Tarea 2 Probabilidad 2

Oscar Barush Hernández Madera

Marzo 2018

1. (X,Y) es un vector aleatorio con distribución hipergeométrica bivariada. Si su función de probabilidad está dada por: $f(x,y)=\dfrac{\binom{N_1}{x}\binom{N_2}{y}\binom{N-N_1-N_2}{n-x-y}}{\binom{N}{n}}$; donde $\begin{array}{lll} x=0,1,2,...,n; & y=0,1,2,...,n; & x+y\le n \\ N1>0; & N2>0; & N1+N2\le N \\ 0<n<N & & \end{array}$

   (a) Calcula $f_X(x)$ y $f_Y(y)$
   $f_X(x)=\sum_{y=0}^{n-x}\dfrac{\binom{N_1}{x}\binom{N_2}{y}\binom{N-N_1-N_2}{n-x-y}}{\binom{N}{n}}=\dfrac{\binom{N_1}{x}}{\binom{N}{n}}\sum_{y=0}^{n-x}\binom{N_2}{y}\binom{N-N_1-N_2}{n-x-y}=\dfrac{\binom{N_1}{x}\binom{N-N_1}{n-x}}{\binom{N}{n}}$(Ver anexo)
   De forma análoga
   $f_Y(y)=\dfrac{\binom{N_2}{y}\binom{N-N_2}{n-y}}{\binom{N}{n}}$

   (b) Calcula $Cov(X,Y)$ y $\rho(X,Y)$

$$E(XY)=\sum_{x=0}^{n}\sum_{y=0}^{n-x}xy\frac{\binom{N_1}{x}\binom{N_2}{y}\binom{N-N_1-N_2}{n-x-y}}{\binom{N}{n}}=\sum_{x=0}^{n}x\frac{\binom{N_1}{x}\binom{N-N1}{n-x}}{\binom{N}{n}}\sum_{y=0}^{n}y\frac{\binom{N_2}{y}\binom{(N-N_1)-N_2}{(n-x)-y}}{\binom{N-N1}{n-x}}=$$

$$\sum_{x=0}^{n}x\frac{\binom{N_1}{x}\binom{N-N1}{n-x}}{\binom{N}{n}}\left(\frac{(n-x)N_2}{N-N_1}\right)=\frac{N_2}{N-N_1}E(nx-x^2)=\frac{N_2}{N-N_1}\left(\frac{n^2N_1}{N}-\frac{(N-n)(nd)(N-N_1)}{(N-1)N^2}\right)$$

2.

3. X y Y tienen función de densidad conjunta:

$$f(x,y)=\frac{1}{x^2y^2}\mathbf{I}_{(1,\infty)}^{(x)}\mathbf{I}_{(1,\infty)}^{(y)}$$

   (a) Calcula la función de densidad conjunta de $U=XY$ y $V=\dfrac{X}{Y}$
   $UV=X^2\Rightarrow X=\sqrt{UV}$
   $\dfrac{U}{V}=Y^2\Rightarrow Y=\sqrt{\dfrac{U}{V}}$
   $\left|\dfrac{\partial(X,Y)}{\partial(U,V)}\right|=\left|\det\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{V}}{2\sqrt{U}} & \dfrac{1}{2\sqrt{UV}}\\ \dfrac{\sqrt{U}}{2\sqrt{V}} & -\dfrac{\sqrt{U}}{2\sqrt{V^3}}\end{pmatrix}\right|=\dfrac{1}{4\sqrt{V}}\left|\det\begin{pmatrix}\sqrt{V} & \dfrac{1}{\sqrt{V}}\\ 1 & -\dfrac{1}{V}\end{pmatrix}\right|=\dfrac{1}{2V}$
   Así
   $f(u,v)=\dfrac{1}{2v}\dfrac{1}{(uv)(\frac{u}{v})}\mathbf{I}_{(1,\infty)}^{(\sqrt{uv})}\mathbf{I}_{(1,\infty)}^{(\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})}=\dfrac{1}{2u^2v}\mathbf{I}_{(1,\infty)}^{(\sqrt{uv})}\mathbf{I}_{(1,\infty)}^{(\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})}$
   $1<uv<\infty$ y $1<\dfrac{u}{v}<\infty$
   $\dfrac{1}{v}<u<\infty$ y $v<u<\infty$
   Por lo tanto
   $f(u,v)=\dfrac{1}{2u^2v}(\mathbf{I}_{(v,\infty)}^{(u)}\mathbf{I}_{(1,\infty)}^{(v)}+\mathbf{I}_{(\frac{1}{v},\infty)}^{(u)}\mathbf{I}_{(0,1)}^{(v)})=\dfrac{1}{2u^2v}\mathbf{I}_{(\frac{1}{u},u)}^{(v)}\mathbf{I}_{(1,\infty)}^{(u)}$

(b) Calcula $f_U(u)$ y $f_V(v)$

$$f_U(u) = \int_{\frac{1}{u}}^{u} \frac{1}{2u^2v} dv \mathbf{I}_{(1,\infty)}^{(u)} = \frac{\ln u^2}{2u^2} \mathbf{I}_{(1,\infty)}^{(u)}$$

$$f_V(v) = \int_{v}^{\infty} \frac{1}{2u^2v} du \mathbf{I}_{(1,\infty)}^{(v)} + \int_{\frac{1}{v}}^{\infty} \frac{1}{2u^2v} du \mathbf{I}_{(0,1)}^{(v)} = \frac{1}{2v^2} \mathbf{I}_{(1,\infty)}^{(v)} + \frac{1}{2} \mathbf{I}_{(0,1)}^{(v)}$$

4. Sean X y Y independientes ambas con distribución uniforme en $(0,1)$. Sea $U = X + Y$ y $V = X - Y$. Tenemos que $f_{X,Y}(x,y) = 1\mathbf{I}_{(0,1)}^{(x)} \mathbf{I}_{(0,1)}^{(y)}$

   (a) Calcula $f_{U,V}(u,v)$
   $X = \dfrac{U+V}{2}$ y $Y = \dfrac{U-V}{2}$
   $\left| \dfrac{\partial(X,Y)}{\partial(U,V)} \right| = \left| \det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right| = \dfrac{1}{2}$
   Así
   $$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{2} \mathbf{I}_{(0,1)}^{(\frac{u+v}{2})} \mathbf{I}_{(0,1)}^{(\frac{u-v}{2})}$$
   $0 < u + v < 2$ y $0 < u - v < 2$
   Entonces
   $(0 < u < 2)$ y $(-u < v < 2 - u$ y $u - 2 < v < u)$ o bien
   $(-1 < v < 1)$ y $(-v < u < 2 - v$ y $v < u < 2 + v)$
   Por lo tanto
   $$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{2} (\mathbf{I}_{(-v,2+v)}^{(u)} \mathbf{I}_{(-1,0)}^{(v)} + \mathbf{I}_{(v,2-v)}^{(u)} \mathbf{I}_{(0,1)}^{(v)}) = \frac{1}{2} \mathbf{I}_{(-u,u)}^{(v)} \mathbf{I}_{(0,1)}^{(u)} + \mathbf{I}_{(u-2,2-u)}^{(v)} \mathbf{I}_{(1,2)}^{(u)})$$

   (b) Demuestra que $Cov(U,V) = 0$, pero no son independientes.
   $$E(U,V) = \frac{1}{2}(\int_{-1}^{0} \int_{-v}^{2+v} uvdudv + \int_{0}^{1} \int_{v}^{2-v} uvdudv) = \frac{1}{2}(\int_{-1}^{0} 4(v+v^2)dv + \int_{0}^{1} 4(v-v^2) = 0$$
   $$E(U) = \frac{1}{2}(\int_{-1}^{0} \int_{-v}^{2+v} ududv + \int_{0}^{1} \int_{v}^{2-v} ududv) = \frac{1}{2}(\int_{-1}^{0} 4(1+v)dv + \int_{0}^{1} 4(1-v)) = 2$$
   $$E(V) = \frac{1}{2}(\int_{-1}^{0} \int_{-v}^{2+v} vdudv + \int_{0}^{1} \int_{v}^{2-v} vdudv) = \int_{-1}^{0} v + v^2 dv + \int_{0}^{1} v - v^2 dv = 0$$
   Por lo tanto
   $$Cov(U,V) = E(U,V) - E(U)E(V) = 0$$
   Y claramente U y V no son independientes.

5. Sean Z_1 y Z_2 variables aleatorias independientes ambas con distribución normal estándar. Demuestra que (X,Y) tiene distribución normal bivariada si $X = Z_1$ y $Y = Z_1 + Z_2$

   $$f_{Z_1,Z_2}(z_1,z_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z_1^2+z_2^2}{2}} \mathbf{I}_{(-\infty,\infty)}^{(z_1)} \mathbf{I}_{(-\infty,\infty)}^{(z_2)}$$

   $Z_1 = X$ y $Z_2 = Y - X$
   $\left| \dfrac{\partial(Z_1,Z_2)}{\partial(X,Y)} \right| = \left| \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 1$
   Así $f_{X,Y} = \dfrac{1}{2\pi} e^{-\frac{2x^2+y^2-2xy}{2}} \mathbf{I}_{(-\infty,\infty)}^{(x)} \mathbf{I}_{(-\infty,\infty)}^{(y)} = \dfrac{1}{2\pi(1)(\sqrt{2})\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{2} - \frac{\sqrt{2}xy}{\sqrt{2}}} \mathbf{I}_{(-\infty,\infty)}^{(x)} \mathbf{I}_{(-\infty,\infty)}^{(y)}$
   $(X,Y) \sim N(0,1,0,2,\frac{1}{\sqrt{2}})$

6. Sea $X_1 \sim N(4,9)$, $X_2 \sim N(2,16)$ y $X_3 \sim N(6,4)$. Si $Y_1 = X_1 + X_2$, $Y_2 = X_1 + X_3$ y $Y_3 = X_2 + X_3$; $\overline{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ tiene distribución normal multivariada con n = 3. Calcula $\overline{\mu}$ y Σ de $\overline{Y}$
Tenemos $Y_1 \sim N(6,25)$, $Y_2 \sim N(10,13)$ y $Y_3 \sim N(8,20)$
Así $\overline{\mu} = (6,10,8)$
$Cov(Y_1,Y_2) = Cov(X_1+X_2, X_1+X_3) = Cov(X_1,X_1) = Var(X_1)$ como X_1, X_2, X_3 son independientes la covarianza entre ellas es cero. Así tenemos que $\Sigma = \begin{pmatrix} 25 & 9 & 16 \\ 9 & 13 & 4 \\ 16 & 4 & 20 \end{pmatrix}$

7. Supóngase que $F(x)$ es una función de distribución. Comprueba que, para $n \in Z^+$, también es función de distribución

   (a) $[F(x)]^n$
   Suponga que $Y = \max X_1, X_2, ..., X_n$ con X_i, X_j independientes si $i \neq j$
   Así $P_Y(Y < y) = P_1(X_1 < y)P_2(X_2 < y)...P_n(X_n < y)$
   Si cada $P_i = P_j$ tenemos que $P_Y(y) = P_1(y)^n$
   Por lo que $[F(x)]^n$ es función de distribución.

   (b) $1 - [1 - F(x)]^n$ Suponga que $Y = \min X_1, X_2, ..., X_n$ con X_i, X_j independientes si $i \neq j$
   Así $P_Y(Y < y) = 1 - P_Y(Y \geq y) = 1 - P_1(X_1 \geq y)P_2(X_2 \geq y)...P_n(X_n \geq y)$
   Si cada $P_i = P_j$ tenemos que $P_Y(Y \geq y) = 1 - P_1(X_1 \geq y)^n = 1 - (1 - P_1(X_1 < y))^n$
   Por lo que $1 - [1 - F(x)]^n$ es función de distribución.

8.

9. Sea $U \sim U(0, 2\pi)$ y $Z \sim exp(1)$ tal que U y Z son independientes. Sea $X = \sqrt{2Z}\cos U$ y $Y = \sqrt{2Z}\sin U$. Demuestra que X y Y son variables aleatorias independientes con distribución normal estándar.

$$f_{U,Z}(u,z) = \frac{1}{2\pi}e^{-z}\mathbf{I}_{(0,2\pi)}^{(u)}\mathbf{I}_{(0,\infty)}^{(z)}$$

$X = \sqrt{2Z}cosU$ y $Y = \sqrt{2Z}sinU$
$\dfrac{X^2+Y^2}{2} = Z$ y $\arctan(\dfrac{Y}{X}) = U$

$$\Big|\frac{\partial(U,Z)}{\partial(X,Y)}\Big| = \Big|\det(\begin{matrix} \dfrac{-X^2Y}{X^2(X^2+Y^2)} & X \\ \dfrac{X^2}{X(X^2+Y^2)} & Y \end{matrix})\Big| = 1$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\mathbf{I}_{(0,2\pi)}^{(\arctan\frac{y}{x})}\mathbf{I}_{(0,\infty)}^{(\frac{x^2+y^2}{2})} = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\mathbf{I}_{(-\infty,\infty)}^{(x)}\mathbf{I}_{(-\infty,\infty)}^{(y)}$$

Así

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathbf{I}_{(-\infty,\infty)}^{(x)} \Rightarrow X \sim N(0,1)$$
$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\mathbf{I}_{(-\infty,\infty)}^{(y)} \Rightarrow Y \sim N(0,1)$$

Ambas son normal standar.

14. Si X y Y son variables aleatorias independientes ambas con distribución normal estándar.

   (a) Calcula la función de densidad conjunta de $U = X$ y $V = \dfrac{X}{Y}$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\mathbf{I}_{(-\infty,\infty)}^{(x)}\mathbf{I}_{(-\infty,\infty)}^{(y)}$$

   $U = X$ y $\dfrac{U}{V} = Y$

$$\Big|\frac{\partial(X,Y)}{\partial(U,V)}\Big| = \Big|\det(\begin{matrix} 1 & \dfrac{1}{V} \\ 0 & -\dfrac{U}{V^2} \end{matrix})\Big| = \frac{U}{V^2}$$

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{u}{2\pi v^2}e^{-\frac{(uv)^2+u^2}{2v^2}}\mathbf{I}_{(-\infty,\infty)}^{(u)}\mathbf{I}_{(-\infty,\infty)}^{(v)}$$

(b) Demuestra que la densidad marginal de V tiene distribución Cauchy.

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u}{2\pi v^2} e^{-\frac{(uv)^2+u^2}{2v^2}} du$$

$x = \dfrac{(uv)^2 + u^2}{2v^2} \Rightarrow dx = u\dfrac{v^2+1}{v^2}$

Así

$$f_V(v) = \frac{1}{\pi(v^2+1)} \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{\pi(v^2+1)} I_{(-\infty,\infty)}^{(v)}$$

1 Anexo

Sabemos que:

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$$

Además

$$(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i)(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j) = \sum_{r=0}^{n+m} (\sum_{i=0}^{r} a_i b_{r-i}) x^r$$

Así

$$(1+x)^{n+m} = (1+x)^n (1+x)^m = (\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i)(\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} x^j) = \sum_{r=0}^{n+m} (\sum_{i=0}^{r} \binom{n}{i}\binom{m}{r-i}) x^r = \sum_{r=0}^{n+m} \binom{n+m}{r} x^r$$

Por lo tanto

$$\sum_{i=0}^{r} \binom{n}{i}\binom{m}{r-i} = \binom{n+m}{r}$$