Контрольная работа IV: Сплайны

Константинов Остап Б8203а

13 июня 2014

Постановка задачи

Вопрос №43.1: Заданы матрица и вектор правых частей с. $Ax = b$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

возможно ли деление на нуль в формулах метода прогонки, почему?

Решение задачи

Для применимости формул метода прогонки достаточно выполнения условий диагонального преобладания у матрицы A, которая имеет вид:

$$\begin{pmatrix} d_1 & e_1 & 0 & 0 \\ c_2 & d_2 & e_2 & 0 \\ 0 & c_3 & d_3 & e_3 \\ 0 & 0 & c_4 & d_4 \end{pmatrix}$$

то есть $|d_i| \geq |c_i| + |e_i|$, причем хотя бы одно неравенство должно быть строгим. Проверяем для матрицы:

$$2 > 1, 2 = 2, 2 = 2, 1 < 2$$

Мы видем, что условие преобладания диагональных элементов матрицы A невыполнено, а это значит, что при применении метода прогонки возможно деление на ноль.

Постановка задачи

Вопрос №43.2: Задана убывающая и выпуклая функция на отрезке. Метод хорд. Выяснить условия сходимости метода.

Решение задачи

Прежде чем перейти к вопросу о сходимости итерационного процесса метода хорд введем понятие выпуклой функции.

Непрерывная на $[a, b]$ функция называется выпуклой, если для любых двух точек x_1, x_2, удовлетворяющих $a \le x_1 \le x_2 \le b$ и $a \in [0, 1]$ выполняется соотношение

$$f\left(ax_1 + (1-a)\, x_2\right) \le af\left(x_1\right) + (1-a)\, f\left(x_2\right)$$

Изобразим убывающую и выпуклую функцию на графике.

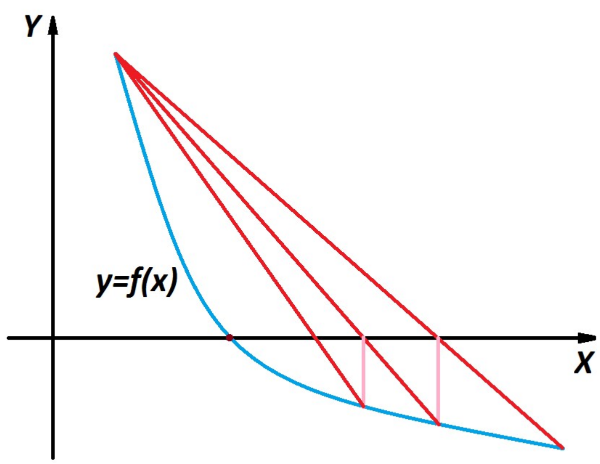

Рис. 1: Убывающая выпуклая функция.

Докажем сходимость интерполяционного процесса для случая выпуклой функции.

Теорема: Пусть задана непрерывная: дважды дифференцируемая ф. $f(x)$ на $[a, b]$ и пусть $f(a)\, f(b) < 0$, а $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют свои знаки на $[a, b]$. Тогда итерационный процесс метода хорд сходится к корню ξ с любой наперед заданной точностью ε.

Доказательство: Рассмотрим для примера случай $f(a) f''(a) < 0$. Из формулы

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(b) - f(x_{n-1})} (b - x_{n-1})$$

следует, что $x_n > x_{n-1}$ так как $(b - x_{n-1}) > 0$, а $f_{n-1}/(f_b - f_{n-1}) < 0$. Это справедливо для любого n, то есть получаем возрастающую последовательность чисел $a \leq x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq b$.

Докажем теперь, что все приближения $x_n < \xi$, где ξ - корень. Пусть $x_{n-1} < \xi$. Покажем, что x_n тоже меньше ξ.

Введем

$$x_n = a x_{n-1} + (1 - a) b; \xi = \mu x_{n-1} + (1 - \mu) b$$

Имеем

$$y(x_n) = a f_{n-1} + (1 - a) f_b = f(\xi)$$

а это значит, что значение функции $y(x)$ в точке x_n на хорде $[x_{n-1}; b]$ совпадают с $f(\xi)$. Рассмотрим два случая.

Первый:

$$f(\xi) \leq \mu f_{n-1} + (1 - \mu) f_b$$

следует $a f_{n-1} + (1 - a) f_b \leq \mu f_{n-1} + (1 - \mu) f_b$ или $a (f_{n-1} - f_b) \leq \mu (f_{n-1} - f_b)$ так как $f_{n-1} < f_b \Rightarrow a \geq \mu \Rightarrow x_n < \xi$ ч.т.д.

Второй:

$$f(\xi) \geq \mu f_{n-1} + (1 - \mu) f_b$$

следует $a f_{n-1} + (1 - a) f_b \geq \mu f_{n-1} + (1 - \mu) f_b$ или $a (f_{n-1} - f_b) \geq \mu (f_{n-1} - f_b)$ так как $f_{n-1} > f_b \Rightarrow a \geq \mu \Rightarrow x_n < \xi$ ч.т.д.

Таким образом, мы доказали, что последовательность чисел x_i является сходящейся. Это значит, что для любой ε можно указать такое n, что будет выполняться $|x_n - \xi| < \varepsilon$. Теорема доказана.