llevar disco a Itzá

Si sustituimos z por $1+z$ y p por $p+q$ se tiene

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+z)^{p+q}} = \int_0^{+\infty} t^{p+q-1} e^{-(1+z)t}\,dt$$

Ahora multipliquemos ambos lados de la igualdad por z^{p-1}, entonces

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+z)^{p+q}}\, z^{p-1} = z^{p-1}\int_0^{+\infty} t^{p+q-1} e^{-(1+z)t}\,dt$$

Al integrar respecto del parámetro z desde 0 hasta $+\infty$ se tiene

$$\int_0^{+\infty} \frac{\Gamma(p+q)}{(1+z)^{p+q}}\, z^{p-1}\,dz = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} z^{p-1} t^{p+q-1} e^{-(1+z)t}\,dt\,dz$$

luego

$$\Gamma(p+q)B(p,q) = \int_0^{+\infty} dz \int_0^{+\infty} z^{p-1} t^{p+q-1} e^{-(1+z)t}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} t^{p+q-1}\,dt \int_0^{+\infty} z^{p-1} e^{-(1+z)t}\,dz = \int_0^{+\infty} t^{p+q-1} e^{-t}\,dt \int_0^{+\infty} z^{p-1} e^{-zt}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} t^{p+q-1} e^{-t}\,\frac{\Gamma(p)}{t^p}\,dt \qquad \text{por } (*,*)$$

$$= \int_0^{+\infty} t^{q-1} e^{-t}\,\Gamma(p)\,dt = \Gamma(p)\int_0^{+\infty} t^{q-1} e^{-t}\,dt = \Gamma(p)\Gamma(q)$$

en consecuencia

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

A través de las funciones gamma y beta resolvamos algunas integrales

1. $$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{5}{4}-1}}{(1+x)^{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}}}\,dx = B\left(\tfrac{5}{4},\tfrac{3}{4}\right) = \frac{\Gamma(\frac{5}{4})\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(2)} = \Gamma\left(\tfrac{5}{4}\right)\Gamma\left(\tfrac{3}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\Gamma\left(\tfrac{1}{4}\right)\Gamma\left(\tfrac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}\,\frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

← este resultado se obtiene con una fórmula muy complicada, y no sería ilustrativo deducirla.

$\cos^2 = 1 - \operatorname{sen}^2$

$\cos = \sqrt{1 - \underbrace{\operatorname{sen}^2}_{z}}$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{\frac{5}{4}} x \cos^{\frac{3}{2}} x\,dx$. Hagamos el cambio de variable $z = \operatorname{sen}^2 x$ y se tiene

$$I = \int_0^1 \left(z^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{5}{2}} \left((1-z)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\tfrac{1}{2}\right) \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{1}{2}}}\,dz = \frac{1}{2}\int_0^1 z^{\frac{3}{4}}(1-z)^{\frac{1}{4}}\,dz$$

$$= \frac{1}{2}B\left(\tfrac{7}{4},\tfrac{5}{4}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(\frac{7}{4})\Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(3)} = \frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\Gamma\left(\tfrac{3}{4}\right)\Gamma\left(\tfrac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{3}{64}\Gamma\left(\tfrac{3}{4}\right)\Gamma\left(\tfrac{1}{4}\right)$$

3. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{p-1} x \cos^{q-1} x \, dx$

hagamos el cambio de variable $z = \operatorname{sen}^2 x$, entonces

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 z^{\frac{p-1}{2}} (1-z)^{\frac{q-1}{2}} \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{1}{2}}}\, dz = \frac{1}{2}\int_0^1 z^{\frac{p}{2}-1} (1-z)^{\frac{q}{2}-1}\, dz$$

$$= \frac{1}{2} B\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{p}{2})\Gamma(\frac{q}{2})}{\Gamma(\frac{p+q}{2})}$$

Si $q=1$ se obtiene $I = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{p}{2})\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{p+1}{2})}$

Si al integrar una función $f(x)$ n veces se obtiene

$$F(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\, dt$$ y concebimos el proceso de integración como

el inverso del proceso de derivación, se tiene,

$$F(x) = \overset{\text{derivación}}{D}{}^{-n} f(x) \text{, entonces } D^{-n} f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)\, dt$$

$$D^{-n} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)\, dt$$

Por lo que sin necesidad de que $\lambda \in \mathbb{N}$, escribimos

$$D^{-\lambda} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^x (x-t)^{\lambda-1} f(t)\, dt$$

Para definir la derivada de orden μ de $f(x)$, se considera el mínimo número natural m mayor que μ de tal forma que μ se puede escribir en la forma $\mu = m - \rho$ donde $0 < \rho < 1$.

Entonces $D^{\mu} f(x) = D^m D^{-\rho} = \frac{d^m}{dx^m} D^{-\rho} = \frac{d^m}{dx^m} \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_0^x (x-t)^{\rho-1} f(t)\, dt$

$$= \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_0^x (x-t)^{\rho-1} f^{(m)}(t)\, dt$$

Integrales de línea

Consideremos un alambre ℓ con una densidad lineal de masa $\rho: \ell \to \mathbb{R}$, es decir, ρ es una función tal que a cada punto $\bar{p} \in \ell$ le asocia el número $\rho(\bar{p})$.

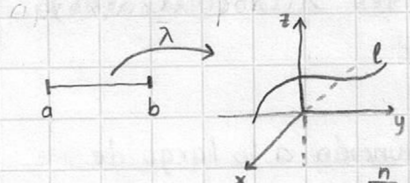
Si ρ es constante, la masa total del alambre es $m = \rho L(\ell)$ donde $L(\ell)$ es la longitud del alambre si ℓ es la traza de $\bar{\lambda}: [a,b] \to \mathbb{R}^3$, entonces $m = \rho \int_a^b \|\bar{\lambda}'(t)\| \, dt$

¿Si ρ no es constante cómo se calcula la masa total del alambre?

Hagamos una partición Π del intervalo $[a,b]$, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ la cual tiene una partición en el alambre $\bar{P}_0 < \bar{P}_1 < \cdots < \bar{P}_n$ (no es de magnitud es de cuál aparece primero)

Para cada subintervalo $[\bar{P}_{i-1}, \bar{P}_i]$ tomemos la densidad en algún punto $\bar{\bar{\zeta}}_i \in (\bar{P}_{i-1}, \bar{P}_i)$ y se tiene que la masa m_i del pedazo de alambre cuyos segmentos son $\bar{P}_{i-1}$ y $\bar{P}_i$ es aproximadamente igual al producto de $\rho(\bar{\bar{\zeta}}_i)$ por la longitud del pedazo de alambre entre $\bar{P}_{i-1}$ y $\bar{P}_i$, es decir

$\rho(\bar{\bar{\zeta}}_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\bar{\lambda}'(t)\| \, dt$ esta expresión se puede escribir como $\rho(\bar{\bar{\zeta}}_i) \|\bar{\lambda}'(\xi_i)\| (t_i - t_{i-1})$ (Por el Teorema del valor medio para integrales)



si tomamos $\bar{\bar{\zeta}}_i$ de tal forma que $\bar{\lambda}(\xi_i) = \bar{\bar{\zeta}}_i$, entonces $m_i \approx \rho(\bar{\lambda}(\xi_i)) \|\bar{\lambda}'(\xi_i)\| (t_i - t_{i-1})$ en consecuencia $m \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(\bar{\lambda}(\xi_i)) \|\bar{\lambda}'(\xi_i)\| (t_i - t_{i-1})$

Por lo tanto $m = \lim_{\|\Pi\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\bar{\lambda}(\xi_i)) \|\bar{\lambda}'(\xi_i)\| (t_i - t_{i-1}) = \int_a^b \rho(\bar{\lambda}(t)) \|\bar{\lambda}'(t)\| \, dt$

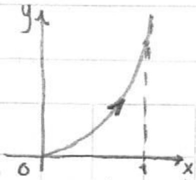
Definición. Si $f: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función continua y $\mathcal{C}$ es una curva dada por $\bar{\lambda}: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ donde $\bar{\lambda}$ es simple, regular y de clase $C^1_{[a,b]}$ tal que $\bar{\lambda}_{[a,b]} \subset D$, decimos que $\int_{\bar{\lambda}} f \, ds$ es la integral a lo largo de la curva $\mathcal{C}$. Además $\int_{\bar{\lambda}} f \, ds = \int_a^b f(\bar{\lambda}(t)) \|\bar{\lambda}'(t)\| \, dt$

$$m = \int_a^b \rho(\bar{\lambda}(t)) \|\bar{\lambda}'(t)\| \, dt$$

$$\int_{\bar{\lambda}} f \, ds = \int_a^b f(\bar{\lambda}(t)) \|\bar{\lambda}'(t)\| \, dt$$

Si $f(x,y,z) = 1$, entonces se obtiene la longitud de la curva.

Definición. Si $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función en D y $\bar{\lambda}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es una trayectoria simple y de clase $C^1_{[a,b]}$ tal que $\bar{\lambda}_{[a,b]} \subset D$, decimos que $\int_{\bar{\lambda}} ds = \int_a^b f(\bar{\lambda}(t)) \|\bar{\lambda}'(t)\| dt$ es la in



Ejemplo.

Si $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ está dada por $f(x,y)=xy$, calcular su integral a lo largo de la curva dada $\bar{\lambda}:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ tal que $\bar{\lambda}(t)=(t,t^2)$

$u=t^2$
$u'=2t$
$dv=\sqrt{1+4t^2}$
$v=(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}$

$$\int_{\bar{\lambda}} xy\,ds=\int_0^1 t^3\sqrt{1+4t^2}\,dt=\frac{1}{8}\int_0^1 t^2\sqrt{1+4t^2}\,8t\,dt$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{2}{3}\right)t^2(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1-\frac{1}{6}\int_0^1 t(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}dt$$

$$=\frac{5\sqrt{5}}{12}-\frac{1}{120}(1+4t^2)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1=\frac{5\sqrt{5}}{12}-\frac{25\sqrt{5}}{120}+\frac{1}{120}=\frac{25\sqrt{5}+1}{120}$$

Ejemplo 2.

Ahora calculemos la integral de la misma a lo largo de la curva $\bar{\alpha}:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ dada por $\bar{\alpha}(t)=(1-t,(1-t)^2)$

$$\int_{\bar{\alpha}} xy\,ds=\int_0^1(1-t)^3\sqrt{1+4(1-t)^2}\,dt\ \underset{}{\overset{u=1-t}{=\!=}}\ \int_1^0 u^3\sqrt{1+4u^2}\,(-du)=\int_0^1 u^3\sqrt{1+4u^2}\,du$$

$$=\frac{25\sqrt{5}+1}{120}$$

3. Si $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ está dada por $f(x,y)=x^2+y^2$, calcular la integral de f a lo largo de la curva dada por $\bar{\lambda}:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ tal que $\bar{\lambda}(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t)$

$$\int_{\bar{\lambda}}(x^2+y^2)\,ds=\int_0^{2\pi}dt=2\pi$$

4. Si ahora calculamos la integral de la misma función a lo largo de $\bar{\mu}:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ tal que $\bar{\mu}(t)=(-\operatorname{sen}2t,\cos 2t)$ tenemos

$$\int_{\bar{\mu}}(x^2+y^2)\,ds=2\int_0^{2\pi}dt=4\pi=2(2\pi)$$

Teorema. Si $f:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es una función continua y $\mathcal{C}$ es una curva de clase $C^1_{[a,b]}$, entonces la integral de f a lo largo de $\mathcal{C}$ es invariante bajo reparametrizaciones de la curva $\mathcal{C}$.

Demostración.

Si $\bar{\lambda}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ es una ~~re~~parametrización de $\mathcal{C}$ y $\bar{\mu}:[c,d]\to\mathbb{R}^n$ es una reparametrización de $\bar{\lambda}$, es decir, existe $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ sobreyectiva, regular de clase $C_{[c,d]}$ tal que $\bar{\mu}=\bar{\lambda}\circ\varphi$, entonces

$$\int_{\bar{\mu}} f\,ds=\int_c^d f(\bar{\mu}(t))\,\|\bar{\mu}'(t)\|\,dt=\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(\bar{\lambda}(\varphi(t)))\,\|\bar{\lambda}'(\varphi(t))\varphi'(t)\|\,dt$$

Ahora consideremos los dos casos posibles

i) $\varphi'(t)>0$

ii) $\varphi'(t)<0$

i) Si $\varphi'(t)>0$ se tiene

como φ es creciente

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(\bar{\lambda}(\varphi(t)))\,\|\bar{\lambda}'(\varphi(t))\|\,|\varphi'(t)|\,dt = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(\bar{\lambda}(\varphi(t)))\,\|\bar{\lambda}'(\varphi(t))\|\,\varphi'(t)\,dt$$

$$\underset{du=\varphi'(t)dt}{\overset{u=\varphi(t)}{=\!=}} \int_a^b f(\bar{\lambda}(u))\,\|\bar{\lambda}'(u)\|\,du = \int_{\bar{\lambda}} f\,ds$$

ii) Si $\varphi'(t)<0$

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(\bar{\lambda}(\varphi(t)))\,\|\bar{\lambda}'(\varphi(t))\|\,|\varphi'(t)|\,dt = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(\bar{\lambda}(\varphi(t)))\,\|\bar{\lambda}'(\varphi(t))\|\,(-\varphi'(t))\,dt$$

como φ es decreciente

$$= \int_{\varphi(d)}^{\varphi(c)} f(\bar{\lambda}(\varphi(t)))\,\|\bar{\lambda}'(\varphi(t))\|\,\varphi'(t)\,dt \underset{du=\varphi'(t)dt}{\overset{u=\varphi(t)}{=\!=}} \int_a^b f(\bar{\lambda}(u))\,\|\bar{\lambda}'(u)\|\,du$$

$$= \int_{\bar{\lambda}} f\,ds$$

Teorema. Si $f: D\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función continua, $\mathscr{C}$ es una curva dada por $\bar{\lambda}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ y $\bar{\mu}:[c,d]\to\mathbb{R}^n$ también tiene como imagen la curva $\mathscr{C}$ pero la recorre n veces, es decir, existe una función $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ de clase $C^1_{[c,d]}$ $\bar{\mu}=\bar{\lambda}\circ\varphi$ y existe una partición de $[c,d]$
$c=t_0<t_1<\dots<t_n$ tal que $\varphi[t_{i-1},t_i]=[a,b]$, donde φ' es de signo constante, entonces $\int_{\bar{\mu}} f\,ds = n\int_{\bar{\lambda}} f\,ds$

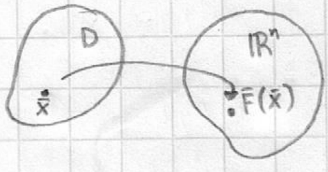
Demostración.

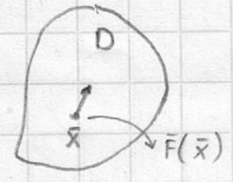
$$\int_{\bar{\mu}} f\,ds = \int_c^d f(\bar{\mu}(t))\,\|\bar{\mu}'(t)\|\,dt = \sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\bar{\mu}(t))\,\|\bar{\mu}'(t)\|\,dt$$

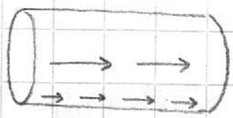
$$= \sum_{i=1}^{n}\int_{\varphi(t_{i-1})}^{\varphi(t_i)} f(\bar{\lambda}(\varphi(t)))\,\|\bar{\lambda}'(\varphi(t))\|\,|\varphi'(t)|\,dt$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\int_a^b f(\bar{\lambda}(u))\,\|\bar{\lambda}'(u)\|\,du = n\int_a^b f(\bar{\lambda}(u))\,\|\bar{\lambda}'(u)\|\,du = n\int_{\bar{\lambda}} f\,ds$$

Definición. Decimos que $\bar{F}: D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$





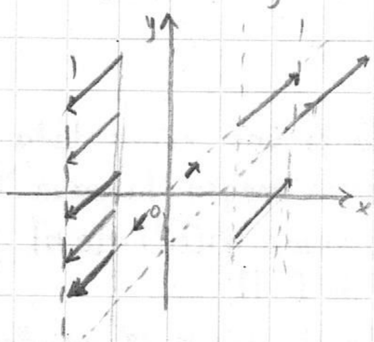


Definición. Decimos que $\bar{F}: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial continuo si cada una de las componentes de $\bar{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ son funciones continuas.

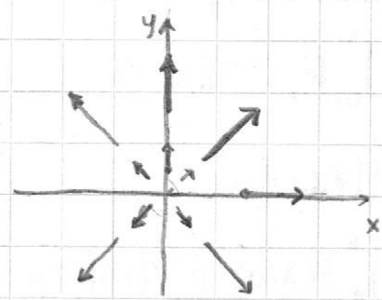
Definición. Decimos que $\bar{F}: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial de clase C_D^k si cada una de las componentes de $\bar{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ son funciones de clase C_D^k.

Ejemplos.

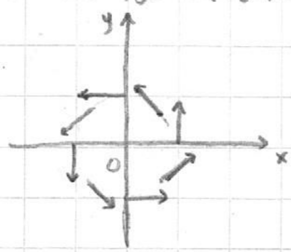
1. $\bar{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\bar{F}(x,y) = (x, x)$, tiene como componentes $F_1(x,y) = x$ y $F_2(x,y) = x$ que son funciones continuas de clase $C^k_{\mathbb{R}^2}$



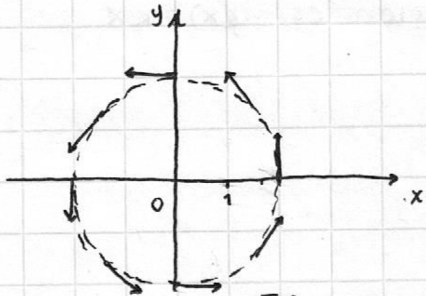
2. $\bar{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\bar{F}(x,y) = (x,y)$ es un campo vectorial de clase $C^k_{\mathbb{R}^2}$



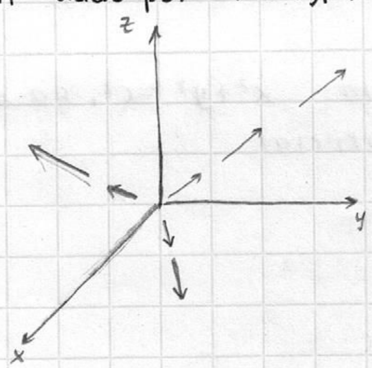
3. $\bar{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $\bar{F}(x,y) = (-y, x)$ es un campo vectorial de clase $C^k_{\mathbb{R}^2}$



4. $\bar{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por $\bar{F}(x,y)=\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$



5. $\bar{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dado por $\bar{F}(x,y,z)=(x,y,z)$



Definición. Si $\bar{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ es un campo vectorial, decimos que $\mathscr{C}$ en $\mathbb{R}^2$ es una línea del flujo del campo si para cada punto sobre $\mathscr{C}$ el campo es tangente, es decir, si $y=f(x)$ es una líneade flujo, entonces $y'(x)=\frac{F_2(x,y)}{F_1(x,y)}$.

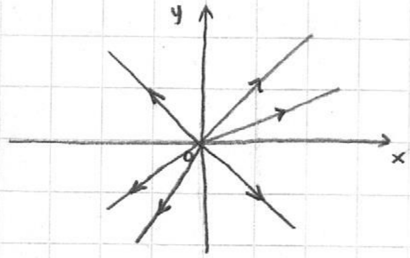
Por lo tanto para encontrar las líneas de un campo vectorial $\bar{F}=(F_1,F_2)$ en $\mathbb{R}^2$, se debe resolver la ecuación diferencial
$$y'(x)=\frac{F_2}{F_1}.$$

Ejemplos.

1. Determinar las líneas de flujo del campo vectorial dado por $\bar{F}(x,y)=(x,x)$, la ecuación diferencial de las líneas de flujo es $y'(x)=1$ cuya solución es $y(x)=x+c$

$$dy = y'dx$$
$$dy = \frac{y}{x}dx$$
$$\int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x}$$
$$\ln y = \ln x + c$$

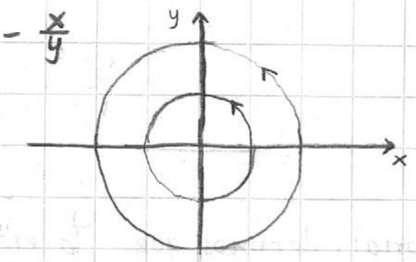
2. Las líneas de flujo para el campo dado por $\bar{F}(x,y)=(x,y)$ quedan determinadas por $y' = \frac{y}{x}$ cuya solución es $y(x) = kx$



3. ¿Cuáles son las líneas de flujo de los campos dados por $\bar{F}(x,y) = (-y,x)$ y $\bar{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$?

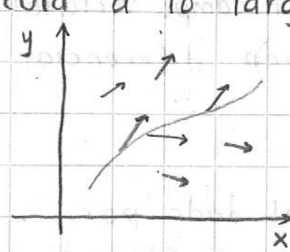
Las líneas de flujo son las circunferencias $x^2+y^2=c^2$, ya que son las soluciones de la ecuación diferencial

$$y'(x) = -\frac{x}{y}$$

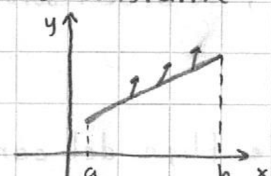


Si $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable, entonces queda definido en D el campo vectorial $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$

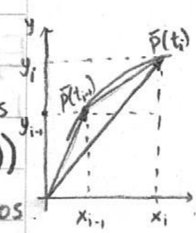
Consideremos un campo de fuerzas $\bar{F}$ en $\mathbb{R}^2$ y una curva $\mathscr{C}$ en $\mathbb{R}^2$ dada por $\bar{\lambda}:[a,b] \to \mathbb{R}^2$. ¿Cuál es el trabajo que se realiza para mover una partícula a lo largo de la curva $\mathscr{C}$ a través del campo $\bar{F}$?



Si $\bar{F}$ es constante y $\mathscr{C}$ es una recta



entonces el trabajo $W = \bar{F}\cdot\bar{d}$ donde $\bar{d}$ es el desplazamiento, es decir, $W = \bar{F}\cdot(\bar{\lambda}(b) - \bar{\lambda}(a))$



Si $\bar{F}$ no es constante y $\mathscr{C}$ no necesariamente es una recta, consideremos una partición de $[a,b]$, $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$, la cual induce una partición de la curva $\mathscr{C}$ $\bar{P}_0 < \bar{P}_1 < \dots < \bar{P}_n$, entonces el trabajo W_i en el subintervalo $[\bar{P}_{i-1}, \bar{P}_i]$ es aproximadamente igual al producto de $\bar{F}(\bar{\xi}_i)$ con $\bar{\xi}_i \in (\bar{P}_{i-1}, \bar{P}_i)$ por el desplazamiento en línea recta desde $\bar{P}_{i-1}$ hasta $\bar{P}_i$, es decir,

$$W_i \approx \bar{F}(\bar{\xi}_i)\cdot(\bar{P}_i - \bar{P}_{i-1}) = \bar{F}(\bar{\xi}_i)\cdot(\Delta x_i, \Delta y_i) = \bar{F}(\bar{\xi}_i)\cdot(\bar{\lambda}(t_i) - \bar{\lambda}(t_{i-1}))$$
$$= \bar{F}(\bar{\xi}_i)\cdot\bar{\lambda}'(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$$

i) Si $\varphi'(t)>0$ para $t\in[c,d]$ entonces

$\int_c^d \bar F(\bar\lambda(\varphi(t)))\cdot\bar\lambda'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ al hacer el cambio de variable $u=\varphi(t)$ se transforma en

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \bar F(\bar\lambda(u))\cdot\bar\lambda'(u)\,du = \int_a^b \bar F(\bar\lambda(u))\cdot\bar\lambda'(u)\,du = \int_{\bar\lambda}\bar F\cdot d\bar\lambda$$

Luego $\int_{\bar\mu}\bar F\cdot d\bar\mu = \int_{\bar\lambda}\bar F\cdot d\bar\lambda$

ii) Si $\varphi'(t)<0$ para $t\in[c,d]$, entonces $\int_c^d \bar F(\bar\lambda(\varphi(t)))\cdot\bar\lambda'(\varphi(t))\,dt$ al hacer el cambio de variable $u=\varphi(t)$ se transforma en

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \bar F(\bar\lambda(u))\cdot\bar\lambda'(u)\,du = \int_b^a \bar F(\bar\lambda(u))\cdot\bar\lambda'(u)\,du = -\int_a^b \bar F(\bar\lambda(u))\cdot\bar\lambda'(u)\,du = -\int_{\bar\lambda}\bar F\cdot d\bar\lambda$$

es decir, $\int_{\bar\mu}\bar F\cdot d\bar\mu = -\int_{\bar\lambda}\bar F\cdot d\bar\lambda$

Teorema. Si $\bar F: D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ es un campo vectorial continuo, $\bar\lambda:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ es de clase C_D^1 tal que $\bar\lambda_{[a,b]}\subset D$ y satisface $\bar\lambda=\bar\lambda_1+\bar\lambda_2$, entonces

$$\int_{\bar\lambda}\bar F\cdot d\bar\lambda = \int_{\bar\lambda_1}\bar F\cdot d\bar\lambda_1 + \int_{\bar\lambda_2}\bar F\cdot d\bar\lambda_2 = \int_{\bar\lambda_1}\bar F\cdot d\bar\lambda + \int_{\bar\lambda_2}\bar F\cdot d\bar\lambda$$

Demostración

Consideremos $\bar\lambda(t)=\begin{cases}\bar\lambda_1(t), & \text{si } t\in[a,c]\\ \lambda_2(t), & \text{si } t\in[c,b]\end{cases}$

entonces
$$\int_{\bar\lambda}\bar F\cdot d\bar\lambda = \int_a^b \bar F(\bar\lambda(t))\cdot\bar\lambda'(t)\,dt = \int_a^c \bar F(\bar\lambda(t))\cdot\bar\lambda'(t)\,dt + \int_c^b \bar F(\bar\lambda(t))\cdot\bar\lambda'(t)\,dt$$
$$= \int_{\bar\lambda_1}\bar F\cdot d\bar\lambda_1 + \int_{\bar\lambda_2}\bar F\cdot d\bar\lambda_2 = \int_{\bar\lambda_1}\bar F\cdot d\bar\lambda + \int_{\bar\lambda_2}\bar F\cdot d\bar\lambda$$

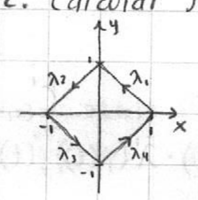
Este resultado se puede utilizar para calcular la integral de línea cuando $\bar\lambda$ sólo es de clase C^1 a pedazos.

Ejemplos

1. Calcular $\int_{\bar\lambda}\bar F\cdot d\bar\lambda$ para $\bar F(x,y)=(x^2+y^2,xy)$ y $\bar\lambda:[-1,1]\to\mathbb{R}^2$ dada por $\bar\lambda(t)=(t,|t|)$

$$\int_{\bar\lambda}\bar F\cdot d\bar\lambda = \int_{-1}^0 (2t^2,-t^2)\cdot(1,-1)\,dt + \int_0^1 (2t^2,t^2)\cdot(1,1)\,dt$$
$$= \int_{-1}^0 3t^2\,dt + \int_0^1 3t^2\,dt = t^3\Big|_{-1}^0 + t^3\Big|_0^1 = 2$$

2. Calcular $\int_{\bar\lambda}\bar F\cdot d\bar\lambda$ para $\bar F(x,y)=(x^2+y^2,xy)$ y $\bar\lambda$ dada por $|x|+|y|=1$



$\bar\lambda=\bar\lambda_1+\bar\lambda_2+\bar\lambda_3+\bar\lambda_4$ entonces

$$\int_{\bar\lambda}\bar F\cdot d\bar\lambda = \int_{\bar\lambda_1}\bar F\cdot d\bar\lambda + \int_{\bar\lambda_2}\bar F\cdot d\bar\lambda + \int_{\bar\lambda_3}\bar F\cdot d\bar\lambda + \int_{\bar\lambda_4}\bar F\cdot d\bar\lambda$$

$\bar\lambda_1:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ está dada por $\bar\lambda_1(t)=(1-t,t)$

$\bar\lambda_2:[-1,0]\to\mathbb{R}^2$; $\bar\lambda_2=(-1-t,-t)$

$\bar\lambda_3:[-1,0]\to\mathbb{R}^2$; $\bar\lambda_3=(t,-1-t)$

$\bar\lambda_4:[0,1]\to\mathbb{R}^2$; $\bar\lambda_4=(t,t-1)$

Si en seguida se toma $\bar{\xi}_i$ tal que $\bar{\xi}_i = \bar{\lambda}(\xi_i)$ entonces

$W_i \approx \bar{F}(\bar{\lambda}(\xi_i)) \cdot \bar{\lambda}'(\xi_i)\Delta t_i$

Por lo tanto $W \approx \sum_{i=1}^{n} W_i \approx \sum_{i=1}^{n} \bar{F}(\bar{\lambda}(\xi_i)) \cdot \bar{\lambda}(\xi_i)\Delta t_i$

en consecuencia

$$W = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar{F}(\bar{\lambda}(\xi_i)) \cdot \bar{\lambda}'(\xi_i)\Delta t_i = \int_a^b \bar{F}(\bar{\lambda}(t)) \cdot \bar{\lambda}'(t)\,dt$$

Definición. Si $\bar{F}: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial continuo y $\bar{\lambda}:[a,b] \to \mathbb{R}$ es de clase C'_D y $\bar{\lambda}_{[a,b]} \subset D$, decimos que

$$\int_{\bar{\lambda}} \bar{F} \cdot d\bar{\lambda} = \int_a^b \bar{F}(\bar{\lambda}(t)) \cdot \bar{\lambda}'(t)\,dt$$ es la integral de $\bar{F}$ a lo largo de $\bar{\lambda}$.

Si $\bar{\lambda}$ es cerrada se escribe $\oint_{\bar{\lambda}} \bar{F} \cdot d\bar{\lambda} = \int_a^b \bar{F}(\bar{\lambda}(t)) \cdot \bar{\lambda}'(t)\,dt$.

Ejemplos.

1. Si $\bar{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está dada por $\bar{F}(x,y) = (x^2, xy)$ y $\bar{\lambda}:[0,1] \to \mathbb{R}^2$ está dada por $\bar{\lambda}(t) = (t, t^2)$, calcular $\int_{\bar{\lambda}} \bar{F} \cdot d\bar{\lambda}$.

$$\int_{\bar{\lambda}} \bar{F} \cdot d\bar{\lambda} = \int_0^1 (t^2, t^3) \cdot (1, 2t)\,dt = \int_0^1 (t^2 + 2t^4)\,dt = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}$$

2. Calcular $\int_{\bar{\mu}} \bar{F} \cdot d\bar{u}$ para el mismo campo y $\bar{\mu}:[0,\frac{1}{2}] \to \mathbb{R}^2$ dada por $\bar{\mu}(t) = (2t, 4t^2)$

$$\int_{\bar{\mu}} \bar{F} \cdot d\bar{\lambda} = \int_0^{\frac{1}{2}} (4t^2, 8t^3) \cdot (2, 8t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}} (8t^2 + 64t^4)\,dt = \frac{8t^3}{3}\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{64t^5}{5}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{11}{15}$$

3. Calcular $\int_{\bar{\lambda}_1} \bar{F} \cdot d\bar{\lambda}_1$ para el mismo campo pero a lo largo de $\bar{\lambda}_1:[0,1] \to \mathbb{R}^2$ dada por $\bar{\lambda}_1(t) = (1-t, (1-t)^2)$

$$\int_{\bar{\lambda}_1} \bar{F} \cdot d\bar{\lambda}_1 = \int_0^1 ((1-t)^2, (1-t)^3) \cdot (-1, -2(1-t))\,dt = \int_0^1 (-(1-t)^2 - 2(1-t)^4)\,dt$$

$$= \left(\frac{(1-t)^3}{3} + \frac{2}{5}(1-t)^5\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{3} - \frac{2}{5} = -\frac{11}{15}$$

Teorema. Si $\bar{F}: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial continuo, $\bar{\lambda}:[a,b] \to \mathbb{R}^n$ es de clase C'_D tal que $\bar{\lambda}_{[a,b]} \subset D$ y $\bar{\mu}:[c,d] \to \mathbb{R}^n$ es una reparametrización de $\bar{\lambda}$, entonces i) $\int_{\bar{\mu}} \bar{F} \cdot d\bar{\mu} = \int_{\bar{\lambda}} \bar{F} \cdot d\bar{\lambda}$ si $\bar{\lambda}$ y $\bar{\mu}$ tienen la misma dirección.

ii) $\int_{\bar{\mu}} \bar{F} \cdot d\bar{\mu} = -\int_{\bar{\lambda}} \bar{F} \cdot d\bar{\lambda}$ si $\bar{\lambda}$ y $\bar{\mu}$ tienen direcciones opuestas.

Demostración.

Como $\bar{\mu}$ es una reparametrización de $\bar{\lambda}$, existe $\varphi:[c,d] \to [a,b]$, regular de clase $C'_{[a,b]}$ tal que $\bar{\mu} = \bar{\lambda}(\varphi(t))$, entonces $\int_{\bar{\mu}} \bar{F} \cdot d\bar{\mu} = \int_c^d \bar{F}(\bar{\mu}(t)) \cdot \bar{\mu}'(t)\,dt = \int_c^d \bar{F}(\bar{\lambda}(\varphi(t))) \cdot \bar{\lambda}'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$

$$\int_{\bar\lambda} \bar F \cdot d\bar\lambda = \int_0^1 \left(\left((1-t)^2+t^2, (1-t)t\right)\cdot(-1,1)\right)dt + \int_{-1}^0 \left(\left((-1-t)^2+t^2, (-1-t)t\right)\cdot(-1,-1)\right)dt +$$

$$+\int_{-1}^0 \left(t^2+(-1-t)^2, t(-1-t)\right)\cdot(1,-1)dt + \int_0^1 \left(t^2+(t-1)^2, t(t-1)\right)\cdot(1,1)dt$$

$$= \int_0^1 \left(-((1-t)^2+t^2)+(1-t)t\right)dt + \int_{-1}^0 \left(-((-1-t)^2+t^2)+(-1-t)t\right)dt +$$

$$+\int_{-1}^0 \left(t^2+(-1-t)^2-t(-1-t)\right)dt + \int_0^1 \left(t^2+(t-1)^2+t(t-1)\right)dt$$

$$= \frac{(1-t)^3}{3}\Big|_0^1 - \frac{2t^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + \int_{-1}^0 \left(-(1+2t+t^2-t^2)-t-t^2\right)dt + \qquad = 0$$

$$-1-2t-\cancel{t^2}+\cancel{t^2} \qquad -1-3t-t^2$$

$$\int_{-1}^0 \left(t^2+1+2t+t^2+t+t^2\right)dt + \int_0^1 \left(t^2+t^2-2t+t+t^2-t\right)dt$$

$$3t^2+3t+1 \qquad\qquad 3t^2-2t$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - t\Big|_{-1}^0 - \frac{3}{2}t^2\Big|_{-1}^0 - \frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^0 + t^3\Big|_{-1}^0 + \frac{3}{2}t^2\Big|_{-1}^0 + t\Big|_{-1}^0 + t^3\Big|_0^1 - t^2\Big|_0^1 = 0$$

3. Calcular $\int_{\bar\lambda} \bar F\cdot d\bar\lambda$ para $\bar F(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ y $\bar\lambda : [0, k\pi] \to \mathbb{R}^2$ dada por $\bar\lambda(t) = (r\cos t, r\,\mathrm{sen}\,t)$

$$\int_{\bar\lambda} \bar F\cdot d\bar\lambda = \int_0^{k\pi}\left(-\frac{\mathrm{sen}\,t}{r}, \frac{\cos t}{r}\right)\cdot(-r\,\mathrm{sen}\,t, r\cos t)dt$$

$$= \int_0^{k\pi} dt = k\pi$$

4. Si $\bar F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está dado por $\bar F(x,y) = (y,x)$, calcular $\int_{\bar\lambda}\bar F\cdot d\bar\lambda$ para $\bar\lambda : [0,1]\to\mathbb{R}^2$ dada por $\bar\lambda(t) = (t,t)$

$$\int_{\bar\lambda} \bar F\cdot d\bar\lambda = \int_0^1 (t,t)\cdot(1,1)dt = \int_0^1 2t\,dt = 1$$

5. Calcular $\int_{\bar\mu}\bar F\cdot d\bar\mu$ para el campo anterior, $\bar\mu : [0,1]\to\mathbb{R}^2$ y está dada por $\bar\mu(t) = (t, t^n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\int_{\bar\mu}\bar F\cdot d\bar\mu = \int_0^1 (t^n, t)\cdot(1, nt^{n-1})dt = \int_0^1 (t^n+nt^n)dt = \int_0^1 (n+1)t^n dt = t^{n+1}\Big|_0^1 = 1$$

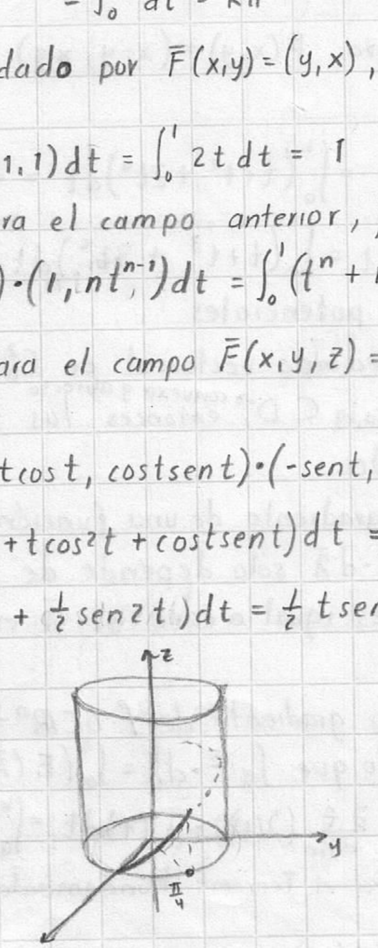
6. Calcular $\int_{\bar\lambda}\bar F\cdot d\bar\lambda$ para el campo $\bar F(x,y,z) = (yz, xz, xy)$ y $\bar\lambda : [0, \frac{\pi}{4}]\to\mathbb{R}^3$ dada por $\bar\lambda(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\,t, t)$

$$\int_{\bar\lambda}\bar F\cdot d\bar\lambda = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(t\,\mathrm{sen}\,t, t\cos t, \cos t\,\mathrm{sen}\,t)\cdot(-\mathrm{sen}\,t, \cos t, 1)\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(-t\,\mathrm{sen}^2 t + t\cos^2 t + \cos t\,\mathrm{sen}\,t\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(t(\cos^2 t - \mathrm{sen}^2 t) + \cos t\,\mathrm{sen}\,t\right)dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(t\cos 2t + \tfrac{1}{2}\mathrm{sen}\,2t\right)dt = \frac{1}{2}t\,\mathrm{sen}\,2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cancel{\mathrm{sen}\,2t\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{sen}\,2t\,dt} = 0$$

$$= \frac{\pi}{8}$$



7. Calcular $\int_{\bar\mu}\bar F\cdot d\bar\mu$ para el campo del ejemplo 6 y $\bar\mu$ la recta que empieza en $(1,0,0)$ y termina en $\left(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2},\frac{\pi}{4}\right)$. $\bar\mu:[0,1]\to\mathbb{R}^3$, $\bar\mu(t)=\left(1+\left(\frac{\sqrt2}{2}-1\right)t,\frac{\sqrt2}{2}t,\frac{\pi}{4}t\right)$

$$\int_{\bar\mu}\bar F\cdot d\bar\mu=\int_0^1\bar F\left(1+\left(\tfrac{\sqrt2}{2}-1\right)t,\tfrac{\sqrt2}{2}t,\tfrac{\pi}{4}t\right)\cdot\left(\tfrac{\sqrt2}{2}-1,\tfrac{\sqrt2}{2},\tfrac{\pi}{4}\right)dt$$

$$=\int_0^1\left(\tfrac{\pi}{8}\sqrt2 t^2,\tfrac{\pi}{4}t+\tfrac{\pi}{4}t^2\left(\tfrac{\sqrt2}{2}-1\right),\tfrac{\sqrt2}{2}t+\tfrac{\sqrt2}{2}t^2\left(\tfrac{\sqrt2}{2}-1\right)\right)\cdot\left(\tfrac{\sqrt2}{2}-1,\tfrac{\sqrt2}{2},\tfrac{\pi}{4}\right)dt$$

$$=\int_0^1\left(\tfrac{\pi}{8}t^2-\tfrac{\pi}{8}\sqrt2t^2+\tfrac{\pi}{8}\sqrt2t+\tfrac{\pi}{8}\sqrt2t^2\left(\tfrac{\sqrt2}{2}-1\right)+\tfrac{\sqrt2}{8}\pi t+\tfrac{\pi}{8}\sqrt2t^2\left(\tfrac{\sqrt2}{2}-1\right)\right)dt$$

$$=\frac{\pi}{8}\int_0^1\left(t^2-\sqrt2t^2+\sqrt2t+2\sqrt2t^2\left(\tfrac{\sqrt2}{2}-1\right)+t\right)dt$$

revisar

$$=\frac{\pi}{8}\int_0^1\left(t^2\left(1-\sqrt2+2\sqrt2\left(\tfrac{\sqrt2}{2}-1\right)\right)+t(\sqrt2+\pi)\right)dt=\frac{\pi}{8}\left(\left(\cancel{1}-\sqrt2+2-\cancel{1}\right)\frac{t^3}{3}\Big|_0^1+\frac{t^2}{2}(\sqrt2+1)\Big|_0^1\right)$$

$$=\frac{\pi}{8}$$

8. Calcular $\int_{\bar\lambda}\bar F\cdot d\bar\lambda=\int_{\bar\mu}\bar F\cdot d\bar\mu$ para $F(x,y)=(x+y,xy)$ $\bar\lambda(t)=(t,t^2)$ y $\bar\mu(t)=(t,t^3)$, $t\in[0,1]$

$$\int_{\bar\lambda}\bar F\cdot d\bar\lambda=\int_0^1(t+t^2,t^3)\cdot(1,2t)dt=\int_0^1(t+t^2+2t^4)dt=\tfrac12+\tfrac13+\tfrac25=\tfrac{37}{30}$$

$$\int_{\bar\mu}\bar F\cdot d\bar\mu=\int_0^1(t+t^3,t^4)\cdot(1,3t^2)dt=\int_0^1(t+t^3+3t^6)dt=\tfrac12+\tfrac14+\tfrac37=\tfrac{33}{28}$$

Campos conservativos y funciones potenciales

Teorema. Si $\bar F:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ es un campo vectorial de C^2_D y $\bar\lambda:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ es de clase $C^1_{[a,b]}$ tal que $\bar\lambda_{[a,b]}\subset D$, convexo y abierto, entonces las tres proposiciones siguientes son equivalentes

i) $\bar F=(F_1,F_2,\dots,F_n)$ es el campo gradiente de una función $f:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ de clase C^1_D

ii) La integral de línea $\int_{\bar\lambda}\bar F\cdot d\bar\lambda$ sólo depende de los puntos inicial y final de λ

iii) La integral de $\oint_{\bar\lambda}\bar F\cdot d\bar\lambda$ es igual a cero si $\bar\lambda$ es cerrada.

Demostración.

i)⇒ii) Como $\bar F=(F_1,F_2,\dots,F_n)$ es el campo gradiente de $f:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, entonces $(F_1,F_2,\dots,F_n)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$. Por lo que $\int_{\bar\lambda}\bar F\cdot d\bar\lambda=\int_a^b(F_1(\bar\lambda(t)),\dots,F_n(\bar\lambda(t)))\cdot\bar\lambda'(t)dt$

$$=\int_a^b\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar\lambda(t)),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar\lambda(t))\right)\cdot\bar\lambda'(t)dt=\int_a^b\underbrace{\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar\lambda(t))\bar\lambda_i'(t)}_{\text{que es la derivada total}}dt$$

$$=\int_a^b\frac{df}{dt}(\bar\lambda(t))\,dt$$ Por el Teorema Fundamental del Cálculo.

$$\int_{\bar\lambda}\bar F\cdot d\bar\lambda=f(\lambda(b))-f(\lambda(a))$$

ii) $\Rightarrow$ iii) Consideremos $\bar{\lambda}$ cerrada. Escribámosla en la forma $\bar{\lambda}=\bar{\lambda}_1+\bar{\lambda}_2$, entonces

$$\oint_{\bar{\lambda}} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda} = \int_{\bar{\lambda}_1} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda} + \int_{\bar{\lambda}_2} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda} = \int_{\bar{\lambda}_1} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda} - \int_{-\bar{\lambda}_2} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda} = 0$$ $\rightarrow$ Porque comparten los puntos inicial y final.

iii) $\Rightarrow$ ii) $\oint_{\bar{\lambda}} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda}=0$. Si $\bar{\lambda}_1$ y $\bar{\lambda}_2$ comparten sus puntos inicial y final, entonces $\bar{\lambda}=\bar{\lambda}_1-\bar{\lambda}_2$ es una curva cerrada, por lo que

$$\int_{\bar{\lambda}} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda} = \int_{\bar{\lambda}_1} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda} - \int_{\bar{\lambda}_2} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda} = 0$$

Por lo tanto

$$\int_{\bar{\lambda}_1} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda} = \int_{\bar{\lambda}_2} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda}$$ es decir sólo depende de los puntos iniciales y finales pues los comparten.

ii) $\Rightarrow$ i) Si $\bar{p}$ es cualquier punto en D y $\bar{x}$ es cualquier otro punto en D, consideremos $\bar{\lambda}_{\bar{x}}$ tal que su punto inicial es $\bar{p}$ y su punto final es $\bar{x}$, definamos

$f(\bar{x}) = \int_{\bar{\lambda}_{\bar{x}}} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda}$ Mostremos que el campo $\bar{F}=(F_1,F_2,\dots,F_n)$ es el campo gradiente de f, es decir,

$$F_1=\frac{\partial f}{\partial x_1},\ \dots,\ F_n=\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

Como D es abierto existe $\varepsilon>0$ tal que $B(\bar{x};\varepsilon)\subset D$ por lo que si h es suficientemente pequeño $(\bar{x}+h\bar{e}_i)\in B_{\bar{x}}$, en consecuencia podemos considerar $\bar{\lambda}_{\bar{x}+h\bar{e}_i}$ tal que su punto inicial es p y su punto final es $\bar{x}+h\bar{e}_i$

Luego

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\bar{x}+h\bar{e}_i)-f(\bar{x})}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{\bar{\lambda}_{\bar{x}+h\bar{e}_i}} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda} - \int_{\bar{\lambda}_x} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{\bar{\lambda}_x} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda} + \int_{\bar{\mu}_{\bar{x},\bar{x}+h\bar{e}_i}} \bar{F}\cdot d\bar{\mu} - \int_{\bar{\lambda}_x} \bar{F}\cdot d\bar{\lambda}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\bar{\mu}_{\bar{x},\bar{x}+h\bar{e}_i}} \bar{F}\cdot d\bar{\mu}$$

Si tomamos $\bar{\mu}_{\bar{x},\bar{x}+h\bar{e}_i}:[0,h]\to\mathbb{R}^n$ en la forma $\bar{\mu}_{\bar{x},\bar{x}+h\bar{e}_i}(t)=\bar{x}+t\bar{e}_i$

entonces

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\bar{\mu}_{\bar{x},\bar{x}+h\bar{e}_i}} \bar{F}\cdot d\bar{\mu} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h \bar{F}(\bar{x}+t\bar{e}_i)\cdot\bar{\mu}'_{\bar{x},\bar{x}+h\bar{e}_i}(t)\,dt$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h F_i(\bar{x}+t\bar{e}_i)\,dt$$

Si ahora consideramos $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $\phi(s)=\int_0^s F_i(\bar{x}+t\bar{e}_i)\,dt$ y calculamos su derivada en $s=0$, obtenemos

$$(\phi'(s))_{s=0} = \lim_{h\to 0}\frac{\phi(h)-\phi(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\phi(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\phi(h) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h F_i(\bar{x}+t\bar{e}_i)\,dt$$

es decir, $(\phi'(s))_{s=0} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ Pero por otro lado

$$(\phi'(s))_{s=0} = \frac{d}{ds}\left(\int_0^s F_i(\bar{x}+t\bar{e}_i)\,dt\right)_{s=0} = \left(F_i(\bar{x}+s\bar{e}_i)\right)_{s=0} = F_i(x)$$

Por lo tanto $\frac{\partial f}{\partial x_i}=F_i$ para todo $i=1,\dots,n$

Definición. Si $\bar{F}: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial que satisface el teorema anterior, decimos que es un campo vectorial conservativo, y a $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = \bar{F}$ se le llama potencia de $\bar{F}$.

Ejemplos

El campo vectorial $\bar{F}(x,y) = (x^2+y, x+y^2)$ es conservativo ya que $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3}$ es una función potencial de $\bar{F}$.

2. El campo vectorial $\bar{F}(x,y) = (x^2, xy)$ no es consevativo ya que si $\bar{\lambda}, \bar{\mu} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ están dadas por $\bar{\lambda}(t) = (t,t)$ y $\bar{\mu}(t) = (t, t^n)$ se tiene $\int_{\bar{\lambda}} \bar{F} \cdot d\bar{\lambda} = \int_0^1 2t^2 = \frac{2}{3}$ mientras que $\int_{\bar{\mu}} \bar{F} \cdot d\bar{\mu} = \int_0^1 (t^2, t^{n+1})(1, nt^{n-1})\,dt$

$$= \int_0^1 (t^2 + nt^{2n})\,dt = \frac{1}{3} + \frac{n}{2n+1}$$

3. El campo vectorial $\bar{F}: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ dado por $\bar{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ no es conservativo ya que $\oint_{\bar{\lambda}} \bar{F} \cdot d\bar{\lambda}$ con $\bar{\lambda}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ para $0 \leq t \leq 2\pi$ es igual a 2π

4. El campo vectorial $\bar{F}(x,y) = (y, x)$ es conservativo $f(x,y) = xy$ es una función potencial.

5. El campo vectorial $\bar{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dado por $\bar{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ con $F_i = x_1 x_2 \cdots x_{i-1} x_i \cdots x_n$ es conservativo ya que $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(\bar{x}) = x_1 x_2 \cdots x_n$ es una función potencial

¿Cuáles son las condiciones que debe satisfacer un campo vectorial $\bar{F}: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ para ser conservativo?

Consideremos $\bar{F}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ conservativo, entonces existe $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = F_1$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = F_2$ para todo $(x,y) \in D$. Si $f \in C_D^2$, al derivar la primera ecuación con respecto de y y la segunda con respecto de x, se obtiene

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \quad y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

Por lo tanto $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$

Entonces una condición necesaria para que $\bar{F}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sea conservativo es que $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ para todo $(x,y) \in D$, pero no es condición suficiente ya que $\bar{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ satisface la condición, y ya sabemos que no es conservativo.

$$\frac{\partial\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2) + 2y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad y \quad \frac{\partial\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2) - 2x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

¿Cómo determinar una función potencial **f** de un campo conservativo $\bar{F}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$?

Como $\bar{F} = (F_1, F_2)$ es conservativo, existe $f(x,y)$ tal que

$\frac{\partial f}{\partial x} = F_1$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = F_2$ por lo que

$f(x,y) = \int F_1(x,y)\,dx + g(y)$ que si derivamos con respecto de y nos lleva a $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int F_1(x,y)\,dx + g'(y)$

Luego $\frac{\partial}{\partial y}\int F_1(x,y)\,dx + g'(y) = F_2(x,y)$

Por lo que $g'(y) = F_2(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int F_1(x,y)\,dx$ en consecuencia

$$g(y) = \int \left(F_2(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int F_1(x,y)\,dx \right) dy \qquad (*)$$

Por lo tanto

$$f(x,y) = \int F_1(x,y)\,dx + \int\left(F_2(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int F_1(x,y)\,dx\right) dy$$

¿Cómo se garantiza que en $(*)$ la integral sólo depende de y?

Mostremos que el integrando en $(*)$ no depende x, vamos a derivarlo con respecto de x.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(F_2(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int F_1(x,y)\,dx\right) = \frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\int F_1(x,y)\,dx\right)$$

$$= \frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\int \frac{\partial}{\partial y} F_1(x,y)\,dx = \frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} = 0$$

Por lo tanto el integrando sólo depende de y.

Ejemplo.

Demostrar que el campo vectorial $\bar{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $\bar{F}(x,y) = (e^y \cos x + y,\ e^y \operatorname{sen} x + x)$ es conservativo y encontrar una función potencial para $\bar{F}$.

Determinemos f. Tenemos $\frac{\partial f}{\partial x} = e^y \cos x + y$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = e^y \operatorname{sen} x + x$

entonces $f(x,y) = e^y \operatorname{sen} x + xy + g(y)$ Por lo que $\frac{\partial f}{\partial y} = e^y \operatorname{sen} x + g'(x) \Rightarrow g'(y) = 0$

Luego $g(y) = c$

Por lo tanto

$$f(x,y) = e^y \operatorname{sen} x + xy + c$$

X

$\bar{F}=(F_1, F_2, F_3)$ conservativo, es decir, existe $f: D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=F_1,\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=F_2,\quad \frac{\partial f}{\partial x_3}=F_3 \quad (*)$$

Derivemos la primer ecuación respecto de x_2 y x_3 respectivamente $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}=\frac{\partial F_1}{\partial x_2}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3\partial x_1}=\frac{\partial F_1}{\partial x_3}$ y la segunda y la tercera con respecto de x_1 se obtiene

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial F_2}{\partial x_1} \quad y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_3}=\frac{\partial F_3}{\partial x_1}$$

Por lo que $\frac{\partial F_1}{\partial x_2}=\frac{\partial F_2}{\partial x_1}$ y $\frac{\partial F_1}{\partial x_3}=\frac{\partial F_3}{\partial x_1}$

Si ahora derivamos la segunda ecuación en $(*)$ con respecto de x_3 se tiene $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3\partial x_2}=\frac{\partial F_2}{\partial x_3}$ y si la tercera ecuación se deriva con respecto de x_2 se obtiene $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3}=\frac{\partial F_3}{\partial x_2}$

Luego $\frac{\partial F_2}{\partial x_3}=\frac{\partial F_3}{\partial x_2}$

Teorema. Si $\bar{F}: D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^2$ es un campo vectorial conservativo de clase C_D^2, entonces $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x})=\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\bar{x})$ para $\bar{x}\in D$, $1\le i<j\le n$.

Ejemplo.

Si $\bar{F}(x,y,z)=(3y^2z+ye^x,\ 6xyz+e^x,\ 3xy^2)$ determinar una función potencial de $\bar{F}$.

Comprobemos que el campo satisface las condiciones necesarias para ser conservativo.

Consideremos $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x}=3y^2z+ye^x$, $\frac{\partial f}{\partial y}=6xyz+e^x$; $\frac{\partial f}{\partial z}=3xy^2$

Si integramos la última ecuación con respecto a z se obtiene

$$f(x,y,z)=3xy^2z+g(x,y)$$

Al derivar esta ecuación con respecto de x y y respectivamente se obtiene $\frac{\partial f}{\partial x}=3y^2z+\frac{\partial g}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}=6xyz+\frac{\partial g}{\partial y}$, en consecuencia $\frac{\partial g}{\partial x}=ye^x$ y $\frac{\partial g}{\partial y}=e^x$. Luego $g(x,y)=ye^x+c$

Por lo tanto $f(x,y,z)=3xy^2z+ye^x$

Definición. Decimos que la ecuación $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ es una exacta si existe $f: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $\frac{\partial f}{\partial x}=M$ y $\frac{\partial f}{\partial y}=N$ para todo $(x,y)\in D$, es decir si la diferencial total de f que se denota df es igual a cero la Condición necesaria y suficiente para que sea exacta es que las parciales sean iguales y además esté definida en un conjunto convexo.

Se tiene $df(x,y) = 0$ (1)

Pero la solución de (1) es $f(x,y) = c$

Ejemplo. Resolver $(e^y \cos x + y)dx + (e^y \operatorname{sen} x + x)dy = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y \cos x + y \;; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^y \operatorname{sen} x + x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y \cos x + 1 \,, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = e^y \cos x + 1$$

$$\frac{e^y \operatorname{sen} x + x}{e^y \cos x + y} \frac{dy}{dx} = 0$$

La solución de la ecuación es $f(x,y) = e^y \operatorname{sen} x + xy = c$

De lo que hemos visto se deduce que una condición necesaria para que una ecuación de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ sea exacta es que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ para todo $(x,y) \in D$

Ejemplos

1. Resolver la ecuación $(4x - \cos 2y)dx + (2x \operatorname{sen} 2y + 1)dy = 0$

$$\frac{\partial(4x - \cos 2y)}{\partial y} = 2 \operatorname{sen} 2y \;; \quad \frac{\partial(2x \operatorname{sen} 2y + 1)}{\partial x} = 2 \operatorname{sen} 2y$$

Como satisface las condiciones necesarias para ser exacta.

Consideremos $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - \cos 2y \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x \operatorname{sen} 2y + 1$$

se tiene $f(x,y) = 2x^2 - x \cos 2y + g(y)$

Derivemos con respecto de y $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x \operatorname{sen} 2y$

a partir de esta expresión y la segunda ecuación de (*) se obtiene

$g'(y) = 1$. Por lo que $g(y) = y$

Por lo tanto la solución de la ecuación es $2x^2 - x \cos 2y + y = c$

2. Resolver $(x + y^2)dx + x(2y \ln x + 1)dy = 0$

Aunque no es exacta si la multiplicamos por $\frac{1}{x}$ se obtiene una ecuación exact

$$\frac{\partial\left(1 + \frac{y^2}{x}\right)}{\partial y} = 2\frac{y}{x} \qquad \frac{\partial(2y \ln x + 1)}{\partial x} = \frac{2y}{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{y^2}{x} \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \ln x + 1 \Rightarrow f(x,y) = x + y^2 \ln x + g(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \ln x + g'(y) = 2y \ln x + 1 \Rightarrow g'(y) = 1 \Rightarrow g(y) = y$$

$$\therefore \; f(x,y) = x + y^2 \ln x + y$$

3. Resolver $\left(\frac{y}{x^2}\cos x + \frac{1}{y}\right)dx + \frac{2}{x^2}\operatorname{sen} x\, dy = 0$ No es exacta, ya que $\frac{\partial\left(\frac{y}{x^2}\cos x + \frac{1}{y}\right)}{\partial y} = \frac{1}{x^2}\cos x - \frac{1}{y^2}$ y

$$\frac{\partial\left(\frac{2}{x^2}\operatorname{sen} x\right)}{\partial x} = \frac{2}{x^2}\cos x - \frac{4}{x^2}$$

Pero si la ecuación se multiplica por x^2y se obtiene

$(y^2\cos x + x^2)dx + 2y\operatorname{sen} x\, dy = 0$ que es exacta.

Resolvámosla

Consideremos $f(x,y)$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2\cos x + x^2$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\operatorname{sen} x$

entonces $f(x,y) = y^2\operatorname{sen} x + \frac{x^3}{3} + g(y)$ por lo que

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\operatorname{sen} x + g'(y)$ en consecuencia $g(y) = c_1$

Por lo tanto la solución es $y^2\operatorname{sen} x + \frac{x^3}{3} = c$

¿Una ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ no exacta se puede transformar en una exacta por el método de multiplicarla por una función de x y y?

Definición. Decimos que $\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es un factor integrante de la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ si la ecuación $\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$ es exacta.

Para que la función sea exacta se requiere que

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \quad \text{es decir,}$$

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x} \quad \text{o lo que es lo mismo}$$

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} \quad (*)$$

lo que significa que para encontrar la función μ se debe resolver $(*)$

En general resolver la ecuación $(*)$ no es fácil.

Pero se pueden considerar casos particular.

1. μ sólo depende x, en este caso la ecuación $(*)$ queda en la forma

$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{d\mu(x)}{dx}$, es decir

$$\frac{d\mu(x)}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx$$

de donde se obtiene

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx}$$

lo cual existe si $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ sólo es función de x