

Задание I: Поиск обратной матрицы

Константинов Остап Б8203а

31 декабря 2013

Аннотация

Данный отчет был подготовлен в качестве задания по предмету "Численные методы". И призван описать используемые мною способы решения поставленных преподавателем задач. А также сравнить результаты моих "решений" с эталонными результатами. Стоит также отметить, что сама реализация методов не включена в данный отчет.

Содержание

1 Введение	1
2 Решение СЛАУ QR-разложением матрицы	2
2.1 Постановка задачи	2
2.2 Алгоритм решения	2
2.3 Решение MATLAB	3
2.4 Подсчёт невязки	3

1 Введение

Дисциплина "Численные методы"¹ относится к профессиональному циклу и имеет своей целью ознакомление студентов с основными численными методами, этапами их реализации на современных компьютерах и вычислительных системах [2].

¹Численные методы — методы решения математических задач в численном виде [1].

2 Решение СЛАУ QR-разложением матрицы

2.1 Постановка задачи

Дана квадратная невырожденная матрица A^2

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

А также столбец свободных членов b

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Требуется решить СЛАУ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

используя QR-разложение матрицы A .

2.2 Алгоритм решения

Вращением Гивенса, или просто вращением, называется матрица

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Умножению матрицы R на вектор x можно дать следующую геометрическую интерпретацию: вектор Rx получается вращением вектора x на угол θ .

Если

$$\cos \theta = \frac{x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}, \sin \theta = -\frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}},$$

²Если A — квадратная невырожденная матрица, то существует единственное QR-разложение.

то

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_j \\ x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x_i^2 + x_j^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, с помощью домножения слева вектора x на матрицу вращения R , можно занулить одну (i -ю) компоненту. Заметим, что при этом все компоненты, кроме i -й и j -й, не изменяются.

2.3 Решение MATLAB

Порядок решения задачи в MATLAB следующий:

- сформировать матрицу коэффициентов R из коэффициентов исходной матрицы A ;
- вычеркивать ненулевые поддиагональные элементы матрицы R , применением к ней матрицы G ;
- с каждым занулением элемента матрицы R , формировать матрицу Q как матрицу собственного произведения на матрицу G ;
- полученные матрицы, будет являться результатом QR разложения;
- решить СЛАУ, где R — верхнетреугольная матрица. А вектор свободных членов считается, как произведение транспонированной матрицы Q на матрицу со свободными членами исходного СЛАУ — B .

2.4 Подсчёт невязки

Невязка — это ошибка (погрешность) в результате вычислений.

Размерность матрицы

$n = 5$;

Генерация исходной матрицы

$A = \text{rand}(n)$;

Генерация вектора свободных членов

$B = \text{rand}(n, 1)$;

Получение искомого столбца неизвестных

$X = \text{rgiv}(A, B)$;

Подсчёт невязки

$\text{Discrepancynorm} = \text{norm}(A * X - B)$;

Список литературы

- [1] А. А. Самарский, А. В. Гулин *Численные методы*. Москва "Наука" 1989.
- [2] А. Г. Колобов, Л. А. Молчанова *Численные методы линейной алгебры*. Владивосток "ДФУ" 2008.