

## Tarea 2 Probabilidad 2

Oscar Barush Hernández Madera

Marzo 2018

1.  $(X, Y)$  es un vector aleatorio con distribución hipergeométrica bivariada. Si su función de probabilidad está

dada por:  $f(x, y) = \frac{\binom{N_1}{x} \binom{N_2}{y} \binom{N-N_1-N_2}{n-x-y}}{\binom{N}{n}}$ ; donde  $x = 0, 1, 2, \dots, n; \quad y = 0, 1, 2, \dots, n; \quad x + y \leq n$   
 $N_1 > 0; \quad N_2 > 0; \quad N_1 + N_2 \leq N$   
 $0 < n < N$

- (a) Calcula  $f_X(x)$  y  $f_Y(y)$

$$f_X(x) = \sum_{y=0}^{n-x} \frac{\binom{N_1}{x} \binom{N_2}{y} \binom{N-N_1-N_2}{n-x-y}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{N_1}{x}}{\binom{N}{n}} \sum_{y=0}^{n-x} \binom{N_2}{y} \binom{N-N_1-N_2}{n-x-y} = \frac{\binom{N_1}{x} \binom{N-N_1}{n-x}}{\binom{N}{n}} \text{ (Ver anexo)}$$

De forma análoga

$$f_Y(y) = \frac{\binom{N_2}{y} \binom{N-N_2}{n-y}}{\binom{N}{n}}$$

- (b) Calcula  $Cov(X, Y)$  y  $\rho(X, Y)$

2.

3.  $X$  y  $Y$  tienen función de densidad conjunta:

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 y^2} \mathbf{I}_{(1, \infty)}^{(x)} \mathbf{I}_{(1, \infty)}^{(y)}$$

- (a) Calcula la función de densidad conjunta de  $U = XY$  y  $V = \frac{X}{Y}$

$$UV = X^2 \Rightarrow X = \sqrt{UV}$$

$$\frac{U}{V} = Y^2 \Rightarrow Y = \sqrt{\frac{U}{V}}$$

$$\left| \frac{\partial(X, Y)}{\partial(U, V)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{UV}}{2\sqrt{U}} & \frac{1}{2\sqrt{UV}} \\ \frac{\sqrt{U}}{2\sqrt{V}} & -\frac{1}{2\sqrt{V^3}} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{4\sqrt{V}} \left| \det \begin{pmatrix} \sqrt{V} & \frac{1}{\sqrt{V}} \\ 1 & -\frac{1}{V} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2V}$$

Así

$$f(u, v) = \frac{1}{2v} \frac{1}{(uv)^{\frac{u}{v}}} \mathbf{I}_{(1, \infty)}^{(\sqrt{uv})} \mathbf{I}_{(1, \infty)}^{(\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})} = \frac{1}{2u^2 v} \mathbf{I}_{(1, \infty)}^{(\sqrt{uv})} \mathbf{I}_{(1, \infty)}^{(\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})}$$

$$1 < uv < \infty \text{ y } 1 < \frac{u}{v} < \infty$$

$$\frac{1}{v} < u < \infty \text{ y } v < u < \infty$$

Por lo tanto

$$f(u, v) = \frac{1}{2u^2 v} (\mathbf{I}_{(v, \infty)}^{(u)} \mathbf{I}_{(1, \infty)}^{(v)} + \mathbf{I}_{(\frac{1}{v}, \infty)}^{(u)} \mathbf{I}_{(0, 1)}^{(v)}) = \frac{1}{2u^2 v} \mathbf{I}_{(\frac{1}{u}, u)}^{(v)} \mathbf{I}_{(1, \infty)}^{(u)}$$

- (b) Calcula  $f_U(u)$  y  $f_V(v)$

$$f_U(u) = \int_{\frac{1}{u}}^u \frac{1}{2u^2 v} dv \mathbf{I}_{(1, \infty)}^{(u)} = \frac{\ln u^2}{2u^2} \mathbf{I}_{(1, \infty)}^{(u)}$$

$$f_V(v) = \int_v^\infty \frac{1}{2u^2 v} du \mathbf{I}_{(1, \infty)}^{(v)} + \int_{\frac{1}{v}}^\infty \frac{1}{2u^2 v} du \mathbf{I}_{(0, 1)}^{(v)} = \frac{1}{2v^2} \mathbf{I}_{(1, \infty)}^{(v)} + \frac{1}{2} \mathbf{I}_{(0, 1)}^{(v)}$$

4. Sean  $X$  y  $Y$  independientes ambas con distribución uniforme en  $(0, 1)$ . Sea  $U = X + Y$  y  $V = X - Y$ . Tenemos que  $f_{X,Y}(x, y) = 1\mathbf{I}_{(0,1)}^{(x)}\mathbf{I}_{(0,1)}^{(y)}$

(a) Calcula  $f_{U,V}(u, v)$

$$X = \frac{U+V}{2} \text{ y } Y = \frac{U-V}{2}$$

$$\left| \frac{\partial(X, Y)}{\partial(U, V)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2}$$

Así

$$f_{U,V}(u, v) = \frac{1}{2}\mathbf{I}_{(0,1)}^{(\frac{u+v}{2})}\mathbf{I}_{(0,1)}^{(\frac{u-v}{2})}$$

$$0 < u + v < 2 \text{ y } 0 < u - v < 2$$

Entonces

$(0 < u < 2)$  y  $(-u < v < 2 - u \text{ y } u - 2 < v < u)$  o bien  
 $(-1 < v < 1)$  y  $(-v < u < 2 - v \text{ y } v < u < 2 + v)$

Por lo tanto

$$f_{U,V}(u, v) = \frac{1}{2}(\mathbf{I}_{(-v, 2+v)}^{(u)}\mathbf{I}_{(-1, 0)}^{(v)} + \mathbf{I}_{(v, 2-v)}^{(u)}\mathbf{I}_{(0, 1)}^{(v)}) = \frac{1}{2}\mathbf{I}_{(-u, u)}^{(v)}\mathbf{I}_{(0, 1)}^{(u)} + \mathbf{I}_{(u-2, 2-u)}^{(v)}\mathbf{I}_{(1, 2)}^{(u)}$$

(b) Demuestra que  $Cov(U, V) = 0$ , pero no son independientes.

$$E(U, V) = \frac{1}{2}(\int_{-1}^0 \int_{-v}^{2+v} uv du dv + \int_0^1 \int_v^{2-v} uv du dv) = \frac{1}{2}(\int_{-1}^0 4(v + v^2) dv + \int_0^1 4(v - v^2) dv) = 0$$

$$E(U) = \frac{1}{2}(\int_{-1}^0 \int_{-v}^{2+v} u du dv + \int_0^1 \int_v^{2-v} u du dv) = \frac{1}{2}(\int_{-1}^0 4(1 + v) dv + \int_0^1 4(1 - v) dv) = 2$$

$$E(V) = \frac{1}{2}(\int_{-1}^0 \int_{-v}^{2+v} v du dv + \int_0^1 \int_v^{2-v} v du dv) = \int_{-1}^0 v + v^2 dv + \int_0^1 v - v^2 dv = 0$$

Por lo tanto

$$Cov(U, V) = E(U, V) - E(U)E(V) = 0$$

Y claramente  $U$  y  $V$  no son independientes.

5. Sean  $Z_1$  y  $Z_2$  variables aleatorias independientes ambas con distribución normal estándar. Demuestra que  $(X, Y)$  tiene distribución normal bivariada si  $X = Z_1$  y  $Y = Z_1 + Z_2$

$$f_{Z_1, Z_2}(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z_1^2 + z_2^2}{2}} \mathbf{I}_{(-\infty, \infty)}^{(z_1)} \mathbf{I}_{(-\infty, \infty)}^{(z_2)}$$

$$Z_1 = X \text{ y } Z_2 = Y - X$$

$$\left| \frac{\partial(Z_1, Z_2)}{\partial(X, Y)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 1$$

$$\text{Así } f_{X,Y} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2 + y^2 - 2xy}{2}} \mathbf{I}_{(-\infty, \infty)}^{(x)} \mathbf{I}_{(-\infty, \infty)}^{(y)} = \frac{1}{2\pi(1)(\sqrt{2})\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{2} - \frac{\sqrt{2}xy}{\sqrt{2}}} \mathbf{I}_{(-\infty, \infty)}^{(x)} \mathbf{I}_{(-\infty, \infty)}^{(y)}$$

$$(X, Y) \sim N(0, 1, 0, 2, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

6. Sea  $X_1 \sim N(4, 9)$ ,  $X_2 \sim N(2, 16)$  y  $X_3 \sim N(6, 4)$ . Si  $Y_1 = X_1 + X_2$ ,  $Y_2 = X_1 + X_3$  y  $Y_3 = X_2 + X_3$ ;  $\bar{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)$  tiene distribución normal multivariada con  $n = 3$ . Calcula  $\bar{\mu}$  y  $\Sigma$  de  $\bar{Y}$   
Tenemos  $Y_1 \sim N(6, 25)$ ,  $Y_2 \sim N(10, 13)$  y  $Y_3 \sim N(8, 20)$

Así  $\bar{\mu} = (6, 10, 8)$

$Cov(Y_1, Y_2) = Cov(X_1 + X_2, X_1 + X_3) = Cov(X_1, X_1) = Var(X_1)$  como  $X_1, X_2, X_3$  son independientes

la covarianza entre ellas es cero. Así tenemos que  $\Sigma = \begin{pmatrix} 25 & 9 & 16 \\ 9 & 13 & 4 \\ 16 & 4 & 20 \end{pmatrix}$

7.

8.

9. Sea  $U \sim U(0, 2\pi)$  y  $Z \sim \exp(1)$  tal que  $U$  y  $Z$  son independientes. Sea  $X = \sqrt{2Z} \cos U$  y  $Y = \sqrt{2Z} \sin U$ . Demuestra que  $X$  y  $Y$  son variables aleatorias independientes con distribución normal estándar.

$$f_{U,Z}(u, z) = \frac{1}{2\pi} e^{-z} \mathbf{I}_{(0, 2\pi)}^{(u)} \mathbf{I}_{(0, \infty)}^{(z)}$$

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{2Z} \cos U \text{ y } Y = \sqrt{2Z} \sin U \\ \frac{X^2 + Y^2}{2} &= Z \text{ y } \arctan\left(\frac{Y}{X}\right) = U \end{aligned}$$

$$\left| \frac{\partial(U, Z)}{\partial(X, Y)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{-X^2 Y}{X^2(X^2 + Y^2)} & X \\ \frac{X(X^2 + Y^2)}{X^2(X^2 + Y^2)} & Y \end{pmatrix} \right| = 1$$

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \mathbf{I}_{(0, 2\pi)}^{(\arctan \frac{y}{x})} \mathbf{I}_{(0, \infty)}^{(\frac{x^2+y^2}{2})} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \mathbf{I}_{(-\infty, \infty)}^{(x)} \mathbf{I}_{(-\infty, \infty)}^{(y)}$$

Así

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathbf{I}_{(-\infty, \infty)}^{(x)} \Rightarrow X \sim N(0, 1)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \mathbf{I}_{(-\infty, \infty)}^{(y)} \Rightarrow Y \sim N(0, 1)$$

Ambas son normal standar.

14. Si  $X$  y  $Y$  son variables aleatorias independientes ambas con distribución normal estándar.

- (a) Calcula la función de densidad conjunta de  $U = X$  y  $V = \frac{X}{Y}$

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \mathbf{I}_{(-\infty, \infty)}^{(x)} \mathbf{I}_{(-\infty, \infty)}^{(y)}$$

$$U = X \text{ y } \frac{U}{V} = Y$$

$$\left| \frac{\partial(X, Y)}{\partial(U, V)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{V} \\ 0 & -\frac{U}{V^2} \end{pmatrix} \right| = \frac{U}{V^2}$$

$$f_{U,V}(u, v) = \frac{u}{2\pi v^2} e^{-\frac{(uv)^2 + u^2}{2v^2}} \mathbf{I}_{(-\infty, \infty)}^{(u)} \mathbf{I}_{(-\infty, \infty)}^{(v)}$$

- (b) Demuestra que la densidad marginal de  $V$  tiene distribución Cauchy.

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u}{2\pi v^2} e^{-\frac{(uv)^2 + u^2}{2v^2}} du$$

$$x = \frac{(uv)^2 + u^2}{2v^2} \Rightarrow dx = u \frac{v^2 + 1}{v^2}$$

Así

$$f_V(v) = \frac{1}{\pi(v^2 + 1)} \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{\pi(v^2 + 1)} I_{(-\infty, \infty)}^{(v)}$$

## 1 Anexo

Sabemos que:

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i$$

Además

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i x^i\right) \left(\sum_{j=0}^m b_j x^j\right) = \sum_{r=0}^{n+m} \left(\sum_{i=0}^r a_i b_{r-i}\right) x^r$$

Así

$$(1+x)^{n+m} = (1+x)^n (1+x)^m = \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i\right) \left(\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} x^j\right) = \sum_{r=0}^{n+m} \left(\sum_{i=0}^r \binom{n}{i} \binom{m}{r-i}\right) x^r = \sum_{r=0}^{n+m} \binom{n+m}{r} x^r$$

Por lo tanto

$$\sum_{i=0}^r \binom{n}{i} \binom{m}{r-i} = \binom{n+m}{r}$$