Задание VII: Поиск собственных значений

Константинов Остап Б8203а

31 декабря 2013

Аннотация

Данный отчет был подготовлен в качестве задания по предмету "Численные методы". И призван описать используемые мною способы решения поставленных преподавателем задач. А также сравнить результаты моих "решений"с эталонными результатами. Стоит также отметить, что сама реализация методов не включена в данный отчет.

Содержание

1 Введение

Дисциплина "Численные методы"[1] относится к профессиональному циклу и имеет своей целью ознакомление студентов с основными численными методами, этапами их реализации на современных компьютерах и вычислительных системах [2].

[1]Численные методы — методы решения математических задач в численном виде [1].

2 Метод вращения с преградами

2.1 Постановка задачи

Дана квадратная симметричная матрица:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Требуется найти, при помощи метода вращения, такие числа x и Λ, для которых выполняется соотношение $A\bar{x} = \Lambda\bar{x}$. x - некоторый не нулевой вектор, называемый собственным вектором. Λ - собственное значение.

2.2 Алгоритм решения

Обозначим через V^T транспонированную матрицу.

Так как $V^T V = E$, то $V^{-1} = V^T$ и преобразование подобия принимает вид $V^T A V = \Lambda$. Задачу нахождения такой матрицы V решают последовательно.

Пусть A — вещественная симметричная матрица. Для такой матрицы метод вращений заключается в построении последовательности матриц $A^{(0)} = A, A^{(1)}, ..., A^{(k)}, ...$, так чтобы $A^k \to \Lambda$. Здесь каждая последующая матрица получается из предыдущей при помощи элементарного шага, состоящего в преобразовании подобия предыдущей матрицы посредством некоторой ортогональной матрицы вращения

$$A^{(k+1)} = V_{i_k j_k}^T \left(\varphi_k\right) A^{(k)} V_{i_k j_k} \left(\varphi_k\right).$$

2.3 Решение MATLAB

Порядок решения задачи в MATLAB следующий:

- подготовить матрицу для собственных векторов $(X = E)$;
- в матрице $A^{(k)}\,(k = 0, 1, ...)$ выбрать среди всех наддиагональных элементов максимальный по абсолютной величине элемент $a_{i_k j_k}^{(k)}$, $i_k < j_k$ и запомнить его индексы;

- проверить условие $\left|a^{(k)}_{i_k j_k}\right| < \varepsilon$. Если условие не выполнено перейти к п. 4, если выполнено, завершить процесс;
- найти $c = \cos(\varphi_k)\,, s = sin(\varphi_k)$;
- пересчитать элементы матрицы $A^{(k+1)}$, пересчитать элементы матрицы X;
- перейти к пункту 2.

2.4 Подсчёт невязки

Невязка — это ошибка (погрешность) в результате вычислений.

```
Размерность матрицы
        n = 5;
Точность вычислений
        e = 10^-15;
Генерация исходной матрицы
        B = rand(n); A = triu(B) + triu(B,1)';
Нахождение искомых значений
        [V, D] = eigenvalue(A, e);
Подсчёт невязки
        Discrepancynorm = norm(A * V - V * D);
```

Список литературы

[1] А. А. Самарский, А. В. Гулин *Численные методы.* Москва "Наука"1989.

[2] А. Г. Колобов, Л. А. Молчанова *Численные методы линейной алгебры.* Владивосток "ДВФУ"2008.