1 Variables y constantes

Durante toda el álgebra usaremos constantes, que son los números que vimos en aritmética (3,π,$\sqrt{2}$) y usaremos variables (x, y, z) que pueden ser cualquier número.
El álgebra que veremos, parte de las reglas básicas del aritmética. Para estudiar el álgebra usaremos los números (constantes y variables), la suma y el producto. Además de recordar algunas reglas.

2 Conmutatividad

Si tenemos 2 números a, b. No importa si sumamos $a + b$ o $b + a$, ambos dan el mismo resultado. Y pasa lo mismo en la multiplicación.

$$a + b = b + a \qquad a \cdot b = b \cdot a$$
$$2 + 3 = 3 + 2 \qquad 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$$

3 Asociatividad

Si tenemos 3 números a, b y c. Podemos sumar a y b y el resultado sumarlo con c, o bien, sumar b y c y el resultado lo sumamos con a. Pasa lo mismo con el producto.

$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$
$$(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4) \qquad (2 \cdot 3) \cdot 4 = 2 \cdot (3 \cdot 4)$$

4 Neutros

Existen 2 números, uno para la suma y otro para la multiplicación que no hacen nada. Esos números son 0 y 1.

$$a + 0 = a \qquad a \cdot 1 = a$$
$$2 + 0 = 2 \qquad 2 \cdot 1 = 2$$

5 Inversos

Para todo número hay otro que al sumarlos dan 0 y para el producto existe uno que al multiplicar da 1. Básicamente esta regla dice que se puede deshacer la suma con la resta y la multiplicación con la división.

$$a + (-a) = 0 \qquad a \cdot \frac{1}{a} = 1$$
$$2 + (-2) = 0 \qquad 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$
$$(-5) + (-(-5)) = 0 \qquad \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

6 Distributividad (Factorizar)

Hasta ahora hemos visto que pasa cuando solo sumamos(restamos) o solo multiplicamos (dividimos), por separado, pero ¿qué pasa cuando combinamos sumar y multiplicar?

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
$$8 \cdot (5 + 2) = 8 \cdot 5 + 8 \cdot 2$$
$$8 \cdot 7 = 40 + 16$$

Si vamos de izquierda a derecha se llama distribuir, si vamos de derecha a izquierda se llama factorizar, de la igualdad anterior.

7 Regla de los signos

En el punto 5, viene escrito lo siguiente $(-(-5))$ y nos podemos preguntar qué significa esto. Por el momento vamos a seguir la siguiente regla: Si hay un número par de signos $-$, vamos a quitarlos y si hay un número impar de signos -, vamos a sustituirlos por un solo signo -. Así $(-(-5)) = 5$.

Ejercicios

$$-(-(-(-(-8)))) = \_\_\_\_\_\_ \qquad -(-(-(-(-(-7))))) = \_\_\_\_\_\_$$
$$-(-(-5)) = \_\_\_\_\_\_ \qquad -(-(-(-3))) = \_\_\_\_\_\_$$

1 Suma

Si tenemos en una caja 3 manzanas y 2 peras y en otra caja 4 manzanas y 1 pera. ¿Cuánto tenemos? Tenemos 7 manzanas y 3 peras. Este ejemplo nos ayuda a recordar que cuando sumamos cosas, las cosas que sumamos deben ser del mismo tipo. Observa el siguiente polinomio:

$$5x^3 + 3xy^2 - 9z + 8x^2 - 3 + 5x + 5\frac{y}{z} + 3x^3 \tag{1}$$

Tenemos los siguientes "tipos", $x^3, xy^2, z, x^2, 3, x, y/z$. Hagamos algunas consideraciones del ejemplo anterior. x^3, x^2, x son distintos tipos. Aunque todos son x el exponente los hace distintos. $xy^2, y/z$ son un solo tipo, aunque tengan 2 variables, la suma y resta son los que marcan el inicio o fin de un tipo. 3, como no está acompañada de una variable se va considerar del tipo "constante".
Del ejemplo anterior, observemos que solo podemos sumar $5x^3$, del inicio y $3x^3$ del final, pues son los únicos del mismo tipo. Y cuando hacemos la suma tenemos:

$$8x^3 + 3xy^2 - 9z + 8x^2 - 3 + 5x + 5\frac{y}{z} \tag{2}$$

2 Resta

Para la resta hacemos exactamente lo mismo que la suma, solo restamos los que son del mismo tipo.

3 Nombres

Los polinomios tienen varios nombres, esto depende de cuantos "tipos" distintos tengan.
Los **monomios** tienen solo un tipo: 3; $5x^2$; $8xy$; $3\frac{y^2}{z}$
Los **binomios** tienen 2 tipos: $x + 5$; $x^2y + 8x$; $\frac{5}{x} + x$
Los **trinomio** tienen 3 tipos y los **polinomios** tienen cualquier cantidad de tipos.

4 Para saber más

Entra en **https://es.khanacademy.org/** y busca suma y resta de polinomios

Ejercicios

1. Escribe si es polinomio, binomio o monomio.

   (a) $10x^7y^2z$ ____________
   (b) $10x^2 + 5xy$ ____________
   (c) $5x + 3y + 1$ ____________
   (d) $x+y+z+w+u$ ____________
   (e) $5x + 3$ ____________
   (f) $5 + 8 + 3$ ____________

2. Simplifica los siguientes polinomios.

   (a) $(3x^3 + 4x^2 - 7x + 1) + (9x^3 - 4x^2 - 6x)$
   (b) $(7x^3 + 5x - 3) + (-3x^3 - 2x^2 + 5x - 3)$
   (c) $(4x^3 + 5x - 3) - (3x^3 + 2x^2 + 5x - 3)$
   (d) $(6x^3 - 2x^2 + x - 2) - (8x^2 - x - 2)$
   (e) $(xy + 3y + x) - (-3yx + 5y - x)$
   (f) $(x^2 + 5y + 3) + (-5x + 3y - 10)$

1 Recordatorio

Se recomienda leer Polinomios (suma) e Introducción.
Cuando multiplicamos el mismo número, se llama potencia.

$$5^3 = (5)(5)(5) = 125$$

Al 5 se le llama base y al ^{3} exponente. Y siguen las siguientes reglas de producto y división.

$$n^a \cdot n^b = n^{a+b}$$
$$2^4 \cdot 2^5 = 2^{4+5} = 2^9$$

$$\frac{n^a}{n^b} = n^{a-b}$$
$$\frac{3^2}{3^4} = 3^{2-4} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2}$$

$$(n^a)^b = n^{a \cdot b}$$
$$(2^4)^5 = 2^{4\cdot 5} = 2^{20}$$

2 Producto

Cuando multiplicamos polinomios, debemos usar la regla distributiva y la regla de exponentes, del recordatorio.

$$(3x+y)(4x+y+1) = 4x(3x+y) + y(3x+y) + 1(3x+y) =$$
$$12x^2 + 4xy + 3xy + y^2 + 3x + y = 12x^2 + 7xy + y^2 + 3x + y$$

3 Cociente (Monomio en el denominador)

Cuando tenemos un monomio en el numerador y otro en el denominador, debemos de de seguir la regla de exponentes, en cada letra y en caso de ser posible, entre los números.

$$\frac{6x^2y^3z^4}{2xy^4z^2} = 3x^{2-1}y^{3-4}z^{4-2} = 3xy^{-1}z^2 = \frac{3xz^2}{y}$$

Cuando tenemos un polinomio en el numerador, lo que debemos hacer es separarlo en monomios y hacer lo anterior.

$$\frac{3x^2+5x+4}{x} = \frac{3x^2}{x} + \frac{5x}{x} + \frac{4}{x} = 3x + 5 + \frac{4}{x}$$

Ejercicios

1. Realiza los siguientes productos

   (a) $(2x+5)(3x-7)$
   (b) $(5x+7y)(3x+2y)$
   (c) $(3x-4)(2x+9)$
   (d) $(4x-3y)(x-5y)$
   (e) $(7x-4)(x^3-x^2+6)$
   (f) $(2x-1)(x^2-5)(x^3-1)$
   (g) $(x+1)(2x^2-2)(x^3+5)$
   (h) $4u(u-2)$
   (i) $7u(u+1)$
   (j) $(3x+5)(2x^2+9x-5)$

2. Realiza los siguientes cocientes

   (a) $\dfrac{8x^2y^3 - 10x^3y}{2x^2y}$
   (b) $\dfrac{6a^3b^3 - 9a^2b^2 + 3ab^4}{3ab^2}$
   (c) $\dfrac{3u^3v^4 - 2u^5v^2 + (u^2v^2)^2}{u^3v^2}$
   (d) $\dfrac{6x^2yz^3 - xy^2z}{xyz}$

1 Recordatorio

Cuando sumamos fracciones de números, factorizamos los denominadores, para encontrar un denominador común y buscamos fracciones equivalentes con ese denominador común.

$$\frac{3}{8}+\frac{3}{12}=\frac{3}{2^3}+\frac{3}{(2^2)(3)}$$

El denominador común es $(2^3)(3) = (8)(3) = 24$

$$\frac{3}{8}+\frac{3}{12}=\frac{3}{2^3}+\frac{3}{(2^2)(3)}=\frac{3(3)}{2^3(3)}+\frac{3(2)}{(2)(2^2)(3)}=\frac{9}{24}+\frac{6}{24}=\frac{15}{24}=\frac{(3)(5)}{(3)(8)}=\frac{5}{8}$$

Y hacemos lo mismo para la resta.

2 Suma y resta de fracciones de polinomios

Cuando operamos fracciones de polinomios, usamos las mismas reglas que en las fracciones de números. Para calcular el denominador común, debemos saber factorizar.

$$\frac{1}{x^2+4x+4}+\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+2)(x-2)}=$$

$$=\frac{x-2}{(x+2)^2(x-2)}+\frac{x+2}{(x+2)^2(x-2)}=\frac{2x}{(x+2)^2(x-2)}$$

3 Simplificación de fracciones

Lo que debemos hacer es factorizar el numerador y el denominador y eliminamos los factores similares.

$$\frac{2x-2}{x^2-1}=\frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\frac{2}{x+1}$$

Ejercicios

Simplifique las siguientes expresiones.

1. $\dfrac{6}{x^2-4}-\dfrac{3x}{x^2-4}$
2. $\dfrac{15}{x^2-9}-\dfrac{5x}{x^2-9}$
3. $\dfrac{4}{3s+1}-\dfrac{11}{(3s+1)^2}$
4. $\dfrac{4}{(5s-2)^2}+\dfrac{s}{5s-2}$
5. $\dfrac{2x}{x+2}-\dfrac{8}{x^2+2x}+\dfrac{3}{x}$
6. $\dfrac{p^4+3p^3-8p-24}{p^3-2p^2-9p+18}$
7. $\dfrac{2ac+bc-6ad-3bd}{6ac+2ad+3bc+bd}$

1 Producto de fracciones

Al igual que en las fracciones con números, el producto de fracciones, lo vamos a realizar multiplicando, numerador con numerador y denominador con denominador.

$$\frac{x^2-6x+9}{x^2-1}\cdot\frac{2x-2}{x-3}=\frac{(x^2-6x+9)(2x-2)}{(x^2-1)(x-3)}=\frac{(x-3)^2(2)(x-1)}{(x-1)(x+1)(x-3)}=$$

$$=\frac{(2)(x-3)}{x+1}=\frac{2x-6}{x+1}$$

2 División de fracciones

Hay dos formas de entender la división de fracciones, la primera es como lo contrario a multiplicar. Así para dividir, lo que vamos a hacer es voltear la fracción y multiplicar.

$$\frac{x+2}{2x-3}\div\frac{x^2-4}{2x^2-3x}=\frac{x+2}{2x-3}\cdot\frac{2x^2-3x}{x^2-4}=\frac{(x+2)[(x)(2x-3)]}{(2x-3)[(x-2)(x+2)]}=\frac{x}{x-2}$$

La otra forma de ver a la división es como una fracción y lo que haremos es multiplicar los extremos y después los de en medio. Los extremos van arriba y los de en medio va abajo.

$$\frac{x+2}{2x-3}\div\frac{x^2-4}{2x^2-3x}=\frac{\frac{x+2}{2x-3}}{\frac{x^2-4}{2x^2-3x}}=\frac{(x+2)[(x)(2x-3)]}{(2x-3)[(x-2)(x+2)]}=\frac{x}{x-2}$$

A esta segunda forma, se le conoce como la ley del sandwich. Se multiplican los panes y se pone arriba y se multiplican los jamones y se ponen abajo.

Ejercicios

Simplifica las siguientes expresiones.

1. $\dfrac{9x^2-4}{3x^2-5x+2}\cdot\dfrac{9x^4-6x^3+4x^2}{27x^4+8x}$

2. $\dfrac{4x^2-9}{2x^2+7x+6}\cdot\dfrac{4x^4 6x^3+9x^2}{8x^7-27x^4}$

3. $\dfrac{5a^2+12a+4}{a^4-16}\div\dfrac{25a^2+20a+4}{a^2-2a}$

4. $\dfrac{a^3-8}{a^2-2}\div\dfrac{a^3}{a^3+8}$

5. $\dfrac{\frac{b}{a}-\frac{a}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$

6. $\dfrac{\frac{1}{x+2}-5}{\frac{4}{x}-x}$

7. $\dfrac{\frac{5}{x-1}-\frac{5}{a-1}}{x-a}$

1 Productos notables

Para multiplicar hay algunas formas que se repiten constantemente. A estas formas, les llamamos productos notables.
Si tenemos un polinomio, el buscar de qué producto vienen se llama factorizar, las reglas de producto hacia un lado del igual se llama multiplicar y hacia el otro lado factorizar.

2 Binomios conjugados(Diferencia de cuadrados)

De un lado de la igualdad hay un producto de binomios, cuya única diferencia es un signo menos y del otro lado son dos números elevados al cuadrado que se restan.

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$
$$(2a+3)(2a-3) = 4a^2 - 9$$

3 Cuadrado de un binomio (Trinomio cuadrado perfecto)

$$(x \pm y) = x^2 \pm 2xy + y^2$$
$$(2a-3)^2 = (2a)^2 - 2(2a)(3) + 3^2 = 4a^2 - 12a + 9$$

4 Binomio al cubo

$$(x \pm y) = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$$
$$(2a+3)^3 = (2a)^3 + 3(2a)^2(3) + 3(2a)(3^2) + 3^3 = 8a^3 + 36a^2 + 54a + 27$$

5 Suma y diferencia de cubos

$$x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$$
$$8a^3 - 27 = (2a)^3 - 3^3 = (2a-3)(4a^2 + 6a + 9)$$
$$125a^3 + 1 = (5a)^3 + 1^3 = (5a+1)(25a^2 - 5a + 1)$$

6 Ejercicios

1. Realiza los siguientes productos

   (a) $(2x+7y)(2x-7y)$
   (b) $(5x-3y)(5x+3y)$
   (c) $(x^2+5y)(x^2-5y)$
   (d) $(3x+y^3)(3x-y^3)$
   (e) $(3x+2y)^2$
   (f) $(5x-4y)^2$
   (g) $(x^2-5y^2)^2$
   (h) $(x+y)^2(x-y)^2$
   (i) $(x-2y)^3$
   (j) $(x+3y)^3$
   (k) $(2x+3y)^3$
   (l) $(3x-4y^2)^3$

2. Factoriza los siguientes polinomios

   (a) $9x^2+24x+16$
   (b) $25z^2+30z+9$
   (c) $16z^2-56z+49$
   (d) $64r^2-25t^2$
   (e) $81r^2-16t^2$
   (f) z^4-64w^2
   (g) $9y^4-121x^2$
   (h) x^4-4x^2
   (i) $64x^3+27$
   (j) x^6-27y^3
   (k) x^3+64
   (l) $125-27x^3$
   (m) x^16-1
   (n) x^8-16

7 Para saber más

Entra a **https://es.wikipedia.org/wiki/Productos_notables**

1 Factorización

Cuando tenemos un polinomio, a veces, nos es útil saber de qué producto viene.

2 Término común

Cuando varios elementos de un polinomio tienen el mismo elemento, lo podemos factorizar.

$$5x^2 + 15xy + 5x = 5x(x + 3y + 1)$$

Observemos que aunque está x^2, solo podemos factorizar la potencia más pequeña de x, en este caso $x^1 = x$

3 Factorizar un trinomio, por prueba y error

$$x^2 - 8x + 12$$

Cuando tenemos un trinomio, como el anterior. Necesitamos dos números, que al multiplicarlos nos den 12 y al sumarlos nos den -8. Tenemos que los números que multiplicados dan 12 son:

$$1 \cdot 12 = -1 \cdot -12 = 2 \cdot 6 = -2 \cdot -6 = 3 \cdot 4 = -3 \cdot -4 = 12$$

Y los números que al sumarlos nos dan -8 son: $-2 + (-6) = -8$. Así tenemos la factorización.

$$x^2 - 8x + 12 = (x - 2)(x - 6)$$

4 Factorizar por agrupación

Si una suma tiene 4 o más términos, nos puede ser útil agruparlos por parejas y factorizar.

$$\begin{aligned} 4ac + 2bc - 2ad - bd &\quad \text{(Agrupamos en parejas)} \\ (4ac + 2bc) + (-2ad - bd) &\quad \text{(Factorizamos en cada pareja)} \\ 2c(2a + b) + (-d)(2a + b) &\quad \text{(Si podemos, volvemos a factorizar)} \\ (2c - d)(2a + b) & \end{aligned}$$

Ejercicios

Factoriza los siguientes polinomios

1. $rs + 4st$
2. $4u^2 - 2uv$
3. $3a^2b^2 - 6a^2b$
4. $12xy + 18xy^2$
5. $3x^2y^3 - 9x^3y^3$
6. $16x^5y^2 + 8x^3y^3$
7. $x^2 + 2x - 15$
8. $x^2 + 3x - 18$
9. $x^2 + 9x + 20$
10. $x^2 - 8x + 7$
11. $x^2 + 11x + 18$
12. $x^2 - 14x + 24$
13. $2ax - 6bx + ay - 3by$
14. $2by^2 - bxy + 6xy - 3x^2$
15. $3x^3 + 3x^2 - 27x - 27$
16. $5x^3 + 10x^2 - 20x - 40$
17. $x^4 + 2x^3 - x - 2$
18. $x^4 - 3x^3 + 8x - 24$

1 Ecuaciones de primer grado

La palabra ecuación, viene del latín *aequatio* que significa igualar o nivelar. En una ecuación existe una incógnita, un valor a encontrar. Si nuestra incógnita está elevada a la 1 se llaman de primer grado. Por ejemplo si alguien nos dice que tiene 34 manzanas,las cuales guardó en una caja y le sobraron 7 fuera de la caja. ¿Cuántas manzanas guardó en la caja?

Esto lo escribiremos como:

$$7 + x = 34$$

x es la incógnita. Y lo que tenemos que hacer es dejar a la x sola, por lo que restaremos 7 del lado izquierdo de la ecuación y para que siga siendo igual, vamos restar 7 del lado derecho.

$$7 + x - 7 = 34 - 7$$

$$x = 27$$

Así hay 27 manzanas en la caja.
Los pasos que debemos seguir es: poner de un lado todas las incógnitas y del otro lo que no es. Por ejemplo.

$$\begin{aligned}
3x + 8 &= 5x - 10 && \text{Pondremos las } x \text{ del lado derecho}\\
3x + 8 - 5x &= 5x - 10 - 5x &&\\
-2x + 8 &= -10 && \text{Pasamos lo que no es } x \text{ del otro lado}\\
-2x + 8 - 8 &= -10 - 8 &&\\
-2x &= -18 && \text{Dividimos entre -2}\\
\frac{-2x}{-2} &= \frac{-18}{-2} &&\\
x &= 9 &&
\end{aligned}$$

Ejercicios

Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado.

1. $-3x + 4 = -1$
2. $4x - 3 = -5x + 6$
3. $4(2y + 5) = 3(5y - 2)$
4. $6(2y + 3) - 4(y - 5) = 0$
5. $0.3(3 + 2x) + 1.2x = 3.2$
6. $\dfrac{3 + 5x}{5} = \dfrac{4 - x}{8}$
7. $\dfrac{2x - 9}{4} = 2 + \dfrac{x}{12}$
8. $\dfrac{13 + 2x}{4x + 1} = \dfrac{3}{4}$
9. $(3x - 2)^2 = (x - 5)(9x + 4)$
10. $(x + 5) + 3 = (x - 2)^2$
11. $(4x - 7)(2x + 3) - 8x(x - 4) = 0$
12. $\dfrac{7x + 2}{17x - 3} = \dfrac{x - 8}{2x + 3}$
13. $\dfrac{3x + 1}{6x - 2} = \dfrac{2x + 5}{4x - 13}$
14. $\dfrac{-5}{3x - 9} + \dfrac{4}{x - 3} = \dfrac{5}{6}$