1. (a) Determinar para que valores de p y q existen las siguientes integrale de Lebesgue:

$$\int_0^1 x^p(1-x)^q$$

Como $x \in [0,1]$, $0 \leq x, 1-x \leq 1$, si $p, q \geq 1$ tenemos $0 \leq x^p, (1-x)q \leq 1$

$$0 \leq \int_0^1 x^p(1-x)^q \leq \int_0^1 1 = 1$$

Si $p+q=1$ con $p, q > 0$

(b)

2. Demostrar que $||f+g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$
Sabemos que para $x \in R^n$
$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$
Así $||f+g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$

3. Si $f \in L^1$ y $g \in L^\infty$, entonces

$$\int |fg| \leq ||f||_1 \cdot ||g||_\infty$$

Por monotonía, tenemos:

$$|fg| = |f||g| \leq |f| \cdot ||g||_\infty$$

$$\int |fg| \leq \int |f| \cdot ||g||_\infty = ||f||_1 \cdot ||g||_\infty$$

4. (a) Demostrar la desigualdad de Minkowski para $0 < p < 1$.
Lema: Sea $0 < p < 1$ y $q = 1-p$, entonces

$$\int |fg| \geq ||f||_p \cdot ||g||_q$$

Sean $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} \Rightarrow q = \frac{p}{p-1} < 0$
$p' = \frac{1}{p}$ y $q' = 1 - q = -\frac{1}{p-1}$
Además $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = p + \frac{1}{1-q} = p + \frac{1}{1-\frac{p}{p-1}} = p - p + 1 = 1$
Así tenemos:

$$\begin{aligned}\int |f|^p = \int |fg|^p \cdot |g|^{-p} \leq (\text{Hölder}) \; &||(|fg|^p)||_{p'} \cdot ||(|g|^{-p})||_{q'} \\ =&\Big(\int (|fg|^p)^{p'}\Big)^{1/p'} \cdot \Big(\int |g|^{-pq'}\Big)^{1/q'} \\ =&\Big(\int |fg|\Big)^p \cdot \Big(\int |g|^{\frac{p}{p-1}}\Big)^{1-p}\end{aligned}$$

Así tenemos:

$$\Big(\int |f|^p\Big)\Big(\int |g|^q\Big)^{p-1} \leq \Big(\int |fg|\Big)^p$$

Sacando raíz p

$$\int |fg| \geq ||f||_p||g||_q$$

Supongamos que si $f, g \in L^p$, entonces $(f+g) \in L^p$
Sea $q = \frac{p}{p-1}$, entonces $|f+g|^{p-1} \in L^p$ y

$$\Big|\Big||f+g|^{p-1}\Big|\Big|_q = \Big(\int (|f+g|^{p-1})^q\Big)^{1/q} = \Big(\int |f+g|^p\Big)^{(p-1)/p} = ||f+g||_p^{p-1}$$

Así tenemos que:

$$\begin{aligned} ||f+g||_p^p = \int |f+g|^p &= \int |f+g| \cdot |f+g|^{p-1} \\ &= \int (f+g) \cdot |f+g|^{p-1} \\ &= \int f|f+g|^{p-1} + \int g|f+g|^{p-1} \\ \text{Lema } &\geq ||f||_p||f+g||_p^{p-1} + ||g||_p||f+g||_p^{p-1} \end{aligned}$$

Así tenemos:

$$||f+g||_p \geq ||f||_p + ||g||_q$$

Cumpliendose la igualdad si $||f+g||_p = 0$

(b) Demostrar que si $f \in L^p$, $g \in L^p$ entonces $f+g \in L^p$ para $0 < p < 1$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} |f(x)+g(x)|^p \leq& (|f(x)|+|g(x)|)^p \leq (2\max\{|f(x)|,|g(x)|\})^p = 2^p \max\{|f(x)|^p, |g(x)|^p\} \\ \leq& 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p) \quad \square \end{aligned}$$

5. Sea E medible con medida finita y $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$. Entonces $L^{p_2} \subset L^{p_1}$. Más aún

$$||f||_{p_1} \leq c||f||_{p_2}$$

para toda $f \in L^{p_2}$ con $c = (m(E))^{\frac{p_2-p_1}{p_1p_2}}$ si $p_2 < \infty$ y $c = (m(E))^{\frac{1}{p_1}}$ si $p_2 = \infty$.

Caso 1: $p_2 < \infty$

Si $f \in L^{p_2}$, entonces $|f|^{p_1} \in L^{p_2/p_1}$ y

$$\Big|\Big||f|^{p_1}\Big|\Big|_{p_2/p_1} = \Big(\int |f|^{p_2}\Big)^{p_1/p_2} = ||f||_{p_2}^{p_1}$$

Por Hölder tenemos

$$||f||_{p_1}^{p_1} = \int_E |1 \cdot f|^{p_1} \leq ||1_E||_{p_2/(p_2-p_1)}\Big|\Big||f|^{p_1}\Big|\Big|_{p_2/p_1} = (m(E))^{\frac{p_2-p_1}{p_2}}||f||_{p_2}^{p_1}$$

Así tenemos

$$||f||_{p_1} \leq (m(E))^{\frac{p_2-p_1}{p_1p_2}}||f||_{p_2}$$

Caso 2: $p_2 = \infty$

$$\begin{aligned} ||f||_{p_1} =& \Big(\int_E |f|^{p_1}\Big)^{1/p_1} \\ \text{monotonia } \leq& \Big(\int_E 1 \cdot ||f||_\infty^{p_1}\Big)^{1/p_1} = (m(E))^{\frac{1}{p_1}}||f||_\infty \end{aligned}$$

6. Sea $f_n \to f$ en L^p, $1 \leq p < \infty$ y sea g_n una sucesión de funciones medibles tales que $|g_n| \leq M$, para toda n, y $g_n \to g$ casi donde sea. Entonces $g_n f_n \to gf$ en L^p.
   Por hipótesis tenemos:
$$||f_n - f||_p < \frac{\epsilon}{2M} \qquad n \geq N_f$$
$$|g_n(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{2||f||_p} \qquad n \geq N_g \text{ c.d.s}$$
   Sea $n \geq \max\{N_f, N_g\}$, así tenemos:
$$\begin{aligned} ||g_n(x)f_n - g(x)f||_p =& ||g_n(x)f_n - g_n(x)f + g_n(x)f - g(x)f||_p \\ \leq& ||g_n(x)f_n - g_n(x)f||_p + ||g_n(x)f - g(x)f||_p \\ =& |g_n(x)|||f_n - f||_p + |g_n(x) - g(x)|||f||_p \\ =& M(\frac{\epsilon}{2M}) + \frac{\epsilon}{2||f||_p}||f||_p = \epsilon \end{aligned}$$

7. **Definición**. Si un espacio X equipado con una medida μ tiene un sistema numerable A de subconjuntos medibles $A_1, A_2, ...$, tales que dada cualquier $\epsilon > 0$ y cualquier subconjunto medible $M \subset X$, existe un $A_k \in A$ que satisface la desigualdad
$$\mu(M \triangle A_k) < \epsilon.$$
   Entonces se dice que μ tiene una base numerable, que consiste de todos los subconjuntos $A1, A2, ...,$
   Demostrar que la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ tiene una base numerable.
   Sabemos que $\mathbb{Q}$ es numerable, entonces $\mathbb{Q}^2$ es numerable. Los abiertos (q_1, q_2) son numerables.
   Sea $f : \{(q_1, q_2)\} \to \mathbb{N}$
   Además sabemos que si M es medible, dado $\epsilon > 0$, hay una unión finita de intervalos U, tal que $m(U \triangle M) \leq \frac{\epsilon}{2}$. (parcial 2, proposición 3.15 Royden 2da Edición)
   Sea $U = \bigcup I_i$, con $I_i = (a_i, b_i)$.
   Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ existen $q_i^1 \leq a_i \leq b_i \leq q_i^2$ con $a_i - q_i^1 \leq \frac{\epsilon}{2^{i+1}}$ y $q_i^2 - b_i \leq \frac{1}{2^{i+2}}$, así $m((q_i^1, q_i^2) - I_i) < \frac{\epsilon}{2^{i+1}}$.
   Sea $Q = \bigcup((q_i^1, q_i^2))$
   Así $m(M \triangle Q) = m(M \triangle \bigcup[(q_i^1, a_i) \cup I_i \cup (b_i, q_i^2)]) \leq m((q_i^1, a_i) \cup (b_i, q_i^2)) + m(M \triangle Q) \leq \sum \frac{\epsilon}{e^{i+1}} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ Sea $A = \bigcup(q_i^1, q_i^2)$, definimos $g(A) = \prod p_{f((q_i^1, q_i^2))}$ con $p_{f((q_i^1, q_i^2))}$ el $f((q_i^1, q_i^2))$-ésimo primo.
   La medida de Lebesgue tiene una base numerable.

8.

9.

10.

11.

12.

13.

14.

15.

16.