Задание I: Поиск обратной матрицы

Константинов Остап Б8203а

31 декабря 2013

Аннотация

Данный отчет был подготовлен в качестве задания по предмету "Численные методы". И призван описать используемые мною способы решения поставленных преподавателем задач. А также сравнить результаты моих "решений"с эталонными результатами. Стоит также отметить, что сама реализация методов не включена в данный отчет.

Содержание

1 Введение **2**

2 Поиск обратной матрицы Методом Гаусса **2**

2.1 Постановка задачи 2
2.2 Алгоритм решения 2
2.3 Пример решения 3
2.4 Решение MATLAB 4
2.5 Подсчёт невязки 5

3 Поиск обратной матрицы Метод окаймления **5**

3.1 Постановка задачи 5
3.2 Алгоритм решения 6
3.3 Решение MATLAB 6
3.4 Подсчёт невязки 6

1 Введение

Дисциплина "Численные методы"[1] относится к профессиональному циклу и имеет своей целью ознакомление студентов с основными численными методами, этапами их реализации на современных компьютерах и вычислительных системах [2].

2 Поиск обратной матрицы Методом Гаусса

2.1 Постановка задачи

Дана матрица квадратная невырожденная матрица[2] вида:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Требуется найти обратную ей матрицу[3], используя метод Гаусса.

2.2 Алгоритм решения

Напишем расширенную матрицу, в левой части которой находится исходная матрица A, а в правой единичная. Применяя метод Гаусса, последовательно будем приводить матрицу A (левую часть расширенной матрицы) к единичной матрице. Причем совершенные преобразование мы будем применять ко всей расширенной матрице. Приведя левую часть расширенной матрицы к единичной, правая часть будет являться обратной матрицей к исходной.

[1] Численные методы — методы решения математических задач в численном виде [1].

[2] Квадратная матрица обратима тогда и только тогда, когда она невырожденная, то есть её определитель не равен нулю. Для неквадратных матриц и вырожденных матриц обратных матриц не существует.

[3] Обратная матрица — такая матрица A^{-1}, при умножении на которую, исходная матрица A даёт в результате единичную матрицу E.

2.3 Пример решения

Найти обратную матрицу A^{-1} методом Гаусса, если

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 9 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{pmatrix}.$$

Сначала проверим не является ли матрица A вырожденной (сингулярной), для чего вычислим её определить:

$$\begin{aligned} \det \mathrm{A} = & \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 9 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{vmatrix} = \\ & = 3 \times 11 \times 23 + 5 \times 13 \times 17 + 7 \times 9 \times 19 - \\ & - (7 \times 11 \times 17 + 5 \times 9 \times 23 + 3 \times 13 \times 19) = \\ & = 759 + 1105 + 1197 - (1309 + 1035 + 741) = \\ & = 3061 - 3085 = -24. \end{aligned}$$

Так как определитель не равен нулю, то, следовательно, матрица A невырожденная (регулярная) и существует ей обратная матрица A^{-1}.

Далее, по вышеописанному алгоритму, найдём единичную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 5 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 11 & 13 & 0 & 1 & 0 \\ 17 & 19 & 23 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 5 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -3 & 1 & 0 \\ 17 & 19 & 23 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 5 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{28}{3} & -\frac{50}{3} & -\frac{17}{3} & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -3 & -\frac{11}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{28}{3} & -\frac{50}{3} & -\frac{17}{3} & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -3 & -\frac{11}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & -4 & -8 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & -4 & 0 & \frac{7}{3} & -\frac{25}{3} & 4 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{12} & \frac{25}{12} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{7}{6} & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Итак, окончательно имеем:

$$\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{12} & \frac{25}{12} & -1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{7}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2.4 Решение MATLAB

Порядок решения задачи в MATLAB следующий:

- сформировать матрицу коэффициентов A и вектор свободных членов B заданной системы;

- количество формирований вектора B происходит в соответствии размерности матрицы A;
- с каждым формированием B - формировать расширенную матрицу системы, A объединив и B;
- решить полученную систему линейных уравнений методом Гаусса;
- полученный вектор будет являться столбцом матрицы A^{-1};

2.5 Подсчёт невязки

Невязка — это ошибка (погрешность) в результате вычислений.

```
Размерность матрицы
        n = 5;
Генерация исходной матрицы
        A = rand(n);
Обратная матрица
        B = rinv(A);
Подсчёт невязки
        Discrepancynorm = (A * B - eye(n));
```

3 Поиск обратной матрицы Метод окаймления

3.1 Постановка задачи

Дана матрица квадратная невырожденная матрица[4] вида:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Требуется найти обратную ей матрицу[5], используя метод окаймления.

[4]Квадратная матрица обратима тогда и только тогда, когда она невырожденная, то есть её определитель не равен нулю. Для неквадратных матриц и вырожденных матриц обратных матриц не существует.

[5]Обратная матрица — такая матрица A^{-1}, при умножении на которую, исходная матрица A даёт в результате единичную матрицу E.

3.2 Алгоритм решения

Пусть матрица $\mathrm{A} = \left\| a_{ij} \right\|, i, j = 1, 2, ..., n$, невырожденная. Обозначим через A_k ее левую верхнюю часть, т. е. $\mathrm{A}_k = \left\| a_{ij} \right\|, i, j = 1, 2, ..., k$. Матрицы $\mathrm{A}_k, k = 1, 2, ..., n$, невырожденные. Метод окаймления состоит в следующем: ищется матрица, обратная к

$$\mathrm{A}_k = \left\| \begin{array}{cc} \mathrm{A}_{k-1} & u_k \\ v_k^T & a_k \end{array} \right\|, k > 1\,, \mathrm{A}_1 = a_1 = a_{11}, u_1 = 0, v_1^T = 0,$$

в форме

$$\mathrm{A}_k^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} \mathrm{P}_{k-1} & r_k \\ q_k^T & b_k \end{array} \right\|.$$

$$b_k = \left(a_k - v_k^T \mathrm{A}_{k-1}^{-1} u_k \right)^{-1}, r_k = -b_k \mathrm{A}_{k-1}^{-1} u_k, q_k^T = -b_k v_k^T \mathrm{A}_{k-1}^{-1},$$
$$\mathrm{P}_{k-1} = \mathrm{A}_{k-1}^{-1} + b_k \mathrm{A}_{k-1}^{-1} u_k v_k^T \mathrm{A}_{k-1}^{-1}.$$

3.3 Решение MATLAB

Порядок решения задачи в MATLAB следующий:

- количество шагов будет совпадать с размерностью матрицы A;
- формировать на каждом шаге рабочую матрицу B;
- с каждым формированием B, совершать действия в соответствии с текущим шагом;
- если шаг является последним, то формирование обратной матрицы завершено;
- иначе, выполнять действия над матрицей, по формулам окаймления;

3.4 Подсчёт невязки

Невязка — это ошибка (погрешность) в результате вычислений.

```
Размерность матрицы
          n = 5;
Генерация исходной матрицы
          A = rand(n);
Обратная матрица
          B = edging(A);
Подсчёт невязки
          Discrepancynorm = (A * B − eye(n));
```

Список литературы

[1] А. А. Самарский, А. В. Гулин *Численные методы.* Москва "Наука"1989.

[2] А. Г. Колобов, Л. А. Молчанова *Численные методы линейной алгебры.* Владивосток "ДВФУ"2008.