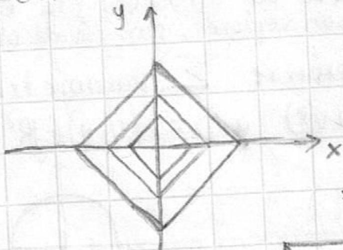
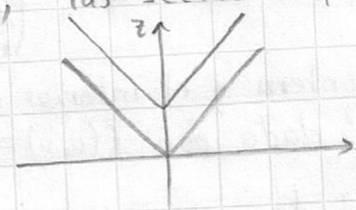
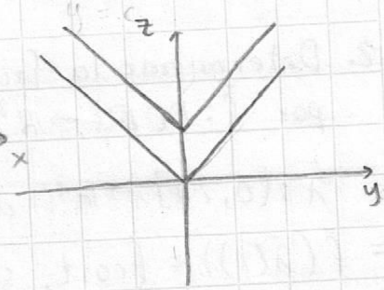
Kudriav

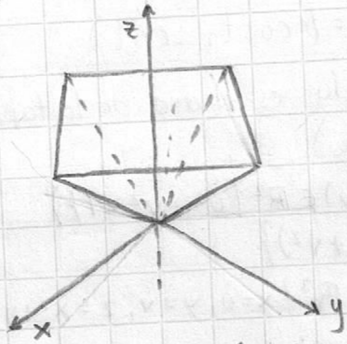
$f(x,y) = |x| + |y|$

las curvas de nivel son cuadrados, las secciones paralelas son









No es una superficie simple ya que las derivadas parciales no existen si $u=0$ o $v=0$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial u} = \left(1, 0, \frac{\partial f_3}{\partial u}(|u|+|v|)\right)$$

en el origen $\dfrac{\partial f_3}{\partial u} = \lim_{h\to 0} \dfrac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{si } h>0 \\ -1 & \text{si } h<0 \end{cases}$

lo mismo se puede hacer para $\dfrac{\partial \bar{f}}{\partial v} = \left(0, 1, \dfrac{\partial f_3}{\partial v}(|u|+|v|)\right)$ pero en el origen

$$\frac{\partial f_3}{\partial v} = \lim_{k\to 0} \frac{|k|}{k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k>0 \\ -1 & \text{si } k<0 \end{cases}$$

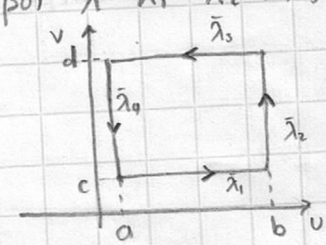
Definición. Si Σ es una superficie simple parametrizada por $\bar{f}: D\subset\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, decimos que $\partial\Sigma = \bar{f}(\partial D)$ es la frontera de Σ e $\operatorname{Int}\Sigma = \bar{f}(\operatorname{Int} D)$ es el interior de la superficie.

Si $\bar{\lambda}: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ es una parametrización de la frontera de D, entonces $\bar{\mu} = \bar{f}\circ\bar{\lambda} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización de la frontera de Σ.

Ejemplos.

1. Determinar la frontera de la superficie parametrizada por $\bar{f}(u,v) = (u, v, \alpha u + \beta v + \delta)$ donde $D = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le u\le b,\ c\le v\le d\}$.

La frontera de D son las aristas del rectángulo, que se puede parametrizar por $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_4$, donde $\bar{\lambda}_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ está dada por $\bar{\lambda}_1(t) = (t, c)$



$\bar{\lambda}_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^2$ está dada por $\bar{\lambda}_2(t) = (b, t)$

$\bar{\lambda}_3 : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ está dada por $\bar{\lambda}_3(t) = (a+b-t, d)$

$\bar{\lambda}_4 : [c,d] \to \mathbb{R}^2$ está dada por $\bar{\lambda}_4(t) = (a, c+d-t)$

la frontera de Σ es

$$\partial\Sigma = \bar{f}(\bar{\lambda}(t)) = \bar{f}(\bar{\lambda}_1(t) + \bar{\lambda}_2(t) + \bar{\lambda}_3(t) + \bar{\lambda}_4(t))$$

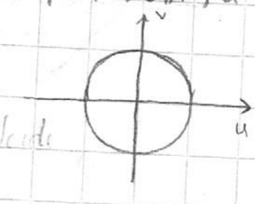
$$= \bar{f}(\bar{\lambda}_1(t)) + \bar{f}(\bar{\lambda}_2(t)) + \bar{f}(\bar{\lambda}_3(t)) + \bar{f}(\bar{\lambda}_4(t))$$

Porque en realidad es la unión, no suma

$= (t, c, \alpha t + \beta c + \delta) + (b, t, \alpha b + \beta t + \delta) + (a+b-t, d, \alpha(a+b-t) + \beta d + \delta) +$
$+ (a, c+d-t, \alpha a + \beta(c+d-t) + \delta)$ $\rightarrow$ (No se pueden sumar, pues es la parametrización de la frontera de otro conjunto en otro lugar (No son vectores, son $\bar{\lambda}$ de otro tipo))

2. Determinar la frontera y el interior de la superficie Σ parametrizada por $\bar{f}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\bar{f}(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$ y $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2 \leq 1\}$

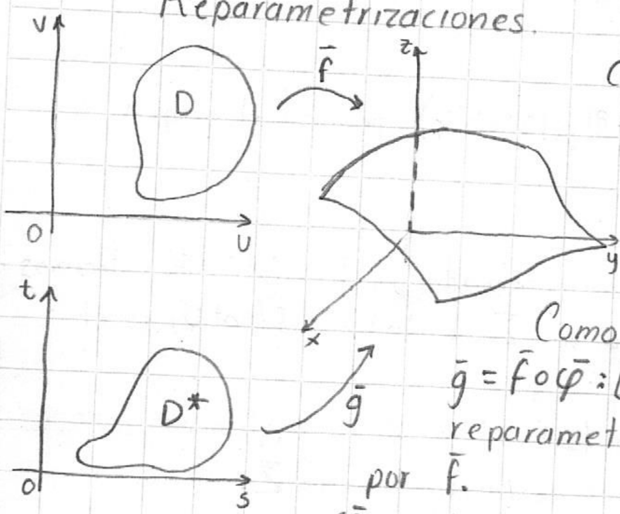
$\bar{\lambda}: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ dada por $\bar{\lambda}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$



$\partial\Sigma = \bar{f}(\bar{\lambda}(t)) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 1)$ que sólo es el aro de la tapa (un círculo)

El interior de Σ es $\operatorname{Int} \Sigma = \bar{f}(\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2 < 1\})$
$= \{(u, v, u^2+v^2)\}$
$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = u, y = v, z = x^2+y^2\}$

Reparametrizaciones.



Consideremos $\bar{f}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\bar{f}(u,v) = (u, v, \alpha u + \beta v + \delta)$ y $\bar{\varphi}: D^* \subset \mathbb{R}^2 \to D \subset \mathbb{R}^2$ donde $D^* = [a_1, b_1] \times [c_1, d_1]$, $D = [a,b] \times [c,d]$ tal que $\bar{\varphi}(s,t) = \left(\frac{b-a}{b_1-a_1}(s-a_1) + a, \frac{d-c}{d_1-c_1}(t-c_1) + c\right)$

Como $\bar{\varphi}$ manda el rectángulo D^* en D, entonces $\bar{g} = \bar{f} \circ \bar{\varphi}: [a_1, b_1] \times [c_1, d_1] \to \mathbb{R}^3$ también es una reparametrización de la superficie parametrizada por $\bar{f}$.

1. $\bar{\varphi}$ es biyectiva
2. $\bar{\varphi}$ es de clase $C^1_{D^*}$, ya que $\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial s} = \left(\frac{b-a}{b_1-a_1}, 0\right)$ y $\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial t} = \left(0, \frac{d-c}{d_1-c_1}\right)$
3. Los vectores $\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial s} = \left(\frac{b-a}{b_1-a_1}, 0\right)$ y $\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial t} = \left(0, \frac{d-c}{d_1-c_1}\right)$ son linealmente independientes.

Entonces $\bar{g} = \bar{f} \circ \bar{\varphi}$ es de clase $C^1_{D^*}$.

Además $\quad g = f \circ \varphi = f(\varphi) =$

$\frac{\partial\bar{g}}{\partial s} = \left(\frac{b-a}{b_1-a_1}, 0, \alpha\frac{b-a}{b_1-a_1}\right)$; $\frac{\partial\bar{g}}{\partial t} = \left(0, \frac{d-c}{d_1-c_1}, \beta\frac{d-c}{d_1-c_1}\right)$

son linealmente independientes.

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'}$$

$$f \circ \varphi =$$

Definición. Si Σ es una superficie simple parametrizada por $\bar{f}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $\bar{\varphi}: D^* \subset \mathbb{R}^2 \to D$ es una función biyectiva de clase $C^1_{D^*}$ tal que su derivada sea invertible, es decir

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \end{vmatrix} \neq 0$$

decimos que $\bar{g} = \bar{f} \circ \bar{\varphi}: D^* \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una reparametrización de la superficie Σ.

1. Como $\bar{f}$ y $\bar{\varphi}$ son funciones de clase C^1, entonces $\bar{g} = \bar{f} \circ \bar{\varphi}$ es una función de clase C^1.
2. Mostremos que los vectores $\frac{\partial \bar{g}}{\partial s}$ y $\frac{\partial \bar{g}}{\partial t}$ son linealmente independientes.

Se tiene

$$\bar{g}'(s,t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(\bar{\varphi}(s,t)) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(\bar{\varphi}(s,t)) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(\bar{\varphi}(s,t)) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(\bar{\varphi}(s,t)) \\ \frac{\partial f_3}{\partial u}(\bar{\varphi}(s,t)) & \frac{\partial f_3}{\partial v}(\bar{\varphi}(s,t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \end{pmatrix}$$

entonces

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial s} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} \frac{\partial \bar{f}}{\partial u}(\bar{\varphi}) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}$$

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \frac{\partial \bar{f}}{\partial u}(\bar{\varphi}) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}$$

Por lo que

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{g}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial s} \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} \right) \times \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} \right)$$

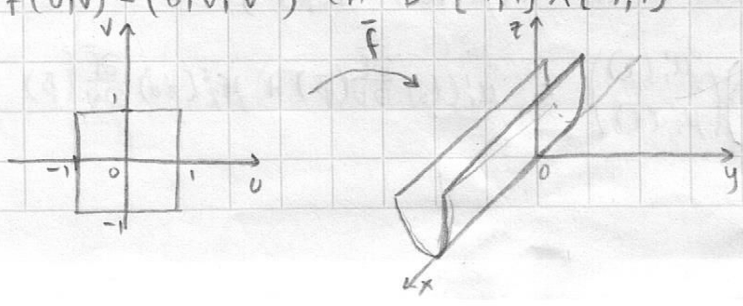
$$= \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} \times \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} \times \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}$$

$$= \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial s} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right) \neq 0$$

Por lo tanto los vectores $\frac{\partial \bar{g}}{\partial s}$ y $\frac{\partial \bar{g}}{\partial t}$ son linealmente independientes.

Ejemplo.

Consideremos Σ la superfice parametrizada por $\bar{f}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\bar{f}(u,v) = (u, v, v^2)$ en $D = [-1,1] \times [-1,1]$

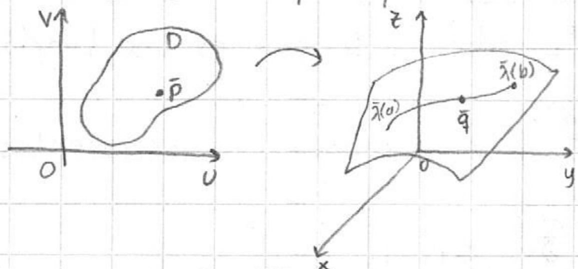


$$\int_1^3 \int_{-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}}^{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}$$

Ahora consideremos $\bar{\varphi}:[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\times[-1,1]\to D$ dada por $\bar{\varphi}(s,t)=(2s,t)=(u,v)$ entonces $\bar{g}=\bar{f}\circ\bar{\varphi}$ es una reparametrización de Σ.

Espacios tangentes, planos tangentes y planos normales.

Si Σ es una superficie simple parametrizada por $\bar{f}:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ y $\bar{q}\in \operatorname{Int}\Sigma$, entonces existe $\bar{p}\in \operatorname{Int} D$ tal que $\bar{f}(\bar{p})=\bar{q}$. Si una curva parametrizada por $\bar{\lambda}:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ pasa por $\bar{\lambda}:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ tal que $\bar{\lambda}([a,b])\subset\Sigma$ pasa por $\bar{q}$, existe $t_0\in[a,b]$ tal que $\bar{\lambda}(t_0)=\bar{q}$ y $\bar{\lambda}'(t_0)=\bar{v}$ es un vector tangente a la curva en $\bar{q}$ y en consewencia tangente a Σ en $\bar{q}$.



Definición. Si Σ es una superficie simple parametrizada por $\bar{f}:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ y $\bar{q}\in \operatorname{Int}\Sigma$, decimos que un vector $\bar{v}\in\mathbb{R}^3$ es tangente a la superficie Σ en $\bar{q}$ si existe $\bar{\lambda}:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ tal que $\bar{\lambda}([a,b])\subset\Sigma$, $\bar{\lambda}(t_0)=\bar{q}$ para algún $t_0\in[a,b]$ y $\bar{\lambda}'(t_0)=\bar{v}$.

Al conjunto de todos los vectores tangentes a Σ en $\bar{q}\in \operatorname{Int}\Sigma$ se le llama espacio tangente a Σ en $\bar{q}$ y se denota $T_{\bar{q}}(\Sigma)$.

Teorema. Si Σ es una superficie simple parametrizada por $\bar{f}:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ de clase C'_D y $\bar{q}\in \operatorname{Int}\Sigma$ tal que $\bar{f}(\bar{p})=\bar{q}$ para algún $\bar{p}\in \operatorname{Int} D$, entonces $T_{\bar{q}}(\Sigma)=\mathcal{L}\left(\frac{\partial\bar{f}}{\partial u}(\bar{p}),\frac{\partial\bar{f}}{\partial v}(\bar{p})\right)$ es decir, el espacio tangente a Σ en $\bar{q}$ es el espacio de dimensión 2 generado por los vectores linealmente independientes $\frac{\partial\bar{f}}{\partial u}(\bar{p})$ y $\frac{\partial\bar{f}}{\partial v}(\bar{p})$.

Demostración.

Mostremos que $T_{\bar{q}}(\Sigma)\subseteq\mathcal{L}\left(\frac{\partial\bar{f}}{\partial u}(\bar{p}),\frac{\partial\bar{f}}{\partial v}(\bar{p})\right)$

Consideremos $\bar{v}\in T_{\bar{q}}(\Sigma)$, entonces existe $\bar{\lambda}:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ tal que $\bar{\lambda}(t_0)=\bar{q}$ y $\bar{\lambda}'(t_0)=\bar{v}$. Si $\bar{\mu}:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ es una función de clase $C'_{[a,b]}$ tal que $\bar{\mu}(t_0)=\bar{p}$ entonces se puede elegir $\bar{\mu}$ de tal forma que $\bar{\lambda}=\bar{f}\circ\bar{\mu}:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ por lo que $\bar{\lambda}(t)=\bar{f}(\bar{\mu}(t))$ entonces $\bar{\lambda}(t_0)=\bar{f}(\bar{\mu}(t_0))=\bar{f}(\bar{p})$ y

$$\bar{\lambda}'(t_0)=\bar{f}'(\bar{\mu}(t_0))\bar{\mu}'(t_0)$$
$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial\bar{f}}{\partial u}(\bar{\mu}(t_0)) & \frac{\partial\bar{f}}{\partial v}(\bar{\mu}(t_0))\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_1'(t_0)\\ \mu_2'(t_0)\end{pmatrix}=\mu_1'(t_0)\frac{\partial\bar{f}}{\partial u}(\bar{p})+\mu_2'(t_0)\frac{\partial\bar{f}}{\partial v}(\bar{p})$$

Ahora mostremos que $\mathcal{L}\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial u}(\bar{p}), \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}(\bar{p})\right) \subseteq T_{\bar{q}}(\Sigma)$

Consideremos $\varepsilon > 0$, $\bar{h} = (\alpha, \beta)$ y $\bar{\lambda}: [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathbb{R}^3$ dada por $\bar{\lambda}(t) = \bar{f}(\bar{p} + t\bar{h})$. La imagen de $\bar{\lambda}$ está en Σ, $\bar{\lambda}(0) = \bar{f}(\bar{p}) = \bar{q}$

Se tiene $\bar{\lambda}'(t) = \bar{f}'(\bar{p}+t\bar{h})\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$

$$= \alpha \frac{\partial \bar{f}}{\partial u}(\bar{p}+t\bar{h}) + \beta \frac{d\bar{f}}{\partial v}(\bar{p}+t\bar{h}) \qquad \times\times\times\times$$

Luego $\bar{\lambda}'(0) = \alpha \frac{\partial \bar{f}}{\partial u}(\bar{p}) + \beta \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}(\bar{p}) = \bar{v}$

donde $\bar{v} \in T_{\bar{q}}(\Sigma)$

Por lo tanto $\mathcal{L}\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial u}(\bar{p}), \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}(\bar{p})\right) \subseteq T_{\bar{q}}(\Sigma)$

Ejemplos.

1. Si Σ es la superficie parametrizada por $\bar{f}(u,v) = (u, v, \alpha u + \beta v + \delta)$ en $D = [-1,1]\times[-1,1]$
Cuál es el espacio tangente a Σ en $\bar{q} = \bar{f}(0,0) = (0,0,\delta)$
El espacio tangente a Σ en $(0,0,\delta)$ es el espacio generado por los vectores $(1,0,\alpha)$ y $(0,1,\beta)$ es decir, $T_{\bar{q}}(\Sigma) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z) = c_1(1,0,\alpha) + c_2(0,1,\beta)\}$
$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \alpha x + \beta y\}$.

2. Determinar el espacio tangente a la superficie parametrizada por $\bar{f}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\bar{f}(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$ en el punto $\bar{q} = \bar{f}(0,\frac{1}{2}) = (0,\frac{1}{2},\frac{1}{4})$
$D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2 \le 1\}$
El espacio tangente es el espacio generado por los vectores
$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial u}(0,\tfrac{1}{2}) = (1,0,0) \quad y \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}(0,\tfrac{1}{2}) = (0,1,1)$$
es decir $T_{\bar{q}}(\Sigma) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z) = c_1(1,0,0) + c_2(0,1,1)\}$
$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = y\}$

3. Si Σ es la superficie parametrizada por $\bar{f}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\bar{f}(u,v) = (u, v, v^2)$ y $D = [-1,1]\times[-1,1]$
Determinar al espacio tangente a Σ en $\bar{q} = \bar{f}(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4})$
El espacio tangente es el espacio generado por los vectores
$\frac{\partial \bar{f}}{\partial u}(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = (1,0,0)$ y $\frac{\partial \bar{f}}{\partial v} = (0,1,1)$
En consecuencia $T_{\bar{q}}(\Sigma) = \{(x,y,z) \mid (x,y,z) = c_1(1,0,0) + c_2(0,1,1)\}$
Es decir, el espacio tangente es el plano $z = y$.

Si Σ es una superficie simple parametrizada por $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $\bar{p} \in \operatorname{Int} D$ y $\bar{q} = f(p)$, entonces el plano tangente a Σ en el punto $\bar{q}$ está dado por $\bar{q} + T_{\bar{q}}(\Sigma) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z) = \bar{q} + \bar{v} \in T_{\bar{q}}(\Sigma)\}$

$$\begin{array}{ccc} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array} = \left(0, -\tfrac{3}{2}, 1\right)$$

Como $\frac{\partial \bar{f}}{\partial u}(\bar{p})$ y $\frac{\partial \bar{f}}{\partial v}(\bar{p})$ son vectores tangentes a Σ en $\bar{q}$ y son linealmente independientes, el vector $\frac{\partial \bar{f}}{\partial u}(\bar{p}) \times \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}(\bar{p})$ es un vector normal al plano tangente en $\bar{q}$.

Por lo tanto la ecuación del plano tangente a Σ en $\bar{q}$ es

$$\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial u}(\bar{p}) \times \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}(\bar{p})\right) \cdot ((x, y, z)) = 0$$

Ejemplos.

1. Si Σ es con en el inciso 3, Determinar el plano tangente a Σ en $\bar{q} = \bar{f}\left(0, \frac{3}{4}\right) = \left(0, \frac{3}{4}, \frac{9}{16}\right)$

$\frac{\partial \bar{f}}{\partial u}\left(0, \frac{3}{4}\right) = (1, 0, 0)$ y $\frac{\partial \bar{f}}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{3}{2}\right)$ luego $(1,0,0) \times \left(0, 1, \frac{3}{2}\right) = \left(0, -\frac{3}{2}, 1\right)$

Por lo tanto la ecuación del plano tangente es

$\left(0, -\frac{3}{2}, 1\right) \cdot \left(x, y - \frac{3}{4}, z - \frac{9}{16}\right) = 0$ es decir $z - \frac{9}{16} = \frac{3}{2}\left(y - \frac{3}{4}\right)$

2. Si Σ es la superficie parametrizada por $\bar{f}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\bar{f}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ y $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 1\}$ determinar el plano tangente en $\bar{q} = \bar{f}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

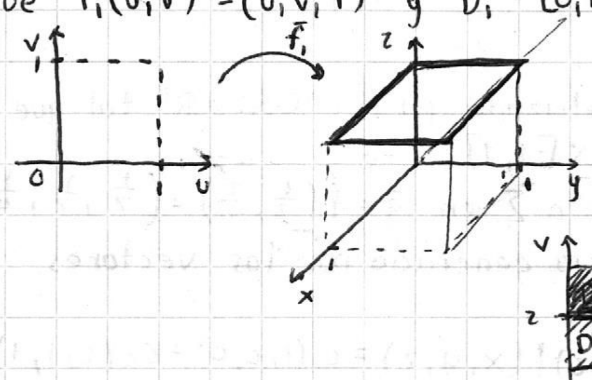
$\frac{\partial \bar{f}}{\partial u}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (1, 0, 1)$ y $\frac{\partial \bar{f}}{\partial v}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (0, 1, 1)$

Como $(1, 0, 1) \times (0, 1, 1) = (-1, -1, 1)$ entonces la ecuación del plano tangente es $(-1, -1, 1) \cdot \left(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}, z - \frac{1}{2}\right) = 0$ es decir, ~~$z = x + y$~~.

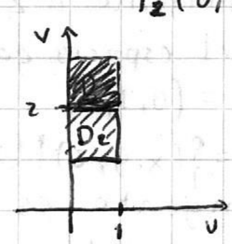
$$-\left(x - \tfrac{1}{2}\right) - \left(y - \tfrac{1}{2}\right) + \left(z - \tfrac{1}{2}\right) = 0$$
$$-x + \cancel{\tfrac{1}{2}} - y + \tfrac{1}{2} + z - \cancel{\tfrac{1}{2}} = 0$$
$$z = x + y - \tfrac{1}{2}$$

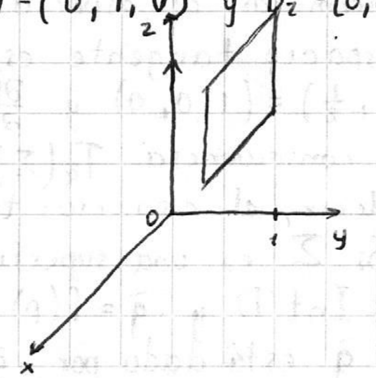
Superficies más generales.

Si Σ_1 es la superficie parametrizada por $\bar{f}_1: D_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\bar{f}_1(u, v) = (u, v, 1)$ y $D_1 = [0,1] \times [0,1]$



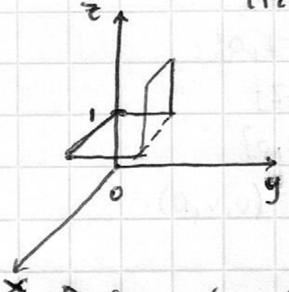
y Σ_2 es la superficie parametrizada por $\bar{f}_2: D_2 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f_2(u, v) = (u, 1, v)$ y $D_2 = [0,1] \times [1,2]$





Entonces Σ parametrizada por $\bar{f}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\bar{f}(u,v) = \begin{cases} f_1(u,v) & \text{si } (u,v) \in D_1 \\ f_2(u,v) & \text{si } (u,v) \in D_2 \end{cases}$$



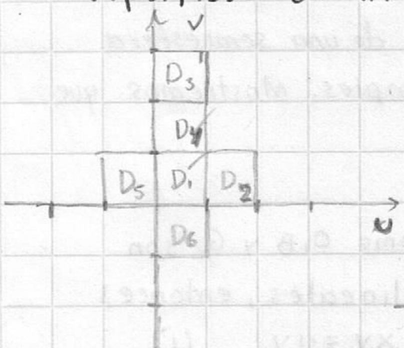
es inyectiva en D^* donde $D^* = \text{Int}\, D_1 \cup \text{Int}\, D_2$ y de clase C^1.

Definición. Si $D_1, D_2, \dots, D_n$ son regiones en $\mathbb{R}^2$ del tipo III tales que sus interiores son disjuntos (es decir, $\text{Int}\, D_i \cap \text{Int}\, D_j = \emptyset$ para $i \neq j$), $D' = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$, $D = \bigcup_{i=1}^{n} \text{Int}\, D_i$, $F = \bigcup_{i=1}^{n} \partial D_i$ y $\bar{f}: D' \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que

i) $\bar{f}: D \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva

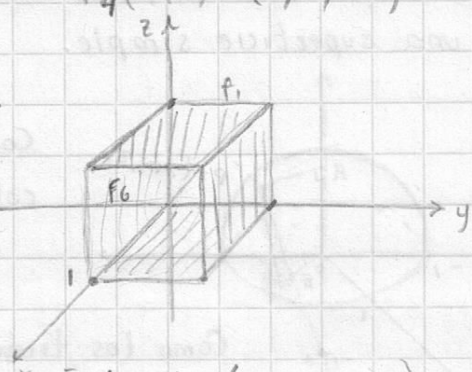
ii) los vectores $\frac{\partial \bar{f}}{\partial u}(\bar{p})$ y $\frac{\partial \bar{f}}{\partial v}(\bar{p})$ son linealmente independientes para todo $p \in D$.

iii) $\bar{f}(D) \cap \bar{f}(F) = \emptyset$ decimos que Σ parametrizada por $\bar{f}$ es una superficie en $\mathbb{R}^3$.



$\bar{f}_1(u,v) = (u,v,1)$

$\bar{f}_4(u,v) = (u,1,v-1)$ $\quad D_4 = [0,1] \times [1,2]$



$D_3 = [0,1] \times [2,3]$ $\quad \bar{f}_3(u,v) = (u, v-2, 0)$

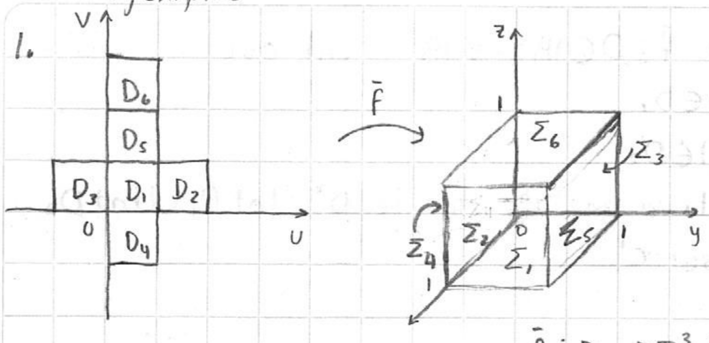
$D_6 = [0,1] \times [-1,0]$ $\quad \bar{f}_6(u,v) = (u, 0, -v)$

$D_5 = [-1,0] \times [0,1]$ $\quad \bar{f}_5(u,v) = (1, v, -u)$

$D_2 = [1,2] \times [0,1]$ $\quad \bar{f}_2(u,v) = (0, v, u-1)$

Ejemplos

1.



Consideremos $D_1 = [0,1] \times [0,1]$

$D_2 = [1,2] \times [0,1]$

$D_3 = [-1,0] \times [0,1]$

$D_4 = [0,1] \times [-1,0]$

$D_5 = [0,1] \times [1,2]$

$D_6 = [0,1] \times [2,3]$

y $\bar{f}_1 : D_1 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\bar{f}_1(u,v) = (u,v,0)$

$\bar{f}_2 : D_2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\bar{f}_2(u,v) = (1, u-1, v)$

$\bar{f}_3 : D_3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\bar{f}_3(u,v) = (0, u+1, v)$

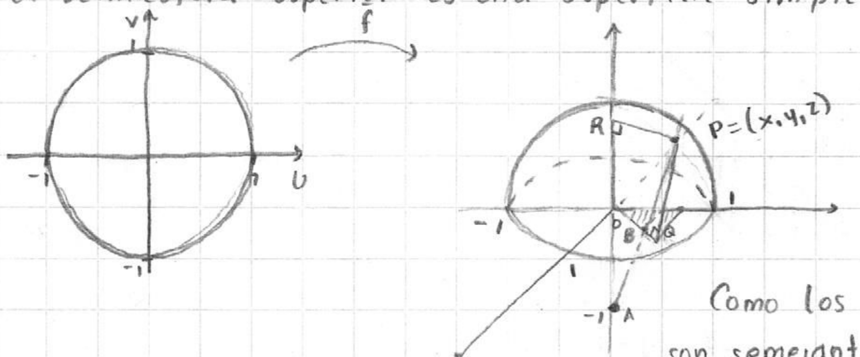
$\bar{f}_4 : D_4 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\bar{f}_4(u,v) = (u, 0, v+1)$

$\bar{f}_5 : D_5 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\bar{f}_5(u,v) = (u, 1, v-1)$

$\bar{f}_6 : D_6 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\bar{f}_6(u,v) = (u, v-2, 1)$

Entonces $\bar{f} : \bigcup_{i=1}^{6} D_i \to \mathbb{R}^3$ tal que $\bar{f}(u,v) = \bar{f}_i(u,v)$ si $(u,v) \in D_i$ parametriza el cubo de arista 1 con tres caras sobre los planos coordenados en el primer octante.

2. Consideremos la esfera unitaria como la unión de una semiesfera superior y una inferior, las cuales son superficies simples. Mostremos que la semiesfera superior es una superficie simple.



Como O, B y Q son colineales, entonces

$$xv = uy \qquad (1)$$

Como los triángulos ABO y APR son semejantes se tiene

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{BO}|} = \frac{|\overline{AP}|}{|\overline{PR}|}$$

$$\frac{|\overline{AO}|}{|\overline{AR}|} = \frac{|\overline{OB}|}{|\overline{RP}|}$$ pero $|\overline{AO}| = 1$, $|\overline{AR}| = 1+z$, $|\overline{OB}| = \sqrt{u^2+v^2}$

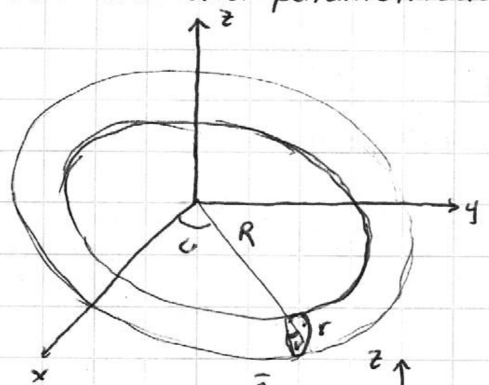
por lo que $|\overline{RP}| = (1+z)\sqrt{u^2+v^2}$ es decir, $x^2+y^2 = (1+z)^2(u^2+v^2) \qquad (2)$

$$u^2+v^2 = \frac{x^2+y^2}{(1+z)^2}$$

De (1) sustituyamos u o v en (2) y obtenemos $u = \frac{x}{1+z}$ y $v = \frac{y}{1+z} \qquad (3)$

4. Hagamos girar un círculo C_1 de radio r alrededor de un círculo C_2 de radio $R > r$.

Determinar una parametrización de la superficie que se obtiene



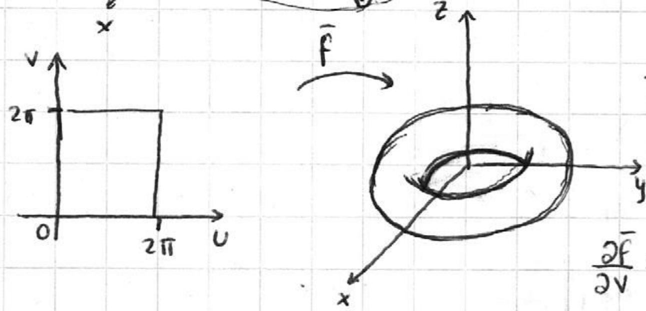
se tiene

$x = (R + r\cos v)\cos u$

$y = (R + r\cos v)\operatorname{sen} u$

$z = r\operatorname{sen} v$

A esta superficie se le conoce como toro.



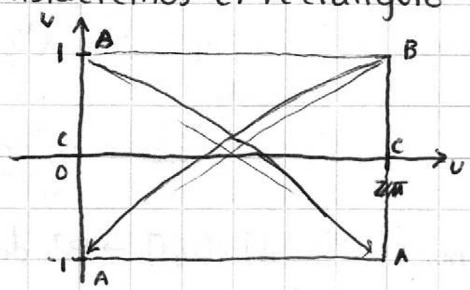
donde

$\bar{f}(u,v) = ((R+r\cos v)\cos u, (R+r\cos v)\operatorname{sen} u, r\operatorname{sen} v)$

$\frac{\partial \bar{f}}{\partial u} (-(R+r\cos v)\operatorname{sen} u, (R+r\cos v)\cos u, 0)$

$\frac{\partial \bar{f}}{\partial v} = (-r\operatorname{sen} v\cos u, r\operatorname{sen} v\operatorname{sen} u, r\cos v)$

5. Consideremos el rectángulo [redacted] $[0,2\pi] \times [-1,1]$



Hagamos que el [redacted] centro del [redacted] segmento AB gire alrededor del círculo unitario y simultáneamente el segmento AB rote alrededor de C de tal forma que cuando C gire un ángulo u, $\overline{AB}$ rote un ángulo $\frac{u}{2}$.

A la superficie que se obtiene de esta forma se le conoce como cinta de Möbius.

Una parametrización de esta superficie está dada por

$\bar{f}(u,v) = ((1 - v\operatorname{sen}\frac{u}{2})\cos u, (1 - v\operatorname{sen}\frac{u}{2})\operatorname{sen} u, v\cos\frac{u}{2})$

Orientación de superficies.

De manera informal podemos decir que una superficie es orientable si se pueden distinguir las "dos" caras de la superficie, por ejemplo pintándolas de colores distintos o si es cerrada que se pueda hacer distinción entre el interior a la superficie y el exterior a la superficie.

Ahora sustituyamos x y y dados por (3) en $x^2+y^2+z^2=1$

$$(u(1+z))^2 + (v(1+z))^2 + z^2 = 1$$

$$(u^2+v^2)(1+z)^2 + z^2 = 1$$

es decir $(u^2+v^2)(1+2z+z^2)+z^2+1$

$$(1+u^2+v^2)z^2 + 2(u^2+v^2)z + u^2+v^2-1 = 0$$

Por lo que

$$z = \frac{-2(u^2+v^2) + \sqrt{4(u^2+v^2) - 4((u^2+v^2)^2-1)}}{2(1+u^2+v^2)}$$

como es la semiesfera superior.

en consecuencia

$$z = \frac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2}$$

$$x = u(1+z) = u\left(1+\frac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2}\right) = \frac{2u}{1+u^2+v^2}$$

y

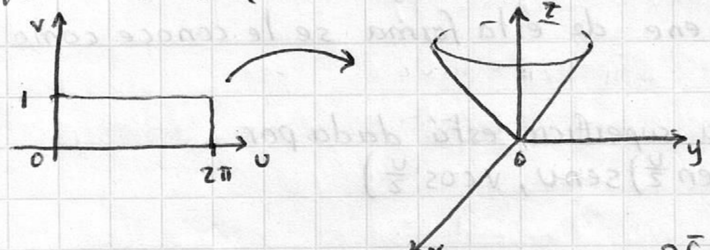
$$y = v(1+z) = \frac{2v}{1+u^2+v^2}$$

Por lo tanto $\bar{f}: \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2\leq 1\} \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\bar{f}(u,v) = \frac{1}{1+u^2+v^2}(2u, 2v, 1-u^2-v^2)$$ parametriza la semiesfera superior, y es una función inyectiva y de clase C^1, por lo que la semiesfera superior es una superficie simple.

De la misma forma se demuestra que la semiesfera inferior es una superficie simple. Por lo tanto la esfera es una superficie.

3. Ya sabemos que el cono parametrizado por $\bar{f}: [0,2\pi]\times[0,1] \to \mathbb{R}^3$ dado por $\bar{f}(u,v) = (v\cos u, v\,\text{sen}\,u, v)$ no es una superficie simple



ya que todos los puntos $(u,0)$ $\bar{f}$ los manda al punto $(0,0,0)$

Además $\frac{\partial \bar{f}}{\partial u} = (-v\,\text{sen}\,u, v\cos u, 0)$

y $\frac{\partial \bar{f}}{\partial v} = (\cos u, \text{sen}\,u, 1)$

no son linealmente independientes en $(u,0)$

Pero sí es una superficie ya que en $\text{Int}[0,2\pi]\times[0,1]$ $\bar{f}$ es inyectiva y $\frac{\partial \bar{f}}{\partial u}$ y $\frac{\partial \bar{f}}{\partial v}$ son linealmente independientes.

Definición. Si Σ es una superficie, decimos que $\bar{N}: \Sigma \to \mathbb{R}^3$ tal que a cada $\bar{q} \in \Sigma$ le asigna un vector $\bar{N}(\bar{q})$ ortogonal no nulo a Σ es un campo normal de vectores.

Definición. Decimos que Σ es una superficie orientable si existe un campo normal de vectores $\bar{N}: \Sigma \to \mathbb{R}^3$ que sea continuo.

Si Σ es una superficie simple parametrizada por $\bar{f}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, entonces $\bar{N}_{\bar{f}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}$ es un vector normal a la superficie, por lo que si se considera $\bar{N}(\bar{f}) = \frac{\bar{N}_{\bar{f}}}{\|\bar{N}_{\bar{f}}\|} = \frac{\frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}}{\left\|\frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}\right\|}$ entonces $\bar{N}(\bar{f})$ es un campo continuo de vectores normales, ya que $\bar{f} \in C'_0$.

Definición. Decimos que $(\Sigma, \bar{N})$ con Σ una superficie orientable es una superficie orientada.

¿La orientación de una superficie cambia al cambiar su parametrización?

Si Σ es una superficie simple parametrizada por $\bar{f}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $\bar{g}: D' \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una reparametrización, entonces existe una biyección $\varphi: D' \to D$ de clase C' tal que $\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(s,t)} \neq 0$ para todo $(s,t) \in D'$ y $\bar{g} = \bar{f} \circ \varphi$.

Entonces
$$\bar{N}(x,y,z) = \bar{N}(\bar{g}) = \frac{\bar{N}_g}{\|\bar{N}_g\|} = \frac{\frac{\partial \bar{g}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{g}}{\partial t}}{\left\|\frac{\partial \bar{g}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{g}}{\partial t}\right\|} = \frac{\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(s,t)}\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}\right)}{\left\|\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(s,t)}\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}\right)\right\|} \ (*)$$

el desarrollo viene más adelante

$$= \frac{\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(s,t)}\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}\right)}{\left|\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(s,t)}\right| \left\|\frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}\right\|}$$

$$\begin{array}{ccc} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{array}$$

Por lo tanto
$$\bar{N}(\bar{g}) = \begin{cases} \bar{N}(\bar{f}) & \text{si } \frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(s,t)} > 0 \\ -\bar{N}(\bar{f}) & \text{si } \frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(s,t)} < 0 \end{cases}$$

$= (-2u, -2v, 1)$

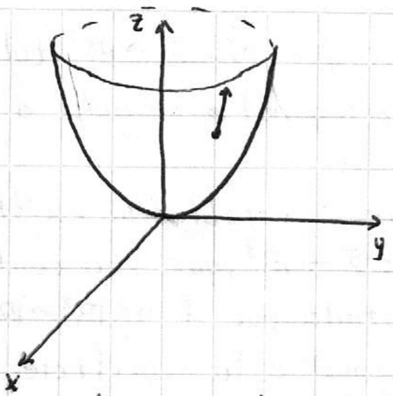
Ejemplo.

Consideremos la superficie Σ parametrizada por $\bar{f}: D\subset\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2 \leq \} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\bar{f}(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$ y $\bar{g}: \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 + t^2 \leq 1\} \to \mathbb{R}^3$ tal que $\bar{g}(s,t) = (s+t, s-t, 2s^2 + 2t^2)$, una reparametrización de la superficie.

Hacia donde apuntan los vectores normales a la superficie en cada caso. Como $\varphi: D' \to D$ está dada por $\varphi(s,t) = (s+t, s-t)$ se tiene
$$\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \ ; \ \bar{N}(f) = \frac{(1,0,2u) \times (0,1,2v)}{\|(1,0,2u) \times (0,1,2v)\|}$$

$4u^2 + 4v^2 + 2$

$$= \frac{(-2u, -2v, 1)}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}$$



Entonces el vector $\bar{N}(\bar{f})$ apunta hacia el interior del paraboloide.
Como $\bar{N}(\bar{g}) = -\bar{N}(f)$, en consecuencia $\bar{N}(\bar{g})$ apunta hacia el exterior del paraboloide.

Determinar el campo de vectores normales a Σ cuando Σ es la gráfica de una función $h: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Consideremos $\bar{f}(u,v) = (u, v, h(u,v))$

entonces
$$\bar{N}(\bar{f}) = \frac{\left(1, 0, \frac{\partial h}{\partial u}\right) \times \left(0, 1, \frac{\partial h}{\partial v}\right)}{\left\| \left(1, 0, \frac{\partial h}{\partial u}\right) \times \left(0, 1, \frac{\partial h}{\partial v}\right) \right\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2}} \left(-\frac{\partial h}{\partial u}, -\frac{\partial h}{\partial v}, 1\right)$$

Si Σ es una superficie de $h: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, entonces el campo normal de vectores $\bar{N}$ está dado por $\bar{N} = \dfrac{\nabla h(x,y,z)}{\|\nabla h(x,y,z)\|}$

Ahora consideremos la banda de Möbius. Los vectores $\bar{N}_{\bar{f}}$ están dados por
$$\bar{N}_{\bar{f}} = \begin{pmatrix} -\frac{v}{2} \operatorname{sen} u + \cos u \cos \frac{u}{2} - \frac{v}{2} \cos u \operatorname{sen} u \\ \frac{v}{2} \cos u + \operatorname{sen} u \cos \frac{u}{2} - \frac{v}{2} \operatorname{sen}^2 u \\ \left(1 - v \operatorname{sen} \frac{v}{2}\right) \operatorname{sen} \frac{u}{2} \end{pmatrix}$$

Consideremos $\bar{q}_1 = \bar{f}(0.01, -0.99) = (1.0049, 0.01, -0.99)$

y $\bar{q}_2 = \bar{f}(6.2732, -0.99) = (0.995, -0.01, -0.99)$

que están muy cercanos ya que $\|\bar{q}_1 - \bar{q}_2\| = 0.0223$ pero

pero $\bar{N}(\bar{q}_1) = (0.9014, -0.4329, 0.0045)$ y $\bar{N}(\bar{q}_2) = (-0.8908, -0.5049, 0.005)$

están muy alejados, ya que $\|\bar{N}(\bar{q}_1) - \bar{N}(\bar{q}_2)\| = 1.9998$

Por lo tanto el campo de vectores normales no es continuo, en consecuencia la cinta de Möbius no es orientable.

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{g}}{\partial t} = \frac{\partial(\bar{f}\circ\bar{\varphi})}{\partial s} \times \frac{\partial(\bar{f}\circ\bar{\varphi})}{\partial t} = \left(\frac{\partial \bar{f}(\bar{\varphi}(s,t))}{\partial u}\frac{\partial \varphi_1}{\partial s} + \frac{\partial \bar{f}(\bar{\varphi}(s,t))}{\partial v}\frac{\partial \varphi_2}{\partial s}\right) \times$$

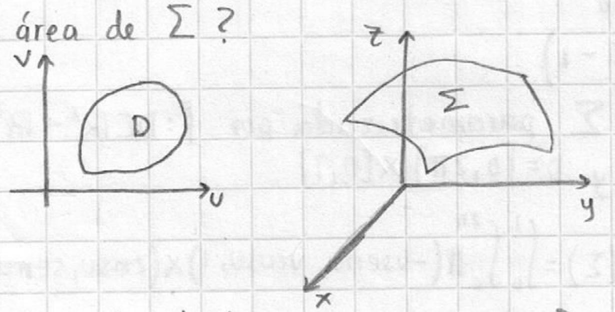
$$\left(\frac{\partial \bar{f}(\bar{\varphi}(s,t))}{\partial u}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \bar{f}(\bar{\varphi}(s,t))}{\partial v}\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}\right) \quad (*)$$

$$= \frac{\partial \varphi_1}{\partial s}\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}\left(\frac{\partial \bar{f}(\bar{\varphi})}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{f}(\bar{\varphi})}{\partial v}\right) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial s}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\left(\frac{\partial \bar{f}(\bar{\varphi})}{\partial v} \times \frac{\partial \bar{f}(\bar{\varphi})}{\partial u}\right)$$

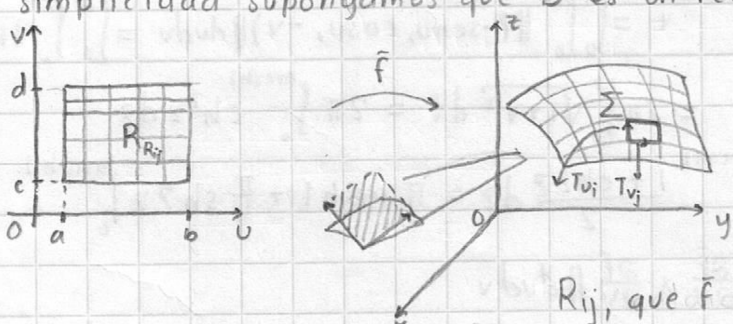
$$= \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial s}\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial s}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \bar{f}(\bar{\varphi})}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{f}(\bar{\varphi})}{\partial v}\right) \qquad (*)$$

Área de una superficie.

Si Σ es una superficie simple parametrizada por $\bar{f}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ¿Cómo calcular el área de Σ?



Por simplicidad supongamos que D es un rectángulo



Consideremos una partición del rectángulo $R = [a,b] \times [c,d]$ la cual induce una partición en Σ.

Si tomamos el subrectángulo R_{ij}, que $\bar{f}$ manda a $\bar{f}(R_{ij})$, si consideramos $\bar{f}(u_i, v_j)$ ahí quedan definidos los vectores $\bar{T}_{u_i} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial u}$ y $\bar{T}_{v_j} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}$ que son tangentes a Σ en dicho punto, pero los vectores $\Delta u \bar{T}_{u_i}$ y $\Delta v \bar{T}_{v_j}$ también son tangentes a Σ, por lo que el área del "paralelogramo curvo" $\bar{f}(R_{ij})$ se puede aproximar por el área del paralelogramo P_{ij} formado por los vectores $\Delta u \bar{T}_{u_i}$ y $\Delta v \bar{T}_{v_j}$, es decir $A(\bar{f}(R_{ij})) \approx A(P_{ij})$ pero

$$A(P_{ij}) = \|\Delta u \bar{T}_{u_i} \times \Delta v \bar{T}_{v_j}\| = \|\bar{T}_{u_i} \times \bar{T}_{v_j}\| \Delta v \Delta u$$

en consecuencia $A\bar{f}(R_{ij}) \approx \|\bar{T}_{u_i} \times T_{v_j}\| \Delta u \Delta v$

Luego $A(\Sigma) \approx \sum_{i,j=0}^{n-1} \|\bar{T}_{u_i} \times \bar{T}_{v_j}\| \Delta u \Delta v$

Por lo tanto

$$A(\Sigma) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i,j=0}^{n-1} \|\overline{T}_{v_i} \times \overline{T}_{v_j}\| \Delta u \Delta v = \iint_D \left\| \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} \right\| du\,dv$$

sen

$$= \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2}\, du\,dv$$

Ejemplos.

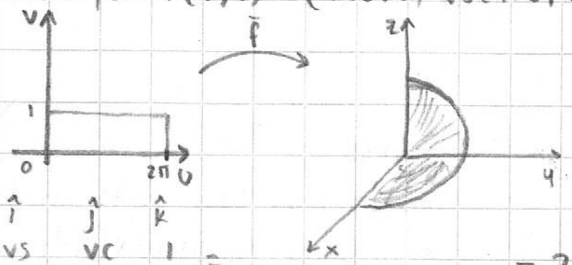
Determinar el área de Σ parametrizada por $\bar{f}: \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2\leq 1\} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\bar{f}(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$

$$A(\Sigma) = \iint_D \sqrt{1+4u^2+4v^2}\, du\,dv$$

$$\underset{\text{polares}}{\overset{\text{coord}}{=}} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1+4r^2}\, r\, d\theta\, dr = \int_0^1 2\pi \sqrt{1+4r^2}\, r\, dr$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(1+4r^2\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$

2. Calcular el área de la superficie Σ parametrizada por $\bar{f}: D\subset\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\bar{f}(u,v) = (v\cos u, v\,\text{sen}\, u, u)$ y $D = [0,2\pi]\times[0,1]$



$$\begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -vs & vc & 1 \\ c & s & 0 \end{matrix} =$$

$$A(\Sigma) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \|(-v\,\text{sen}\,u, v\cos u, 1)\times(\cos u, \text{sen}\,u, 0)\|\, du\,dv$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \|(-\text{sen}\,u, \cos u, -v)\|\, du\,dv = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1+v^2}\, du\,dv$$

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+v^2}\, dv = 2\pi \int_0^{\text{arcsh}\,1} \text{ch}^2 z\, dz$$

$$= 2\pi \int_0^{\text{arcsh}\,1} \frac{1+\text{ch}\,2z}{2}\, dz = \pi\,\text{arcsh}\,1 + \frac{\pi}{4}\,\text{sh}\,2z \Big|_0^{\text{arcsh}\,1}$$

Obtuvimos que $A(\Sigma) = \iint_D \left\| \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} \right\| du\,dv$

Ejemplo.

Calcular el área de la semiesfera unitaria parametrizada por $\bar{f}: [0,2\pi]\times[0,\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3$ tal que $\bar{f}(u,v) = (\cos u\,\text{sen}\,v, \text{sen}\,u\,\text{sen}\,v, \cos v)$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial u} = (-\text{sen}\,u\,\text{sen}\,v, \cos u\,\text{sen}\,v, 0)$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial v} = (\cos u\cos v, \text{sen}\,u\cos v, -\text{sen}\,v)$$

$$\left\|\frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}\right\| = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\text{sen}\,u\,\text{sen}\,v & \cos u\,\text{sen}\,v & 0 \\ \cos u\cos v & \text{sen}\,u\cos v & -\text{sen}\,v \end{vmatrix} = \|(-\text{sen}^2 v\cos u, -\text{sen}^2 v\,\text{sen}\,u, -\text{sen}\,v\cos v)\|$$

$$= \sqrt{\text{sen}^4 v\cos^2 u + \text{sen}^4 v\,\text{sen}^2 u + \text{sen}^2 v\cos^2 v} = \text{sen}\,v$$

$$\therefore\ A(\Sigma) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}\,v\, dv\, du = \int_0^{2\pi} -\cos v \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} du = \int_0^{2\pi} du = 2\pi$$