Proba 2 Tarea 3

Barush Madera

1. Los montos de reclamaciones por daño a casa-habitación a causa de huracán son variables aleatorias independientes con la misma función de densidad
$$f(x) = \frac{3}{x^4}\mathbf{I}_{(1,\infty)}^{(x)}$$
donde x es el monto de reclamación en miles de dólares. Supóngase que 3 reclamaciones fueron hechas.¿Cuál es el monto esperado de la reclamación por mayor monto de las tres?
$$X_{(3)} = 2F(x)^2 f(x) = 3(1-\frac{1}{x^3})^2\frac{3}{x^4} \Rightarrow E[X_{(3)}] = \int_1^\infty (1-\frac{1}{x^3})^2\frac{9}{x^3}dx = 9\int_1^\infty \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^6} + \frac{1}{x^9}dx = \frac{81}{40} = 2.025$$

2. Sea X_1, ... , X_n una muestra aleatoria de una distribución uniforme en [0, 1]. Demuestra que $X_{(i)} \sim Beta(i, n-i+1)$
$$f_{X_{(i)}}(x_i) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}F^{i-1}(x)[1-F(x)]^{n-i}f(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}(x)^{i-1}(1-x)^{(n-i+1)-1}(1) = Beta(i, n-i+1)$$

4. Sea X_1, X_2 muestra aleatoria de la distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Demuestra que $E[X_{(1)}] = \mu - \dfrac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$
$X_{(1)} = \min\{X_1, X_2\} \Rightarrow f_{X_{(1)}} = 2[1-F(x)]f(x)$
$$\Rightarrow E[X_{(1)}] = 2E[X] - 2\int_{-\infty}^\infty x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dtdx = 2\mu - \frac{1}{\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^\infty xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dtdx$$
Resolvamos por partes
$u = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$; $dv = xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
$du = e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$; $v = \mu\int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt - \sigma^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
$$= 2\mu - \frac{1}{\pi\sigma^2}((\int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt)(\mu\int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt - \sigma^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}))\Big|_{-\infty}^\infty - \int_{-\infty}^\infty(\mu\int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt - \sigma^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}})(e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}})dx$$
$$= 2\mu - \frac{1}{\pi\sigma^2}(\mu(\int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt)^2\Big|_{-\infty}^\infty - \int_{-\infty}^\infty(\mu\int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt - \sigma^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}})(e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}})dx$$
$$= 2\mu - \frac{1}{\pi\sigma^2}(\mu(\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt)^2 - \int_{-\infty}^\infty(\mu\int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt - \sigma^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}})(e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}})dx$$
$$= 2\mu - \frac{1}{\pi\sigma^2}(2\mu\pi\sigma^2 - \int_{-\infty}^\infty(\mu\int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt - \sigma^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}})(e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}})dx$$
$$= \frac{1}{\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^\infty \mu e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt - \sigma^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2(\frac{\sigma}{\sqrt{2}})^2}}dx = \frac{1}{\pi\sigma^2}(\frac{\mu}{2}[\int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt]^2\Big|_{-\infty}^\infty - \sigma^2\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2(\frac{\sigma}{\sqrt{2}})^2}}dx)$$
$$= \frac{1}{\pi\sigma^2}(\mu\pi\sigma^2 - \sigma^2\sqrt{2\pi}\frac{\sigma}{\sqrt{2}}) = \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$$