Cálculo IV

Temario. Integrales múltiples
Integrales de línea
Integrales de superficie
Teorema de Green
Teorema de Stokes
Teorema de Gauss
Sucesiones y series de funciones

Fuentes
Cálculo Marsden
Piskunov
Kudriátsev
Apostol
Courant
Fulks
Stewart

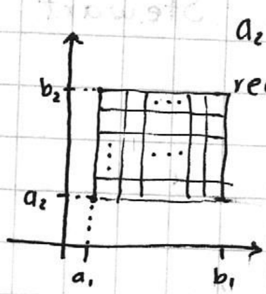
6 Exámenes

Integrales múltiples

Vamos a considerar funciones de varias variables y vamos a estudiar la integral para dichas funciones.

Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función acotada y $R \subset D$ es un rectángulo dado $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, entonces existe $M(f) = \sup_R f$ y $m = \inf_R f$

Definición. Si $R \subset \mathbb{R}^2$ es un rectángulo, decimos que $a_1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b_1$, $a_2 = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b_2$ es una partición P del rectángulo R



Dada una partición de un rectángulo R, se genera una partición en el intervalo sobre el eje x y lo mismo ocurre para el intervalo sobre el eje y.

Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función acotada $R \subset D$ es un rectángulo y P es una partición de R, entonces existen $M_{ij}(f) = \sup_R f$ y $m_{ij}(f) = \inf_{ij} f$. Denotemos por A_{ij} el área del subrectángulo R_{ij}

Definición. Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función acotada, $R \subset D$ es un rectángulo y P es una partición de R, decimos que
$$\bar{S}(f; P) = \sum_{i,j=1}^{n,m} M_{ij}(f) A_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n,m} M_{ij}(f)(x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1})$$
la suma superior de f respecto de la partición P.

Definición. Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función acotada, $R \subset D$ es un rectángulo y P es una partición de R, decimos que
$\underline{S}(f; P) = \sum_{i,j=1}^{n,m} m_{ij}(f) A_{ij}$ es la suma inferior de f respecto de la partición P.

Teorema. Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función acotada, $R \subset D$ es un rectángulo y P es una partición de R, entonces $\bar{S}(f; P) \geq \underline{S}(f; P)$

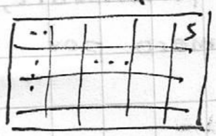
Definición. Si $R \subset \mathbb{R}^2$ es un rectángulo y P es una partición de R, decimos que P' es un refinamiento de P si la partición generada por P' sobre el eje x es un refinamiento de la correspondiente partición generada por P sobre el eje x y lo mismo sobre el eje y.

Teorema. Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función acotada, $R \subset D$ es un rectángulo, P es una partición de R y P' es un refinamiento de P, entonces:
i) $\bar{S}(f;P') \leq \bar{S}(f;P)$
ii) $\underline{S}(f;P') \geq \underline{S}(f;P)$

Demostración.
Si $P' = P$, el resultado se cumple ya que en ambos casos se tiene la igualdad.
Si $P' \neq P$, al menos un subrectángulo de la partición P queda dividido en subrectángulos más pequeños. Si R_{kl} es uno de esos rectángulos, entonces tenemos

$$\bar{S}(f;P) = \sum_{i,j=1}^{m,n} M_{ij}(f) A_{ij} = \sum_{i,j=1}^{k-1,\,l-1} M_{ij}(f) A_{ij} + M_{kl} A_{kl} + \sum_{i,j=k+1,\,l+1}^{m,n} M_{ij}(f) A_{ij}$$

R_{kl}



$$= \sum_{i,j=1}^{k-1,\,l-1} M_{ij}(f) A_{ij} + M_{kl}(A^1_{kl} + \cdots + A^s) + \sum_{i,j=k,l}^{n,m} M_{ij}(f) A_{ij}$$

$i,j = k+1, l+1 \to$

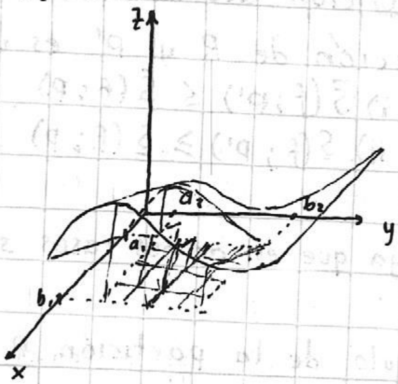
$$\geq \sum_{i,j=1}^{k-1,\,l-1} M_{ij}(f) A_{ij} + M^1_{kl}(f) A^1_{kl} + \cdots M^s_{kl}(f) A^s_{kl} + \sum_{i,j=k,l}^{m,n} M_{ij}(f) A_{ij} \geq \bar{S}(f;P')$$

ii) es similar $\quad i,j = k+1, l+1 \to$

Teorema. Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función acotada, $R \subset D$ es un rectángulo y P_1, P_2 son cualesquiera particiones de R, entonces
$$\bar{S}(f;P_1) \geq \underline{S}(f;P_2)$$

Demostración.
Como $P = P_1 \cup P_2$ es un refinamiento tanto de P_1 como de P_2, entonces
$$\bar{S}(f;P_1) \geq \bar{S}(f;P) \geq \underline{S}(f;P) \geq \underline{S}(f;P_2)$$
Por lo tanto $\bar{S}(f;P_1) \geq \underline{S}(f;P_2)$

Si $f(x,y) \geq 0$



El conjunto de todas las sumas superiores de f sobre todas las particiones del rectángulo R es un conjunto no vacío y acotado inferiormente, entonces existe $\inf_P \{\bar{S}(f;P)\}$. Denotémoslo (el número) en la forma ~~$\inf_P\{\bar{S}(f;P)\}$~~

$$\inf_P \{\bar{S}(f;P)\} = \overline{\iint_R} f(x,y)\,dx\,dy \rightarrow \text{integral superior}$$

El conjunto de todas las sumas inferiores de f sobre todas la particiones del rectángulo R es un conjunto no vacío y acotado superiormente, entonces existe $\sup_P \{\underline{S}(f;P)\}$. Denotemos este número por

$$\sup_P \{\underline{S}(f;P)\} = \underline{\iint_R} f(x,y)\,dx\,dy. \rightarrow \text{integral inferior}$$

Teorema. Si $f:\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada y R es un rectángulo, entonces

$$\overline{\iint_R} f(x,y)\,dx\,dy \geq \underline{\iint_R} f(x,y)\,dx\,dy$$

Demostración.

Como $\bar{S}(f;P) \geq \underline{S}(f;P)$ para cualquier partición P, entonces $\inf_P \{\bar{S}(f;P)\} \geq \underline{S}(f;P)$. Como $\inf_P \{\bar{S}(f;P)\}$ es una cota superior de $\{\underline{S}(f;P)\}$, entonces $\inf_P \{\bar{S}(f;P)\} \geq \sup_P \{\underline{S}(f;P)\}$

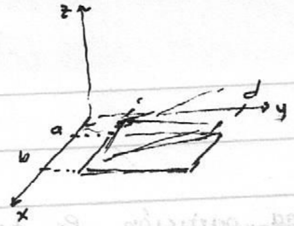
Definición. Decimos que una función acotada $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable si y sólo si $\overline{\iint_R} f(x,y)\,dx\,dy = \underline{\iint_R} f(x,y)\,dx\,dy$

Al número $\overline{\iint_R} f(x,y)\,dx\,dy = \underline{\iint_R} f(x,y)\,dx\,dy$ se le llama integral de la función f sobre el rectángulo R y se denota $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$.

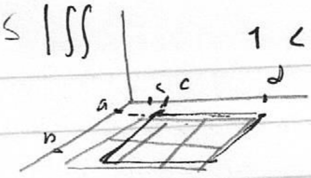
Ejemplos.

1. Si $f:\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por $f(x,y) = c$, entonces f es integrable en $R = [0,1] \times [0,1]$. Para cualquier partición del rectángulo R

$$\bar{S}(f;P) = \underline{S}(f;P) = c. \quad \therefore \iint_R c\,dx\,dy = c$$



$\iint |\,| \leq \iiint$ $\quad 1 < 2$



2. Determinar si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } (x,y) \in (\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}) \end{cases}$ es integrable en $R = [0,1]\times[0,1]$

Para cualquier partición P del rectángulo R, se tiene $\bar{S}(f;P) = 1$ por lo que $\inf_P \{\bar{S}(f;P)\} = 1 = \overline{\iint_R} f(x,y)\,dx\,dy$. Mientras que $\underline{S}(f;P) = 0$ para cualquier partición, en consecuencia $\sup_P \{\underline{S}(f;P)\} = 0 = \underline{\iint_R} f(x,y)\,dx\,dy$

Por lo tanto $f(x,y)$ no es integrable.

3. Determinar si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x$ es integrable en $R = [a,b]\times[c,d]$. Si P es cualquier partición de R, entonces

$$\bar{S}(f;P) = \sum_{i,j=1}^{n,m} x_i (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \quad \text{y} \quad \underline{S}(f;P) = \sum_{i,j=1}^{n,m} x_{i-1}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

Pero $x_{i-1} \leq \frac{x_{i-1} + x_i}{2} \leq \frac{x_i + x_i}{2}$ en consecuencia

$$\underline{S}(f;P) \leq \sum_{i,j=1}^{n,m} \frac{x_{i-1} + x_i}{2}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \leq \bar{S}(f;P)$$

es decir

$$\underline{S}(f;P) \leq \sum_{i,j=1}^{n,m} \frac{x_i^2 - x_{i-1}^2}{2}(y_j - y_{j-1}) \leq \bar{S}(f;P)$$

lo cual significa

$$\underline{S}(f;P) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2 - x_{i-1}^2}{2} \sum_{j=1}^{m} (y_j - y_{j-1}) \leq \bar{S}(f;P)$$

por lo que $\quad \underline{S}(f;P) \leq \left(\frac{x_n^2 - x_0^2}{2}\right)(y_m - y_0) \leq \bar{S}(f;P)$

es decir $\quad \underline{S}(f;P) \leq \left(\frac{b^2 - a^2}{2}\right)(d-c) \leq \bar{S}(f;P)$

Por lo tanto la integral $\iint_R x\,dx\,dy = \frac{b^2 - a^2}{2}(d-c)$

Teorema. (Criterio de integrabilidad). Si $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función acotada y $R \subset D$ es un rectángulo, entonces f es integrable si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P_ε del rectángulo R tal que $\bar{S}(f;P_\varepsilon) - \underline{S}(f;P_\varepsilon) < \varepsilon$

Demostración.

$\Rightarrow$) Como f es integrable, dado $\varepsilon > 0$ existe una partición P_ε del rectángulo R tal que $\bar{S}(f;P_\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \overline{\iint_R} f(x,y)\,dx\,dy$ y

$$\underline{S}(f;P_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} \geq \underline{\iint_R} f(x,y)\,dx\,dy$$

es decir $\quad -\underline{S}(f;P_\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2} \leq -\underline{\iint_R} f(x,y)\,dx\,dy$

Por lo tanto

$$\bar{S}(f;P_\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2} - \underline{S}(f;P_\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2} < 0$$

$$\therefore \bar{S}(f;P_\varepsilon) - \underline{S}(f;P_\varepsilon) < \varepsilon$$

Como para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P_ε tal que

$\Leftarrow$) $\bar{S}(f;P_\varepsilon) - \underline{S}(f;P_\varepsilon) < \varepsilon$

Luego $\underline{\iint}_R f(x,y)\,dx\,dy \geq \underline{S}(f;P_\varepsilon)$ y $\overline{\iint}_R f(x,y)\,dx\,dy \leq \bar{S}(f;P_\varepsilon)$

se cumple $-\underline{\iint}_R f(x,y)\,dx\,dy \leq -\underline{S}(f;P_\varepsilon)$

y podemos sumar $\overline{\iint}_R f(x,y)\,dx\,dy - \underline{\iint}_R f(x,y)\,dx\,dy \leq \bar{S}(f;P_\varepsilon) - \underline{S}(f;P_\varepsilon) < \varepsilon$

en consecuencia $0 < \overline{\iint}_R f(x,y)\,dx\,dy - \underline{\iint}_R f(x,y)\,dx\,dy < \varepsilon$ [Por que cualquier número no negativo menor que otro positivo tiene que ser cero]

Por lo que $\overline{\iint}_R f(x,y)\,dx\,dy = \underline{\iint}_R f(x,y)\,dx\,dy$

Por lo tanto f es integrable en el rectángulo R.

Definición. Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función acotada y $R \subset D$ es un rectángulo y P cualquier partición de R, decimos que $S(f;P) = \sum_{i,j=1}^{n,m} f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) A_{ij}$ es una suma de Riemann de la función f respecto de la partición P en el rectángulo R.

$(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \in R$

Definición. Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función acotada, $R \subset D$ es un rectángulo y P una partición de R, ~~decimos~~ q. a la más grande de las diagonales de los rectángulos R_{ij}, se le llama norma de la partición P y se denota $\|P\|$.

Teorema. Si f es una función acotada, $R \subset D$ es un rectángulo y P es una partición de R, entonces f es integrable en R si y sólo si $\lim_{\|P\| \to 0} S(f;P) = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy = I$.

Demostración.

$\Rightarrow$) Debemos mostrar que $\lim_{\|P\| \to 0} S(f;P) = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$ es decir

$$\lim_{\|P\| \to 0} S(f;P) - \iint_R f(x,y)\,dx\,dy = 0$$

Como para cualquier partición P de R ~~[illegible]~~

$$\underline{S}(f;P) \leq S(f;P) \leq \bar{S}(f;P)$$

entonces $\underline{S}(f;P) - I \leq S(f;P) - I \leq \bar{S}(f;P) - I$

Luego

Terminar la última demostración
$\iint cf = c\iint f$

Pero dado $\varepsilon > 0$ existe una partición P_ε tal que
$$|\underline{S}(f;P_\varepsilon) - I| < \varepsilon \quad y \quad |\bar{S}(f;P_\varepsilon) - I| < \varepsilon \qquad \text{con } I = \iint_R f$$
en consecuencia
$$|S(f;P_\varepsilon) - I| < \varepsilon \qquad \left[\begin{array}{l}\text{entonces} \\ -\varepsilon < S(f;P_\varepsilon) - I < \varepsilon\end{array}\right]$$
luego $\lim_{\|P\|\to 0} (S(f;P) - I) = 0$

$\Leftarrow$) Como $\underline{S}(f;P)$ y $\bar{S}(f;P)$ son casos particulares de sumas de Riemann entonces $\lim_{\|P\|\to 0} (\underline{S}(f;P) - I) = 0$ y $\lim_{\|P\|\to 0} (\bar{S}(f;P) - I) = 0$
Por lo que por un lado $I = \underline{\iint}_R f(x,y)\,dx\,dy$ y por el otro $I = \overline{\iint}_R f(x,y)\,dx\,dy$, luego $\underline{\iint}_R f(x,y)\,dx\,dy = \overline{\iint}_R f(x,y)\,dx\,dy$
Por lo tanto
$$I = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy \text{ es decir } f \text{ es integrable en } R$$

Teorema. Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función integrable en $R \subset D$ tal que $f(x,y) \geq 0$ para todo $(x,y) \in R$, entonces $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy \geq 0$

Demostración.
Como $M_{ij} \geq 0$ y $m_{ij}(f) \geq 0$ entonces $\bar{S}(f;P) \geq 0$ y $\underline{S}(f;P) \geq 0$ para cualquier partición P de R, en consecuencia $\inf_P \{\bar{S}(f;P)\} \geq 0$ y $\sup_P \{\underline{S}(f;P)\} \geq 0$, Por lo tanto $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy \geq 0$.

Teorema. Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función integrable en un rectángulo $R \subset D$, entonces cf $(c \in \mathbb{R})$ es integrable en R y además
$$\iint_R cf(x,y)\,dx\,dy = c\iint_R f(x,y)\,dx\,dy.$$

Demostración.
Como f es integrable, dado $\varepsilon > 0$ existe una partición P_ε tal que
$$\bar{S}(f;P_\varepsilon) - \underline{S}(f;P_\varepsilon) < \varepsilon/|c|$$
1. Si $c = 0$, $cf = 0$ para todo $(x,y) \in R$, pero cf es una función constante y ya sabemos que es integrable
2. Si $c > 0$, entonces $M_{ij}(cf) = c\,M_{ij}(f)$ y $m_{ij}(cf) = c\,m_{ij}(f)$, luego
$$\bar{S}(cf;P_\varepsilon) = c\,\bar{S}(f;P_\varepsilon) \quad y \quad \underline{S}(cf;P_\varepsilon) = c\,\underline{S}(f;P_\varepsilon), \text{ en consecuencia}$$
$$\bar{S}(cf;P_\varepsilon) - \underline{S}(cf;P_\varepsilon) = c\,\bar{S}(f;P_\varepsilon) - c\,\underline{S}(f;P_\varepsilon) < c\frac{1}{|c|}\varepsilon = \varepsilon$$
3. Si $c < 0$, $M_{ij}(cf) = c\,m_{ij}(f)$ y $m_{ij}(cf) = c\,M_{ij}(f)$ en consecuencia $\bar{S}(cf;P_\varepsilon) = c\,\underline{S}(f;P_\varepsilon)$ y $\underline{S}(cf;P_\varepsilon) = c\bar{S}(f;P_\varepsilon)$, por lo que $\bar{S}(cf;P_\varepsilon) - \underline{S}(cf;P_\varepsilon) = c\,\underline{S}(f;P_\varepsilon) - c\bar{S}(f;P_\varepsilon) = -c(\bar{S}(f;P_\varepsilon) - \underline{S}(f;P_\varepsilon)) < -c\frac{1}{|c|}\varepsilon = \varepsilon$

Teorema. Si $f, g: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son funciones integrables en $R \subset D$, entonces $f+g$ es integrable en R, además

$$\iint_R (f+g)(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy + \iint_R g(x,y)\,dx\,dy$$

Demostración.

Como ~~[illegible]~~ f y g son integrables, ~~[illegible]~~ dado $\varepsilon > 0$ existen particiones P_1 y P_2 sabemos que

$$\bar{S}(f; P_1) - \underline{S}(f; P_1) < \varepsilon/2$$

y $$\bar{S}(g; P_2) - \underline{S}(g; P_2) < \varepsilon/2$$

Si se considera $P_\varepsilon = P_1 \cup P_2$, entonces

$$\bar{S}(f; P_\varepsilon) - \underline{S}(f; P_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} \quad y \quad \bar{S}(g; P_\varepsilon) - \underline{S}(g; P_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Además

$$M_{ij}(f+g) \leq M_{ij}(f) + M_{ij}(g)$$

y $$m_{ij}(f+g) \geq m_{ij}(f) + m_{ij}(g)$$

es decir $$-m_{ij}(f+g) \leq -m_{ij}(f) - m_{ij}(g)$$

entonces

$$\begin{aligned}\bar{S}(f+g; P_\varepsilon) - \underline{S}(f+g; P_\varepsilon) &\leq \bar{S}(f; P_\varepsilon) + \bar{S}(g; P_\varepsilon) - \underline{S}(f; P_\varepsilon) - \underline{S}(g; P_\varepsilon) \\ &= \bar{S}(f; P_\varepsilon) - \underline{S}(f; P_\varepsilon) + \bar{S}(g; P_\varepsilon) - \underline{S}(g; P_\varepsilon) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

Por lo tanto $f+g$ es integrable en R.

Además

$$\iint_R (f+g)(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\|P\| \to 0} S(f+g; P)$$

[podemos tomar mejor una partición uniforme P_ε de modo que el límite estará dado cuando $n \to \infty$]

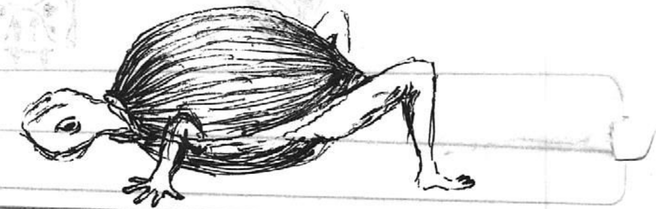
$$= \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i,j=1}^{n,n} (f+g)(\xi_{ij}, \eta_{ij}) A_{ij}$$

$$= \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i,j=1}^{n,n} \big(f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) + g(\xi_{ij}, \eta_{ij})\big) A_{ij}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{i,j=1}^{n,n} f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) A_{ij} + \sum_{i,j=1}^{n,n} g(\xi_{ij}, \eta_{ij}) A_{ij} \right)$$ {como los límites de c/u existen

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i,j=1}^{n,n} f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) A_{ij} + \lim_{n \to \infty} \sum_{i,j=1}^{n,n} g(\xi_{ij} + \eta_{ij}) A_{ij}$$

$$= \iint_R f(x,y)\,dx\,dy + \iint_R g(x,y)\,dx\,dy$$



Demostración

Se tiene que $f(x,y) - g(x,y) \geq 0$

en consecuencia $\iint_R \big(f(x,y) - g(x,y)\big)dxdy \geq 0$

y $\iint_R f(x,y)dxdy - \iint_R g(x,y)dxdy \geq 0$

por lo que $\iint_R f(x,y)dxdy \geq \iint_R g(x,y)dxdy$

Teorema. Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es integrable en un rectángulo $R \subset D$, entonces $|f|$ es integrable en R.

Demostración.

Como f es integrable $\cancel{\bar{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon}$

Como $|f| = f^+ + f^-$ y f^+ y f^- son integrables, entonces

$|f|$ es integrable

Teorema. Si $f, g: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son funciones integrables en $R \subset D$, entonces $f \cdot g$ es integrable en R.

Demostración.

Si $f; g$ son positivas, entonces para cualquier partición P de R

$M_{ij}(f \cdot g) \leq M_{ij}(f) \cdot M_{ij}(g)$

$m_{ij}(f \cdot g) \geq m_{ij}(f) \cdot m_{ij}(g)$ es decir $-m_{ij}(fg) \leq -m_{ij}(f)\, m_{ij}(g)$

luego $M_{ij}(f \cdot g) - m_{ij}(fg) \leq M_{ij}(f)\, M_{ij}(g) - m_{ij}(f)\, m_{ij}(g)$

$M_{ij}(f \cdot g) - m_{ij}(fg) \leq M_{ij}(f)\, m_{ij}(g) - M_{ij}(f)\, m_{ij}(g) + M_{ij}(f)\, M_{ij}(g) - m_{ij}(f)\, m_{ij}(g)$

$= M_{ij}(f)\big(M_{ij}(g) - m_{ij}(g)\big) + m_{ij}(g)\big(M_{ij}(f) - m_{ij}(f)\big)$

es decir

$\bar{S}(fg;P) - \underline{S}(fg;P) \leq M_R(f)\big(\bar{S}(g;P) - \underline{S}(g;P)\big) +$

$+ M_R(g)\big(\bar{S}(f;P) - \underline{S}(f;P)\big)$

Como f y g son integrables, dado $\varepsilon > 0$ existe una partición P_ε del rectángulo R tal que $\bar{S}(f;P_\varepsilon) - \underline{S}(f;P_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2M_R(g)}$

y $\bar{S}(g;P_\varepsilon) - \underline{S}(g;P_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2M_R(f)}$

Por lo tanto $\bar{S}(fg;P_\varepsilon) - \underline{S}(fg;P_\varepsilon) < M_R(f)\frac{\varepsilon}{2M_R(f)} + M_R(g)\frac{\varepsilon}{2M_R(g)} = \varepsilon$

Definición. Dada $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a las funciones

$$f^+(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } f(x,y) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x,y) < 0 \end{cases}$$

$$\text{y } f^-(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x,y) \geq 0 \\ -f(x,y) & \text{si } f(x,y) < 0 \end{cases}$$

Teorema. Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función integrable en un rectángulo $R \subset D$, entonces

i) f^+ es integrable en R

ii) f^- es integrable en R.

Demostración.

i) Mostremos que $M_{ij}(f^+) - m_{ij}(f^+) \leq M_{ij}(f) - m_{ij}(f)$ [Como ésto forma las sumas superiores e inferiores ya queda como $< \varepsilon$]

1. Si $M_{ij}(f) \geq 0$ y $m_{ij}(f) \geq 0$ se tiene

$$M_{ij}(f^+) = M_{ij}(f) \quad ; \quad m_{ij}(f^+) = m_{ij}(f)$$

entonces $M_{ij}(f^+) - m_{ij}(f^+) \leq M_{ij}(f) - m_{ij}(f)$

2. Si $M_{ij}(f) \geq 0$ y $m_{ij}(f) < 0$ se tiene

$$M_{ij}(f^+) = M_{ij}(f) \quad \text{y} \quad m_{ij}(f^+) = 0$$

Por lo que $M_{ij}(f^+) - m_{ij}(f^+) = M_{ij}(f^+) \leq M_{ij}(f) - m_{ij}(f)$ [pues $m_{ij} < 0$]

3. Si $M_{ij}(f) < 0$ y $m_{ij}(f) < 0$ se tiene

$$M_{ij}(f^+) = 0 = m_{ij}(f^+)$$

en consecuencia $M_{ij}(f^+) - m_{ij}(f^+) \leq M_{ij}(f) - m_{ij}(f)$

Como f es integrable, dado $\varepsilon > 0$ existe una partición P_ε de R tal que $\bar{S}(f; P_\varepsilon) - \underline{S}(f; P_\varepsilon) < \varepsilon$

Por lo tanto $\bar{S}(f^+; P_\varepsilon) - \underline{S}(f^+; P_\varepsilon) < \varepsilon$

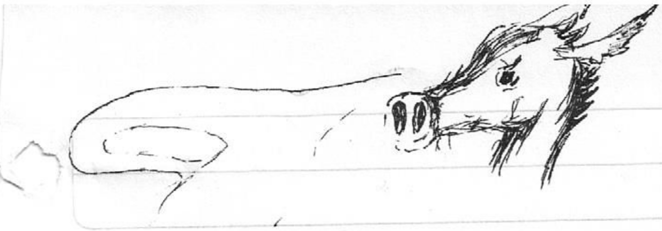
es decir f^+ es integrable en R

ii) Como $f = f^+ - f^-$ ~~y sabemos que~~ por lo que

$f^- = f^+ - f$ que son integrables en consecuencia f^- es integrables. en R

Teorema. Si $f, g: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son funciones integrables en $R \subset D$ y $f(x,y) \geq g(x,y)$ para todo $(x,y) \in R$, entonces

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy \geq \iint_R g(x,y)\,dx\,dy.$$



$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx \qquad a\int \frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}{x} \qquad \frac{x}{a}=\text{sen}$

En el caso general $f\cdot g = (f^+-f^-)(g^+-g^-)$

$= f^+g^+ - f^-g^+ - f^+g^- + f^-g^-$

Como el lado derecho de la igualdad es suma y resta de funciones integrables, entonces $f\cdot g$ es integrable en R.

Ejemplos

1. Determinar la integral de $x+y$ en el rectángulo $R=[a,b]\times[c,d]$

$$\iint (x+y)\,dx\,dy = \iint x\,dx\,dy + \iint y\,dx\,dy$$

$$= y\int x\,dx + \cancel{x\int} \ \tfrac{1}{2}y^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\,y\,x^2 \Big| = \tfrac{1}{2}(d-\cancel{c})(\cancel{b}^2-\cancel{a}^2)$$

Ya sabemos $\iint_R (x+y)\,dx\,dy = \iint_R x\,dx\,dy + \iint_R y\,dx\,dy$

pero $\iint_R (x)\,dx\,dy = \frac{(b^2-a^2)(d-c)}{2}$ y $\iint_R y\,dx\,dy = \frac{(b-a)(d^2-c^2)}{2}$

Por lo que $\iint_R (x+y)\,dx\,dy = \frac{(b^2-a^2)(d-c)}{2} + \frac{(b-a)(d^2-c^2)}{2} \rightarrow$ de páginas anteriores

~~En consecuencia~~

2. Calcular la integral ~~de~~ $\iint_R (x-5y)\,dx\,dy$ donde $R=[1,2]\times[3,5]$

$$\iint_R (x-5y)\,dx\,dy = \iint_R x\,dx\,dy - \iint_R 5y\,dx\,dy = \tfrac{1}{2}(5-3)(4-1) - 5\left(\tfrac{1}{2}(2-1)(25-9)\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}(6) - \tfrac{5}{2}(16) = 3 - 40 = -37$$

Teorema. Si $f: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es una función continua en un rectángulo $R\subset D$, entonces f es integrable en R

Demostración.

Como f es continua en R y es un conjunto cerrado y acotado en $\mathbb{R}^2$, entonces f es continua uniformemente en R, por lo que dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ que sólo depende de ε tal que $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)| < \frac{\varepsilon}{A_R}$ para todo $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in R$ tales que $\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\| < \delta(\varepsilon)$. Si P_ε es una partición del rectángulo R tal que $\|P\|<\delta(\varepsilon)$, entonces

$$|\overset{\nearrow \max}{M_{ij}}(f) - \overset{\nearrow \min \ \to \text{ en este caso}}{m_{ij}}(f)| < \frac{\varepsilon}{A_R}$$ para todo R_{ij}. En consecuencia

$$\bar{S}(f;P_\varepsilon) - \underline{S}(f;P_\varepsilon) = \sum_{i,j=1}^{n,m} (M_{ij}(f) - m_{ij}(f))A_{ij} < \frac{\varepsilon}{A_R}\sum_{i,j=1}^{n,m} A_{ij} = \cancel{A_R}\frac{\varepsilon}{\cancel{A_R}} = \varepsilon$$

Por lo tanto f es integrable en R

Teorema. Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es acotada en R y es continua excepto en un número finito de puntos de R, entonces f es integrable en R.