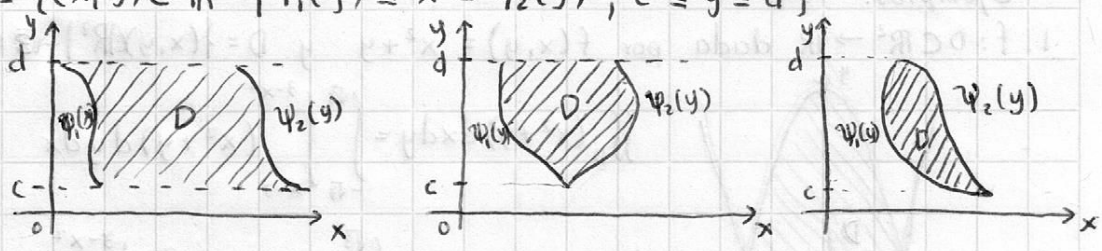
Como la función es integrable, calculemos ~~la integral~~
$$\int_0^1\int_{-1}^1 f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{1}{2}}\int_{-1}^1 10\,dx\,dy + \int_{\frac{1}{2}}^1\int_{-1}^1 x^2y^3\,dx\,dy$$

Integrales dobles en regiones más generales

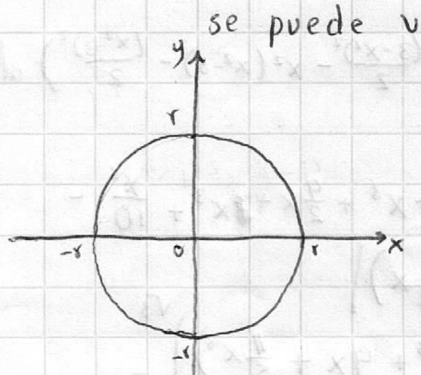
Definición. Decimos que $D\subset\mathbb{R}^2$ es una región elemental de tipo I si
$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\leq x\leq b\ ;\ \varphi_1(x)\leq y\leq \varphi_2(x)\}$$



Definición. Decimos que $D\subset\mathbb{R}^2$ es una región elemental de tipo II si
$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \psi_1(y)\leq x\leq \psi_2(y)\ ;\ c\leq y\leq d\}$$



Definición. Decimos que $D\subset\mathbb{R}^2$ es una región elemental de tipo III si se puede ver como de tipo II o de tipo I



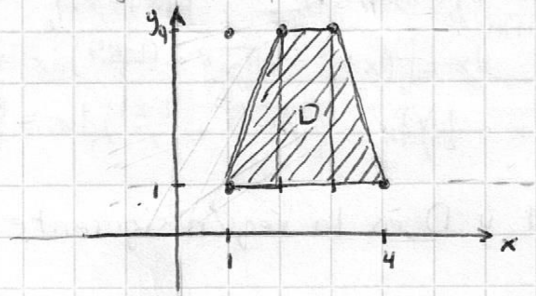
Para calcular la integral en una región D de tipo I para una función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, lo primero que hacemos es extender la función a un rectángulo R dado.

$R=[a,b]\times[c,d]$ donde ~~$c=\inf_D \varphi_1(x)$ y $d=\sup_D \varphi_2(x)$~~

$c=\inf\limits_D \varphi_1(x)$, $d=\sup\limits_D \varphi_2(x)$

Tarea ↓

2. $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x + e^y$, D es la región limitada por las rectas que unen los puntos $(1,1)$, $(4,1)$, $(2,4)$ y $(3,4)$



$$\mathcal{L}_1 = (1,1) + t(3,0)$$
$$\mathcal{L}_2 = (3,4) + s(1,-3)$$
$$\mathcal{L}_3 = (4,1) + u(-1,3)$$
$$\mathcal{L}_4 = (4,1) + \omega(-1,-3)$$

$$\iint_D (x+e^y)\,dx\,dy = \int_1^2 \int_1^{3x-2} (x+e^y)\,dy\,dx + \int_2^3 \int_1^4 (x+e^y)\,dy\,dx + \int_3^4 \int_1^{-3x+13} (x+e^y)\,dy\,dx$$

$y - 4 = -3(x-3)$

$y = 3(x-3) + 4$

$= -3x + 9 + 4 = -3x + 13$

$$= \int_1^2 (xy + e^y)\Big|_1^{3x-2} dx + \int_2^3 (xy+e^y)\Big|_1^4 dx + \int_4^3 (xy+e^y)\Big|_1^{-3x+13} dx$$

$$= \int_1^2 \left(3x^2 - 2x + e^{3x-2} - (x+e)\right) dx + \int_2^3 (4x + e^4 - x - e)\,dx +$$

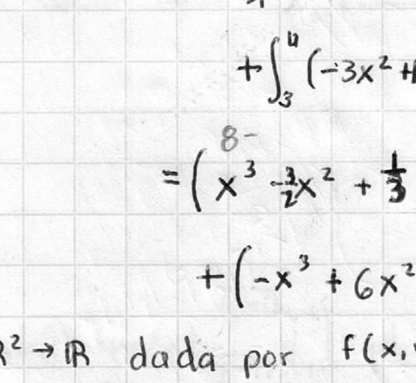
$$+ \int_3^4 (-3x^2 + 13x + e^{-3x+13} - x - e)\,dx$$

$$= \left(x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}e^{3x-2} - ex\right)\Big|_1^2 + \left(\tfrac{3}{2}x^2 + e^4 x - ex\right)\Big|_2^3 +$$

$$+ \left(-x^3 + 6x^2 - \tfrac{1}{3}e^{-3x-2} - ex\right)\Big|_3^4 =$$

3. $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ donde D es el círculo unitario.

4. $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \operatorname{sen}(x+y)$ y D es la región siguiente



$$\iint_D \operatorname{sen}(x+y)\,dx\,dy = \int_0^{3\pi} \int_x^{3\pi} \operatorname{sen}(x+y)\,dy\,dx$$

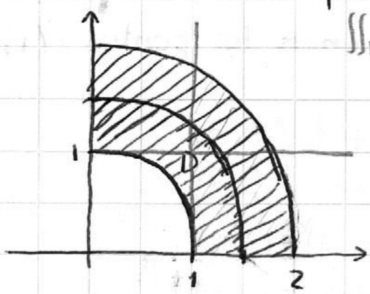
$$= \int_0^{3\pi} -\cos(x+y)\Big|_x^{3\pi} dx = \int_0^{3\pi} \left(-\cos(x+3\pi) + \cos(2x)\right) dx$$

$$= \left(-\operatorname{sen}(x+3\pi) - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right)\Big|_0^{3\pi} = 0$$

¿Podemos encontrar una relación entre las derivadas parciales y la integral?

15 - feb. - 2011

5. $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x+y$ y D es la región siguiente



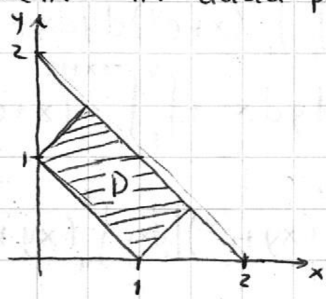
$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_{\sqrt{1-x^2}}^{1}(x+y)\,dy\,dx + \int_0^1\int_1^{\sqrt{4-x^2}}(x+y)\,dy\,dx +$$

$$+\int_1^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}(x+y)\,dy\,dx = \int_0^1\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{\sqrt{1-x^2}}^{1}dx + \int_0^1\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^{\sqrt{4-x^2}}dx +$$

$$+\int_1^2\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{\sqrt{4-x^2}}dx = \int_0^1\left(x+\frac{1}{2}-x\sqrt{1-x^2}-\frac{(1-x^2)}{2}\right)dx +$$

$$+\int_0^1\left(x\sqrt{4-x^2}+\frac{4-x^2}{2}-x-\frac{1}{2}\right)dx + \int_1^2\left(x\sqrt{4-x^2}+\frac{4-x^2}{2}\right)dx = \frac{8}{6}+I_2+I_3$$

6. $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x+y+1$ y D es la región siguiente.



7. $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \sqrt{a^2-x^2}$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le \sqrt{a^2-y^2};\ 0 \le y \le a\}$

$$\iint_D \sqrt{a^2-x^2}\,dx\,dy = \int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}\sqrt{a^2-x^2}\,dx\,dy \overset{x=a\,\mathrm{sen}\,z}{=\!=\!=} \frac{a^2}{2}\int_0^a\left(\mathrm{arcsen}\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{a}+\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{a^2}\,y\right)dy$$

$x = a\,\mathrm{sen}\,z$

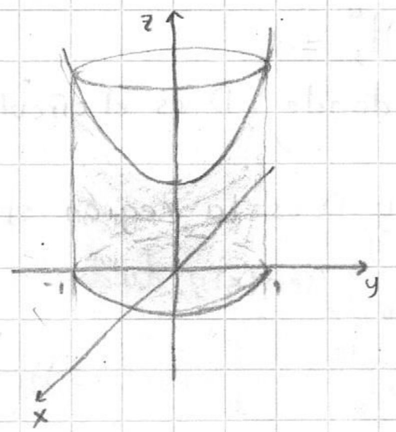
$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = a\int\sqrt{1-\mathrm{sen}^2 z}\,\cos z$$

$$= a^2\int\cos^2 z\,dz$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(z+\frac{1}{2}\cos 2z\right)$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\mathrm{arcsen}\frac{x}{a}+\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right)$$

3.



$$\iint_D (x^2+y^2+1)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}(x^2+y^2+1)\,dx\,dy \qquad u =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(\left(\frac{x^3}{3}+y^2x+x\right)\Big|_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\right)dy$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(\frac{2(1-y^2)^{\frac{3}{2}}}{3}+2(y^2+1)\sqrt{1-y^2}\right)dy$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-y^2}\left(\frac{2}{3}(1-y^2)+2(y^2+1)\right)\right)dy = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\left(\frac{4}{3}y^2-\frac{8}{3}\right)dy$$

$$= \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 z\,dz + \frac{4}{3}\int_{-1}^{1}y^2\sqrt{1-y^2}\,dy = \frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2z)\,dz + \frac{4}{3}\int_{-1}^{1}y^2\sqrt{1-y^2}\,dy$$

$$= \frac{4}{3}\pi + \frac{4}{3}\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 z)\cos^2 z\,dz = \frac{8}{3}\pi + \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2z)^2\,dz = 4\pi - \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 4z}{2}\,dz$$

$$= 4\pi - \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{21}{6}\pi$$

16-feb-2011

Teorema. Si $f: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función integrable en el paralelepípedo $\Pi = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ contenido en Ω y alguna de las integrales existe, entonces

$$\iiint_{\Pi} f(x,y,z) = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_3}^{b_3}\int_{a_2}^{b_2} f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx$$

$$= \int_{a_3}^{b_3}\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz$$

$$= \int_{a_3}^{b_3}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3}\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy$$

$$= \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$$

Ejemplo.
Calcular $\iiint_{\Pi} (x^2 + e^y + z)\,dx\,dy\,dz$ si $\Pi = [-1,1] \times [0,1] \times [2,3]$

$$\iiint_{\Pi} (x^2 + e^y + z)\,dx\,dy\,dz = \int_2^3\int_0^1\int_{-1}^1 (x^2 + e^y + z)\,dx\,dy\,dz = \int_2^3\int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} + xe^y + xz\right)\Big|_{-1}^1 dy\,dz$$

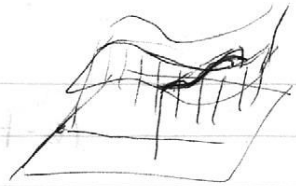
$$= \int_2^3\int_0^1 \left(\frac{1}{3} + e^y + z + \frac{1}{3} + e^y + z\right) dy\,dz = \int_2^3\int_0^1 \left(\frac{2}{3} + 2e^y + 2z\right) dy\,dz$$

$$= \int_2^3 \left(\frac{2}{3}y + 2e^y + 2zy\right)\Big|_0^1 dz = \int_2^3 \left(\frac{2}{3} + 2e + 2z - 2\right) dz$$

$$= \int_2^3 \left(-\frac{4}{3} + 2e + 2z\right) dz = \left(-\frac{4}{3}z + 2ez + z^2\right)\Big|_2^3$$

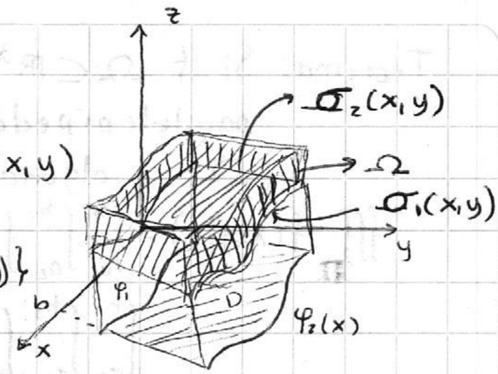
$$= \left(-4 + 6e + 9\right) - \left(-\frac{8}{3} + 4e + 4\right) = \frac{11}{3} + 2e$$

$\frac{-27+8}{3}$

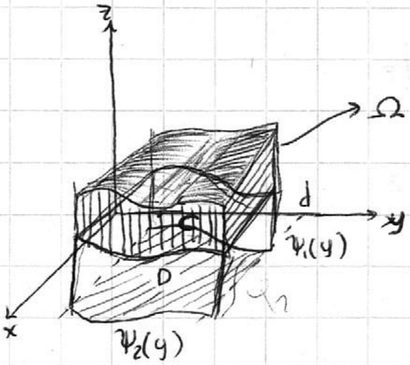


Regiones elementales en $\mathbb{R}^3$

1. Si $D \subset \mathbb{R}^2$ es una región de tipo I y $\sigma_1, \sigma_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tales que $\sigma_1(x,y) \le \sigma_2(x,y)$ decimos que
$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D;\ \sigma_1(x,y) \le z \le \sigma_2(x,y)\}$$
es una región elemental en $\mathbb{R}^3$



2.



Si $D \subset \mathbb{R}^2$ es una región de tipo II y $\beta_1, \beta_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tales que $\beta_1(x,y) \le \beta_2(x,z)$, decimos que
$$\Omega \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D,\ \beta_1(x,y) \le z \le \beta_2(x,y)\}$$
es una región elemental en $\mathbb{R}^3$.

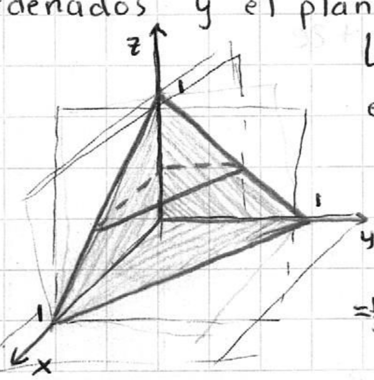
3. Si $D \subset \mathbb{R}^2$ es una región de tipo I y $\omega_1, \omega_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son funciones tales que $\omega_1(x,z) \le \omega_2(x,z)$, decimos que $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,z) \in D;\ \omega_1(x,z) \le y \le \omega_2(x,z)\}$ es una región elemental en $\mathbb{R}^3$

4. Si $D \subset \mathbb{R}^2$ es una región elemental del tipo II y $\alpha_1, \alpha_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son funciones tales que $\alpha_1(x,z) \le \alpha_2(x,z)$, decimos que
$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,z) \in D;\ \alpha_1(x,z) \le y \le \alpha_2(x,z)\}$ es una región elemental en $\mathbb{R}^3$

5, 6,

7. Cualquier región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ simétrica en $\mathbb{R}^3$ es una región elemental en $\mathbb{R}^3$

1. Calcular la integral de $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por
$f(x,y,z) = (x+2y+3z)^2$ donde Ω es limitada por los planos coordenados y el plano $x+y+z=1$



La región Ω es un tetraedro cuyos vértices están en los puntos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$

Entonces
$$\iiint_\Omega (x+2y+3z)^2\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (x+2y+3z)^2\,dz\,dy\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \int_0^{1-x} \left(\frac{(x+2y+3z)^3}{3} \right)\Bigg|_0^{1-x-y} dy\,dx = \frac{1}{9}\int_0^1 \int_0^{1-x}$$

$x+2y+3-3x-3y$

16 - feb - 2011

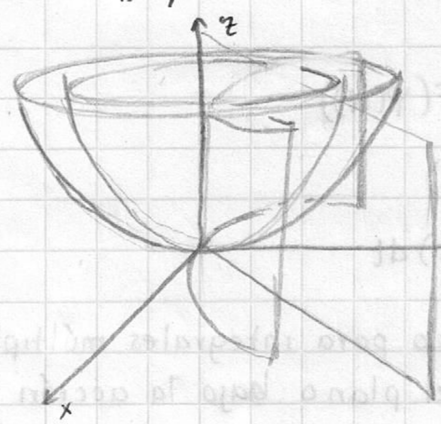
$$= \frac{1}{9}\int_0^1\int_0^{1-x}\left(\left(-2x-y+3\right)^3-\left(x+2y\right)^3\right)dy\,dx$$

$$= -\frac{1}{9}\int_0^1 \frac{(-2x-y+3)^4}{4}\Big|_0^{1-x} dx - \frac{1}{18}\int_0^1 \frac{(x+2y)^4}{4}\Big|_0^{1-x} dx$$

$$= -\frac{1}{36}\int_0^1\left((2-x)^4-(-2x+3)^4\right)dx - \frac{1}{72}\int_0^1 \left((-x+2)^4 - x^4\right)dx$$

$$= \frac{1}{36}\,\frac{(2-x)^5}{5}\Big|_0^1 - \frac{1}{72\cdot 5}(-2x+3)^5\Big|_0^1 + \frac{1}{72\cdot5}(-x+2)^5\Big|_0^1 + \frac{1}{72\cdot 5}x^5\Big|_0^1$$

2.- Calcular la integral de $f:\Omega\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z)=1$, donde Ω es la región limitada por los paraboloides $z=x^2+y^2$, $z=4x^2+4y^2$, el cilindro $y=x^2$ y el plano $y=3x$



Determinemos la intersección $y=x^2$ y $y=3x$, ~~la es~~ es en el punto $(3,9)$

Entonces

$$\iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \int_0^3\int_{x^2}^{3x}\int_{x^2+y^2}^{4x^2+4y^2} dz\,dy\,dx$$

$$=\int_0^3\int_{x^2}^{3x}\left(4x^2+4y^2-x^2-y^2\right)dy\,dx$$

$$=\int_0^3\int_{x^2}^{3x}\left(3x^2+4y^2\right)dy\,dx = \int_0^3\left(3x^2+\frac{4}{3}y^3\right)\Big|_{x^2}^{3x}dx$$

$$= \cancel{\int_0^3\left(3x^2+\frac{4}{3}\cdot 27x^3-\frac{4}{3}x^6\right)dx}$$

$$= \cancel{\int_0^3\left(3x^2+36x^3-\frac{4}{3}x^6\right)}$$

17-feb-2011

Cambio de variable en integrales múltiples

Enunciemos el resultado siguiente para funciones $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

Teorema. Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función continua y $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ es una función de clase $C^1_{[\alpha,\beta]}$ tal que

i) $f\circ\varphi$ es continua

ii) $\varphi(\alpha)=b$ y $\varphi(\beta)=b$ entonces $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Demostración.

Consideremos F una primitiva de f, es decir, $\int f(x)dx = F(x)+c$

es decir, $F'(x)=f(x)$

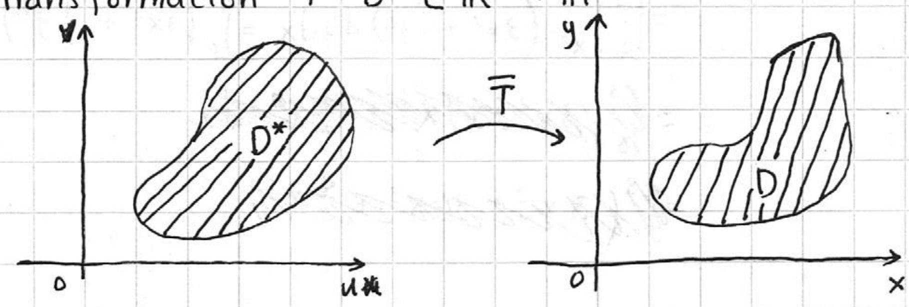
Además $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

Tenemos que
$$\left(F(\varphi(t))\right)' = \frac{dF(\varphi(t))}{dt}\,\frac{d\varphi(t)}{dt} = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t)$$
$$= f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$$

Entonces
$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$
$$= F(b)-F(a)$$

Por lo tanto
$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

Antes de enunciar un resultado parecido para integrales múltiples, veamos cómo se modifican las regiones en el plano bajo la acción de una transformación $\overline{T}: D^*\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

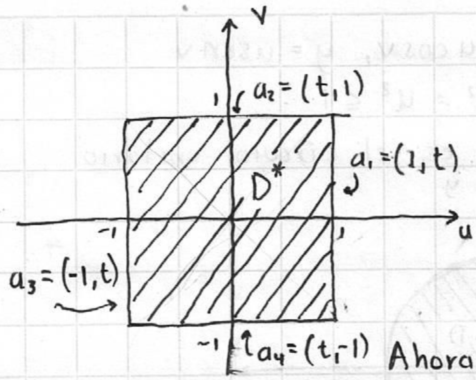


$\overline{T}(u,v)=(\varphi(u,v),\Psi(u,v))$ es decir $x=\varphi(u,v)$, $y=\Psi(u,v)$

Ejemplo.

Si $\overline{T}:D^*\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ está dada por $\overline{T}(u,v)=(u\cos v, u\,\text{sen}\,v)$ y $D^*=\{(u,v)\mid 0\le u\le 1;\ 0\le v\le 2\pi\}$, ¿Cuál es el conjunto D, tal que $\overline{T}(D^*)=D$?

17 - feb - 2011



¿ $\overline{T}(D^*)$? $\overline{T}(u,v) = (u+v,\ u-v)$

Determinemos a dónde manda los vértices

$\overline{T}(1,1) = (2,0)$

$\overline{T}(-1,1) = (0,-2)$

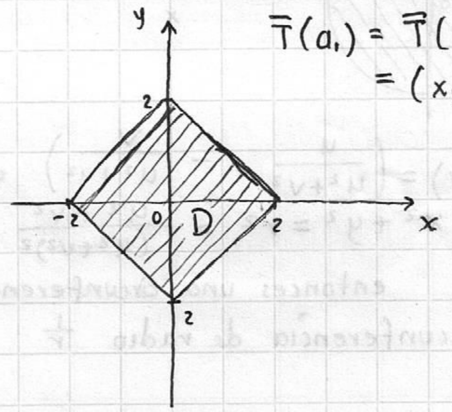
$\overline{T}(-1,-1) = (-2,0)$

$\overline{T}(1,-1) = (0,2)$

Ahora determinemos a dónde manda las aristas

$\overline{T}(a_1) = \overline{T}(1,t) = (1+t,\ 1-t)$; $y = -x+2$

$= (x,\ -x+2)$



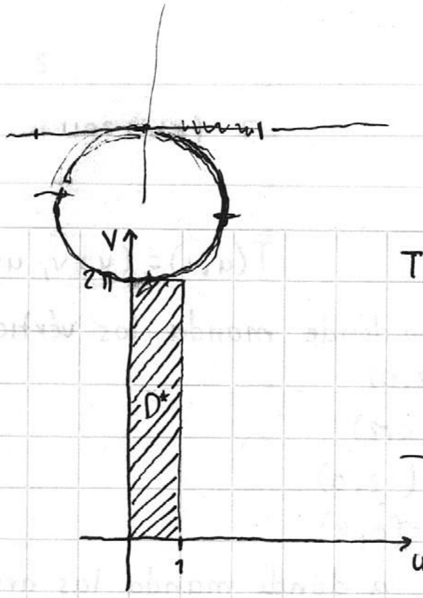
$x = y$, $x = -y$

$(2x, 0)$ $(0, -2x)$

$2y,\ 0$

$0,\ -2y$

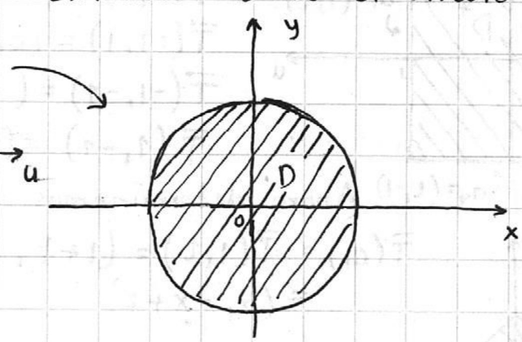
17-feb-2011



Tenemos $x = u\cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$

Como $x^2+y^2 = u^2 \le 1$

Entonces D es el círculo unitario

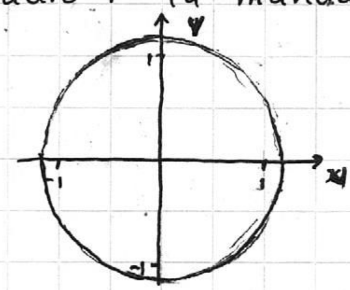


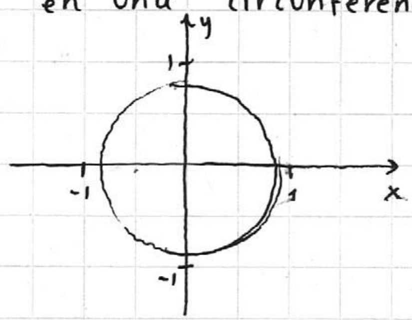
Ejemplo

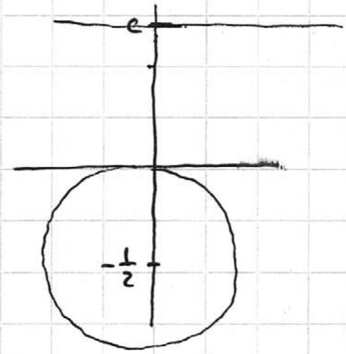
Si $\overline{T}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está dada por $\overline{T}(u,v) = \left(\frac{u}{u^2+v^2}, -\frac{v}{u^2+v^2}\right)$ es decir,

$x = \frac{u}{u^2+v^2}$, $y = -\frac{v}{u^2+v^2}$ $\qquad x^2+y^2 = r^2 = \frac{u^2+v^2}{(u^2+v^2)^2}$

Tenemos que $x^2+y^2 = \frac{u^2+v^2}{(u^2+v^2)^2} = \frac{1}{u^2+v^2}$ entonces una circunferencia de radio r la manda en una circunferencia de radio $\frac{1}{r}$







~~Ejemplo~~ Las rectas $v=c$ las transforma en:

$$v = -y(u^2+v^2)$$

$$v = -\frac{y}{x^2+y^2} \; ; \; c = -\frac{y}{x^2+y^2} \qquad cx^2+cy^2+y=0$$

$$x^2+y^2+\frac{y}{c} = 0$$

$$x^2 + \left(y+\frac{1}{2c}\right)^2 - \left(\frac{1}{2c}\right)^2 = 0$$

es decir, las manda a una circunferencia con centro en $-\frac{1}{2c}$

Ejemplo. Si $\overline{T}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está dada por $\overline{T}(u,v) = (u^2-v^2, 2uv)$

¿Cuál es la geometría de esta transformación? Ahora consideremos la transformación $\overline{T}: D^* \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\overline{T}(u,v) = (u+v, u-v)$ y $D^* = [-1,1] \times [-1,1]$