Контрольная работа II: Численное дифференцирование

Константинов Остап Б8203а

17 июня 2014

Постановка задачи

Вопрос №44: Найти погрешность аппроксимации $R(x)$ для $f'(x_0)$, вычесляемой по приближенной формуле

$$f'(x_0) = \frac{3f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}}{2h} + R(x).$$

Решение задачи

Ошибку $\varepsilon(x_0; h)$ при замене $f'(x_0)$ на апроксимирующую функцию можно оценить исходя из разложения $f(x)$ в точке x_0 по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа порядка 3:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \frac{f'''(x_\theta)}{6}h^3$$

где $x_\theta \in (x_0; x_0 + h)$.

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 - \frac{f'''(x_{\theta_1})}{6}h^3$$

где $x_{\theta_1} \in (x_0 - h; x_0)$. Подставляя $-2h$, получаем:

$$f(x_0 - 2h) = f(x_0) - 2f'(x_0)h + 2f''(x_0)h^2 - 4\frac{f'''(x_{\theta_2})}{3}h^3$$

где $x_{\theta_2} \in (x_0 - 2h; x_0)$. Вычисляем согласно апроксимирующей функции:

$$3f(x_0) - 4f(x-h) + f(x-2h) = 3f(x_0) - 4f(x_0) +$$

$$4f'(x_0)h - 2f''(x_0)h^2 + 2\frac{f'''(x_{\theta_1})}{3}h^3 + f(x_0) - 2f'(x_0)h +$$

$$2f''(x_0)h^2 - 4\frac{f'''(x_{\theta_2})}{3}h^3$$

Отсюда:

$$f'(x_0) = \frac{3f(x_0) - 4f(x_0-h) + f(x_0-2h)}{2h} - \frac{f'''(x_{\theta_1}) - 2f'''(x_{\theta_2})}{3}h^2$$

Если теперь предположить, что

$$\max_{x\in[a;b]} |f'''(x)| = M_3$$

то оценка погрешности получится такая:

$$|\varepsilon(x_0;h)| = \left| f'(x_0) - \frac{3f(x_0) - 4f(x_0-h) + f(x_0-2h)}{2h} \right| \leq$$

$$\frac{|f'''(x_{\theta_1}) + 2f'''(x_{\theta_2})|}{3}h^2 \leq \frac{1}{3}M_3h^2$$