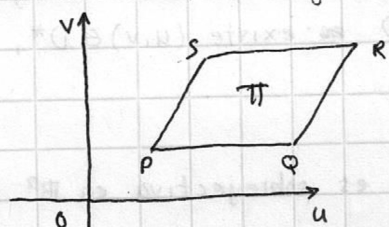
21-feb-2011

Teorema. Si A es una matriz de 2×2 tal que $\det A \neq 0$ y $\overline{T}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ es la transformación lineal tal que $\overline{T}(u,v) = A\binom{u}{v}$ entonces $\overline{T}$ transforma vértices en vértices y paralelogramos en paralelogramos. Además si $D=\overline{T}(D^*)$ es un paralelogramo también D^* es un paralelogramo.

Demostración

Si Π es un paralelogramo se tiene



si consideramos $\bar{p}+\lambda_1(\bar{Q}-\bar{p})+\lambda_2(\bar{S}-\bar{p})$ obtenemos cualquier punto de Π.

Se tiene

$$\overline{T}(\bar{p}+\lambda_1\bar{w}_1+\lambda_2\bar{w}_2) = A(\bar{p}+\lambda_1\bar{w}_1+\lambda_2\bar{w}_2)$$
$$= A(\bar{p}) + \lambda A(\bar{w}_1) + \lambda_2 A(\bar{w}_2)$$
$$= \bar{v}+\lambda_1\bar{w}_1+\lambda_2\bar{w}_2$$

que corresponde a un paralelogramo en el espacio imagen.

Como $\det A\neq 0$ existe la función inversa $\overline{T}^{-1}$, que también es lineal, en consecuencia también manda paralelogramos en paralelogramos, ~~es decir~~ Por lo tanto si $\overline{T}(D^*)$ es un paralelogramos, entonces $\overline{T}^{-1}(\overline{T}(D^*)) = D^*$ es un paralegramo.

Definición. Decimos que $\overline{T}:\overset{D^*}{\mathbb{R}^2}\to\mathbb{R}^2$ es una transformación uno a uno si para cualesquiera $(u_1,v_1),(u_2,v_2)\in D^*$ tales que $\overline{T}(u_1,v_1)=\overline{T}(u_2,v_2)$ se cumple $u_1=u_2$ y $v_1=v_2$

Ejemplo.

1. Si $\overline{T}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ está dada por $\overline{T}(u,v)=(u^2+v^2,u^2)$ ¿es uno a uno?

No, sean $u_1=a$, $v_1=b$, $u_2=-a$, $v_2=-b$

$\overline{T}(a,b) = \overline{T}(-a,-b) = (a^2+b^2, b^2)$ pero $a\neq -a$, $b\neq -b$

2. Si $\overline{T}:\overset{[0,1]\times[0,2\pi]}{\mathbb{R}^2}\to\mathbb{R}^2$ está dada por $\overline{T}(u,v)=(u\cos v, u\,\mathrm{sen}\, v)$ ¿es uno a uno?

~~sea $u_1=u_2=0$, $v_1=0$, $u_2=a$, $v_2=$~~ $\overline{T}(0,v_1)=\overline{T}(0,v_2)$ pero no necesariamente $v_1=v_2$

3. $\overline{T}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por $\overline{T}(u,v) = \left(\frac{u}{u^2+v^2}, -\frac{v}{u^2+v^2}\right)$ será uno a uno

$$\frac{u_1}{u_1^2+v_1^2} = \frac{u_2}{u_2^2+v_2^2} \qquad u_1-v_1 = u_2-v_2$$

$$-\frac{v_1}{u_1^2+v_1^2} = -\frac{v_2}{u_2^2+v_2^2}$$

21-feb-2011

4. Si $\overline{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está dada por $\overline{T}(u,v) = (u^3+v^3, u^3-v^3)$ esta transformación es uno a uno.

Si $\overline{T}(u_1,v_1) = \overline{T}(u_2,v_2)$ se tiene
$$u_1^3+v_1^3 = u_2^3+v_2^3$$
$$u_1^3-v_1^3 = u_2^3-v_2^3$$
$$2u_1^3 = 2u_2^3 \Rightarrow u_1 = u_2$$

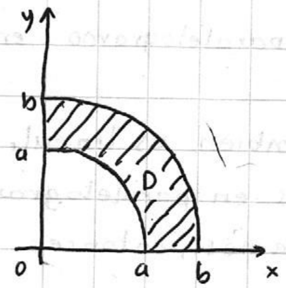
De donde al sumar las igualdades se obtiene $u_1=u_2$ y al restarlas $v_1=v_2$

Definición. Decimos que $\overline{T}: D^* \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación sobreyectiva en $D \subset \mathbb{R}^2$ si para cualquier $(x,y) \in D$ existe $(u,v) \in D^*$, tal que $\overline{T}(u,v) = (x,y)$

Ejemplo.

1. Si $\overline{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está dada por $\overline{T}(u,v) = (0,v)$ no es sobreyectiva en $\mathbb{R}^2$ ya que todo el plano lo manda al eje y.

2. Si $\overline{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está dada por $\overline{T}(u,v) = (u\cos v, u\,\text{sen}\,v)$ y D es la región



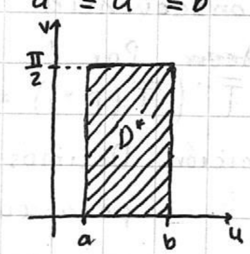
encontrar D^* tal que $\overline{T}(D^*) = D$

Tenemos $(x,y) = (u\cos v, u\,\text{sen}\,v)$

Como $a^2 \le x^2+y^2 \le b^2$ entonces $a^2 \le u^2 \le b^2$

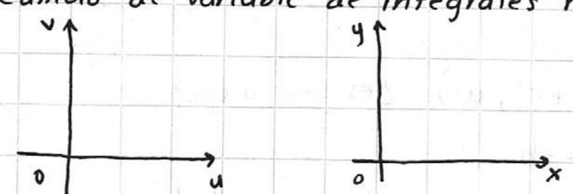
por lo que si $0 \le v \le \frac{\pi}{2}$

se tiene $D^* = [a,b] \times [0, \frac{\pi}{2}]$



~~Regresemos~~

Cambio de variable de integrales múltiples.



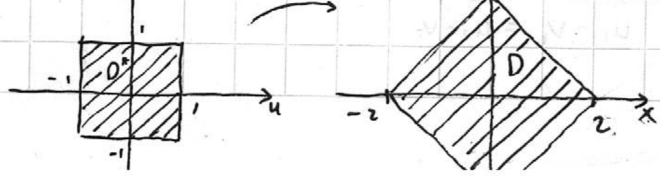
$$\iint_{D^*} f(x(u,v), y(u,v))\,du\,dv \neq \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

ya que de darse la igualdad se tendría que en el caso particular $f(x,y) = 1$

$$\iint_{D^*} du\,dv = \iint_D dx\,dy$$

$\overline{T}(u,v) = (u+v, u-v)$

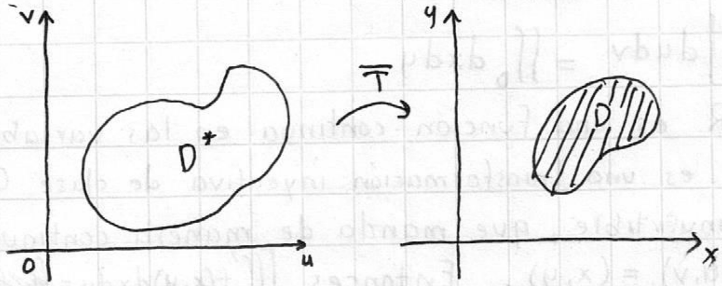
$A(D^*) = \iint_{D^*} du\,dv = 4 \neq 8 = \iint_D dx\,dy = A(D)$



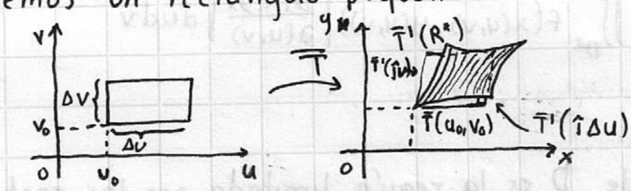
$$\begin{matrix} i & j & k \\ a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} = ae - bd$$

21-feb-2011

El problema del cambio de variable se reduce a determinar cómo se modifica el área de una región bajo una transformación $\overline{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



Consideremos un rectángulo "pequeño"



Si $\overline{T}$ es de clase C'_{D^*} entonces $\overline{T}$ es diferenciable, por lo que

~~Como Transforma~~

$$\overline{T}(u,v) \approx \overline{T}(u_0,v_0) + \overline{T}'(u_0,v_0)\begin{pmatrix}\Delta u \\ \Delta v\end{pmatrix}$$

Entonces el rectángulo R^* se transforma en el paralelogramo $\overline{T}'(R^*)$ cuyos lados incidentes en el vértice $\overline{T}(u_0,v_0)$ son $\overline{T}'(\hat{\imath}\Delta u)$ y $\overline{T}'(\hat{\jmath}\Delta v)$ es decir

$$\overline{T}'(\hat{\imath}\Delta u) = \overline{T}'\begin{pmatrix}\Delta u \\ 0\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \overline{T}'(\hat{\jmath}\Delta v) = \overline{T}'\begin{pmatrix}0 \\ \Delta v\end{pmatrix}$$

$$\overline{T}'(\hat{\imath}\Delta u) = \overline{T}'\begin{pmatrix}\Delta u \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta u \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u \\ \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u\end{pmatrix} = \hat{\imath}\,\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u + \hat{\jmath}\,\frac{\partial y}{\partial u}\Delta u$$

$$\overline{T}'(\hat{\jmath}\Delta v) = \overline{T}'\begin{pmatrix}0 \\ \Delta v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 \\ \Delta v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v \\ \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v\end{pmatrix} = \hat{\imath}\,\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v + j\,\frac{\partial y}{\partial v}\Delta v$$

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v & \frac{\partial y}{\partial v}\partial v & 0\end{vmatrix}$$

Entonces el área del paralelogramo curvo

$$A(\overline{T}(R^*)) \approx A(\overline{T}'(R^*)) = \left|(\overline{T}'(\hat{\imath}\Delta u)) \times (\overline{T}'(\hat{\jmath}\Delta v))\right|$$

$$= \Bigg|\underbrace{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}_{\text{Jacobiano}}\Bigg|\Delta u \Delta v$$

En general si queremos ver cómo se modifica el área de una región D^* bajo una transformación $\overline{T}$, encerramos D^* en un rectángulo R^* y al considerar una partición P de R^*, el área de cada R^*_{ij} se ~~puede~~ transforma en un área que se puede calcular en la forma anterior. Por lo tanto $A(D^*) \approx \sum_{i,j=1}^{n,m} \Delta u_i \Delta v_j$ y

$$A(D) \approx \sum_{i,j=1}^{n,m} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \Delta v_i \Delta v_j$$

es decir

$$A(D^*) = \iint_{D^*} du\,dv$$ es en D^* porque u y v varian en D^* no en D

y

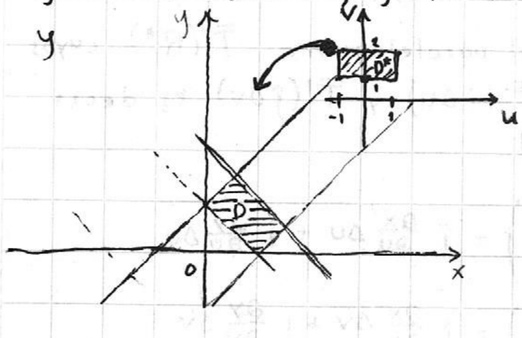
$$A(D) = \iint_{D^*} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv = \iint_D dx\,dy$$

Teorema. Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continua en las variables x y y, $\overline{T}: D^* \subset \mathbb{R}^2 \to D$ es una transformación inyectiva de clase $C^1_{D^*}$ cuya derivada es invertible, que manda de manera continua D^* en D, es decir, $\overline{T}(u,v) = (x,y)$. Entonces

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

Ejemplos

1. Calcular $\iint_D (x+y+1)\,dx\,dy$ donde D es la región limitada por las rectas $y = x+1$, $y-x=-1$, $y+x=1$ y $y+x=2$ $\quad y = -x+2$



Si hacemos el cambio de variables $u = y-x$ y $v = x+y$, entonces

$$\begin{array}{r} u = y-x \\ + \; v = x+y \\ \hline \end{array} \qquad u+v = 2y \Rightarrow y = \frac{u+v}{2}$$

$u - v$

$$\overline{T}(u,v) = \left(-\frac{u-v}{2}, \frac{u+v}{2}\right)$$ en consecuencia

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \left| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix} \right| = \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

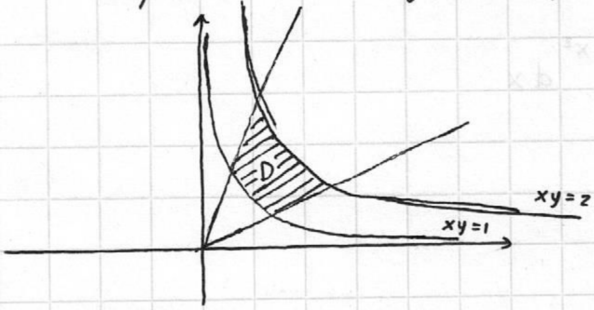
Por lo tanto $$\iint_D (1+x+y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{1}^{2} \left(\frac{v-u}{2} + \frac{v+u}{2} + 1 \right) \frac{1}{2}\, dv\,du$$

8

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{1}^{2} (v+1)\,dv\,du = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \left(\frac{v^2}{2} + v \right)\Big|_1^2 du = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \left(4 - \left(\frac{1}{2}+1\right)\right) du$$

$$= \frac{5}{4}\int_{-1}^{1} du = \frac{5}{4}\left(u \Big|_{-1}^{1}\right) = \frac{5}{2}$$

2. $\iint_D x^2y^2\,dx\,dy$ donde D es la región limitada por las hipérbolas equiláteras $xy=1$, $xy=2$ y las rectas $y=\frac{x}{2}$, $y=3x$ en el 1er cuadrante



Hagamos el cambio de variables

$xy=u$, $\frac{y}{x}=v$

$xy=u$
$\frac{y}{x}=v$
$x^2=\frac{u}{v}$

entonces $x^2v=u$, $x=\sqrt{\frac{u}{v}}$

$\overline{T}(u,v)=\left(\sqrt{\frac{u}{v}},\sqrt{uv}\right)$

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{u}}{v\sqrt{v}}\\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{uv}}\end{vmatrix}=$$

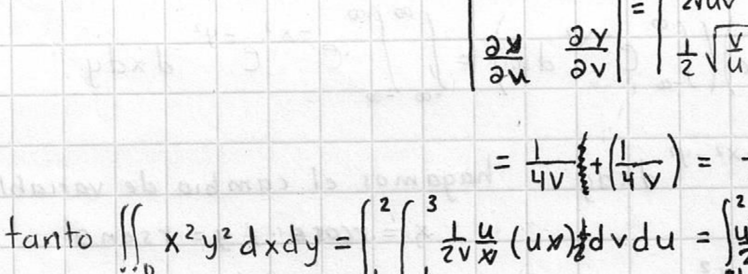
$$=\frac{1}{4v}+\left(\frac{1}{4v}\right)=\frac{1}{2v}$$

Por lo tanto $\iint_D x^2y^2\,dx\,dy=\int_1^2\int_{\frac12}^3\frac{1}{2v}\frac{u}{v}(uv)\,dv\,du=\int_1^2\frac{u^2}{2}\int_{\frac12}^3\frac{1}{v}\,dv\,du=$

$$=\int_1^2\frac{u^2}{2}\operatorname{Ln}|v|\Big|_{\frac12}^3du=\frac12\int_1^2u^2\left(\operatorname{Ln}3-\operatorname{Ln}\tfrac12\right)du=\frac12\int_1^2u^2\operatorname{Ln}6\,du$$

$$=\frac16\operatorname{Ln}6\,u^3\Big|_1^2=\frac76\operatorname{Ln}6$$

3. Si D es una región en el plano xy acotada por una ecuación polar $r=f(\theta)$ donde $r\geq 0$ y $\theta_0\leq\theta\leq\theta_1$ consideremos la región D^* del tipo II



Tenemos que $\overline{T}(r,\theta)=(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}$$

$=r\cos^2\theta+r\operatorname{sen}^2\theta$
$=r$

$A(D)=\iint_D dx\,dy=\iint_{D^*}r\,dr\,d\theta$

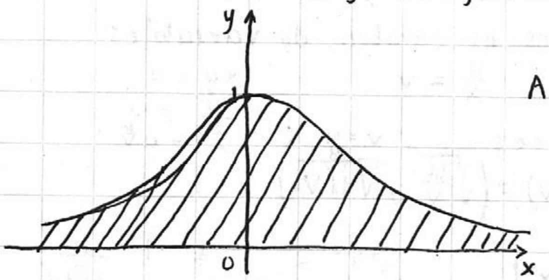
$$=\int_0^r\int_{\theta_0}^{\theta_1}r\,d\theta\,dr=$$

$$=\int_{\theta_0}^{\theta_1}\int_0^r r\,dr\,d\theta=\int_{\theta_0}^{\theta_1}\frac12r^2\Big|_0^r d\theta=\frac12\int_{\theta_0}^{\theta_1}(f(\theta))^2d\theta$$

23-feb-2011

Calcular el área debajo de e^{-x^2}

4. Calcular el área bajo la gráfica de $f(x) = e^{-x^2}$



$$A = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$$

Consideremos

$$A^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2}\, dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\, dx\,dy$$ hagamos el cambio de variables $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$

entonces $x^2+y^2 = r^2$

y $$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

Entonces

$$A^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r e^{-r^2}\, dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \left(-\tfrac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_0^{\infty} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \lim_{b\to\infty} \left(-\tfrac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_0^{b} d\theta = \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}\, d\theta = \tfrac{1}{2}\theta\Big|_0^{2\pi} = \pi$$

Por lo tanto $A = \sqrt{\pi}$

5. Calcular $\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\, dx\,dy$ donde D es el disco ~~unitario~~ de radio a con centro en el origen.

$x^2+y^2 \leq a^2 \qquad -x^2-y^2 \geq -a^2$

Hagamos el cambio de variables $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$

$u = a^2 - r^2$
$du = -2r$

y obtenemos $$\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\, dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \sqrt{a^2-r^2}\; r\,dr\,d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{2}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{a} d\theta = -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} -a^3\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3}a^3 \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2}{3}a^3\pi$$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 8 - martes

23 - febrero - 2011

6. Calcular $\iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$ donde D es la región limitada por la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x}{a} = ar\cos\theta \qquad \frac{y}{b} = br\,\text{sen}\,\theta$

$$\iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy =$$

$$\begin{vmatrix} a\cos\theta & -a\,\text{sen}\,\theta \\ b\,\text{sen}\,\theta & +b\cos\theta \end{vmatrix} = ab \qquad = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\;ab\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}ab\,\frac{2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 d\theta = +\frac{ab}{3}\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{2ab}{3}\pi$$

$u^2 = \frac{a^2\cos^4 v}{h^2} + \frac{b^2\,\text{sen}^4 v}{k^2}$

7. Calcular $\iint_D dx\,dy$ donde D es la región limitada por la curva

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2} \quad \text{con } a,b,h,k \in \mathbb{R}^+ \text{ en el primer cuadrante}$$

Hagamos el cambio de variables $x = au\cos^2 v$, $y = bu\,\text{sen}^2 v$ entonces se tiene

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} a\cos^2 v & -2au\,\text{sen}\,v\cos v \\ b\,\text{sen}^2 v & 2bu\,\text{sen}\,v\cos v \end{vmatrix}$$

$u^4 = a^2u^2\cos^2 v + b^2u^2 \ldots = u^2(a^2\cos^2 v + \ldots$

$$= 2abu(\cos^3 v\,\text{sen}\,v + \text{sen}^3 v\cos v)$$

$$= 2abu(\text{sen}\,v\cos v(\cos^2 v + \text{sen}^2 v))$$

$$= 2abu\,\text{sen}\,v\cos v$$

Por lo que $$\iint_D dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{\frac{a^2\cos^4 v}{h^2}+\frac{b^2\text{sen}^4 v}{k^2}}} 2abu\,\text{sen}\,v\cos v\,du\,dv$$

$$= \int_0^{2\pi} 2ab\,\text{sen}\,v\cos v \int_0^{\sqrt{\frac{a^2\cos^4 v}{h^2}+\frac{b^2\text{sen}^4 v}{k^2}}} u\,du\,dv =$$

$$= \int_0^{2\pi} ab\,\text{sen}\,v\cos v\left(\frac{a^2\cos^4 v}{h^2}+\frac{b^2\,\text{sen}^4 v}{k^2}\right)dv$$

$u = \cos^5 v$

$du = 5\cos^4 v\,\text{sen}\,v$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{a^3b}{h^2}\,\text{sen}\,v\cos^5 v + \frac{ab^3}{k^2}\,\text{sen}^5 v\cos v\right)dv$$

$$= ab\left(-\frac{a^2\cos^6 v}{6h^2} + \frac{b^2\,\text{sen}^6 v}{6k^2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = ab\left(\frac{b^2}{6k^2}+\frac{a^2}{6h^2}\right)$$

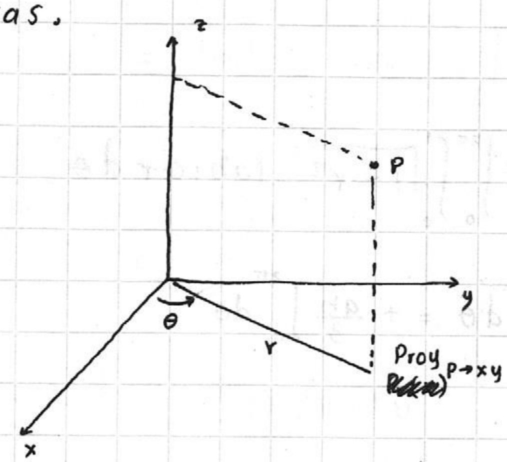
$$= \frac{ab}{6}\left(\frac{b^2}{k^2}+\frac{a^2}{h^2}\right)$$

Arf Ken

23 - febrero - 2011

Cambio de variables para integrales triples

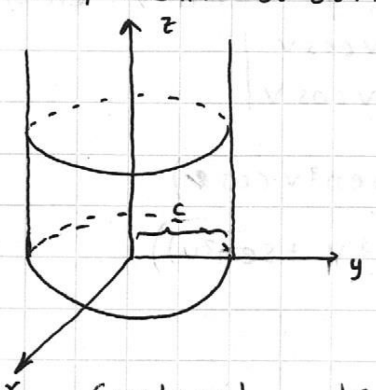
En $\mathbb{R}^3$ hay dos sistemas de coordenadas importantes aparte del sistema cartesiano; coordenadas cilíndricas y coordenadas esféricas.



Las coordenas cilíndricas son tres números (r, θ, z) donde r es la distancia desde el origen a la proyección del punto p sobre el plano xy; θ es el ángulo que forma el plano que pasa por el punto p y contiene el eje z; z es la tercera coordenada de las coordenadas cartesianas.

Entonces $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $z = z$.

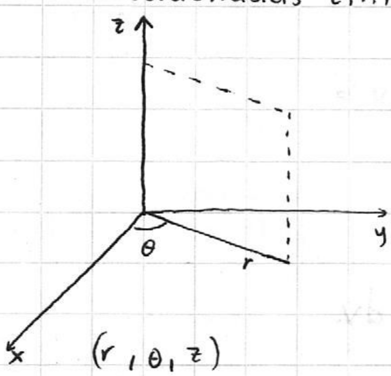
Si $r = c$, $c \in \mathbb{R}^+$ se obtienen los cilindros de radio c.



Todos los planos que contienen al eje z son de la forma $\theta = c$, $c \in \mathbb{R}$

Todos los planos paralelos al plano xy se escriben en la forma $z = c$, $c \in \mathbb{R}$

Coordenadas cilíndricas



(r, θ, z)

¿Cómo deben ser r, θ y z para que $\overline{T}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$\overline{T}(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, z)$ sea uno a uno?

$r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$

$sen^2 u \cos u$

$r = \cos u \qquad \frac{1-2\cos u}{2} \cos u$

$dr = -sen\, u$

$r^2\cos^2\theta + (r\, sen - \frac{1}{2})$

$r^2 sen^2\theta - r sen\theta + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \qquad r^2 = r\, sen\theta$

$r = sen\theta$

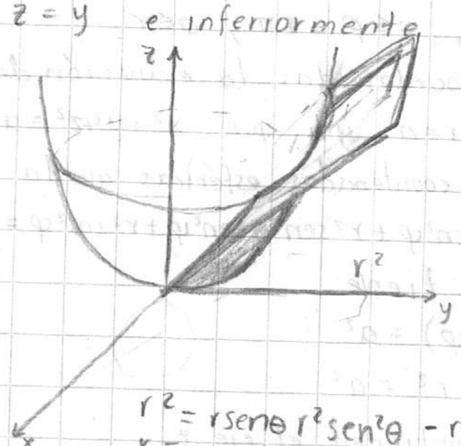
en consewencia

$$\iiint_\Omega \sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}\, dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \sqrt{a^2-r^2}\, r^2 sen\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{3}{16} a^4 \pi\, sen\varphi\, d\varphi\, d\theta = \frac{3}{16} a^4\pi \int_0^{2\pi} -\cos\varphi \Big|_0^{\pi} d\theta$$

$$= \frac{3}{8} a^4 \pi \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{3}{4}\pi^2 a^4$$

2 Calwlar el volumen del sólido limitado superiormente por el plano $z = y$ e inferiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$



$x = r\cos\theta$

$y = r\, sen\theta$

$z = z$

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -r sen\theta & 0 \\ sen\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

pero $z = y \qquad r\cos^2\theta + r^2 sen\theta$

$z = y = r\, sen\theta$

Las dos superficies se intersectan en $y - x^2 - y^2 = 0$ cuya proyección en el plano xy es la circunferencia $x^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

$r^2 = r sen\theta \quad r^2 sen^2\theta - r sen\theta + \frac{1}{4}$

$r = sen\theta$

$r^2\cos^2\theta + (r sen\theta - \frac{1}{2})^2$

hagamos el cambio de variables a coordenadas cilíndricas y se obtiene que

$$V = \iiint_\Omega dxdydz = \int_0^{\pi}\int_0^{sen\theta}\int_{r^2}^{r sen\theta} r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{sen\theta} r\, z \Big|_{r^2}^{r sen\theta} dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{sen\theta} (r^2 sen\theta - r^3)\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{3} r^3 sen\theta - \frac{1}{4} r^4\right)\Big|_0^{sen\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{3} sen^4\theta - \frac{1}{4} sen^4\theta\right) d\theta$$

4%

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{12} sen^4\theta\, d\theta = \frac{1}{12}\int_0^{\pi} \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{48}\int_0^{\pi} (1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{48}\left((\theta - sen\, 2\theta)\Big|_0^{\pi} + \int \frac{1+\cos 4\theta}{2} d\theta\right)$$

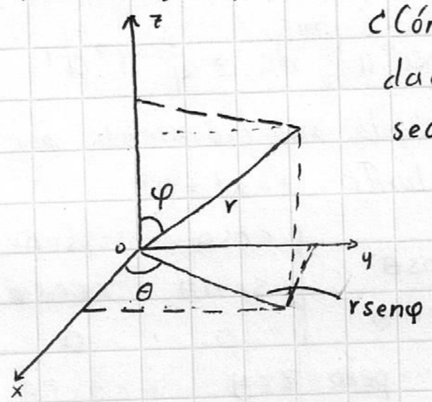
$$= \frac{1}{48}\left(\pi + \left(\frac{1}{2}\theta + sen 4\theta\right)\Big|^{\pi}\right) = \frac{1}{48}\left(\pi + \frac{1}{2}\pi\right) = \frac{3}{[illegible]}\pi = \frac{\pi}{32}$$

$y' = sen\, y + x$

Coordenadas esféricas

Las coordenas (r,θ,φ) de un punto $P \in \mathbb{R}^3$, donde r es la distancia desde el origen a P.

θ es el ángulo que forman el plano xz y el plano que pasa por P y contiene al eje z; φ es el ángulo que forma el radio vector $\overline{OP}$ con el semieje positivo z.



¿Cómo deben ser r, θ y φ para que $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(r,\theta,\varphi) = (r\cos\theta \operatorname{sen}\varphi, r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, r\cos\varphi)$ sea uno a uno?

$$0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \varphi \le \pi, \quad 0 \le r$$

En estas coordenadas la ecuación de una esfera es $r = a$, ya que $x^2+y^2+z^2 = a^2$ al usar las coordenadas esféricas queda

$$r^2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi + r^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi + r^2\cos^2\varphi = a^2$$

pero en el lado izquierdo se tiene

$$r^2(\operatorname{sen}^2\varphi(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) + \cos^2\varphi) = a^2$$

$$r^2 = a^2$$

Si $\theta = c$ se tienen todos los planos que contienen el eje z.

Si $\varphi = c \neq \frac{\pi}{2}$ se obtienen semiconos, y si $\varphi = \frac{\pi}{2}$ el plano xy.

Teorema. Si $\Omega, \Omega^* \subset \mathbb{R}^3$ son regiones elementales tales que $T(\Omega^*) = \Omega$, donde $T: \Omega^* \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una transformación uno a uno de clase $C^1_{\Omega^*}$, entonces para cualquier función integrable $f: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ se tiene

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega^*} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,d$$

Ejemplos.

1. Calcular $\iiint_\Omega \sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}\,dx\,dy\,dz$ donde Ω es la esfera de radio a.

$x = r\cos\theta\operatorname{sen}\varphi$, $y = r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi$, $z = r\cos\varphi$

$$\begin{vmatrix} \cos\theta\operatorname{sen}\varphi & -r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & r\cos\theta\operatorname{sen}\varphi & r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -r\operatorname{sen}\varphi \end{vmatrix} = (-r^2\cos^2\theta\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + r^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi)\cos\varphi + (r\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi + r\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi) r s$$

$$= r^2\cos^2\varphi\operatorname{sen}\varphi + r^2(\operatorname{sen}^2\varphi(\operatorname{sen}\varphi)$$

$$= r^2\operatorname{sen}\varphi(\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi)$$

$$= r^2\operatorname{sen}\varphi$$

$$r^2 + z^4 = 1$$
$$z = (1-r^2)^{\frac{1}{4}}$$

Calcular $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ donde $f(x,y,z) = k\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)+1$ y Ω es la región encerrada por $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^4}{c^4}=1$

$x = ar\cos\theta$, $y = br\,\text{sen}\,\theta$, $z = c\bar{z}$

entonces $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_{-\sqrt[4]{1-r^2}}^{\sqrt[4]{1-r^2}} (kr^2+1)\,abcr\,d\bar{z}\,d\theta\,dr$

$$= \int_0^1\int_0^{2\pi} 2\sqrt[4]{1-r^2}\,(kr^2+1)\,abcr\,d\theta\,dr$$

$$= 4\pi abc\int_0^1\left(kr^3\sqrt[4]{1-r^2} + r\sqrt[4]{1-r^2}\right)dr \qquad u = r^2,\ dv = \sqrt{1-r^2}\,r\,dr$$

$$= 4\pi abc\left(-k\frac{2}{5}r^2(1-r^2)^{\frac{5}{4}}\Big|_0^1 + k\frac{4}{5}\int_0^1 r(1-r^2)^{\frac{5}{4}}dr - \frac{2}{5}(1-r^2)^{\frac{5}{4}}\Big|_0^1\right)$$

$$= 4\pi abc\,k\left(-\frac{8}{45}(1-r^2)^{\frac{9}{4}}\Big|_0^1\right) + \frac{8}{5}\pi abc$$

$$= 4\pi abc\left(\frac{8k}{45}+\frac{2}{5}\right) = 4\pi abc\left(\frac{8k+18}{45}\right)$$

Aplicaciones

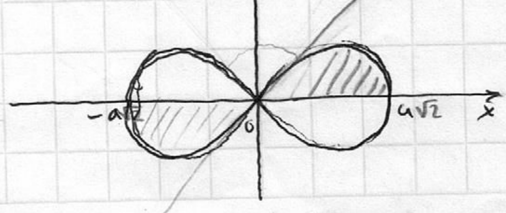
1. Cálculo de volúmenes. Si $f(x,y)\geq 0$ para todo $(x,y)\in D\subset\mathbb{R}^2$, entonces $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ es el volumen del sólido limitado por la gráfica de f en la región D. Si $f,g: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ son funciones continuas tales que $f(x,y)\geq g(x,y)\geq 0$ para todo $(x,y)\in D$, entonces $\iint_D (f(x,y)-g(x,y))\,dx\,dy$ es el volumen limitado por arriba por f y por abajo g.
2. Cálculo del área de regiones planas. Si D es una región plana, entonces $\iint_D dx\,dy$ nos da el área de la región D.

Ejemplo.

Calcular el área encerrada por la lemniscata de Bernoulli, cuya ecuación es $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$

$x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$

$r^2 = 2a^2\cos 2\theta$; $r = \pm a\sqrt{2\cos 2\theta}$

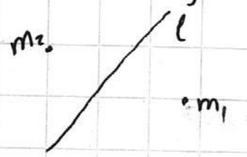


$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} r\,dr\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2(2\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= 2a^2\,\text{sen}\,2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2$$

sen

3. Cálculo de momentos. Si se tiene una partícula de masa m en el plano, ~~se dice~~ y un eje ℓ



se dice que $M_\ell = md$ donde d es la distancia desde la posición que ocupa la partícula hasta la recta ℓ, es el momento estático de la partícula respecto de la recta ℓ. Si se tienen n partículas, el momento del sistema de las n partículas respecto del eje ℓ es

$$M_\ell = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i$$

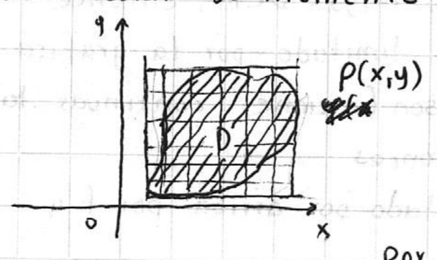
Si las n partículas tienen posiciones (x_i, y_i) entonces los correspondientes momentos de cada una de ellas respecto de los ejes x y y son

$M_x = m_i y_i$ y $M_y = m_i x_i$ por lo que los momentos estáticos del sistema respecto de los ejes coordenados son

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \quad y \quad M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

Al punto de un sistema de n partículas cuyas masas son $m_1, \ldots, m_n$ de coordenadas $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$ y $\bar{y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$ se le llama centro de masa del sistema.

Si $D \subset \mathbb{R}^2$ es una región con una densidad superficial de masa, ¿Cómo se puede calcular su momento estático respecto de un eje ℓ?



Dada una partición R, la masa de cada ~~masa~~ subrectángulo R_{ij} es

$$m(R_{ij}) = \begin{cases} 0 & \text{si } R_{ij} \cap D = \emptyset \\ \rho(\xi_i, \eta_j)\,\Delta x_i \Delta y_j & \text{si } R_{ij} \cap D \neq \emptyset \end{cases}$$

por lo que $m(D) \approx \sum_{i,j=1}^{n,m} \rho(\xi_i, \eta_j)\Delta x_i \Delta y_j$

Por lo tanto $m(D) = \iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy$, en consecuencia

$$M_x = \iint_D y\,\rho(x,y)\,dx\,dy \quad y \quad M_y = \iint_D x\,\rho(x,y)\,dx\,dy$$