Hernández Madera Oscar Barush

1. La función de densidad conjunta de X y Y está dada por $f_{X,Y}(x,y) = c(y^2 - x^2)e^{-y}; -y \leq x \leq y, 0 < y < \infty$

   (a) Calcula el valor de c
   Sabemos que: $\int\int f(x,y)dxdy = 1$, entonces:
   $\int_0^\infty \int_{-y}^{y} c(y^2 - x^2)e^{-y}dxdy = c\int_0^\infty (y^2x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-y}^{y} e^{-y}dy = c\int_0^\infty (y^3 - \frac{y^3}{3} - (-y^3 + \frac{y^3}{3}))e^{-y}dy =$
   $\frac{4}{3}c\int_0^\infty (y^3)e^{-y}dy = \frac{4}{3}c(-e^{-y}(y^3 + 3y^2 + 6y + 6))\Big|_0^\infty = c\frac{4}{3}(0 - (-6)) = 8c = 1$
   Así $c = \frac{1}{8}$

   (b) Calcular $f_X(x)$
   $f_X(x) = \int_0^\infty \frac{1}{8}(y^2 - x^2)e^{-y}dy = \frac{1}{8}e^{-y}(x^2 - y^2 - 2y - 2)\Big|_0^\infty = -\frac{1}{8}(x^2 - 2)$

   (c) Calcular $E[Y]$ $E[Y] = \int_0^\infty \int_{-y}^{y} \frac{1}{8}y(y^2 - x^2)e^{-y}dxdy = \frac{1}{8}\int_0^\infty y(y^2x - \frac{x^3}{3})e^{-y}\Big|_{-y}^{y} dy =$
   $\frac{1}{6}\int_0^\infty y^4e^{-y}dy = -\frac{1}{6}e^{-y}(y^4 + 4y^3 + 12y^2 + 24y + 24)\Big|_0^\infty = -4$

2. Si $a < b$ y $c < d$, entonces $F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0 & x < a \vee y < c \\ \frac{1}{2} & a \leq x < b, c \leq y < d \\ \frac{3}{4} & a \leq x < b, y \geq d \\ \frac{3}{4} & x \geq b, c \leq y < d \\ 1 & x \geq b, y \geq d \end{cases}$. Calcule $f(x,y)$
   Sabemos que $F_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}\{X \leq x, Y \leq y\}$. Así $f_{X,Y}(x,y)$ tiene f.d.c discreta
   $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x = a, y = c \\ \frac{1}{4} & x = a, y = d \\ \frac{1}{4} & x = b, y = c \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$

3. Sea (X,Y) vector aleatorio. Si $F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0 & x < 0 \vee y < 0 \\ \frac{3}{5}x^2y + \frac{2}{5}xy^3 & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1 \\ \frac{3}{5}x^2 + \frac{2}{5}x & a \leq x < 1, y \geq 1 \\ \frac{3}{5}y + \frac{2}{5}y^3 & x \geq 1, 0 \leq y < 1 \\ 1 & x \geq 1, y \geq 1 \end{cases}$. Calcule $P(X^2 < Y)$
   $f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\frac{3}{5}x^2y + \frac{2}{5}xy^3) = \frac{6}{5}x + \frac{6}{5}y^2 I_{(0,1)}^{(x)} I_{(0,1)}^{(y)}$
   Así $P(X^2 < Y) = \int_0^1 \int_0^{x^2} \frac{6}{5}x + \frac{6}{5}y^2 dydx = \int_0^1 \frac{6}{5}xy + \frac{2}{5}y^3\Big|_0^{x^2} dx = \int_0^1 \frac{6}{5}x^3 + \frac{2}{5}x^6 dx = \frac{3}{10}x^4 + \frac{2}{35}x^7\Big|_0^1 = \frac{5}{14}$

4. Sean X y Y variables aleatorias discretas con función de probabilidad conjunta.
   $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{24x} & x = 1,2,4 \quad y = 2,4,8 \quad x \leq y \\ 0 & e.o.c \end{cases}$
   Una póliza de seguros paga el monto total de X y la mitad de la pérdida Y. Encuentra la probabilidad de que el monto total pagado no sea mayor a 5.
   $P(X + \frac{Y}{2} \leq 5) = \frac{2}{24(1)} + \frac{4}{24(1)} + \frac{8}{24(1)} + \frac{2}{24(2)} + \frac{4}{24(2)} = \frac{17}{24}$

5. Un dispositivo electrónico tiene dos circuitos. El segundo circuito es un respaldo del primer circuito; por esa razón, el segundo circuito es usado únicamente si el primer circuito falla. El dispositivo electrónico falla solo cuando el segundo circuito falla. Sea X y Y los tiempos en los que el primer y segundo circuito fallan, respectivamente. X y Y tienen función de densidad conjunta: $f(x,y) = \begin{cases} 6e^{-x}e^{-2y} & 0 < x < y < \infty \\ 0 & e.o.c \end{cases}$
   ¿Cuál es el tiempo esperado en el que el dispositivo fallará?
   $E[Y] = \int_0^\infty \int_0^y y(6e^{-x}e^{-2y})dxdy = -6\int_0^\infty ye^{-2y}(e^{-x})\Big|_0^y dy = -6\int_0^\infty ye^{-2y}(e^{-y} - 1)dy =$
   $6\int_0^\infty ye^{-2y} - ye^{-3y}dy = 6(y(\frac{1}{3}e^{-3y} - \frac{1}{2}e^{-2y}) + \frac{1}{9}e^{-3y} - \frac{1}{4}e^{-2y})\Big|_0^\infty = 6(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}) = \frac{5}{6}$
   El tiempo esperado es $\frac{5}{6}$

6. Sea (X,Y) vector aleatorio con función de densidad conjunta $f(x,y)=(\frac{x}{5}+cy)I_{(0,1)}^{(x)}I_{(1,5)}^{(y)}$
Sabemos que $\int_0^1\int_1^5 f(x,y)dydx=1 \Rightarrow \int_0^1\int_1^5 \frac{x}{5}+cydydx=\int_0^1 \frac{x}{5}y+\frac{c}{2}y^2\Big|_1^5 dx=\int_0^1 x+\frac{c}{2}25-\frac{x}{5}-\frac{c}{2}dx=$ $\int_0^1 \frac{4}{5}x+12cdx=\frac{2}{5}x^2+12cx\Big|_0^1=\frac{2}{5}+12c=1\Rightarrow c=\frac{1}{20}$

(a) Calcula $P[X+Y>3]$

$$P[X+Y>3]=\int_0^1\int_{3-x}^5 \frac{x}{5}+\frac{y}{20}dydx=\int_0^1 \frac{x}{5}y+\frac{y^2}{40}\Big|_{3-x}^5 dx=\int_0^1 x+\frac{5}{8}-(\frac{x}{5}(3-x)+\frac{(3-x)^2}{40})dx=$$

$$\int_0^1 \frac{2x}{5}+\frac{5}{8}+\frac{x^2}{5}-\frac{(3-x)^2}{40}dx=(\frac{x^2}{5}+\frac{5x}{8}+\frac{x^3}{15}+\frac{(3-x)^3}{120})\Big|_0^1=\frac{11}{15}$$

(b) Calcula $P[Y<4|X>\frac{3}{4}]$

$$f_X(x)=\int_1^5 \frac{x}{5}+\frac{y}{20}dy=\frac{xy}{5}+\frac{y^2}{40}\Big|_1^5=\frac{1}{5}(4x+3)$$

$$P[X>\frac{3}{4}]=\int_{\frac{3}{4}}^1 f_X(x)dx=\int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{1}{5}(4x+3)dx=\frac{1}{5}(2x^2+3x)\Big|_{\frac{3}{4}}^1=\frac{13}{40}$$

$$P[Y<4|X>\frac{3}{4}]=\frac{P[Y<4;X>\frac{3}{4}]}{P[X>\frac{3}{4}]}=\frac{\int_1^4\int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{x}{5}+\frac{y}{20}dxdy}{\frac{13}{40}}=\frac{8}{13}\int_1^4 \frac{x^2}{2}+\frac{yx}{4}\Big|_{\frac{3}{4}}^1 dy=\frac{8}{13}\int_1^4 \frac{7}{32}+\frac{y}{16}dy=$$

$$\frac{1}{52}(7y+y^2)\Big|_1^4=\frac{9}{13}$$

7. Sean X y Y variables aleatorias continuas tal que su función de densidad conjunta está dada por:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{8}{3}xy & 0\le x\le 1 \quad x\le y\le 2x\\ 0 & e.o.c.\end{cases}$$

Calcula el coeficiente de correlación de X y Y.
$f_X(x)=\int_x^{2x}\frac{8}{3}xydy=\frac{4}{3}xy^2\Big|_x^{2x}=4x^3I_{(0,1)}^{(x)}$
$f_Y(y)=\int_{\frac{y}{2}}^{y}\frac{8}{3}xydxI_{(0,1)}^{(y)}+\int_{\frac{y}{2}}^{1}\frac{8}{3}xydxI_{[1,2)}^{(y)}=\frac{4}{3}(x^2y)\Big|_{\frac{y}{2}}^{y}I_{(0,1)}^{(y)}+\frac{4}{3}(x^2y)\Big|_{\frac{y}{2}}^{1}I_{[1,2)}^{(y)}=y^3I_{(0,1)}^{(y)}+\frac{4}{3}(y-\frac{y^3}{4})I_{[1,2)}^{(y)}$
$E[XY]=\frac{8}{3}\int_0^1\int_x^{2x}x^2y^2dydx=\frac{8}{9}\int_0^1 x^2y^3\Big|_x^{2x}dx=\frac{56}{9}\int_0^1 x^5=\frac{28}{27}$
$E[X]=\int_0^1 xf_X(x)dx=4\int_0^1 x^4dx=\frac{4}{5}$
$E[Y]=\int_0^2 yf_Y(y)dy=\int_0^1 y^4dy+\frac{4}{3}\int_1^2 y^2-\frac{y^4}{4}dy=\frac{1}{5}+\frac{47}{45}=\frac{56}{45}$
$E[X^2]=\int_0^1 xf_X(x)dx=4\int_0^1 x^5dx=\frac{4}{6}$
$E[Y^2]=\int_0^2 yf_Y(y)dy=\int_0^1 y^5dy+\frac{4}{3}\int_1^2 y^3-\frac{y^5}{4}dy=\frac{1}{6}+\frac{3}{2}=\frac{5}{3}$

$$\rho=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}=\frac{E[XY]-E[X]E[Y]}{\sqrt{E[X^2]-E[X]^2}\sqrt{E[Y^2]-E[Y]^2}}=\frac{\frac{28}{27}-(\frac{4}{5})(\frac{56}{45})}{\sqrt{\frac{4}{6}-\frac{4}{5}^2}\sqrt{\frac{5}{3}-\frac{56}{45}^2}}=0{,}7394$$

8. La función generadora de momentos conjunta de X y Y está dad por $M_{X,Y}(t_1,t_2)=\dfrac{1}{3(1-t_2)}+\frac{2}{3}e^{t_1}\frac{2}{2-t_2}$, para $t_2<1$

(a) Calcula $\rho(X,Y)$
$$E[XY]=\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}M_{X,Y}(t_1,t_2)\Big|_{(0,0)}=-\frac{2}{3}e^{t_1}\frac{2}{(2-t_2)^2}\Big|_{(0,0)}=-\frac{2}{6}$$

$$E[X] = \frac{\partial}{\partial t_1} M_{X,Y}(t_1,t_2)\Big|_{(0,0)} = \tfrac{2}{3}e^{t_1}\tfrac{2}{2-t_2}\Big|_{(0,0)} = \tfrac{2}{3}$$
$$E[Y] = \frac{\partial}{\partial t_2} M_{X,Y}(t_1,t_2)\Big|_{(0,0)} = -\frac{1}{3(1-t_2)^2} - \tfrac{2}{3}e^{t_1}\tfrac{2}{(2-t_2)^2}\Big|_{(0,0)} = -\tfrac{2}{3}$$
$$E[X^2] = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} M_{X,Y}(t_1,t_2)\Big|_{(0,0)} = \tfrac{2}{3}e^{t_1}\tfrac{2}{2-t_2}\Big|_{(0,0)} = \tfrac{2}{3}$$
$$E[Y^2] = \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} M_{X,Y}(t_1,t_2)\Big|_{(0,0)} = \frac{2}{3(1-t_2)^3} + \tfrac{2}{3}e^{t_1}\tfrac{4}{(2-t_2)^3}\Big|_{(0,0)} = 1$$

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} = \frac{E[XY]-E[X]E[Y]}{\sqrt{E[X^2]-E[X]^2}\sqrt{E[Y^2]-E[Y]^2}} = \frac{-\frac{2}{6}-(\frac{2}{3})(-\frac{2}{3})}{\sqrt{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}^2}\sqrt{1-(-\frac{2}{3})^2}} = \frac{\sqrt{10}}{10} = 0{,}3162$$

9. Sean X y Y variables aleatorias con valores en el intervalo $[a,b]$.

   (a) Demuestra que $|Cov(X,Y)| \le \frac{1}{4}(b-a)^2$

   Observemos que si $\sigma_x\sigma_y$ son las desviaciones estantard de X y Y, respectivamente:

   $0 \le Var(\frac{x}{\sigma_x}+\frac{y}{\sigma_y}) = E[(\frac{x}{\sigma_x}+\frac{y}{\sigma_y})^2] - E[\frac{x}{\sigma_x}+\frac{y}{\sigma_y}]^2 = E[\frac{x^2}{\sigma_x^2}+2\frac{xy}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{y^2}{\sigma_y}] - (E[\frac{x}{\sigma_x}]+E[\frac{y}{\sigma_y}])^2 =$

   $\frac{1}{\sigma_x^2}E[x^2] + \frac{2}{\sigma_x\sigma_y}E[xy] + \frac{1}{\sigma_y}E[y^2] - \frac{1}{\sigma_x^2}E[x]^2 - \frac{2}{\sigma_x\sigma_y}E[x]E[y] - \frac{1}{\sigma_y^2}E[y]^2 =$

   $\frac{Var[x]}{\sigma_x^2} + \frac{Var[y]}{\sigma_y^2} + 2\frac{Cov(x,y)}{\sigma_x\sigma_y} = 2(1+\rho_{x,y}) \Rightarrow 0 \le 1+\rho_{x,y} \Rightarrow -1 \le \rho_{x,y}$

   Además $0 \le Var(\frac{x}{\sigma_x}+\frac{y}{\sigma_y}) = \frac{Var[x]}{\sigma_x^2} + \frac{Var[y]}{\sigma_y^2} - 2\frac{Cov(xy)}{\sigma_x\sigma_y} = 2(1-\rho_{x,y})$

   $\Rightarrow 0 \le 1-\rho_{x,y} \Rightarrow \rho_{x,y} \le 1$

   Así $-1 \le \rho_{x,y} \le 1 \Rightarrow |\rho_{x,y}| \le 1 \Rightarrow \frac{|Cov(x,y)|}{\sqrt{Var(x)}\sqrt{Var(y)}} \le 1 \Rightarrow |Cov(x,y)| \le \sqrt{Var(x)}\sqrt{Var(y)}$

   Por otro lado:

   $x^2f(x) \le (b-a)bxf(x) \Rightarrow \int_a^b x^2f(x) \le (b-a)\int_a^b xf(x) \Rightarrow E[X^2] \le (b-a)E[x]$

   $\Rightarrow Var[X] = E[X^2]-E[X]^2 \le (b-a)E[X]-E[X]^2 = (b-a)^2(\frac{E[X]}{b-a})(1-\frac{E[X]}{b-a})$

   Observemos que $f(x) = x(1-x)$ tiene su máximo en $\frac{1}{2}$ y es $\frac{1}{4}$.

   Así $Var[X] \le (b-a)^2(x)(1-x) \le \frac{(b-a)^2}{4}$ con $x = \frac{E[X]}{b-a}$

   Por último $|Cov(XY)| \le \sqrt{Var(x)}\sqrt{Var(y)} = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{4}}\sqrt{\frac{(b-a)^2}{4}} = \frac{(b-a)^2}{4}$

10. La variable aleatoria $Y|X$ tiene distribución uniforma en el intervalo $[0,X]$. La función de densidad marginal de X está dada por $f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0<x<1 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$.

    Demuestre que la densidad condicional de $X|Y=y$ está dada por $f_{X|Y=y}(x|y) = \frac{1}{1-y}I_{(y,1)}^{(x)}$

    $f(y|x) = \frac{1}{x-0}I_{(0,x)}^{(y)} = \frac{1}{x}I_{(0,x)}^{(y)}$, pues es uniforme en $[0,X]$

    $f(x) = 2xI_{(0,1)}^{(x)}$

    Así $f(x,y) = f(x)(y|x) = 2xI_{(0,1)}^{(x)}\frac{1}{x}I_{(0,x)}^{(y)} = 2I_{(0,1)}^{(x)}I_{(0,x)}^{(y)} = 2I_{(0,1)}^{(y)}I_{(y,1)}^{(x)}$

    $f(y) = \int_y^1 2I_{(0,1)}^{(y)}dx = 2x\Big|_y^1 I_{(0,1)}^{(y)} = 2(2-y)I_{(0,1)}^{(y)}$

    $f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{2I_{(0,1)}^{(y)}I_{(y,1)}^{(x)}}{2(2-y)I_{(0,1)}^{(y)}} = \frac{1}{1-y}I_{(y,1)}^{(x)}$

11. Dos dados balanceados son lanzados. X toma el valor más grande y Y

    (a) Calcula $f_{X,Y}(x,y)$

    Observemos que $X=3$ y $Y=4$ tienen 2 representantes las pareja $(3,1),(1,3)$ mientras que $X=3$ y $Y=6$ sólo tiene una pareja $(3,3)$. Con estas observaciones podemos ver que:

    $f(x,y) = \frac{2}{36}I_{\{\lfloor\frac{y}{2}\rfloor+1,y-1\}\cap\{1,2,3,4,5,6\}}^{(x)}I_{\{2,3,\ldots,12\}}^{(y)} + \frac{1}{36}I_{(\frac{y}{2})}^{(x)}I_{\{2,4,\ldots,12\}}^{(y)} =$

    $\frac{2}{36}I_{\{2,3,4,5,6\}}^{(x)}I_{\{x+1,\ldots,2x-1\}}^{(y)} + \frac{1}{36}I_{\{1,2,3,4,5,6\}}^{(x)}I_{\{2x\}}^{(y)}$

(b) Calcula $f_{Y|X}(y|x)$ para $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$f(x) = \sum_{y} f(x, y) = \sum_{y=x+1}^{2x-1} (\frac{2}{36} I^{(x)}_{\{2,3,4,5,6\}}) + \frac{1}{36} I^{(x)}_{\{1,2,3,4,5,6\}} = \frac{2x-1}{36} I^{(x)}_{\{1,2,3,4,5,6\}}$

$f_{Y|X}(y|x) = \dfrac{f_{X,Y}(x, y)}{f(x)} = \frac{2}{2x-1} I^{(y)}_{\{x+1,\ldots,2x-1\}} + \frac{1}{2x-1} I^{(y)}_{\{2x\}}$

(c) Calcula $E[X|Y = 7] = \dfrac{\sum_{x=4}^{6} x \frac{2}{36}}{\sum_{x=4}^{6} \frac{2}{36}} = \dfrac{\frac{2}{36}(4+5+6)}{\frac{6}{36}} = \frac{2(4+5+6)}{6} = \frac{30}{6} = 5$

12. La covarianza condicional de X y Y dado Z está definida como
$Cov(X, Y|Z) = E[(X - E[X|Z])(Y - E[Y|Z])|Z]$.
Demuestre que:

(a) $Cov(X, Y|Z) = E[X, Y|Z] - E[X|Z]E[Y|Z]$
$Cov(X, Y|Z) = E[(X - E[X|Z])(Y - E[Y|Z])|Z] = E(XY - XE[Y|Z] - YE[X|Z] + E[X|Z]E[Y|Z]|Z)$
Recordemos que la Esperanza es lineal y una vez evaluada es una constante.
$= E(XY|Z) - E(X|Z)E[Y|Z] - E(Y|Z)E[X|Z] + E[X|Z]E[Y|Z] =$
$\Rightarrow Cov(X, Y|Z) = E[X, Y|Z] - E[X|Z]E[Y|Z]$

(b) $Cov(X, Y) = E[Cov(X, Y|Z)] + Cov(E[X|Z], E[Y|Z])$
$E[Cov(X, Y|Z)] + Cov(E[X|Z], E[Y|Z]) =$
$E[E[X, Y|Z] - E[X|Z]E[Y|Z]] + E[E[X|Z]E[Y|Z]] - E[E[X|Z]]E[E[Y|Z]] =$
$E[E[X, Y|Z]] - E[E[X|Z]E[Y|Z]] + E[E[X|Z]E[Y|Z]] - E[E[X|Z]]E[E[Y|Z]] =$
$E[E[X, Y|Z]] - E[E[X|Z]]E[E[Y|Z]] =$
Recordemos que $E[E[X|Y]] = E[X]$
$= E[X, Y] - E[X]E[Y] = Cov(X, Y)$

13. El precio de las acciones de dos empresas al final de cada año, se pueden modelar con las variables aleatorias X y Y que siguen la siguiente función de densidad: $f(x, y) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \quad x < y < x + 1 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$

Demuestra que la varianza condicional de Y dado $X = x$ es $\frac{1}{12}$

$f_X(x) = \int_x^{x+1} 2x dy = 2xy\Big|_x^{x+1} I^{(x)}_{(0,1)} = 2xI^{(x)}_{(0,1)}$

$f_{Y|X=x}(y|x) = \dfrac{2xI^{(x)}_{(0,1)} I^{(y)}_{(x,x+1)}}{2xI^{(x)}_{(0,1)}} = I^{(y)}_{(x,x+1)}$

$E[Y^2] = \int_x^{x+1} y^2 dy = \dfrac{y^3}{3}\Big|_x^{x+1} = \dfrac{3x^2 + 3x + 1}{3}$

$E[Y]^2 = (\int_x^{x+1} y dy)^2 = (\dfrac{y^2}{2}\Big|_x^{x+1})^2 = \dfrac{4x^2 + 4x + 1}{4}$

$Var(Y) = E[Y^2] - E[Y]^2 = \dfrac{3x^2 + 3x + 1}{3} - \dfrac{4x^2 + 4x + 1}{4} = \dfrac{1}{12}$

14. Sea X variable aleatoria con distribución $Poisson(\lambda)$ que cuenta el número de accidentes que ocurren en un determinado día. Dado que ocurrieron x accidentes, la variable aleatoria Y mide el tiempo de espera en el cual se registran los x accidentes con distribución $Gamma(x, \lambda)$. demuestra que:

(a) $E(Y) = 1$
(b) $Var(Y) = \frac{2}{\lambda}$

Recordemos que la distribución $Poisson(\lambda)$ es $f(x) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^x}{x!} I^{(x)}_{\mathbb{N}}$ y $Gamma(\alpha, \lambda)$ es $f(x) = \dfrac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} I^{(x)}_{(0,\infty)}$.
Además, si $X \sim Poisson(\lambda)$, entonces $E[X] = \lambda$ y $E[X^2] = \lambda(\lambda + 1)$.
Si $X \sim Gamma(\alpha, \lambda)$, entonces $E[X] = \dfrac{\alpha}{\lambda}$ y $Var[Y] = \frac{\alpha}{\lambda^2}$.

(a)Sabemos que $f_X(x) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^x}{x!} I^{(x)}_{\mathbb{N}}$ y $f_{Y|X}(y|x) = \dfrac{\lambda e^{-\lambda y} (\lambda y)^{x-1}}{\Gamma(x)} I^{(y)}_{(0,\infty)}$
Así $E(Y) = E[E(Y|X)] = E[\dfrac{x}{\lambda}] = \frac{1}{\lambda} E[X] = \frac{1}{\lambda}\lambda = 1$.

(b) $Var(Y) = E[Var(Y|X)] + Var(E[Y|X]) = E[\frac{x}{\lambda^2}] + Var(\frac{x}{\lambda}) = E[\frac{X}{\lambda^2}] + E[\frac{X^2}{\lambda^2}] - E[\frac{X}{\lambda}]^2 =$
$\frac{1}{\lambda^2} E[X] + \frac{1}{\lambda^2} E[X^2] - \frac{1}{\lambda^2} E[X]^2 = \frac{1}{\lambda^2}\lambda + \frac{1}{\lambda^2}(\lambda)(\lambda + 1) - \frac{1}{\lambda^2}\lambda^2 = \dfrac{\lambda + \lambda^2 + \lambda - \lambda^2}{\lambda^2} = \frac{2\lambda}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda}$