tarea 4 cálculo

Barush Madera

14 Mayo 2018

1. Sea Σ la gráfica de la función de clase C^1 $z = g(x,y)$ sobre el conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

   a) Prueba que el área de Σ está dada por la fórmula :

   $$\int\int_{\Omega} \sec(\alpha) dxdy$$

   donde α es el ángulo entre el vector $(,0,0,1)$ y el vector unitario normal $\hat{n}$ a Σ (en cada punto de Σ) cuya tercera componente siempre es positiva.

   Sabemos que el Área(Σ)=$\int\int_{\Omega} ||\frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y}|| dxdy$

   Además $\cos(\alpha) = \hat{n} \cdot \hat{k} = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y}}{||\frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y}||} \cdot \hat{k} \Rightarrow \sec(\alpha) = \dfrac{||\frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y}||}{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \hat{k}}$

   Por otro lado $f(x,y) = (x, y, g(x,y)) \Rightarrow \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = (1, 0, \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x}); \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = (0, 1, \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y})$

   $$\frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y} = \det \begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \Big(-\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}, -\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}, 1 \Big)$$

   Así: $\sec(\alpha) = \dfrac{||\frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y}||}{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \hat{k}} = \dfrac{||\frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y}||}{\Big(-\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}, -\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}, 1 \Big) \cdot \hat{k}} = ||\frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y}||$

   Por lo tanto Área(Σ)=$\int\int_{\Omega} ||\frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y}|| dxdy = \int\int_{\Omega} sec(\alpha) dxdy$

   b) Prueba que si Σ está contenida en el plano Π, entonces:

   $$\text{Área}(\Sigma) = \sec(\alpha) \cdot \text{área}(\Omega)$$

   donde α es el ángulo formado por el vector unitario $\hat{n}$ (normal a Π y cuya tercera componente es positiva) y el vector $\hat{k}$

   Sabemos por el inciso a) que Área(Σ)= $\int\int_{\Omega} \sec(\alpha) dxdy$. Como $\Sigma \subset \Pi$ entonces $\hat{n}$ es constante en cada punto de Σ, entonces α es constante.
   Por lo tanto: Área(Σ)= $\int\int_{\Omega} \sec(\alpha) dxdy = \sec(\alpha) \int\int_{\Omega} dxdy = \sec(\alpha) \cdot$área($\Omega$)

2. Calcula la masa total de una lámina cuya fórmula corresponde a una superficie Σ y con una función de densidad ρ, donde:

   a) Σ es el paraboloide $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$ y $\rho(x, y, z) = 1 + z$
   Sea $f : B((0, 0), 1) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ t.q. $f(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$ Una parametrización de Σ
   $\Rightarrow \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} = (1, 0, 2x); \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} = (0, 1, 2y) \Rightarrow \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} \times \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} = (-2x, -2y, 1)$
   $\Rightarrow ||\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} \times \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}|| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$

$$\int\int_{\Sigma} \rho dA = \int\int_{\Sigma} (1 + x^2 + y^2)\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + r^2)\sqrt{4r^2 + 1} rdrd\theta$$

$$\xRightarrow[du=8rdr]{u=4r^2+1} \frac{\pi}{4}\int_1^5 (\frac{3}{4} + \frac{u}{4})\sqrt{u}du = \frac{\pi}{4}\int_1^5 \frac{3}{4}u^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}u^{\frac{3}{2}}du = \frac{\pi}{4}(\frac{1}{2}u^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{10}u^{\frac{5}{2}})\Big|_1^5 = \frac{\pi}{4}(5^{\frac{3}{2}} - \frac{6}{10}) \approx 8.3098$$

   b) Σ es el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq z \leq 4$ y $\rho(x, y, z) = |x| + |y|$
   Sea $f : [0, 2\pi] \times [0, 4] \to \mathbb{R}^3$ t.q. $f(u, v) = (2\cos u, 2\sin u, v)$
   $\Rightarrow \dfrac{\partial f(u, v)}{\partial u} = (-2\sin u, 2\cos u, 0); \dfrac{\partial f(u, v)}{\partial v} = (0, 0, 1) \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial u} \times \dfrac{\partial f}{\partial v} = (2\cos u, 2\sin u, 0) \Rightarrow \Big|\Big|\dfrac{\partial f}{\partial u} \times \dfrac{\partial f}{\partial v}\Big|\Big| = 2$

$$2\int_0^4 \int_0^{2\pi} |2\cos u| + |2\sin u|dudv = 16\int_0^{2\pi} |\cos u| + |\sin u|du = 64\int_0^{\pi} \sin udu = 128$$

3. Pruebe que si F es un campo vectorial continuo, sobre una superficie Σ, parametrizada por:

$$\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

   con Ω un compacto ent

$$\Big|\int\int_{\Sigma} F \cdot d\varphi\Big| \leq M \cdot A(\Sigma)$$

   donde $M = \max\{||F(\hat{x})||\big|\hat{x} \in \Sigma\}$ y $A(\Sigma)$ el área de Σ

$$\Big|\int\int_{\Sigma} F \cdot d\varphi\Big| = \Big|\sum_{i,j=1}^{\infty,\infty} ||F(x_{ij})|||d\varphi|cos(\alpha)\Big| \leq \Big|\sum_{i,j=1}^{\infty,\infty} ||F(x_{ij})|||d\varphi|\Big| = \sum_{i,j=1}^{\infty,\infty} ||F(x_{ij})||A(R_{ij}) \leq \sum_{i,j=1}^{\infty,\infty} MA(R_{ij}) = MA(\Sigma)$$

4. Sea $F : U = \mathbb{R}^3 \backslash \{\text{eje z}\} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida como:

$$F(x, y, z) = \Big(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0\Big)$$

   Determina si F es un solenoide
   Observemos que $x \neq 0$ y $y \neq 0$, F es continua en U. Entonces F es solenoide, si $\nabla \cdot F = 0$

$$\nabla \cdot F(x, y, z) = \frac{\partial\Big(\frac{-y}{x^2 + y^2}\Big)}{\partial x} + \frac{\partial\Big(\frac{x}{x^2 + y^2}\Big)}{\partial y} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

   F es solenoide.

5. Deduce una expresión para la divergencia de un campo

$$F = (F_r, F_\theta, F_\varphi)$$

que está dado en términos de coordenadas esféricas y utilizando la expresión (vista en clase)

$$\nabla \cdot F(\hat{x}) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\displaystyle\int\!\!\int_{\Sigma_\epsilon} F \cdot d\varphi_\epsilon}{V(\Omega_\epsilon)}$$

donde φ_ϵ es una parametrización (simple) de Σ y $\Sigma = \partial\Omega_\epsilon$

Observemos la caras ortogonales al eje radial. El flujo en esas caras es:
$F_r(r+dr,\theta,\varphi)\cdot$(área cara 1)-$F_r(r,\theta,\varphi)\cdot$(área cara 2)$\approx Fr(r+dr,\theta,\varphi)(r+dr)^2\sin\varphi d\theta d\varphi - Fr(r,\theta,\varphi)(r)^2\sin\varphi drd\theta d\varphi$
$\approx \dfrac{\partial}{\partial r}(F_r r^2)\sin\varphi d\theta d\varphi$
Observemos la caras ortogonales al eje del ángulo θ. El flujo en esas caras es:
$F_\theta(r,\theta+d\theta,\varphi)\cdot$(área cara 3)-$F_\theta(r,\theta,\varphi)\cdot$(área cara 4)$\approx F_\theta(r,\theta+d\theta,\varphi)rdrd\varphi - F_\theta(r,\theta,\varphi)rdrd\varphi \approx \dfrac{\partial}{\partial\theta}(F_\theta)rdrd\theta d\varphi$
Observemos la caras ortogonales al eje del ángulo φ. El flujo en esas caras es:
$F_\varphi(r,\theta,\varphi+d\varphi)\cdot$(área cara 5)-$F_\varphi(r,\theta,\varphi)\cdot$(área cara 6)$\approx F_\varphi(r,\theta,\varphi+d\varphi)r\sin(\varphi+d\varphi)d\theta dr - F_\theta(r,\theta,\varphi)r\sin(\varphi)d\theta dr$
$\approx \dfrac{\partial}{\partial\theta}(F_\varphi\sin\varphi)rdrd\theta d\varphi$
Así

$$F(\hat{x}) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\int\int_{\Sigma_\epsilon} F\cdot d\varphi_\epsilon}{V(\Omega_\epsilon)} = \frac{\frac{\partial}{\partial r}(F_r r^2)\sin\varphi drd\theta d\varphi + \frac{\partial}{\partial\theta}(F_\theta)rdrd\theta d\varphi + \frac{\partial}{\partial\theta}(F_\varphi\sin\varphi)rdrd\theta d\varphi}{r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi} =$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial F_r r^2}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial F_\varphi\sin\varphi}{\partial\varphi}$$

6. Determina alguna región $U\subset\mathbb{R}^3$ tal que $F: UU\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ esté bien definido y se solenoide, con

$$F(\hat{x}) = \frac{1}{||\hat{x}||^3}\hat{x}, \qquad \hat{x} = (x,y,z)$$

Además calcula explícitamente $G: U\to\mathbb{R}^3$ tal que

$$F(\hat{x}) = \nabla\times G(\hat{x})$$

Observemos que F está bien definido en $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$. Calculemos $\nabla\cdot F(\hat{x})$
$\nabla\cdot F(\hat{x}) = \dfrac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^3} + \dfrac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - 3y^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^3} +$
$\dfrac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - 3z^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^3} = \dfrac{3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - 3(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^3} = 0$
F es un campo solenoide fuera del origen
Entonces $G(\hat{x}) = (G_1(\hat{x}), G_2(\hat{x}), G_3(\hat{x}))$ con:
$G_1(\hat{x}) = \int_0^z F_2(x,y,t)dt - \int_0^y F_3(x,t,0)dt = \int_0^z F_2(x,y,t)dt$
$G_2(\hat{x}) = -\int_0^z F_1(x,y,t)dt$
$G_(\hat{x}) = 0$
Así $G(\hat{x}) = \Big(\dfrac{yz}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, -\dfrac{xz}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, 0\Big)$

7. Demuestra el teorema de Green utilizando el Teorema de Stokes
Sea $s: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ tq $s(x,y) = (x,y,0)$ una parametrización de D

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy + 0dz \xRightarrow[Stokes]{} \int\int_D \nabla\times(P,Q,0)\cdot ds$$

$$= \int\int_D (-\frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y})\cdot ds = \int\int_D (-\frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y})\cdot(0,0,1)dxdy = \int\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}dxdy$$