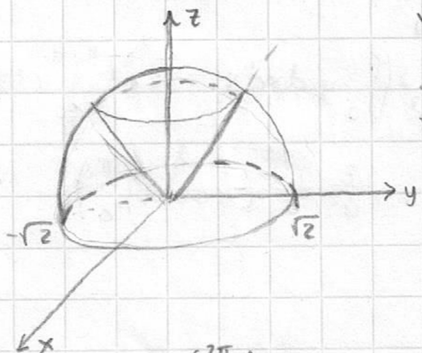
Correo Ana: ranabanana11@hotmail.com

Calcular el volumen del sólido comprendido entre la semiesfera $z\sqrt{2-x^2-y^2}$ y el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$.



$$V=\iint_D\left(\sqrt{2-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy$$

$x=r\cos\theta,\ y=r\,\mathrm{sen}\,\theta$

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(\sqrt{2-r^2}-r\right)r\,dr\,d\theta$$

La intersección de las dos superficies es

$$2-x^2-y^2=x^2+y^2$$
$$1=x^2+y^2$$

$$V=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{3}(2-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^1 d\theta=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{2}{3}+\frac{2^{\frac{3}{2}}}{3}\right)d\theta$$

$$V=-\frac{1}{3}\left(2\theta-2\sqrt{2}\,\theta\right)\Big|_0^{2\pi}=-\frac{1}{3}\left(4\pi-4\sqrt{2}\,\pi\right)$$
$$=-\frac{4\pi}{3}\left(1-\sqrt{2}\right)=\frac{4\pi}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Las coordenadas del centro de masa son

$$\bar{x}=\frac{\iint_D x\,\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy}\ ;\quad \bar{y}=\frac{\iint_D y\,\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy}$$

Si la distribución de masa es homogénea se tiene

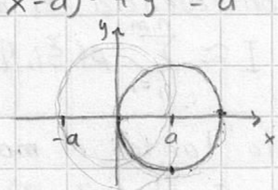
$$\bar{x}=\frac{\iint x\,dx\,dy}{A(D)}\ ;\quad \bar{y}=\frac{\iint y\,dx\,dy}{A(D)}$$

Ejemplo. Calcular el momento estático M_y, M_x del disco homogéneo cuya frontera es

$$x^2+y^2=2ax \qquad x=r\cos\theta,\ y=r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad x^2-2ax+y^2=0$$

$$M_y=\iint_D x\,dx\,dy \qquad r^2=2ar\cos\theta \qquad (x-a)^2+y^2-a^2=0$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2a\cos\theta} r^2\cos\theta\,dr\,d\theta \qquad r=2a\cos\theta \qquad (x-a)^2+y^2=a^2$$



$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^3}{3}\Big|_0^{2a\cos\theta}\cos\theta\,d\theta=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}8a^3\cos^4\theta\,d\theta$$

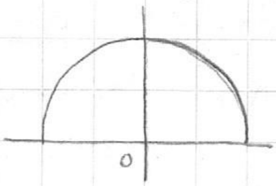
$$=\frac{8}{3}a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2d\theta=\frac{8}{12}a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{8}{12}a^3\left(\pi+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 4\theta}{2}\,d\theta\right)=\frac{8}{12}a^3\left(\pi+\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{8}\,\mathrm{sen}\,4\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right) \qquad \text{con } \rho=1$$

$$=\frac{8}{12}a^3\left(\pi+\frac{1}{2}\pi\right)=\frac{8}{12}a^3\,\frac{3\pi}{2}=\frac{4}{4}a^3\pi=a^3\pi$$

$r = 2a\cos\theta$

Determinar las coordenadas del centro de masa del semidisco de radio a con centro en el origen, cuya densidad de masa es homogénea



Por la simetría de D $\bar{x}=0$

y $\bar{y} = \dfrac{\iint_D y\,dx\,dy}{\frac{\pi a^2}{2}} = \dfrac{2}{\pi a^2}\iint_D y\,dx\,dy = \dfrac{2}{\pi a^2}\int_0^{\pi}\int_0^{a} r^2 \operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta$

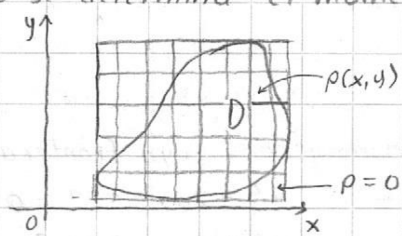
$= \dfrac{2}{\pi a^2}\int_0^{\pi} \dfrac{r^3}{3}\Big|_0^a \operatorname{sen}\theta\,d\theta = \dfrac{2}{a^2}\dfrac{\pi^2}{3}\left(-\cos\theta\Big|_0^{\pi}\right)$

$= \dfrac{4a}{3\pi}$

Dada una partícula de masa m en el plano y un punto O, al producto $I = md^2$ se le llama momento de inercia de la partícula con respecto al punto O, donde d es la distancia desde la posición de la partícula al punto O.

Si se tiene un sistema de n partículas y un punto O, el momento de inercia del sistema con respecto al punto O es $I = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2$

Dada una región D en el plano con una densidad de masa $\rho(x,y)$ ¿Cómo se determina el momento de inercia de D con respecto al origen?



Dada una partición de R se tiene,

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } R_{ij}\cap D = \emptyset \\ \approx \rho(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i \Delta y_j \text{ si } R_{ij}\cap D \neq \emptyset \end{cases}$$

entonces

$$I(R_{ij}) = \begin{cases} 0 \text{ en el primer caso} \\ \rho(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i\Delta y_j(\xi_i^2+\eta_j^2) \end{cases}$$

En consecuencia el momento de inercia de D con respecto al origen es

$$I \approx \sum_{i,j=1}^{n,m} \rho(\xi_i,\eta_j)(\xi_i^2+\eta_j^2)\Delta x_i \Delta y_j$$

Por lo tanto el momento de inercia queda en la forma

$$I = \iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)\,dx\,dy$$

A las expresiones $I_{xx} = \iint_D y^2\rho(x,y)\,dx\,dy$, $I_{yy} = \iint_D x^2\rho(x,y)\,dx\,dy$, se les llama momentos de inercia respecto al eje x y con respecto al eje y.

Ejemplo. Calcular el momento de inercia con respecto al origen de la región D limitada por las curvas $y^2 = 1-x$, $x=0$ y $y=0$, si la densidad de masa es xy.

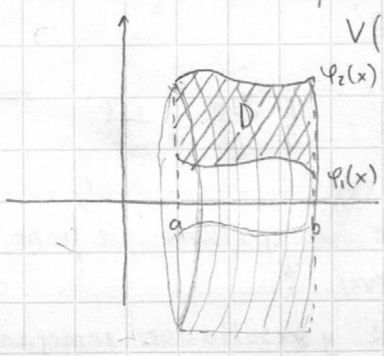
$I = \iint_D xy(x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x}} xy(x^2+y^2)\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x}}(x^3y+xy^3)\,dy\,dx$

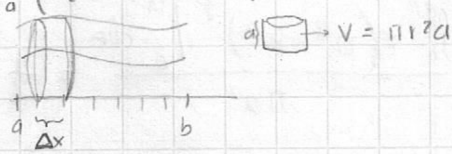
$= \int_0^1\left(\dfrac{x^3}{2}y^2\Big|_0^{\sqrt{1-x}} + \dfrac{x}{4}y^4\Big|_0^{\sqrt{1-x}}\right)dx = \int_0^1\left(\dfrac{x^3(1-x)}{2} + \dfrac{x}{4}(1-x)^2\right)dx = \int_0^1\left(\dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{x}{4} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{4}\right)dx$

$= \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{4}{16} - \dfrac{3+5}{30} = \dfrac{5}{16} - \dfrac{8}{30} = \dfrac{11}{240}$

Si $D \subset \mathbb{R}^2$ es una región del tipo I, es decir,
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b \,;\, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$ donde $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas tales que $0 \le \varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$, sabemos que el volumen del sólido Ω que se obtiene al rotar la región D alrededor del eje x es

$$V(\Omega) = \pi \int_a^b \left(\varphi_2^2(x) - \varphi_1^2(x)\right) dx$$





Si la densidad de masa de la región D es constante, entonces la coordenada $\bar{y}$ del centro de masa de D es

$$\bar{y} = \frac{\iint_D y\,dx\,dy}{A(D)} = \frac{1}{A(D)} \iint_D y\,dx\,dy$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A(D)} \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} y\,dy\,dx = \frac{1}{A(D)} \int_a^b \frac{1}{2}\left(\varphi_2^2(x) - \varphi_1^2(x)\right) dx$$

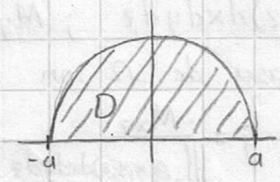
$$\bar{y} = \frac{1}{2A(D)} \int_a^b \left(\varphi_2^2(x) - \varphi_1^2(x)\right) dx$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2\pi A(D)} V(\Omega)$$

Este resultado se conoce como Teorema de Papus

Usar este teorema para calcular la ordenada del centro de masa del semidisco de radio a.

$$\bar{y} = \frac{1}{2\pi A(D)} V(\Omega)$$



$$\bar{y} = \frac{1}{2\pi \frac{\pi a^2}{2}} \frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{4a}{3\pi}$$

Teorema (del valor medio para integrales dobles). Si $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continua en D, donde D es cerrado y acotado, entonces existe $(\xi, \eta) \in D$ tal que

$$f(\xi,\eta) = \frac{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy}$$

a $f(\xi,\eta)$ se le llama el valor medio de f en D y se denota $\bar{f}_D$

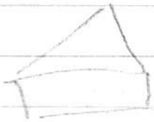
Demostración. Como f es continua en D y D es cerrado y acotado, entonces f alcanza su mínimo m y su máximo M, por lo que $m \le f(x,y) \le M$, $\forall (x,y) \in D$, en consecuencia $m \iint_D dx\,dy \le \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \le M \iint_D dx\,dy$

luego $m \le \dfrac{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy} \le M$ (por un análogo del Teorema del valor intermedio de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)

Por lo tanto existe $(\xi,\eta) \in D$ tal que $f(\xi,\eta) = \dfrac{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy}$

$\rho = \frac{m}{A}$

$\rho A = m \iint \rho \, dx\, dy$



ρ

$\rho \; A$

1. Calcular el valor medio de $f(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ en el disco de radio a.

$x = r\cos\theta \;,\; y = r\operatorname{sen}\theta$

$$f(\xi,\eta) = \frac{\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{a} \sqrt{a^2-r^2}\; r\,dr\,d\theta}{\pi a^2}$$

$$= -\frac{1}{3}\,\frac{\int_0^{2\pi} (a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{a} d\theta}{\pi a^2} = \frac{1}{3}\,\frac{\int_0^{2\pi} a\,d\theta}{\pi} = \frac{1}{3}\,\frac{2\cancel{\pi} a}{\cancel{\pi}} = \frac{2a}{3}$$

La interpretación del teorema en $\mathbb{R}^2$ es que existe un prisma que tiene el mismo volumen que la región debajo de la curva.

Para integrales triples se pueden enunciar definiciones y resultados semejantes que los de las integrales dobles

1. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es una región elemental, entonces $V(\Omega) = \iiint_\Omega dx\,dy\,dz$
2. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es una región de la forma
   $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, (x,y)\in D \subset \mathbb{R}^2 ;\ \sigma_1(x,y) \le z \le \sigma_2(x,y)\}$ entonces
   $$V(\Omega) = \iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{\sigma_1(x,y)}^{\sigma_2(x,y)} dz\right) dx\,dy = \iint_D \left(\sigma_2(x,y) - \sigma_1(x,y)\right) dx\,dy$$
3. Momentos estáticos. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un sólido con una densidad de masa volumétrica $\rho(x,y,z)$ entonces $M_{xy} = \iiint_\Omega z\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$,
   $M_{xz} = \iiint_\Omega y\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \;;\; M_{yz} = \iiint_\Omega x\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

Las coordenadas del centro de masa de Ω son

$$\bar{x} = \frac{\iiint_\Omega x\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz} \;;\; \bar{y} = \frac{M_{xz}}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz} \;;\; \bar{z} = \frac{M_{xy}}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}$$

4. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, entonces
   $$I = \iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$
5. Teorema (del valor medio para integrales triples).

Si $f:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ está dada por $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{y}}, & \text{si } y\neq 0\\ 0 & \text{si } y=0\end{cases}$

y consideremos una partición uniforme P_n del rectángulo $R=[0,1]\times[0,1]$, entonces $S(f;P_n)=\sum_{i,j=1}^{n,m} f(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta x_i\Delta y_j$ puede hacerse tan grande como se quiera ya que para los subrectángulos R_{ij} adyacentes al eje x, se pueden elegir los puntos (ξ_{ij},η_{ij}) de tal forma que el valor de la función se haga tan grande como se quiera, entonces parecería que f no es integrable.

Pero las integrales iteradas $\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}}\,dx\,dy$; $\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy\,dx$.
existen y además $\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy\,dx = 2 = \int_0^1\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}}\,dx\,dy$

$$\left[\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{x}\,\Big|_\varepsilon^1 = 2\right.$$

Esto significa que la integral de f existe a pesar de lo anterior.

Definición. Si $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es una función continua y acotada en D excepto en (x^*,y^*) $\subset D$ es un punto interior y $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D-B_{\delta_n}} f(x,y)\,dx\,dy$ existe, donde $B_{\delta_n}=B((x^*,y^*);\delta_n)$ tal que $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$, decimos que la integral impropia $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ converge, en caso contrario se dice que diverge

Teorema. Si $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es una función continua, no negativa y no acotada en cualquier bola $B((x^*,y^*);\delta)\subset D$, entonces la integral impropia $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ converge si y sólo si la sucesión $\{\iint_{D-B_{\delta_n}} f(x,y)\,dx\,dy\}$ es acotadada donde $\{B_{\delta_n}\}$ es una sucesión de bolas con centro en (x^*,y^*) tales que $B_{\delta_1}\supset B_{\delta_2}\supset\cdots\supset B_{\delta_n}\supset\cdots$ y $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$

Demostración

$\Rightarrow$) Como la integral impropia $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty}\iint_{D-B_{\delta_n}} f(x,y)\,dx\,dy$ existe, en consecuencia la sucesión $\{\iint_{D-B_{\delta_n}} f(x,y)\,dx\,dy\}$ es acotada

$\Leftarrow$) Como la sucesión $\{\iint_{D-B_{\delta_n}} f(x,y)\,dx\,dy\}$ es acotada, y
$\iint_{D-B_{\delta_1}} f(x,y) \leq \iint_{D-B_{\delta_2}} f(x,y)\,dx\,dy \leq \cdots \leq M$

Entonces la sucesión es creciente y acotada, por lo que $\lim_{n\to\infty}\iint_{D-B_{\delta_n}} f(x,y)\,dx\,dy$ existe. Por lo tanto la integral impropia $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ converge

$y = \operatorname{sen} y \quad + x$

Analicemos la integral impropia $\iint_D \frac{c}{\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)^\alpha}\,dx\,dy$ para $\alpha \in \mathbb{R}$ en cualquier bola $B((x_0,y_0);R)$

Consideremos una sucesión de bolas $\{B((x_0,y_0):\delta_0)\}$ tal que

$$B_{\delta_1} \supset B_{\delta_2} \supset \cdots \supset B_{\delta_n} \supset \cdots \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$$

$$\frac{1}{r^{\alpha-1}}$$

$$\iint_{B_R - B_{\delta_n}} \frac{c}{\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)^\alpha}\,dx\,dy = \int_{\delta_n}^{R}\int_0^{2\pi} \frac{c}{r^\alpha} r\,d\theta\,dr = 2\pi c \int_{\delta_n}^{R} r^{1-\alpha}\,dr$$

$$= 2\pi c \int_{\delta_n}^{R} r^{1-\alpha}\,dr = \begin{cases} 2\pi c \operatorname{Ln} r \Big|_{\delta_n}^{R} \\ 2\pi c \dfrac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha}\Big|_{\delta_n}^{R} \end{cases}$$

$\alpha \in \mathbb{R}^+$

Por lo tanto la integral impropia $\iint_{B_R} \frac{c}{\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)^\alpha}\,dx\,dy$ converge si $\alpha < 2$ y diverge si $\alpha \geq 2$

Propiedades

Convergencia absoluta

Definición. Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continua y acotada en D excepto en $(x^*, y^*) \subset D$, decimos que la integral impropia $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ converge absolutamente en D si la integral impropia $\iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy$ converge

Teorema. Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continua y acotada en D excepto en $(x^*, y^*) \subset D$ y la integral impropia $\iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy$ converge, entonces la integral impropia $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ converge

Demostración

Como
$$f(x,y) = |f(x,y)| - \left(|f(x,y)| - f(x,y)\right)$$
$$= f_1(x,y) - f_2(x,y)$$

Como $\iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy$ converge, entonces $\iint_D f_1(x,y)\,dx\,dy$ converge

Por otro lado
$$f_2(x,y) = |f(x,y)| - f(x,y) \leq 2|f(x,y)|$$

Por lo que si $\{B_{\delta_n}\}$ es una sucesión de bolas con centro en (x^*,y^*) y radio δ_n tales que $B_{\delta_1} \supset B_{\delta_2} \supset \cdots \supset B_{\delta_n} \supset \cdots$ y $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$, se tiene $\iint_{D-B_{\delta_n}} f_2(x,y)\,dx\,dy \leq 2\iint_{D-B_{\delta_n}} |f(x,y)|\,dx\,dy \leq 2\iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Por lo que la sucesión $\left\{\iint_{D-B_{\delta_n}} f_2(x,y)\,dx\,dy\right\}$ es una sucesión monótona y acotada. Por lo tanto $\lim_{n\to\infty}\iint_{D-B_{\delta_n}} f_2(x,y)\,dx\,dy$ existe, es decir la integral impropia $\iint_D f_2$ converge $\therefore \iint f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D (f_1(x,y) - f_2(x,y))\,dx\,dy$ converge

Teorema. Si $f, g: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son funciones acotadas en D excepto en $(x^*, y^*) \in D$, tales que $|f(x,y)| \leq g(x,y)$ para todo $(x,y) \in D$, entonces

i) La integral impropia $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ converge si la integral impropia $\iint_D g(x,y)\,dx\,dy$ converge.

ii) La integral impropia $\iint_D g(x,y)\,dx\,dy$ diverge si $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ diverge.

Demostración.

Consideremos cualquier sucesión de bolas $\{B((x^*,y^*); \delta_n)\}$ tal que $B_{\delta_1} \supset B_{\delta_2} \supset \cdots \supset B_{\delta_n} \supset \cdots$ y $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ como $|f(x,y)| \leq g(x,y)$ entonces
$$\iint_{D-B_{\delta_n}} |f(x,y)|\,dx\,dy \leq \iint_{D-B_{\delta_n}} g(x,y)\,dx\,dy$$

i) Como $\iint_D g(x,y)\,dx\,dy$ converge, entonces la sucesión $\left\{\iint_{D-B_{\delta_n}} |f(x,y)|\,dx\,dy\right\}$ es acotada. Pero la sucesión es no decreciente. Por lo tanto la sucesión converge a $\iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy$

En consecuencia la integral impropia ~~[illegible]~~ $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ converge

ii) Si $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ diverge, entonces la sucesión $\left\{\iint_{D-B_{\delta_n}} f(x,y)\,dx\,dy\right\}$ es no acotada, por lo que la sucesión $\left\{\iint_{D-B_{\delta_n}} |f(x,y)|\,dx\,dy\right\}$ también es no acotada. ~~Pero~~ En consecuencia la sucesión $\left\{\iint_{D-B_{\delta_n}} g(x,y)\,dx\,dy\right\}$ es no acotada, por lo tanto la integral impropia
$$\iint_{D-B_{\delta_n}} g(x,y)\,dx\,dy \text{ no converge}$$

Teorema. Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función acotada en D excepto en (x^*, y^*) tal que $|f(x,y)| \leq \frac{c}{r^\alpha}$, $c \in \mathbb{R}^+$ donde $r = \sqrt{(x-x^*)^2 + (y-y^*)^2}$, y $\alpha < 2$ entonces la integral impropia $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ converge.

Demostración.

Hagamos $g(x,y) = \frac{c}{r^\alpha}$. Como la integral impropia $\iint_D g(x,y)\,dx\,dy$ converge y $|f(x,y)| \leq g(x,y)$, entonces la integral impropia $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ converge.

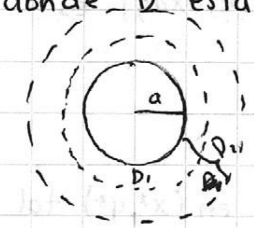
Ejemplo. Determinar si la integral impropia $\iint_D \frac{\operatorname{sen} x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$ converge o no converge en el disco unitario.

Como $\left|\frac{\operatorname{sen} x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ y la integral impropia ~~converge~~ $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$ converge, entonces $\iint_D \frac{\operatorname{sen} x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$ converge.

Definición. Si $D \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto no acotado, decimos que la sucesión de conjuntos $\{D_n\}$ ~~es exhaustiva para D~~ tal que $D_n \subset D$ para todo $n \in \mathbb{N}$ es exhaustiva para D si para cualquier $R>0$ existe $N(R) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N(R)$ todos los puntos que están en el disco de radio R con centro en el origen pertenecen a D_n.

Definición. Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donde D es un conjunto no acotado, es una función integrable en cada subconjunto acotado de D y para cualquier elección de una sucesión $\{D_n\}$ exhaustiva, la sucesión $\{\iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy\}$ converge al mismo límite I, decimos que la integral impropia $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ converge.

Determinar la convergencia o divergencia de la integral impropia $\iint_D \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha}\,dxdy$ donde D está dado por $x^2+y^2 \geq a^2$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$



$$\iint_D \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha}\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_a^{+\infty} \frac{1}{r^\alpha}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_0^{2\pi}\int_a^{R} \frac{1}{r^{\alpha-1}}\, dr\, d\theta = 2\pi \lim_{R\to\infty} \int_a^R \frac{1}{r^{\alpha-1}}\, dr$$

$$\cancel{= 2\pi \lim_{R\to\infty}} = \begin{cases} 2\pi \lim\limits_{R\to\infty} \operatorname{Ln} r \Big|_a^R & \text{si } \alpha = 2 \\ 2\pi \lim\limits_{R\to\infty} \frac{1}{2-\alpha} r^{2-\alpha} \Big|_a^R, & \text{si } \alpha \neq 2 \end{cases}$$

[entonces converge para $\alpha > 2$, pero diverge cuando $\alpha \leq 2$]

Por lo tanto la integral impropia $\iint_D \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha}\,dxdy$ converge si $\alpha > 2$ y diverge si $\alpha \leq 2$

$\lambda^y \le \lambda^\eta$

$y \ln\lambda \le \eta \ln y$

Ejemplos.

1. Si $I(y)$ es la integral impropia que depende del parámetro y dada por $I(y)=\int_0^1 y x^{y-1}\,dx$. ¿Converge uniformemente para $y\in[0,1]$?

$$I(y)=\int_0^1 y x^{y-1}dx = \lim_{\lambda\to 0}\int_\lambda^1 y x^{y-1}dx = \lim_{\lambda\to 0} x^y\Big|_\lambda^1 = 1-\lim_{\lambda\to 0}\lambda^y = 1$$

- Por otro lado $\left|I(y)-\int_\lambda^1 y x^{y-1}dx\right| = \int_0^\lambda y x^{y-1}dx = \lambda^y$ $\{\sqrt[n]{c}\}$

cuyo límite es 1 cuando $y\to 0$

Dado cualquier $\varepsilon<1$, no existe $\delta(\varepsilon)>0$ tal que si $0<\lambda<\delta(\varepsilon)$ $\lambda^y<\varepsilon$

Pero si $0<\eta\le y\le 1$ entonces la integral impropia converge uniformemente ya que $\int_0^\lambda y x^{y-1}dx = \lambda^y \le \lambda^\eta$ y dado $\varepsilon>0$, si se toma $\delta(\varepsilon)=(\varepsilon)^{\frac{1}{\eta}}$ se tiene $\lambda^\eta<\varepsilon$ si $0<\lambda<\varepsilon^{\frac{1}{\eta}}$

Ejemplo.

La integral impropia $I^*(y)=\int_0^{+\infty} y e^{-xy}dx$ ¿Converge uniformente para $y=[0,1]$?

$$\left|I^*(y)-\int_0^\ell y e^{-xy}dx\right| = \int_\ell^{+\infty} y e^{-xy}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_\ell^b y e^{-xy}dx = \lim_{b\to+\infty} -e^{-xy}\Big|_\ell^b$$

$$= +e^{-\ell y}$$

que tiende a 1 cuando $y\to 0$, por lo tanto $I^*(y)$ no converge uniformemente. Pero si $0<\eta\le y\le 1$, entonces sí converge uniformemente, ya que dado $\varepsilon>0$ $e^{-\ell y}<\varepsilon$ $\left[\text{si } -\ell y<\ln\varepsilon,\ \ell>\frac{\ln\varepsilon}{-y}=\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{y}\right]$

si $L(\varepsilon)=\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{y}$

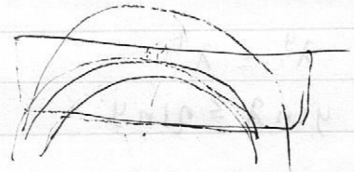
Si $f: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ donde $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x<+\infty;\ c\le y\le d\}$ es una función tal que la integral impropia $I^*(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ converge para $y\in[c,d]$

¿Cómo es la sucesión $\{F_n(y)\}$ donde $F_n(y)=\int_a^{\ell_n} f(x,y)dx$ y $\{\ell_n\}$ es una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty}\ell_n=$ "$+\infty$"?

Teorema. La integral impropia $I^*(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ converge uniformemente en $[c,d]$ si y sólo si la sucesión de funciones $\{F_n(y)\}$ con $F_n(y)=\int_0^{\ell_n} f(x,y)dx$ converge uniformemente donde $\{\ell_n\}$ es una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty}\ell_n=$ "$+\infty$"

$\Rightarrow$) Como la integral impropia $I^*(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ converge uniformemente en $[c,d]$, entonces dado $\varepsilon>0$ existe $L(\varepsilon)$ tal que $\left|I^*(y)-\int_a^b f(x,y)dx\right|<\varepsilon$ si $\ell>L(\varepsilon)$ para todo $y\in[c,d]$

Hi5...Facebook!



$\|f\|$

$|f| \leq$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial r} \end{vmatrix}$$

$I(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha_1)\,dx \quad , \quad \alpha \in [c,d]$

Si $f \in C_R$, entonces $I \in C_{[c,d]}$

$\cancel{\int_a^b f(x,\alpha)dx}$ $\qquad \cancel{I(\alpha)}$

Como f es continua en R, entonces es continua uniformemente en R, por lo que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$|f(x_1,\alpha_1) - f(x_2,\alpha_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{si} \quad \|(x_1,\alpha) - (x_2,\alpha_2)\| < \delta(\varepsilon)$$

es decir $\int_a |f(x_1,\alpha_1) - f(x_2,\alpha_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\int dx$ si $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$ y $|\alpha_1 - \alpha_2| < \delta(\varepsilon)$

Si se considera $x_1 = x_2 = x$, se tiene

$$\left|\int_a^b f(x,\alpha_1)\,dx - \int_a^b f(x,\alpha_2)\,dx\right| = \left|\int_a^b (f(x,\alpha_1) - f(x,\alpha_2))\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x,\alpha_1) - f(x,\alpha_2)|\,dx$$
$$< \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx = \varepsilon$$

Integrales impropias que dependen de un parámetro

Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función no acotada en un rectángulo $R = [a,b] \times [c,d]$ cuando $x \to b$ y la integral impropia

$I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \int_a^{b-\lambda} f(x,y)\,dx$ converge para cada $y \in [c,d]$, entonces $I(y)$ define una función en $[c,d]$

Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq +\infty;\ c \leq y \leq d\}$ y la integral impropia $I^*(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \lim_{l \to \infty} \int_a^l f(x,y)\,dx$ converge para cada $y \in [c,d]$, entonces $I^*(y)$ define una función en $[c,d]$

Definición. Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función no acotada en $[a,b] \times [c,d]$ cuando $x \to b$ y la integral impropia $I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ (1) converge para todo $y \in [c,d]$, decimos que $I(y)$ converge uniformemente si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\left| I(y) - \int_a^{b-\lambda} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon \quad \text{si } 0 < \lambda < \delta(\varepsilon) \text{ y } y \in [c,d]$$

Definición. Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq +\infty;\ c \leq y \leq d\}$ y la integral impropia $I^*(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ converge para todo $y \in [c,d]$, decimos que $I^*(y)$ converge uniformemente si dado $\varepsilon > 0$ existe $L(\varepsilon)$ tal que $\left| I^*(y) - \int_a^l f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon$ si $l > L(\varepsilon)$ y $y \in [c,d]$

Para $L(\varepsilon)>0$, existe $N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ tal que si $l_n > N(\varepsilon)$, entonces para $F_n(y)=\int_a^{l_n} f(x,y)\,dx$ ~~se tiene que $|I^*(y)-F_n(y)|<\varepsilon$~~ se tiene que $|I^*(y)-F_n(y)|<\varepsilon$ para todo $n>N(\varepsilon)$ y $y\in[c,d]$

Por lo tanto la sucesión de funciones $\{F_n(y)\}$ converge uniformemente en $[c,d]$

$\Leftarrow$) Supongamos que la integral impropia $I^*(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ no converge uniformemente en $[c,d]$ a pesar de que la sucesión de funciones $\{F_n(y)\}$ con $F_n(y)=\int_a^{l_n} f(x,y)\,dx$ converge uniformemente en $[c,d]$, es decir, existe $\varepsilon_0^*>0$ tal que para todo $L>0$ existe $l>L$ tal que

$$\left|I^*(y)-\int_a^{l} f(x,y)\,dx\right| \geq \varepsilon^*$$

Al considerar sucesivamente $L=1,2,\ldots,n,\ldots$ se tiene

$$\left|I^*(y)-\int_a^{l_1} f(x,y)\,dx\right| \geq \varepsilon^* \quad \text{para } l_1>L_1$$

$$\left|I^*(y)-\int_a^{l_2} f(x,y)\,dx\right| \geq \varepsilon^* \quad \text{para } l_2>L_2$$

$$\vdots$$

$$\left|I^*(y)-\int_a^{l_n} f(x,y)\,dx\right| \geq \varepsilon^* \quad \text{para } l_n>L_n$$

$$\vdots$$

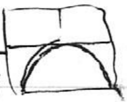
En consecuencia la sucesión de funciones $\{F_n(y)\}$ converge no uniformemente en $[c,d]$, lo cual contradice la hipótesis de la convergencia uniforme de $\{F_n(y)\}$. Por lo tanto la integral impropia $I^*(y)$ debe converger ~~unifor~~ uniformemente en $[c,d]$.

Teorema. Si $f: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ donde $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\leq x<\infty;\ c\leq y\leq d\}$ es una función ~~tal que~~ continua tal que la integral impropia $I^*(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ converge uniformemente, ~~entonces~~ respecto del parámetro $y\in[c,d]$, entonces $I^*(y)$ es continua en $[c,d]$

Demostración.

Consideremos cualquier sucesión $\{l_n\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} l_n=+\infty$ y la sucesión $\{F_n(y)\}$ donde $F_n(y)=\int_a^{l_n} f(x,y)\,dx$

Como $I^*(y)$ converge uniformemente en $[c,d]$, entonces $\{F_n(y)\}$ converge uniformemente en $[c,d]$. Como f es continua en $[a,\infty)\times[c,d]$, entonces $F_n(y)=\int_a^{l_n} f(x,y)\,dx$ es continua para todo $n\in\mathbb{N}$

$\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{16}}$, $-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{4}}$ 

$\frac{16}{8}$, $\frac{4}{4}$

$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{4}}$ $\frac{4}{4}$,

Como $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = I^*(y)$ entonces $I^*(y)$ es una función continua en $[c,d]$.

Teorema. Si f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son funciones continuas en $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x<+\infty, c\le y\le d\}$ la integral impropia $I^*(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ converge uniformente en $[c,d]$ y la integral impropia $\int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$ converge uniformemente entonces $I^*(y)$ es una función diferenciable con respecto al parámetro $y\in[c,d]$ y además

$$\left(I^*(y)\right)' = \frac{d}{dy}\left(\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\right) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$$

Demostración.

Consideremos una sucesión $\{\ell_n\}$ donde $\lim\limits_{n\to\infty} \ell_n = \text{“}+\infty\text{”}$ y $\{F_n(y)\}$ donde $F_n(y)=\int_a^{\ell_n} f(x,y)\,dx$. Para $F_n(y)$ se tiene $\frac{F_n(y+\Delta y)-F_n(y)}{\Delta y} =$

$$\frac{F_n(y+\Delta y)-F_n(y)}{\Delta y} = \int_a^{\ell_n} \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\,dx$$

$$= \int_a^{\ell_n} \frac{\partial(f(x,y+\theta\Delta y)}{\partial y}\,dx \quad \text{donde} \quad 0<\theta<1$$

Entonces $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\left(\frac{F_n(y+\Delta y)-F_n(y)}{\Delta y}\right) = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\int_a^{\ell_n} \frac{\partial f(x,y+\theta\Delta y)}{\partial y}\,dx$

Pero como la integral impropia $\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$ converge uniformemente en $[c,d]$

entonces dado $\varepsilon>0$ existe $L(\varepsilon)$ tal que si $\ell > L(\varepsilon)$

$$\left|\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx - \int_a^{\ell}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx\right| < \varepsilon$$

Como $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ es continua uniformemente en $[a,\ell_n]\times[c,d]$, entonces

$$\left|\frac{\partial f(x,y+\theta\Delta y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| < \frac{\varepsilon}{\ell_n - a} \quad \text{para } y\in[c,d] \text{ y } (y+\Delta y)\in[c,d],\ 0<\theta<1$$

Por lo que $\left|\frac{F_n(y+\Delta y)-F_n(y)}{\Delta y} - \int_a^{\ell_n}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx\right| = \left|\int_a^{\ell_n}\frac{\partial f(x,y+\theta\Delta y)}{\partial y}\,dx - \int_a^{\ell_n}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx\right|$

$$= \left|\int_a^{\ell_n}\left(\frac{\partial f(x,y+\theta\Delta y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)dx\right| \le \int_a^{\ell_n}\left|\frac{\partial f(x,y+\theta\Delta y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|dx$$

$$< \frac{\varepsilon}{\ell_n - a}\int_a^{\ell_n} dx = \frac{\varepsilon}{\ell_n - a}(\ell_n - a) = \varepsilon \quad \text{para todo } x\in[a,\ell_n] \text{ y } y\in[c,d], (y+\Delta y)\in[c,d]$$

Por lo tanto $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{F_n(y+\Delta y)-F_n(y)}{\Delta y} = \int_a^{\ell_n}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$ es decir $\frac{d}{dy}\left(\int_a^{\ell_n} f(x,y)\,dx\right) = \int_a^{\ell_n}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$

TAREA: hacer la demostración de abajo

$$F_n'(y) = \int_a^{l_n} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$$, donde $F_n'(y)$ es continua para todo $n \in \mathbb{N}$

Como la integral impropia $\int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$ converge uniformemente, entonces $\{F_n'(y)\}$ converge uniformemente, entonces $\{F_n'(y)\}$ converge uniformemente a $(I^*)'(y)$, ya que $\{F_n(y)\}$ es una sucesión de funciones diferenciables que converge uniformemente

Teorema. Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continua en $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x < +\infty, c \le y \le d\}$ ~~tal~~ q. y la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = I^*$ converge uniformemente en $[c,d]$, entonces $\int_c^d I^*(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$

$$= \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x,y)\,dy$$

Ejemplos.

1. Calcular $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}\beta x}{x}\,dx$, lo vamos a hacer derivando la integral impropia $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\operatorname{sen}\beta x}{x}\,dx$ respecto del parámetro β y en seguida integrando el resultado respecto del parámetro β.

$$(I^*(\beta))' = \frac{d}{d\beta}\left(\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\operatorname{sen}\beta x}{x}\,dx\right) = \int_a^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos\beta x\,dx = \lim_{l\to+\infty} \int_0^l e^{-\alpha x} \cos\beta x\,dx$$

$$= \lim_{l\to+\infty}\left(e^{-\alpha x} \frac{\operatorname{sen}\beta x}{\beta}\Big|_0^l + \frac{\alpha}{\beta}\int_0^l e^{-\alpha x} \operatorname{sen}\beta x\,dx\right)$$

$$= \lim_{l\to+\infty}\left(-\frac{\alpha}{\beta^2} e^{-\alpha x} \cos\beta x\Big|_0^l - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\int_0^l e^{-\alpha x} \cos\beta x\,dx\right)$$

$du = \cos\beta x$

$u = \frac{\operatorname{sen}\beta x}{\beta}$

$v = e^{-\alpha x}$

$v' = -\alpha e^{-\alpha x}$

de donde

$$\left(1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) \lim_{l\to\infty} \int_0^l e^{-\alpha x} \cos\beta x\,dx = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

Por lo que $\lim_{l\to+\infty} \int_0^l e^{-\alpha x} \cos\beta x\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$ es decir $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos\beta x = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$

o lo que es lo mismo

$$(I^*(\beta))' = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$$ Al integrar con respecto del parámetro β se obtiene

$$I^*(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\,d\beta = \lim_{l\to+\infty} \int_0^l \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\,d\beta = \lim_{l\to+\infty} \arctan\frac{\beta}{\alpha}\Big|_0^l$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

Luego $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\operatorname{sen}\beta x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$

Como $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}\beta x}{x}\,dx = \lim_{\alpha\to 0} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\operatorname{sen}\beta}{x}\,dx$

$$= \int_0^{+\infty} \lim_{\alpha\to 0} e^{-\alpha x} \frac{\operatorname{sen}\beta x}{x}\,dx = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

2. $I=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ con este método.

Hagamos el cambio de variable $x = ut$, entonces $dx = u\,dt$ por lo que $I=\int_0^{+\infty} e^{-u^2t^2}u\,dt$

Si multiplicamos ambos lados por e^{-u^2} se obtiene

$$Ie^{-u^2}=\int_0^{+\infty} e^{-u^2}e^{-u^2t^2}u\,dt=\int_0^{+\infty} e^{u^2(-1-t^2)}u\,dt$$

Al integrar respecto de u se tiene

$$\int_0^{+\infty} Ie^{-u^2}\,du=\int_0^{+\infty}du\int_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)u^2}u\,dt$$

es decir, $$I^2=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)u^2}u\,du\right)dt=\int_0^{+\infty}\left(\lim_{l\to+\infty}-\frac{1}{2(1+t^2)}e^{-(1+t^2)u^2}\Big|_0^l\right)dt$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2(1+t^2)}dt=\frac{1}{2}\lim_{l\to\infty}\arctan t\Big|_0^l=\frac{\pi}{4}$$

Por lo tanto

$$I=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

3. Calcular $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\,dx$

Consideremos $I^*(y)=\int_0^{+\infty}e^{-yx}dx=\lim_{l\to\infty}\int_0^l e^{-yx}dx=\lim_{l\to\infty}-\frac{1}{y}e^{-yx}\Big|_0^l=\frac{1}{y}$

Si ahora integramos $I^*(y)$ con respecto al parámetro desde α $(\alpha,\beta>0)$ hasta β, se obtiene $\int_\alpha^\beta I^*(y)dy=\int_\alpha^\beta\left(\int_0^{+\infty}e^{-yx}dx\right)dy=\int_\alpha^\beta\frac{1}{y}dy$

es decir, se tiene

$$\int_\alpha^\beta\left(\int_0^{+\infty}e^{-xy}dx\right)dy=\int_\alpha^\beta\frac{1}{y}dy=\ln\frac{\beta}{\alpha}$$

Pero al cambiar el orden de integración en el lado izquierdo de la igualdad se obtiene $\int_\alpha^\beta\left(\int_0^{+\infty}e^{-yx}dx\right)dy=\int_0^{+\infty}\left(\int_\alpha^\beta e^{-yx}dy\right)dx$

$$=\int_0^{+\infty}-\frac{1}{x}e^{-yx}\Big|_\alpha^\beta dx=\int_0^{+\infty}-\frac{e^{-\beta x}-e^{-\alpha x}}{x}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx=\ln\frac{\beta}{\alpha}$$

Integrales de Euler

Las integrales impropias

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx, \quad p>0 \qquad \text{(función gamma)}$$

y $$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx \quad \text{donde } p,q>0 \qquad \text{(función Beta)}$$

se conocen como integrales de Euler.

La función gama.

La integral impropia converge para cada $p>0$

Escribamos $\Gamma(p)$ en la forma

$$\Gamma(p) = \int_0^1 x^{p-1}e^{-x}\,dx + \int_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx$$

~~Para la primer integral~~ Como $x^{p-1}e^{-x} \le x^{p-1}$, $x \in (0,1]$

~~Pero~~ $\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}\,dx \le \int_0^1 x^{p-1}\,dx$ es decir,

$$\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}\,dx \le \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 x^{p-1}\,dx = \frac{1}{p}\lim_{\varepsilon\to 0} x^p\Big|_\varepsilon^1 = \frac{1}{p}$$

Luego $\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}\,dx$ converge

Para demostrar que $\int_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx$ converge utilicemos el siguiente Teorema. Si $f,g:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ son funciones continuas tales que $f(x)\ge 0$, $g(x)>0$ y $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \ell>0$, entonces $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge si $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge.

Como $\lim_{x\to+\infty} x^2x^{p-1}e^{-x} = 0$ y $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\ell\to+\infty}\int_1^\ell \frac{1}{x^2}\,dx$

$$= -\lim_{\ell\to+\infty}\frac{1}{x}\Big|_1^\ell = 1$$

Por lo tanto la integral impropia $\int_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx$ converge.

$\Gamma(-\frac{1}{2})$ llevar disco a Itzá

$= \Gamma(-\frac{3}{2}+1)$

$(\frac{3}{2})!$

Propiedades

1. $\Gamma(p)$ converge uniformemente respecto al parámetro p en cualquier intervalo finito $0 < \alpha \leq p \leq \beta < +\infty$

2. $\Gamma(p)$ es una función continua con respecto al parámetro p.

3. Al derivar formalmente $\Gamma(p)$ con respecto al parámetro p, se obtiene $\Gamma'(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} \ln x \, dx$ y en general

$$\Gamma^{(n)}(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} \ln^n x \, dx \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

e^x

$$(\Gamma(p))' = \left(\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx\right)' = \int_0^{+\infty} \frac{\partial(x^{p-1}e^{-x})}{\partial p} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{\partial x^{p-1}}{\partial p} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} \ln x \, dx$$

Si $y = x^{p-1}$, entonces

$\ln y = (p-1)\ln x$

de donde

$\frac{d \ln y}{dp} = \ln x \frac{d(p-1)}{dp}$

i.e $\frac{1}{y}\frac{dy}{dp} = \ln x$

$\frac{dy}{dp} = y \ln x$

4. $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, Si $\Gamma(p)$ se integra por partes se obtiene

e^{-x}

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

$$= \lim_{\ell \to +\infty} \left(\frac{1}{p} x^{p} e^{-x}\Big|_0^{\ell} + \int_0^{\ell} \frac{1}{p} x^p e^{-x} dx\right) = \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx = \frac{1}{p}\Gamma(p+1)$$

Por lo tanto

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \quad \ldots (1)$$

Como

$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$ entonces al usar recursivamente (1) para $p = 1, 2, 3, \ldots$ se obtiene

$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1$

$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = \Gamma(2+1) = 2 \cdot 1 \ldots\ldots$

$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n((n-1)(n-2)\cdots 1) = n((n-1)!) = n!$

es decir $\Gamma(n+1) = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Ahora evaluemos en $p = \frac{1}{2}$

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx$ Hagamos el cambio de variable $x = t^2$ y se obtiene $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} 2 e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ Si se toma (1) como la definición del factorial y $\Gamma(\frac{1}{2}) = \Gamma(-\frac{1}{2}+1) = (-\frac{1}{2})! = \sqrt{\pi}$

llevar disco a Itzá Examen viernes 25 marzo

Escribamos $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ . . . (1)

en la forma

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p} \quad . . . . . (3)$$

A partir de (3) si se toman valores de p tales que $-1<p<0$, $\Gamma(p)$ queda definida.

Como ya está definida para $-1<p<0$, de nuevo a partir de (3) queda definida para $-2<p<-1$.

Así sucesivamente, la función se puede extender en cualquier intervalo de la forma $-n<p<-(n-1)$

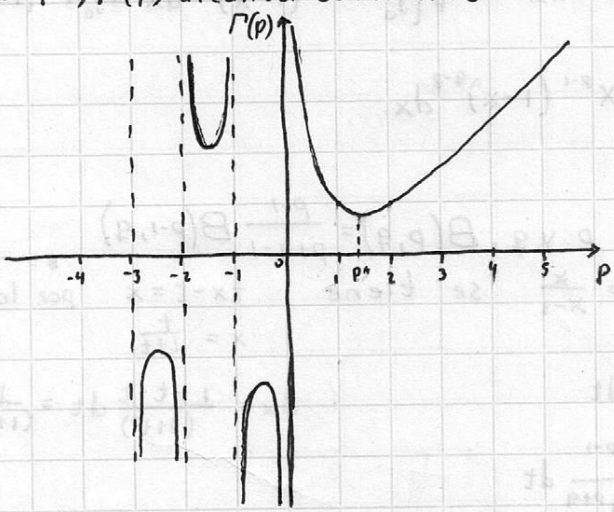
Gráfica de la función gamma.

Sabemos que $\Gamma(1) = 1$ y $\Gamma(2) = 1$ por lo que el teorema de Rolle garantiza que existe $p^* \in (1,2)$ tal que $\Gamma'(p^*) = 0$.

Por otro lado como $\Gamma''(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} \operatorname{Ln}^2 x \, dx \geqslant 0$ para todo $0<p<+\infty$, entonces $\Gamma'(p)$ es una función creciente.

Además $\lim\limits_{p\to 0^+} \Gamma(p) = \lim\limits_{p\to 0^+} \frac{\Gamma(p+1)}{p} = +\infty$ y $\lim\limits_{p\to +\infty} \Gamma(p) =$ "$+\infty$"

en p^*, $\Gamma(p)$ alcanza su mínimo



La función Beta.

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \quad , \quad p,q>0$$

Propiedades

1. $B(p,q)=B(q,p)$

En efecto si se hace el cambio de variable $z=1-x$, se obtiene

$$B(p,q)=-\int_1^0 (1-z)^{p-1} z^{q-1}\,dz=\int_0^1 z^{q-1}(1-z)^{p-1}\,dz=B(q,p)$$

Entonces la función beta es simétrica con respecto a p y q.

2. $B(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)$ si $q>1$

en efecto, consideremos

$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ e integremos por partes, entonces $\quad du=x^{p-1}$, $v'=(1-x)^{q-1}$

$$B(p,q)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{x^p(1-x)^{q-1}}{p}\Big|_\varepsilon^1+\frac{q-1}{p}\int_\varepsilon^1 x^p(1-x)^{q-2}dx\right)$$

$$=\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}dx=\frac{q-1}{p}\int_0^1\left(x^p+x^{p-1}-x^{p-1}\right)(1-x)^{q-2}dx$$

$$=\frac{q-1}{p}\int_0^1\left(x^{p-1}-x^{p-1}(1-x)\right)(1-x)^{q-2}dx=\frac{q-1}{p}\left[\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}dx-\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\right]$$

de donde $\quad B(p,q)\left(1+\frac{q-1}{p}\right)=\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}dx$

Entonces $B(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)$

Como B es simétrica con respecto a p y q, $B(p,q)=\frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q)$

3. $B(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt \quad$ sea $t=\frac{x}{x-1}$ se tiene $\quad tx-t=x$ por lo que $x=\frac{t}{1+t}$

$$dx=\frac{1+t-t}{(1+t^2)}dt=\frac{1}{(1+t)^2}dt$$

$$B(p,q)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{1+t}\right)^{p-1}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{q-1}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{-2}dt$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q-2+2}}dt=\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt$$

4. $B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ $\quad$ Si en la integral $\Gamma(p)=\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$ se hace el cambio de variable $x=zt$ $(z>0)$ se obtiene

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty}(zt)^{p-1}e^{-zt}z\,dt$$

$$=z^p\int_0^{+\infty}t^{p-1}e^{-zt}dt \quad \text{de donde}$$

$$\frac{\Gamma(p)}{z^p}=\int_0^{+\infty}t^{p-1}e^{-zt}dt \qquad (**)$$