$$\int \frac{dF}{dx}\,dx = F(\xi)(\quad)$$

3. Calcular el flujo del campo $\bar{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dado por $\bar{F}(x,y,z)=(ax,by,cz)$, $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ a través de la esfera orientada con sus vectores normales que apuntan hacia afuera

$$\iint_{\Sigma_{\bar{f}}} \bar{F}\cdot dA = \iiint_{\Omega} \nabla\cdot\bar{F}\,dxdydz = \iiint_{\Omega}(a+b+c)\,dxdydz$$
$$= (a+b+c)\iiint_{\Omega} dxdydz = \frac{4}{3}\pi r^3(a+b+c)$$

Demostrar que

$$\nabla\cdot\bar{F}(\bar{p}) = \lim_{\Sigma_{\bar{f}}\to\bar{p}} \frac{\text{Flujo a través de }\Sigma}{\text{Volumen de }\Omega}$$ si $\bar{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ es un campo vectorial de clase C_1, Σ es una superficie orientada positivamenten y Ω es la región encerrada por Σ parametrizada por $\bar{f}: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$.

Se tiene

$$\iint_{\Sigma_{\bar{f}}} \bar{F}\cdot dA = \iiint_{\Omega}\nabla\cdot\bar{F}\,dxdydx = \nabla\cdot\bar{F}(\bar{p}^*)\iiint_{\Omega} dxdydz = \nabla\cdot\bar{F}(\bar{p}^*)\text{ volumen de }\Omega$$

Por lo tanto $$\nabla\cdot\bar{F}(\bar{p}^*) = \frac{\iint_{\Sigma_{\bar{f}}}\bar{F}\cdot dA}{\text{Volumen de }\Omega}$$

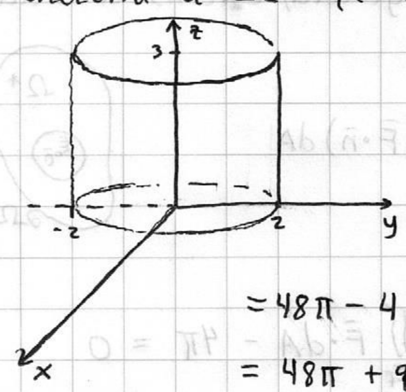
Si $\bar{p}\in\Sigma$, entonces

$$\lim_{\Sigma_{\bar{f}}\to\bar{p}} \nabla\cdot\bar{F}(\bar{p}^*) = \lim_{\Sigma_{\bar{f}}\to\bar{p}}\frac{\text{Flujo a través de }\Sigma_{\bar{f}}}{\text{Volumen de }\Omega}$$

Por lo tanto

$$\nabla\cdot\bar{F}(\bar{p}) = \lim_{\Sigma_{\bar{f}}\to\bar{p}}\frac{\text{Flujo de }\bar{F}\text{ a través de }\Sigma_{\bar{f}}}{\text{Volumen de }\Omega}$$

4. Calcular el flujo del campo $\bar{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dado por $\bar{F}(x,y,z)=(4x,-2y^2,z^2)$ a través de Σ orientada positivamente, donde Σ es la superficie que encierra a $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le 4,\ 0\le z\le 3\}$



$$\iint_{\Sigma}\bar{F}\cdot dA \overset{T.D.}{=} \iiint_{\Omega}\nabla\cdot\bar{F}\,dxdydz$$
$$= \iiint_{\Omega}(4-4y+2z)\,dxdydz$$
$$= 4\iiint_{\Omega} dxdydz - 4\iiint_{\Omega} y\,dxdydz + 2\iiint_{\Omega} z\,dxdydz$$
$$= 48\pi - 4\int_0^3\int_0^2\int_0^{2\pi} r^2\operatorname{sen}\theta\,d\theta drdz + 2\int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^3 rz\,dz\,d\theta dr$$
$$= 48\pi + 9\int_0^2\int_0^{2\pi} r\,d\theta dr = 48\pi + 18\pi\int_0^2 dr = 48\pi + 36\pi = 84\pi$$

Teorema (Ley de Gauss) Si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es una región elemental, su frontera Σ está parametrizado por $\bar{f}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $\bar{F}: \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ el campo vectorial dado por

$$\bar{F}(x,y,z) = \frac{1}{\|(x,y,z)\|^3}(x,y,z) \quad y \quad (0,0,0) \notin \Sigma, \text{ entonces}$$

$$\iint_{\Sigma_{\bar{f}}} \bar{F}\cdot dA = \begin{cases} 0 & si \ (0,0,0) \notin \Omega \\ 4\pi & si \ (0,0,0) \in \Omega \end{cases}$$

Demostración

$$\nabla\cdot\bar{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

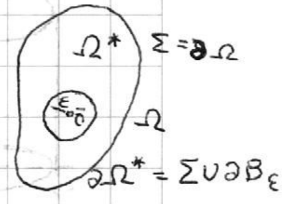
$$= \frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^3} + \frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - 3y^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^3} + \frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - 3z^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$= \frac{-2x^2+2z^2+y^2-2y^2+y^2+2z^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Si $(0,0,0) \notin \Omega$ se cumple el teorema de la divergencia, en consecuencia $\iint_{\Sigma} \bar{F}\cdot dA = \iiint_{\Omega} \nabla\cdot\bar{F}\, dxdydz = 0$

Pero si $(0,0,0) \in \Omega$ ya no se cumplen las hipótesis del Teorema. Consideremos una bola $B_\varepsilon = B(\delta;\varepsilon)$, entonces en $\Omega^* = \Omega - B_\varepsilon$ sí se cumplen las condiciones del teorema de la divergencia, en consecuencia

$$\iint_{\partial\Omega^*} \bar{F}\cdot dA = \iiint_{\Omega^*} \nabla\cdot\bar{F}\, dxdydx = 0$$



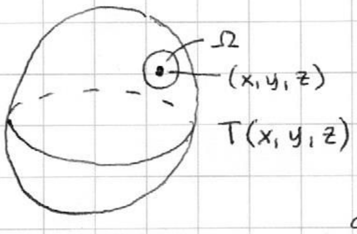
Pero $$\iint_{\partial\Omega^*} \bar{F}\cdot dA = \iint_{\partial\Omega} \bar{F}\cdot dA + \iint_{\partial B_\varepsilon} \bar{F}\cdot dA = \iint_{\Sigma_{\bar{f}}} \bar{F}\cdot dA + \iint_{\partial B_\varepsilon} (\bar{F}\cdot\bar{n})\, dA$$

$$= \iint_{\Sigma_{\bar{f}}} \bar{F}\cdot dA + \iint_{\partial B_\varepsilon}\left(\frac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|^3}\right)\cdot\left(-\frac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|}\right) dA$$

$$= \iint_{\Sigma_{\bar{f}}} \bar{F}\cdot dA - \frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{\partial B_\varepsilon} dA = \iint_{\Sigma_{\bar{f}}} \bar{F}\cdot dA - \frac{1}{\varepsilon^2}(4\pi\varepsilon^2) = \iint_{\Sigma_{\bar{f}}} \bar{F}\cdot dA - 4\pi = 0$$

Por lo tanto $\iint_{\Sigma_{\bar{f}}} \bar{F}\cdot dA = 4\pi$ si $(0,0,0) \in \Omega$

Ecuación del calor



Si $\bar{U}$ es el flujo de calor en el punto $\bar{P}$ de Ω al tiempo t, sabemos que $\bar{U} = -\kappa \nabla T$.

Entonces la cantidad de calor que entra a Ω es

$$-\iint_{\partial\Omega} \bar{U} \cdot dA = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \bar{U}\, dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (-\kappa \nabla T)\, dx\,dy\,dz$$

$$= -\kappa \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \nabla T\, dx\,dy\,dz$$

Por lo tanto la tasa de absorción de calor es

$c\rho \dfrac{\partial T}{\partial t}$ donde c es el calor específico del material y ρ es la densidad de masa.

En consecuencia la cantidad de calor absorvido por Ω es

$$\iiint_{\Omega} c\rho \frac{\partial T}{\partial t}\, dx\,dy\,dz$$

Luego al igualar las dos cantidades se tiene

$$\iiint_{\Omega} \kappa \nabla \cdot \nabla T\, dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega} c\rho \frac{\partial T}{\partial t}\, dx\,dy\,dz$$

es decir, $\displaystyle\iiint_{\Omega} \left(\kappa \nabla^2 T - c\rho \frac{\partial T}{\partial t}\right) dx\,dy\,dz = 0$

entonces $\kappa \nabla^2 T - c\rho \dfrac{\partial T}{\partial t} = 0$ ecuación que se conoce como ecuación del calor.

Los últimos tres teoremas importantes que vimos son.

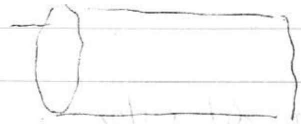
Teorema de Green. Si $\bar{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\bar{F} = (F_1, F_2)$ es de clase C^1_D, entonces $\displaystyle\int_{\partial D^+} \bar{F} \cdot d\bar{\lambda} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy$.

Teorema de Stokes

Teorema de Gauss.

Que involucran a $\nabla \times \bar{F}$ y $\nabla \cdot \bar{F}$ que se deducen a partir del operador $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ que se conoce como operador nabla.

$F = q\,\bar{v}\times\bar{B}$



Propiedades.

1. $\nabla(\lambda_1 f+\lambda_2 g) = \lambda_1\nabla f + \lambda_2\nabla g$
2. $\nabla fg = f\nabla g + g\nabla f$
3. $\nabla\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}\ ,\ g\neq 0$
4. $\nabla\cdot(\bar F+\bar G) = \nabla\cdot\bar F + \nabla\bar G$
5. $\nabla\cdot(\bar F\times\bar G) = \nabla\cdot(F_2G_3-F_3G_2,\ F_3G_1-F_1G_3,\ F_1G_2-F_2G_1)$

$$= \frac{\partial(F_2G_3-F_3G_2)}{\partial x} + \frac{\partial(F_3G_1-F_1G_3)}{\partial y} + \frac{\partial(F_1G_2-F_2G_1)}{\partial z}$$

$$= F_2\frac{\partial G_3}{\partial x} - F_3\frac{\partial G_2}{\partial x} + G_3\frac{\partial F_2}{\partial x} - G_2\frac{\partial F_3}{\partial x} + F_3\frac{\partial G_1}{\partial y} - F_1\frac{\partial G_3}{\partial y} + G_1\frac{\partial F_3}{\partial y} - G_3\frac{\partial F_1}{\partial y} +$$
$$+ F_1\frac{\partial G_2}{\partial z} - F_2\frac{\partial G_1}{\partial z} + G_2\frac{\partial F_1}{\partial z} - G_1\frac{\partial F_2}{\partial z}$$

$$= F_1\left(\frac{\partial G_2}{\partial z}-\frac{\partial G_3}{\partial y}\right) + F_2\left(\frac{\partial G_3}{\partial x}-\frac{\partial G_1}{\partial z}\right) + F_3\left(\frac{\partial G_1}{\partial y}-\frac{\partial G_2}{\partial x}\right) + G_1\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right) +$$
$$+ G_2\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x}\right) + G_3\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right) = \bar G\cdot\nabla\times\bar F - \bar F\cdot\nabla\times\bar G$$

6. $\nabla\cdot\nabla\times\bar F = \nabla\cdot\left(\dfrac{\partial F_3}{\partial y}-\dfrac{\partial F_1}{\partial z},\ \dfrac{\partial F_1}{\partial z}-\dfrac{\partial F_3}{\partial x},\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x}-\dfrac{\partial F_1}{\partial y}\right)$

$$= \frac{\partial^2 F_3}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z\partial y} = 0 \quad \text{si } \bar F\in C^2$$

7. $\nabla\cdot(\nabla fg) = \nabla\cdot(f\nabla g + g\nabla f)$

$$= \nabla\cdot\left(f\left(\frac{\partial g}{\partial x},\frac{\partial g}{\partial y},\frac{\partial g}{\partial z}\right) + g\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right)$$
$$= \frac{\partial\left(f\frac{\partial g}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(f\frac{\partial g}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(f\frac{\partial g}{\partial z}\right)}{\partial z} + \frac{\partial\left(g\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(g\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(g\frac{\partial f}{\partial z}\right)}{\partial z}$$
$$= f\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\right) + 2\nabla f\cdot\nabla g + g\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)$$
$$= f\nabla^2 g + 2\nabla f\cdot\nabla g + g\nabla^2 f$$

8. $\nabla\cdot(\nabla f+\nabla g) = \nabla^2 f + \nabla^2 g$
9. $\nabla\cdot(f\nabla g - g\nabla f) = f\nabla^2 g - g\nabla^2 f$

A $\nabla^2 f = \sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ se le llama Laplaciano de la función f.

A la ecuación $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0$ se le conoce como ecuación de Laplace y a las funciones que satisfacen la ecuación de Laplace se les llama funciones armónicas.

Demostrar que

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2} \quad \text{es una función armónica.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x(x+y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-2xy-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{(-2x-2y)(x^2+y^2)^2 - 4x(-x^2+y^2-2xy)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4} +$$

$$+ \frac{(-2y-2x)(x^2+y^2)^2 - 4y(x^2-y^2-2xy)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{-4(x+y)(x^2+y^2) + 4x^3 - 4xy^2 + 8x^2y - 4x^2y + 4y^3 + 8xy^2}{(x^2+y^2)^3} = 0$$

Teorema. Si $f, g : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ son funciones de clase C^2 en el conjunto abierto U en $\mathbb{R}^3$, $\Omega \subset U$ y $\Sigma = \partial\Omega$ está orientada por los vectores normales hacia afuera, entonces

i) $\iint_\Sigma f \nabla g \, dA = \iiint_\Omega (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) \, dx\,dy\,dz$

ii) $\iint_\Sigma (f \nabla g - g \nabla f) \, dA = \iiint_\Omega (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) \, dx\,dy\,dz$

Demostración.

i) Por el teorema de Gauss

$$\iint_\Sigma f \nabla g \, dA = \iiint_\Omega \nabla \cdot (f \nabla g) \, dx\,dy\,dz \overset{\text{usamos (7)}}{=} \iiint_\Omega (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) \, dx\,dy\,dz$$

ii) $$\iint_\Sigma (f \nabla g - g \nabla f) \, dA = \iiint_\Omega \nabla \cdot (f \nabla g - g \nabla f) \, dx\,dy\,dz$$

$$\overset{\text{por (9)}}{=} \iiint_\Omega (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) \, dx\,dy\,dz$$

Teorema. Si $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función armónica tal que $f(x,y,z) = 0$ para todo $(x,y,z) \in \Sigma$, con Σ la frontera de una región elemental $\Omega \subset U$, entonces f es idénticamente cero en Ω

$\frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{\partial f}{\partial x}$

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 +$

Demostración.

Por la parte (i) del Teorema anterior

$$\iint_{\Sigma} (f\nabla f)\, dA = \iiint_{\Omega} (f\,\nabla^2 f + \nabla f\cdot\nabla f)\, dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_{\Omega} \nabla f\cdot\nabla f\; dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right) dx\,dy\,dz$$

Como $\iint_{\Sigma} (f\nabla f)\, dA = 0$ entonces

$$\iiint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right) dx\,dy\,dz = 0$$

{ pero el integrando siempre es mayor que cero pues son términos positivos

en consecuencia

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 = 0$$

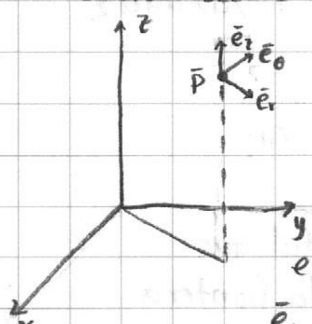
Luego $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$ en consecuencia la función f es constante en Ω, pero como es igual a cero en su frontera, entonces es igual a cero en Ω

* Espacios vectoriales en coordenadas cilíndricas y coordenadas esféricas

Dado un vector $\bar{v} \in \mathbb{R}^3$ cuya expresión es $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$ lo podemos escribir en la forma $\bar{v} = v_1\hat{\imath} + v_2\hat{\jmath} + v_3\hat{k}$ donde $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ es la base ortonormal del sistema coordenado cartesiano.

Para escribir una expresión equivalente pero en coordenadas cilíndricas o esféricas, lo que necesitamos en principio son bases ortonormales respectivamente de cada uno de estos sistemas coordenados.

Coordenadas cilíndricas



entonces

$\bar{e}_r = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$

$\bar{e}_\theta = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)$

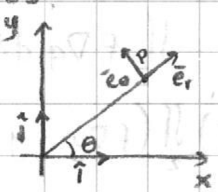
$\bar{e}_z = (0, 0, 1) = \hat{k}$

es decir

$\bar{e}_r = \cos\theta\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath}$

$\bar{e}_\theta = -\operatorname{sen}\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}$

$\bar{e}_z = \hat{k}$



$\bar{e}_r = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$

$\bar{e}_\theta = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$

Luego $\hat{\imath} = \cos\theta\,\bar{e}_r - \operatorname{sen}\theta\,\bar{e}_\theta$

$\hat{\jmath} = \operatorname{sen}\theta\,\bar{e}_r + \cos\theta\,\bar{e}_\theta$

$\hat{k} = \bar{e}_z$

entonces la matriz de cambio de base ortonormal $\{\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_z\}$ a la base $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ es

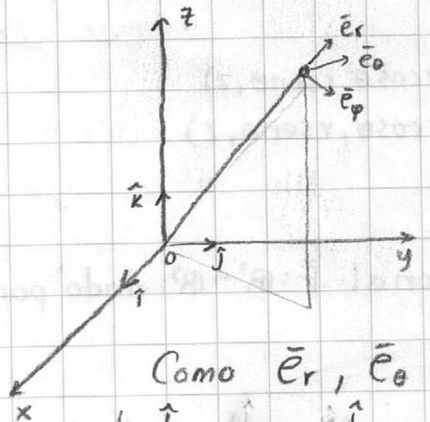
$$P = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en consecuencia la matriz del cambio de cambio de base de la base $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ a la base ortonormal $\{\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_z\}$ es

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[pues P es ortonormal y su inversa es su transpuesta]

Coordenadas esféricas.



Como $\bar{e}_\theta$ es el mismo que en las coordenadas cilíndricas

$$\bar{e}_\theta = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0) = -\operatorname{sen}\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}$$

además

$$\bar{e}_r = (\cos\theta \operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \cos\varphi)$$

Como $\bar{e}_r$, $\bar{e}_\theta$ y $\bar{e}_\varphi$ son ortogonales $\bar{e}_\varphi = \bar{e}_\theta \times \bar{e}_r$

$$\bar{e}_\varphi = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta\operatorname{sen}\varphi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = (\cos\theta\cos\varphi, \operatorname{sen}\theta\cos\varphi, -\operatorname{sen}\varphi)$$

La matriz del cambio de base de la base ortonormal $\{\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_\varphi\}$ a la base $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ es

$$P = \begin{pmatrix} \cos\theta\operatorname{sen}\varphi & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta\cos\varphi \\ \operatorname{sen}\theta\cos\varphi & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta\cos\varphi \\ -\operatorname{sen}\varphi & 0 & -\operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix}$$

Por lo que la matriz del cambio de base de la base $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ a la base ortonormal $\{\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_\varphi\}$ es

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta\operatorname{sen}\varphi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta\cos\varphi & \operatorname{sen}\theta\cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix}$$

Consideremos un campo vectorial $\bar{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\bar{F}(x,y,z) = (F_x(x,y,z), F_y(x,y,z), F_z(x,y,z))$$
$$= F_x(x,y,z)\hat{\imath} + F_y(x,y,z)\hat{\jmath} + F_z(x,y,z)\hat{k}$$

El campo en coordenadas cilíndricas es

$$\tilde{\bar{F}}(r,\theta,z) = (\tilde{F}_x(r,\theta,z), \tilde{F}_y(r,\theta,z), \tilde{F}_z(r,\theta,z))$$
$$= F_x(r\cos\theta, r\,sen\theta, z)\hat{\imath} + F_y(r\cos\theta, r\,sen\theta, z)\hat{\jmath} + F_z(r\cos\theta, r\,sen\theta, z)\hat{k}$$
$$= \tilde{F}_x(r,\theta,z)(\cos\theta\,\bar{e}_r - sen\theta\,\bar{e}_\theta) + \tilde{F}_y(r,\theta,z)(sen\theta\,\bar{e}_r + \cos\theta\,\bar{e}_\theta) + \tilde{F}_z(r,\theta,z)\bar{e}_z$$
$$= \cos\theta\,\tilde{F}_x(r,\theta,z)\bar{e}_r - sen\theta\,\tilde{F}_x(r,\theta,z)\bar{e}_\theta + sen\theta\,\tilde{F}_y(r,\theta,z)\bar{e}_r + \cos\theta\,\tilde{F}_y(r,\theta,z)\bar{e}_\theta +$$
$$+ \tilde{F}_z(r,\theta,z)\bar{e}_z$$
$$= (\cos\theta\,\tilde{F}_x(r,\theta,z) + sen\theta\,\tilde{F}_y(r,\theta,z))\bar{e}_r + (-sen\theta\,\tilde{F}_x(r,\theta,z) + \cos\theta\,\tilde{F}_y(r,\theta,z))\bar{e}_\theta +$$
$$\tilde{F}_z(r,\theta,z)\bar{e}_z$$
$$= (F_r(r,\theta,z), F_\theta(r,\theta,z), F_z(r,\theta,z))$$

donde

$$F_r(r,\theta,z) = \cos\theta\,F_x(r\cos\theta, r\,sen\theta, z) + sen\theta\,F_y(r\cos\theta, r\,sen\theta, z)$$
$$F_\theta(r,\theta,z) = -sen\theta\,F_x(r\cos\theta, r\,sen\theta, z) + \cos\theta\,F_y(r\cos\theta, r\,sen\theta, z)$$
$$F_z(r,\theta,z) = F_z(r\cos\theta, r\,sen\theta, z)$$

Ejemplo.

Escribir en coordenadas cilíndricas el campo vectorial $\bar{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $\bar{F}(x,y,z) = (xy, 2z, zx)$

El campo en coordenas cilíndricas

$$\tilde{\bar{F}}(r,\theta,z) = (\cos\theta(r\,sen\theta)(r\cos\theta) + sen\theta(2z), -sen\theta(r\cos\theta)(r\,sen\theta) + \cos\theta(2z),$$
$$z(r\cos\theta))$$
$$= (r^2\cos^2\theta\,sen\theta + 2z\,sen\theta)\bar{e}_r + (-r^2 sen^2\theta\cos\theta + 2z\cos\theta)\bar{e}_\theta + zr\cos\theta\,\bar{e}_z$$

Si $\bar{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial dado por

$$\bar{F}(x,y,z) = (F_x(x,y,z), F_y(x,y,z), F_z(x,y,z))$$
$$= F_x(x,y,z)\hat{\imath} + F_y(x,y,z)\hat{\jmath} + F_z(x,y,z)\hat{k}$$

su expresión en coordenadas esféricas es

$$\check{\bar{F}}(r,\theta,\varphi) = (\check{F}_x(r,\theta,\varphi), \check{F}_y(r,\theta,\varphi), \check{F}_z(r,\theta,\varphi))$$
$$= \check{F}_x(r,\theta,\varphi)\hat{\imath} + \check{F}_y(r,\theta,\varphi)\hat{\jmath} + \check{F}_z(r,\theta,\varphi)\hat{k}$$
$$= \check{F}_x(r,\theta,\varphi)(\cos\theta\,sen\varphi\,\bar{e}_r + sen\theta\,sen\varphi\,\bar{e}_\theta + \cos\varphi\,\bar{e}_\varphi) + \check{F}_y(r,\theta,\varphi)(-sen\theta\,\bar{e}_r + \cos\theta\,\bar{e}_\theta) +$$
$$\check{F}_z(r,\theta,\varphi)(\cos\theta\cos\varphi\,\bar{e}_r + sen\theta\cos\varphi\,\bar{e}_\theta - sen\varphi\,\bar{e}_\varphi)$$

$2\pi r$

$\dfrac{r_0+h-(r_0-k)}{2h}$

$2r$

$$\phi_{bc} \approx 2k(r_0+h)F_r(r_0+h,\theta_0)$$
$$\phi_{cd} \approx 2h\,F_\theta(r_0,\theta_0+k)$$
$$\phi_{ad} \approx 2k(r_0-h)F_r(r_0-h,\theta_0)$$
$$\phi_{ab} \approx 2h\,F_\theta(r_0,\theta_0-k)$$

En consecuencia el flujo a través de R es

$$\phi_R = \phi_{bc}+\phi_{cd}-\phi_{ad}-\phi_{ab}$$
$$\approx 2k(r_0+h)F_r(r_0+h,\theta_0)+2hF_\theta(r_0,\theta_0+k)-2k(r_0-h)F_r(r_0-h,\theta_0)-2hF_\theta(r_0,\theta_0-k)$$

Al dividir ϕ_R por el área de R, se obtiene el flujo por unidad de área en R

$$\frac{\phi_R}{A_R} \approx \frac{2k(r_0+h)F_r(r_0+h,\theta_0)-2k(r_0-h)F_r(r_0-h,\theta_0)}{4r_0hk} + \frac{2h\big(F_\theta(r_0,\theta_0+k)-F_\theta(r_0,\theta_0-k)\big)}{4r_0hk}$$

$$= \frac{(r_0+h)F_r(r_0+h,\theta_0)-(r_0-h)F_r(r_0-h,\theta_0)}{2r_0h} + \frac{F_\theta(r_0,\theta_0+k)-F_\theta(r_0,\theta_0-k)}{2r_0k}$$

Al tomar el límite cuando h y k tienden a cero, se obtiene

$$\frac{1}{r_0}\lim_{h,k\to 0}\left(\frac{(r_0+h)F_r(r_0+h,\theta_0)-(r_0-h)F_r(r_0-h,\theta_0)}{2h} + \frac{F_\theta(r_0,\theta_0+k)-F_\theta(r_0,\theta_0-k)}{2k}\right) =$$

$$= \frac{1}{r_0}\left(\left.\frac{\partial(rF_r)}{\partial r}\right|_{\substack{r=r_0\\ \theta=\theta_0}} + \left.\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}\right|_{\substack{r=r_0\\ \theta=\theta_0}}\right)$$

Por lo tanto la divergencia de $\bar{F}$ es $\nabla\cdot\bar{F} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rF_r)}{\partial r}+\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta}\right)$

Si $\bar{F}=(F_r,F_\theta,F_z)$ ¿Cuál es la divergencia en coordenadas cilíndricas y esféricas?

En coordenadas cilíndricas se tiene $\nabla\cdot\bar{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rF_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$

En coordenadas esféricas se tiene

$$\nabla\cdot\bar{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2F_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\varphi}\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\varphi}\frac{\partial(\mathrm{sen}\varphi\,F_\varphi)}{\partial\varphi}$$

∇

$= \left(\cos\theta\,\text{sen}\varphi\,\tilde{F}_x(r,\theta,\varphi) - \text{sen}\theta\,\tilde{F}_y(r,\theta,\varphi) + \cos\theta\cos\varphi\,\tilde{F}_z(r,\theta,\varphi)\right)\bar{e}_r +$

$+\left(\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi\,\tilde{F}_x(r,\theta,\varphi) + \cos\theta\,\tilde{F}_y(r,\theta,\varphi) + \text{sen}\theta\cos\varphi\,\tilde{F}_z(r,\theta,\varphi)\right)\bar{e}_\theta +$

$+\left(\cos\varphi\,\tilde{F}_x(r,\theta,\varphi) - \text{sen}\varphi\,\tilde{F}_z(r,\theta,\varphi)\right)\bar{e}_\varphi$

$= \left(F_r(r,\theta,\varphi), F_\theta(r,\theta,\varphi), F_\varphi(r,\theta,\varphi)\right)$

donde

$F_r(r,\theta,\varphi) = \cos\theta\,\text{sen}\varphi\,F_x(r\cos\theta\,\text{sen}\varphi, r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi, r\cos\varphi) - \text{sen}\theta\,F_y(r\cos\theta\,\text{sen}\varphi, r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi, r\cos\varphi)$
$+ \cos\theta\cos\varphi\,F_z(r\cos\theta\,\text{sen}\varphi, r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi, r\cos\varphi)$

$F_\theta(r,\theta,\varphi) = \text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi\,F_x(r\cos\theta\,\text{sen}\varphi, r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi, r\cos\varphi) + \cos\theta\,F_y(r\cos\theta\,\text{sen}\varphi, r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi, r\cos\varphi) +$
$+ \text{sen}\theta\cos\varphi\,F_z(r\cos\theta\,\text{sen}\varphi, r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi, r\cos\varphi)$

$F_\varphi(r,\theta,\varphi) = \cos\varphi\,F_x(r\cos\theta\,\text{sen}\varphi, r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi, r\cos\varphi) - \text{sen}\varphi\,F_z(r\cos\theta\,\text{sen}\varphi, r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi, r\cos\varphi)$

Ejemplo

Escribir en coordenadas esféricas el campo vectorial $\bar{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dado por

$\bar{F}(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2, \sqrt{x^2+y^2}, z)$

$\bar{F}(r,\theta,\varphi) = (F_r, F_\theta, F_\varphi)$

$\tilde{F}_x(r,\theta,\varphi) = F_x(r\cos\theta\,\text{sen}\varphi, r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi, r\cos\varphi) = r^2$

$\tilde{F}_y(r,\theta,\varphi) = F_y(r\cos\theta\,\text{sen}\varphi, r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi, r\cos\varphi) = r\,\text{sen}\varphi$

$\tilde{F}_z(r,\theta,\varphi) = F_z(r\cos\theta\,\text{sen}\varphi, r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi, r\cos\varphi) = r\cos\varphi$

Por lo que

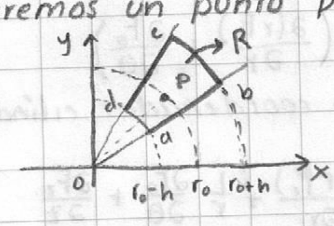
$F_r(r,\theta,\varphi) = r^2\cos\theta\,\text{sen}\varphi - r\,\text{sen}\varphi\,\text{sen}\theta + r\cos\theta\cos^2\varphi$

$F_\theta(r,\theta,\varphi) = r^2\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi + r\cos\theta\,\text{sen}\varphi + r\,\text{sen}\theta\cos^2\varphi$

$F_\varphi(r,\theta,\varphi) = r^2\cos\varphi - r\,\text{sen}\varphi\cos\varphi$

Si $\bar{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dado por $\bar{F}(r,\theta) = (F_r, F_\theta)$ determinar la divergencia de $\bar{F}$.

Consideremos un punto $\bar{p} = (r_0, \theta_0)$



Sea R alrededor de $\bar{p}$ tal que

$R = \{(r,\theta) \mid r_0 - h \le r \le r_0 + h, \theta_0 - k \le \theta \le \theta_0 + k\}$

Calculemos el flujo del campo vectorial $\bar{F}$ a través de R.

Supongamos que la componente radial del campo "entra" por el lado ad del "rectángulo" R y sale por bc, que la componente F_θ del campo "entra" por ab y "sale" por cd.

Entonces el flujo que sale de R es lo que sale por bc más lo que "sale" por cd, y el flujo que "entra" es el que entra por ad más el que entra por ab.