Tarea 2 Probabilidad 2

Oscar Barush Hernández Madera

Marzo 2018

1. (X, Y) es un vector aleatorio con distribución hipergeométrica bivariada. Si su función de probabilidad está dada por: $f(x, y) = \frac{\binom{N_1}{x}\binom{N_2}{y}\binom{N-N_1-N_2}{n-x-y}}{\binom{N}{n}}$; donde $\begin{array}{lll} x = 0, 1, 2, ..., n; & y = 0, 1, 2, ..., n; & x + y \leq n \\ N1 > 0; & N2 > 0; & N1 + N2 \leq N \\ 0 < n < N & & \end{array}$

   (a) Calcula $f_X(x)$ y $f_Y(y)$

   $f_X(x) = \sum_{y=0}^{n-x} \frac{\binom{N_1}{x}\binom{N_2}{y}\binom{N-N_1-N_2}{n-x-y}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{N_1}{x}}{\binom{N}{n}} \sum_{y=0}^{n-x} \binom{N_2}{y}\binom{N-N_1-N_2}{n-x-y} = \frac{\binom{N_1}{x}\binom{N-N_1}{n-x}}{\binom{N}{n}}$(Ver anexo)

   De forma análoga

   $f_Y(y) = \frac{\binom{N_2}{y}\binom{N-N_2}{n-y}}{\binom{N}{n}}$

   (b) Calcula $Cov(X, Y)$ y $\rho(X, Y)$

$$E(XY) = \sum_{x=0}^{n}\sum_{y=0}^{n-x} xy \frac{\binom{N_1}{x}\binom{N_2}{y}\binom{N-N_1-N_2}{n-x-y}}{\binom{N}{n}} = \sum_{x=0}^{n} x \frac{\binom{N_1}{x}\binom{N-N1}{n-x}}{\binom{N}{n}} \sum_{y=0}^{n} y \frac{\binom{N_2}{y}\binom{(N-N_1)-N_2}{(n-x)-y}}{\binom{N-N1}{n-x}} =$$

$$\sum_{x=0}^{n} x \frac{\binom{N_1}{x}\binom{N-N1}{n-x}}{\binom{N}{n}} (\frac{(n-x)N_2}{N-N_1}) = \frac{N_2}{N-N_1} E(nx - x^2) = \frac{N_2}{N-N_1} (\frac{n^2 N_1}{N} - \frac{(N-n)(nd)(N-N_1)}{(N-1)N^2})$$

2.

3. X y Y tienen función de densidad conjunta:

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 y^2} \mathbf{I}_{(1,\infty)}^{(x)} \mathbf{I}_{(1,\infty)}^{(y)}$$

   (a) Calcula la función de densidad conjunta de $U = XY$ y $V = \frac{X}{Y}$

   $UV = X^2 \Rightarrow X = \sqrt{UV}$

   $\frac{U}{V} = Y^2 \Rightarrow Y = \sqrt{\frac{U}{V}}$

   $\left|\frac{\partial(X,Y)}{\partial(U,V)}\right| = \left|\det(\begin{array}{cc} \frac{\sqrt{V}}{2\sqrt{U}} & \frac{1}{2\sqrt{UV}} \\ \frac{\sqrt{U}}{2\sqrt{V}} & -\frac{\sqrt{U}}{2\sqrt{V^3}} \end{array})\right| = \frac{1}{4\sqrt{V}}\left|\det(\begin{array}{cc} \sqrt{V} & \frac{1}{\sqrt{V}} \\ 1 & -\frac{1}{V} \end{array})\right| = \frac{1}{2V}$

   Así

   $f(u, v) = \frac{1}{2v}\frac{1}{(uv)(\frac{u}{v})} \mathbf{I}_{(1,\infty)}^{(\sqrt{uv})} \mathbf{I}_{(1,\infty)}^{(\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})} = \frac{1}{2u^2 v} \mathbf{I}_{(1,\infty)}^{(\sqrt{uv})} \mathbf{I}_{(1,\infty)}^{(\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})}$

   $1 < uv < \infty$ y $1 < \frac{u}{v} < \infty$

   $\frac{1}{v} < u < \infty$ y $v < u < \infty$

   Por lo tanto

   $f(u, v) = \frac{1}{2u^2 v} (\mathbf{I}_{(v,\infty)}^{(u)} \mathbf{I}_{(1,\infty)}^{(v)} + \mathbf{I}_{(\frac{1}{v},\infty)}^{(u)} \mathbf{I}_{(0,1)}^{(v)}) = \frac{1}{2u^2 v} \mathbf{I}_{(\frac{1}{u},u)}^{(v)} \mathbf{I}_{(1,\infty)}^{(u)}$

(b) Calcula $f_U(u)$ y $f_V(v)$

$$f_U(u) = \int_{\frac{1}{u}}^{u} \frac{1}{2u^2v} dv \mathbf{I}_{(1,\infty)}^{(u)} = \frac{\ln u^2}{2u^2} \mathbf{I}_{(1,\infty)}^{(u)}$$

$$f_V(v) = \int_{v}^{\infty} \frac{1}{2u^2v} du \mathbf{I}_{(1,\infty)}^{(v)} + \int_{\frac{1}{v}}^{\infty} \frac{1}{2u^2v} du \mathbf{I}_{(0,1)}^{(v)} = \frac{1}{2v^2} \mathbf{I}_{(1,\infty)}^{(v)} + \frac{1}{2} \mathbf{I}_{(0,1)}^{(v)}$$

4. Sean X y Y independientes ambas con distribución uniforme en $(0,1)$. Sea $U = X+Y$ y $V = X-Y$. Tenemos que $f_{X,Y}(x,y) = 1\mathbf{I}_{(0,1)}^{(x)}\mathbf{I}_{(0,1)}^{(y)}$

   (a) Calcula $f_{U,V}(u,v)$
   $X = \dfrac{U+V}{2}$ y $Y = \dfrac{U-V}{2}$
   $\left|\dfrac{\partial(X,Y)}{\partial(U,V)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| = \dfrac{1}{2}$
   Así

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{2}\mathbf{I}_{(0,1)}^{(\frac{u+v}{2})}\mathbf{I}_{(0,1)}^{(\frac{u-v}{2})}$$

   $0 < u+v < 2$ y $0 < u-v < 2$
   Entonces
   $(0 < u < 2)$ y $(-u < v < 2-u$ y $u-2 < v < u)$ o bien
   $(-1 < v < 1)$ y $(-v < u < 2-v$ y $v < u < 2+v)$
   Por lo tanto

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{2}(\mathbf{I}_{(-v,2+v)}^{(u)}\mathbf{I}_{(-1,0)}^{(v)} + \mathbf{I}_{(v,2-v)}^{(u)}\mathbf{I}_{(0,1)}^{(v)}) = \frac{1}{2}\mathbf{I}_{(-u,u)}^{(v)}\mathbf{I}_{(0,1)}^{(u)} + \mathbf{I}_{(u-2,2-u)}^{(v)}\mathbf{I}_{(1,2)}^{(u)})$$

   (b) Demuestra que $Cov(U,V) = 0$, pero no son independientes.

$$E(U,V) = \frac{1}{2}(\int_{-1}^{0}\int_{-v}^{2+v} uvdudv + \int_{0}^{1}\int_{v}^{2-v} uvdudv) = \frac{1}{2}(\int_{-1}^{0} 4(v+v^2)dv + \int_{0}^{1} 4(v-v^2) = 0$$

$$E(U) = \frac{1}{2}(\int_{-1}^{0}\int_{-v}^{2+v} ududv + \int_{0}^{1}\int_{v}^{2-v} ududv) = \frac{1}{2}(\int_{-1}^{0} 4(1+v)dv + \int_{0}^{1} 4(1-v)) = 2$$

$$E(V) = \frac{1}{2}(\int_{-1}^{0}\int_{-v}^{2+v} vdudv + \int_{0}^{1}\int_{v}^{2-v} vdudv) = \int_{-1}^{0} v+v^2dv + \int_{0}^{1} v-v^2dv = 0$$

   Por lo tanto

$$Cov(U,V) = E(U,V) - E(U)E(V) = 0$$

   Y claramente U y V no son independientes.

5. Sean Z_1 y Z_2 variables aleatorias independientes ambas con distribución normal estándar. Demuestra que (X,Y) tiene distribución normal bivariada si $X = Z_1$ y $Y = Z_1 + Z_2$

$$f_{Z_1,Z_2}(z_1,z_2) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z_1^2+z_2^2}{2}}\mathbf{I}_{(-\infty,\infty)}^{(z_1)}\mathbf{I}_{(-\infty,\infty)}^{(z_2)}$$

   $Z_1 = X$ y $Z_2 = Y - X$
   $\left|\dfrac{\partial(Z_1,Z_2)}{\partial(X,Y)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 1$
   Así $f_{X,Y} = \dfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{2x^2+y^2-2xy}{2}}\mathbf{I}_{(-\infty,\infty)}^{(x)}\mathbf{I}_{(-\infty,\infty)}^{(y)} = \dfrac{1}{2\pi(1)(\sqrt{2})\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{2}-\frac{\sqrt{2}xy}{\sqrt{2}}}\mathbf{I}_{(-\infty,\infty)}^{(x)}\mathbf{I}_{(-\infty,\infty)}^{(y)}$
   $(X,Y) \sim N(0,1,0,2,\frac{1}{\sqrt{2}})$

6. Sea $X_1 \sim N(4,9)$, $X_2 \sim N(2,16)$ y $X_3 \sim N(6,4)$. Si $Y_1 = X_1 + X_2$, $Y_2 = X_1 + X_3$ y $Y_3 = X_2 + X_3$; $\overline{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ tiene distribución normal multivariada con n = 3. Calcula $\overline{\mu}$ y Σ de $\overline{Y}$
Tenemos $Y_1 \sim N(6,25)$, $Y_2 \sim N(10,13)$ y $Y_3 \sim N(8,20)$
Así $\overline{\mu} = (6,10,8)$
$Cov(Y_1,Y_2) = Cov(X_1+X_2, X_1+X_3) = Cov(X_1,X_1) = Var(X_1)$ como X_1, X_2, X_3 son independientes la covarianza entre ellas es cero. Así tenemos que $\Sigma = \begin{pmatrix} 25 & 9 & 16 \\ 9 & 13 & 4 \\ 16 & 4 & 20 \end{pmatrix}$

7.

8.

9. Sea $U \sim U(0,2\pi)$ y $Z \sim exp(1)$ tal que U y Z son independientes. Sea $X = \sqrt{2Z}\cos U$ y $Y = \sqrt{2Z}\sin U$. Demuestra que X y Y son variables aleatorias independientes con distribución normal estándar.

$$f_{U,Z}(u,z) = \frac{1}{2\pi}e^{-z}\mathbf{I}_{(0,2\pi)}^{(u)}\mathbf{I}_{(0,\infty)}^{(z)}$$

$X = \sqrt{2Z}cosU$ y $Y = \sqrt{2Z}sinU$
$\dfrac{X^2+Y^2}{2} = Z$ y $\arctan(\dfrac{Y}{X}) = U$
$\Big|\dfrac{\partial(U,Z)}{\partial(X,Y)}\Big| = \Big|\det(\begin{matrix} \dfrac{-X^2Y}{X^2(X^2+Y^2)} & X \\ \dfrac{X^2}{X(X^2+Y^2)} & Y \end{matrix})\Big| = 1$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\mathbf{I}_{(0,2\pi)}^{(\arctan\frac{y}{x})}\mathbf{I}_{(0,\infty)}^{(\frac{x^2+y^2}{2})} = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\mathbf{I}_{(-\infty,\infty)}^{(x)}\mathbf{I}_{(-\infty,\infty)}^{(y)}$$

Así

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathbf{I}_{(-\infty,\infty)}^{(x)} \Rightarrow X \sim N(0,1)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\mathbf{I}_{(-\infty,\infty)}^{(y)} \Rightarrow Y \sim N(0,1)$$

Ambas son normal standar.

14. Si X y Y son variables aleatorias independientes ambas con distribución normal estándar.

(a) Calcula la función de densidad conjunta de $U = X$ y $V = \dfrac{X}{Y}$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\mathbf{I}_{(-\infty,\infty)}^{(x)}\mathbf{I}_{(-\infty,\infty)}^{(y)}$$

$U = X$ y $\dfrac{U}{V} = Y$
$\Big|\dfrac{\partial(X,Y)}{\partial(U,V)}\Big| = \Big|\det(\begin{matrix} 1 & \dfrac{1}{V} \\ 0 & -\dfrac{U}{V^2} \end{matrix})\Big| = \dfrac{U}{V^2}$

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{u}{2\pi v^2}e^{-\frac{(uv)^2+u^2}{2v^2}}\mathbf{I}_{(-\infty,\infty)}^{(u)}\mathbf{I}_{(-\infty,\infty)}^{(v)}$$

(b) Demuestra que la densidad marginal de V tiene distribución Cauchy.

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u}{2\pi v^2}e^{-\frac{(uv)^2+u^2}{2v^2}}du$$

$x = \dfrac{(uv)^2+u^2}{2v^2} \Rightarrow dx = u\dfrac{v^2+1}{v^2}$
Así

$$f_V(v) = \frac{1}{\pi(v^2+1)}\int_0^{\infty} e^{-x}dx = \frac{1}{\pi(v^2+1)}I_{(-\infty,\infty)}^{(v)}$$

1 Anexo

Sabemos que:

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$$

Además

$$(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i)(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j) = \sum_{r=0}^{n+m} (\sum_{i=0}^{r} a_i b_{r-i}) x^r$$

Así

$$(1+x)^{n+m} = (1+x)^n (1+x)^m = (\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i)(\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} x^j) = \sum_{r=0}^{n+m} (\sum_{i=0}^{r} \binom{n}{i} \binom{m}{r-i}) x^r = \sum_{r=0}^{n+m} \binom{n+m}{r} x^r$$

Por lo tanto

$$\sum_{i=0}^{r} \binom{n}{i} \binom{m}{r-i} = \binom{n+m}{r}$$