Diagonalisation du Laplacien — Cours et Exercices

29 septembre 2025

Table des matières

1 Introduction

Objectif : Comprendre ce que signifie la diagonalisation du Laplacien.
Le format de ce document est le suivant : un petit peu de cours suivi d'une application.

1.1 Prérequis

Pour aborder ce cours, il est recommandé d'avoir des connaissances de base en algèbre linéaire (espaces vectoriels, bases, matrices), les nombres complexes (notamment la notion de complexe conjugué) et en analyse (intégration, dérivée, périodicité).

1.2 Indications

1.3 Notations

- $\mathbb{R}^n$: espace vectoriel de dimension n.
- $M_{n\times m}(\mathbb{R})$: ensemble des matrices de taille $n \times m$ à coefficients réels.

2 Diagonalisation d'une Matrice

Dans cette partie, on se placera dans un espace euclidien de dimension finie $\mathbb{R}^n$ et on considérera des matrices réelles $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

2.1 Rappels

2.1.1 Bases

Définition 2.1 (Base)**.** Une famille de vecteurs $(e_i)_{i\in I}$ dans un espace vectoriel E est une base de E si elle est libre et si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de ces vecteurs (génératrice).

Exemple 2.2. La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est constituée des vecteurs $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. Les vecteurs e_1 et e_2 sont libres car e_1 n'est pas un multiple de e_2 et vice versa. De plus, tout vecteur $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de e_1 et e_2 :

$$v = xe_1 + ye_2.$$

Remarque. La notion de base est fondamentale en algèbre linéaire, car elle permet de décrire tout vecteur d'un espace vectoriel comme une combinaison linéaire de vecteurs de cette base.

Remarque. Le nombre d'éléments d'une base d'un espace vectoriel indique la dimension de cet espace.

Cette famille de vecteurs peut être orthogonale, orthonormée, ou aucune de ces formes.

Pour le savoir, on utilise le produit scalaire.

Définition 2.3 (Produit scalaire)**.** Un produit scalaire est une application bilinéaire symétrique définie sur un espace vectoriel, qui associe à chaque paire de vecteurs un scalaire. Dans un espace euclidien, il est souvent noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et vérifie les propriétés suivantes :

- $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ (symétrie)
- $\langle \alpha u + v, w\rangle = \alpha \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ (bilinéarité (premier argument))
- $\langle u, \alpha v + w\rangle = \alpha \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$ (bilinéarité (second argument))
- $\langle u, u\rangle \geq 0$ avec égalité si et seulement si $u = 0$ (définie positive)

Remarque. Le produit scalaire dans un espace euclidien est défini par la formule

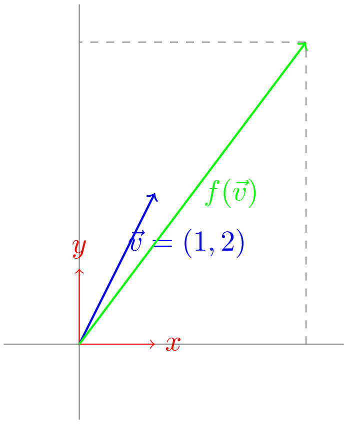
$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

où $u = (u_1, \dots, u_n)$ et $v = (v_1, \dots, v_n)$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ exprimés dans la base canonique.

Définition 2.4 (Norme)**.** La norme d'un vecteur u dans un espace vectoriel avec produit scalaire est définie par $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$.

La définition formelle du produit scalaire n'est pas si important à comprendre mais elle permet de définir la notion d'orthogonalité entre deux vecteurs.

Figure 1 – Représentation géométrique de l'application linéaire $f(x, y) = (x + y,\ 2y)$



2.1.2 Matrice et application linéaire

Définition 2.5 (Application linéaire)**.** Soit E et F deux espaces vectoriels. Une application $T : E \to F$ est dite linéaire si pour tout $u, v \in E$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$T(u + v) = T(u) + T(v) \quad \text{et} \quad T(\alpha u) = \alpha T(u).$$

Définition 2.6 (Matrice associée)**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. On appelle matrice associée à f la matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, on a

$$f(v) = Av.$$

Remarque. On peut voir une application linéaire comme une transformation géométrique qui s'applique à un autre object géométrique (le vecteur). En d'autres termes, le comportement de l'application linéaire est indépendant de la base choisie. La matrice associée à l'application linéaire quant à elle, dépend de la base choisie où v est exprimé et où $f(v)$ est exprimé également.

Exemple 2.7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y,\ 2y)$. Montrons que f est linéaire.

Démonstration. Soit $u, v \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On note $u = (u_x, u_y)$ et $v = (v_x, v_y)$. On a

$$f(u+v) = f(u_x+v_x, u_y+v_y) = (u_x+v_x+u_y+v_y, 2(u_y+v_y)) = (u_x+u_y, 2u_y)+(v_x+v_y, 2v_y) = f(u)+f(v).$$

De même,

$$f(\alpha u) = f(\alpha u_x, \alpha u_y) = (\alpha u_x + \alpha u_y, 2\alpha u_y) = \alpha(u_x + u_y, 2u_y) = \alpha f(u).$$

Donc f est linéaire. □

Remarque. La matrice associée à f est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier en calculant $f(v)$ pour $v = (v_x, v_y)$ et en utilisant le produit matriciel Av.

Exercice 2.8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x * y, x + y)$. Montrer que f n'est pas linéaire.

Solution. Soit $u, v \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On note $u = (u_x, u_y)$ et $v = (v_x, v_y)$. On a

$$f(u+v) = f(u_x+v_x, u_y+v_y) = ((u_x+v_x)(u_y+v_y), u_x+v_x+u_y+v_y).$$

Or,

$$f(u)+f(v) = (u_xu_y, u_x+u_y) + (v_xv_y, v_x+v_y) = (u_xu_y+v_xv_y, u_x+u_y+v_x+v_y).$$

Donc $f(u+v) \neq f(u)+f(v)$ en général. Donc f n'est pas linéaire. Par exemple, pour $u = (1,0)$ et $v = (0,1)$, on a

$$f(u+v) = f(1,1) = (1 \times 1, 1+1) = (1,2),$$

tandis que

$$f(u)+f(v) = f(1,0)+f(0,1) = (1 \times 0, 1+0) + (0 \times 1, 0+1) = (0,1)+(0,1) = (0,2).$$

□

2.2 Diagonalisation

2.2.1 Motivation

La puissance d'une matrice peut être très coûteuse à calculer, en particulier pour des matrices de grande taille. La diagonalisation d'une matrice permet de simplifier ce calcul en réduisant le problème à celui de la puissance de matrices diagonales, qui est beaucoup plus simple (puissance de chaque coefficient de la diagonale).

L'objectif de la diagonalisation, peut être vu comme changer la base dans laquelle les vecteurs sont exprimés afin que la matrice associée à l'application linéaire devienne diagonale.

C'est-à-dire :

$$A = PDP^{-1}$$

où D est une matrice diagonale et P est la matrice de changement de base de l'application linéaire.

2.2.2 Valeurs propres et vecteurs propres

L'objectif est donc de trouver les coefficients de la matrice diagonale D (que l'on appellera valeurs propres) et la matrice P composée des vecteurs propres associés.

En clair, si on exprime les vecteurs dans la base P, l'application linéaire associée à la matrice A devient une application diagonale : une simple multiplication des coefficients des vecteurs par les valeurs propres.

Il faut donc trouver des vecteurs v tels que $Av = \lambda v$, où λ est la valeur propre associée. v est alors un vecteur propre de A.

Si on trouve n vecteurs propres **linéairement indépendants**, on peut former la matrice P avec ces vecteurs comme colonnes, et la matrice D sera une matrice diagonale avec les valeurs propres correspondantes sur la diagonale.

Définition 2.9 (Valeur propre et vecteur propre)**.** Soit A une matrice carrée de taille n. On dit qu'un scalaire λ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur non nul $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $Av = \lambda v$. Dans ce cas, v est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Remarque. Il est important de noter que les valeurs propres peuvent être complexes, même si la matrice A est réelle. Dans ce cas, les vecteurs propres associés seront également complexes.

Exemple 2.10. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On cherche les valeurs propres de A. On part de $Av = \lambda v$. Un vecteur propre trivial est $v = (1, 0)$. En effet,

$$A(1, 0) = (1, 0) = 1(1, 0).$$

Donc $\lambda = 1$ est une valeur propre de A. On sait que l'autre vecteur propre aura une composante non nulle en y (car les 2 vecteurs propres doivent être linéairement indépendants). Prenons $v = (1, 1)$. On a :

$$A(1, 1) = (1 + 1, 2) = (2, 2) = 2(1, 1).$$

Donc $\lambda = 2$ est une valeur propre de A. On a donc trouvé les valeurs propres $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$ avec les vecteurs propres associés $v_1 = (1, 0)$ et $v_2 = (1, 1)$. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Remarque. Toutes les applications ne peuvent pas être diagonalisées.

Exercice 2.11. Soit A une matrice 2×2 :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice correspond à l'application linéaire $f(x, y) = (3x, x + 2y)$. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

Solution. De la même manière que dans l'exemple précédent, on cherche les valeurs propres et les vecteurs propres de A. On part de $Av = \lambda v$. Un vecteur propre trivial est $v = (0, 1)$. En effet,

$$A(0, 1) = (0, 2) = 2(0, 1).$$

Donc $\lambda = 2$ est une valeur propre de A. Pour trouver l'autre valeur propre, on cherche un vecteur propre avec une composante non nulle en x. Prenons $v = (1, 1)$, on a :

$$A(1, 1) = (3, 1 + 2) = (3, 3) = 3(1, 1).$$

Donc $\lambda = 3$ est une valeur propre de A. On a donc trouvé les valeurs propres $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$ avec les vecteurs propres associés $v_1 = (0, 1)$ et $v_2 = (1, 1)$. $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ □

Juste avant de passer à la suite il est très important de comprendre que diagonaliser une application linéaire signifie que l'on applique l'application à des vecteurs décomposés dans la base des vecteurs propres.

3 Diagonalisation du Laplacien

Avant de s'intéresser à la diagonalisation du Laplacien, étudions ce que sont les espaces de fonctions.

3.1 Espaces de fonctions

3.1.1 Espaces des polynômes

Commençons par un espace de fonctions simple : l'espace des polynômes.

On note $\mathcal{P}_n(\Omega)$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n sur un intervalle Ω.

On remarque que si on prend 2 polynômes p et q dans $\mathcal{P}_n(\Omega)$ et un nombre c, alors leur somme $p + q$ et le produit cp sont également dans $\mathcal{P}_n(\Omega)$. L'espace $\mathcal{P}_n(\Omega)$ remplit également les autres conditions d'un espace vectoriel (voir annexe).

Ici, les vecteurs ne sont plus des flèches dans un espace euclidien, mais des polynômes.

La base canonique de l'espace des polynômes de degré au plus n est donnée par la famille $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$.

Cette famille génère bien l'ensemble des polynômes de degré au plus n . Et elle est libre, car les polynômes $1, x, x^2, \ldots, x^n$ sont linéairement indépendants (à partir de l'addition et de la multiplication par un scalaire, on ne peut obtenir x grâce aux autres).

Remarque. La base canonique est constituée de $n+1$ éléments, ce qui indique que la dimension de cet espace vectoriel est $n+1$.

Exemple 3.1. Soit $p(x) = x^2 + 2x + 1$ un polynôme de degré 2. On peut l'écrire comme combinaison linéaire de la base canonique :

$$p(x) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot x + 1 \cdot x^2.$$

p a pour coordonnée $(1, 2, 1)$ dans la base canonique.

Exercice 3.2. Soit $p(x) = 3x^4 + 0.5x + 2$. Trouver ses coordonnées dans la base canonique.

Solution. On a $p(x) = 3x^4 + 0.5x + 2$. On peut l'écrire comme combinaison linéaire de la base canonique :

$$p(x) = 2 \cdot 1 + 0.5 \cdot x + 3 \cdot x^4.$$

p a pour coordonnée $(2, 0.5, 0, 0, 3)$ dans la base canonique. □

Exercice 3.3. Soit $p(x) = x^2 + 2$. Trouver ses coordonnées dans la base $B = \{(x+1)^2, (x+1), 1\}$.

Indication. On cherche des coefficients a, b, c tels que

$$p(x) = a \cdot (x+1)^2 + b \cdot (x+1) + c \cdot 1.$$

Commencez par développer l'expression de droite et regrouper les termes en fonction des puissances de x. Ensuite, identifiez les coefficients des termes en x^2, x et la constante pour obtenir un système d'équations à résoudre pour a, b et c.

Solution. On a $p(x) = x^2 + 2$. Calculons $1 \cdot (x+1)^2 = 1 \cdot (x^2 + 2x + 1) = x^2 + 2x + 1$. Donc on peut écrire :

$$p(x) = (x^2 + 2x + 1) - 2x + 1 = (x^2 + 2x + 1) - (2x - 2) + 3 = 1 \cdot (x+1)^2 - 2 \cdot (x+1) + 3 \cdot 1.$$

Ainsi, les coordonnées de p dans la base B sont $(1, -2, 3)$. □

3.1.2 Espace des fonctions continues

On note $\mathcal{C}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues sur un intervalle Ω.

Cet espace est, à l'inverse de tous les espaces que nous avons vus jusqu'à présent, de dimension infinie.

Chaque vecteur de cet espace représente une fonction définie sur Ω.

Exemple 3.4. Soit $\Omega = [0, 1]$.

— la fonction $f(x) = x^2$ est un élément de $\mathcal{C}(\Omega)$.

— la fonction $g(x) = \sin(2\pi x)$ est un élément de $\mathcal{C}(\Omega)$.

— la fonction $h(x) = e^x$ est un élément de $\mathcal{C}(\Omega)$.

— la fonction $k(x) = 0$ est un élément de $\mathcal{C}(\Omega)$ (c'est l'élément neutre de l'addition).

3.1.3 Espace des fonctions de carré intégrable $L^2(\Omega)$

"de carré intégrable", qu'est ce que cela veut dire ?

Cela signifie que les fonctions f de cet espace vérifient

$$\int_\Omega |f(x)|^2\, dx < \infty.$$

où Ω est l'ensemble de définition de la fonction f.

Indication. Pour comprendre cette condition, il est utile de décortiquer l'expression :
- $\int_\Omega$: c'est l'intégrale sur l'intervalle Ω.
- $|f(x)|^2$: c'est le carré du module de la fonction f en x.
- $< \infty$: cela signifie que l'intégrale a une valeur finie.

Il est important de prendre cette méthode de décorticage pour comprendre la suite.

Pourquoi cela nous intéresse-t-il ?

Revenons à la définition du produit scalaire dans l'espace euclidien (2.3, 2.1.1).

On avait défini le produit scalaire de deux vecteurs u et v comme la somme des produits de leurs composantes.

$$\langle u,\, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$

On va définir de manière similaire le produit scalaire dans l'espace $L^2(\Omega)$, où Ω est l'ensemble de définition, ici un intervalle de $\mathbb{C}$ car il sera utile de travailler avec des complexes plus tard.

Définition 3.5. Soit $f, g \in L^2(\Omega)$. On définit le produit scalaire par

$$\langle f,\, g\rangle = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

Où $\overline{g(x)}$ désigne le complexe conjugué de $g(x)$.

Ce produit scalaire retourne un nombre complexe qui représente une mesure de la similarité entre les fonctions f et g sur l'intervalle Ω tout comme le produit scalaire dans un espace euclidien.

Exercice 3.6. Soit $f, g \in L^2(\Omega)$. Montrer que le produit scalaire défini ci-dessus vérifie les propriétés du produit scalaire hermitien, quasi identique à celui défini plus haut (c.f. 2.3) :
- **Linéarité en premier argument :** Pour tout $h \in L^2(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, on a
$$\langle \alpha f + h,\, g\rangle = \alpha \langle f,\, g\rangle + \langle h,\, g\rangle\,.$$
- **Semi-linéarité en second argument :** Pour tout $h \in L^2(\Omega)$ et $\beta \in \mathbb{C}$, on a
$$\langle f,\, \beta g + h\rangle = \overline{\beta}\langle f,\, g\rangle + \langle f,\, h\rangle\,.$$
- **Conjugaison :** On a
$$\langle f,\, g\rangle = \overline{\langle g,\, f\rangle}.$$
- **Positivité :** On a
$$\langle f,\, f\rangle \geq 0,$$
avec égalité si et seulement si $f = 0$ presque partout.

Solution. On vérifie chaque propriété une par une :

— **Linéarité en premier argument :** Pour tout $h \in L^2(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, on a

$$\langle \alpha f + h,\, g\rangle = \int_\Omega (\alpha f(x)+h(x))\overline{g(x)}\, dx = \alpha \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\, dx + \int_\Omega h(x)\overline{g(x)}\, dx = \alpha \langle f,\, g\rangle + \langle h,\, g\rangle .$$

— **Semi-linéarité en second argument :** Pour tout $h \in L^2(\Omega)$ et $\beta \in \mathbb{C}$, on a

$$\langle f,\, \beta g + h\rangle = \int_\Omega f(x)\overline{(\beta g(x) + h(x))}\, dx = \overline{\beta} \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\, dx + \int_\Omega f(x)\overline{h(x)}\, dx = \overline{\beta} \langle f,\, g\rangle + \langle f,\, h\rangle .$$

— **Conjugaison :** On a

$$\langle f,\, g\rangle = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\, dx = \overline{\int_\Omega g(x)\overline{f(x)}\, dx} = \overline{\langle g,\, f\rangle}.$$

— **Positivité :** On a

$$\langle f,\, f\rangle = \int_\Omega |f(x)|^2\, dx \geq 0.$$

□

Comme on vient de le montrer, le produit scalaire a quasi les mêmes propriétés que celui défini dans un espace euclidien.

Maintenant que nous avons défini le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$, nous pouvons définir la norme (comme pour les espaces euclidiens).

Définition 3.7 (Norme dans $L^2(\Omega)$)**.** Pour tout $f \in L^2(\Omega)$, on définit la norme de f par

$$\|f\| = \sqrt{\langle f,\, f\rangle} = \sqrt{\int_\Omega |f(x)|^2\, dx}.$$

Nous avons défini tout ce qu'il faut pour parler de diagonalisation du Laplacien.

3.2 Diagonalisation du Laplacien

Dans cette partie, nous nous plaçons dans l'espace des fonctions T-périodiques et de carré intégrable et suffisamment lisse, que nous noterons $L^2_T(\Omega)$.

3.2.1 Laplacien

Le laplacien est un opérateur différentiel très utilisé en physique. Il permet de décrire des phénomènes tels que la diffusion.

Définition 3.8. Soit $u \in L^2_T(\Omega)$. On définit le Laplacien de u par

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Exercice 3.9. Montrer que le Laplacien est un opérateur linéaire. C'est à dire que pour tout $u, v \in L^2_T(\Omega)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a

$$\Delta(\alpha u + \beta v) = \alpha \Delta u + \beta \Delta v.$$

Indication. Utiliser la linéarité des dérivées partielles : pour une variable x_i. puis dériver une seconde fois et sommer sur i. La périodicité n'intervient pas ici.

Solution. Soit $u, v \in L^2_T(\Omega)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. u et v sont donc des fonctions T périodiques. On a

$$\Delta(\alpha u + \beta v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(\alpha u + \beta v) = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \beta \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \right) = \alpha \Delta u + \beta \Delta v.$$

L'opérateur Laplacien est donc linéaire car les dérivées partielles sont linéaires. □

Le faite que le Laplacien soit un opérateur linéaire est très important pour la suite, cela signifie que l'on peut appliquer les notions de diagonalisation vues plus haut qui ont été définies pour des applications linéaires.

On peut voir le Laplacien comme une application linéaire qui prend en entrée une fonction u (un vecteur dans $L^2_T(\Omega)$) et qui retourne une autre fonction Δu (un autre vecteur dans $L^2_T(\Omega)$).

3.2.2 Diagonalisation

Nous allons diagonaliser l'opérateur Δ dans l'espace $L^2_T(\Omega)$. Le processus est le même que pour les applications linéaires (cf. 2.10). Nous cherchons des fonctions $u \in L^2_T(\Omega)$ et des scalaires $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\Delta u = \lambda u.$$

avec $u \in L^2_T(\Omega)$, c'est à dire une fonction T-périodique.

Exercice 3.10. Trouver l'ensemble des fonctions propres associées à l'opérateur Δ, c'est à dire l'ensembles des fonctions qui vérifient l'équation (3.2.2). On prendra les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ et le cas 1D (c'est à dire $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$).

Indication. Chercher des solutions sous la forme $u(x) = e^{ikx}$. La T-périodicité impose $k = \frac{2\pi n}{T}$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Solution. Partons de l'équation (3.2.2) :

$$\Delta u = \lambda u.$$

En utilisant la définition du Laplacien, on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda u.$$

Il faut donc résoudre cette équation différentielle pour trouver les fonctions propres u et les valeurs propres λ. Les fonctions u doivent être T périodiques et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On peut chercher des solutions sous la forme $u(x) = e^{ikx}$ avec $k \in \mathbb{R}$. En effet, $u(x)$ est T-périodique si et seulement si k est un multiple de $\frac{2\pi}{T}$. En substituant cette forme dans l'équation différentielle, on obtient :

$$-k^2 e^{ikx} = \lambda e^{ikx}.$$

Cela signifie que les valeurs propres sont de la forme $\lambda = -k^2$ et que les fonctions propres sont de la forme $u(x) = e^{ikx}$. Avec $k = \frac{2\pi n}{T}$ pour $n \in \mathbb{Z}$, on obtient les valeurs propres $\lambda_n = -\left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2$ et les fonctions propres $u_n(x) = e^{i\frac{2\pi n}{T}x}$. □

On note $\hat{f}$ une fonction exprimée dans la base des fonctions propres u_n et c_n les coefficients de la fonction $\hat{f}$ dans cette base.

Si on applique Δ à une fonction $\hat{f}$ exprimée dans cette base, on obtient :

$$\Delta \hat{f} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n c_n,$$

où c_n sont les coefficients de la fonction $\hat{f}$ dans la base des fonctions propres.

Cette équation différentielle, s'est transformée en une simple multiplication par les valeurs propres. Cela simplifie grandement les calculs, en particulier pour la résolution d'équations différentielles qui devient algébrique.

Maintenant regardons comment passer de f à $\hat{f}$, c'est à dire quels sont les coefficients c_n.

Exercice 3.11. La base des fonctions propres u du Δ est elle : orthonormée ? orthogonale ? ou ni l'un ni l'autre ? Pour cela on utilisera le produit scalaire défini plus haut (3.5).

Indication. Calculer $\langle u_n, u_m \rangle = \int_0^T e^{i\frac{2\pi n}{T}x}\, e^{-i\frac{2\pi m}{T}x}\, dx$. Quand le produit scalaire est 0, cela signifie que u_n et u_m sont orthogonaux.

Solution. On identifie que Ω, l'ensemble de définition est $[0, T]$. On peut donc calculer le produit scalaire de deux fonctions propres u_n et u_m :

$$\langle u_n, u_m \rangle = \int_0^T u_n \overline{u_m}\, dx = \int_0^T e^{i\frac{2\pi n}{T}x} e^{-i\frac{2\pi m}{T}x}\, dx = \int_0^T e^{i\frac{2\pi(n-m)}{T}x}\, dx.$$

Si $n \neq m$, cette intégrale s'annule : en effet on intègre une exponentielle dont la moyenne sur une période est nulle, ce qui donne zéro. Et si $n = m$, on obtient :

$$\langle u_n, u_n \rangle = \int_0^T |u_n|^2\, dx = \int_0^T 1\, dx = T.$$

On en déduit que la famille $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthogonale et que les fonctions propres sont de norme $\sqrt{T}$. □

Les vecteurs u_n sont donc orthogonaux mais pas normés (car leur norme est $\sqrt{T}$ et non 1). On peut normaliser ces vecteurs u en les divisant par leur norme, ce qui donne une nouvelle famille orthonormée $\{v_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ avec $v_n = \frac{u_n}{\sqrt{T}}$.

Cette partie est un tour de passe-passe pour obtenir l'expression des coefficients c_n en passant par une base orthonormée.

Remarque. Ces vecteurs v_n forment une base orthonormée de $L^2(0, T)$ et sont des vecteurs propres de l'opérateur Δ.

Pour trouver les composantes d_n d'une fonction $f \in L^2_T(\Omega)$ dans la base des fonctions propres v_n, on utilise le produit scalaire (comme pour un espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$). On a alors :

$$d_n = \langle f, v_n \rangle = \int_0^T f(x)\overline{v_n(x)}\, dx = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f(x)\overline{u_n(x)}\, dx.$$

On a donc comme pour un espace euclidien :

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n v_n.$$

Cependant, on préfère travailler dans la base des fonctions propres u_n.

On a donc :

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n u_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \sqrt{T} v_n.$$

avec $c_n = \frac{1}{\sqrt{T}} d_n$, par identification des composantes.

Finalement, on a :

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\overline{u_n(x)}\,dx.$$

et

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n u_n \tag{3.1}$$

On a donc exprimé une fonction f dans la base des fonctions propres u_n du Laplacien et déterminé les coefficients c_n de cette décomposition.

On appelle c_n les coefficients de Fourier.

Sans même s'en rendre compte, nous venons de définir la notion de série de Fourier.

Remarque. La série de Fourier permet de représenter une fonction périodique comme une somme infinie de fonctions trigonométriques (ici des exponentielles complexes). Cette représentation est très utile en analyse, en physique et en ingénierie, car elle permet de décomposer des signaux complexes en leurs composantes fréquentielles.

3.3 Application : diffusion périodique en 1D

On considère l'équation de diffusion (chaleur) sur $[0, T]$ avec conditions périodiques :

$$\frac{\partial\Theta(x,t)}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2\Theta(x,t)}{\partial x^2} = \Delta\Theta(x,t), \qquad x\in[0,T],\ t\geq 0,$$

avec $\Theta(\cdot, t)$ T-périodique pour tout t, et une condition initiale $\Theta(x, 0) = f(x) \in L^2_T(0, T)$ qui s'annule aux bords.

Exercice 3.12. En utilisant la diagonalisation de Δ sur la base propre $u_n(x) = e^{i\frac{2\pi n}{T}x}$:

a) Rappeler le développement de f en série de Fourier (3.1), u_n et rappeler la formule de c_n.

b) Décomposer $\Theta(x, t)$ en série de Fourier également. On notera ces coefficients $d_n(t)$. Et calculer son laplacien.

c) A partir de la décomposition, récrire l'équation de la chaleur en fonction des coefficients $d_n(t)$.

d) Projeter sur la base des fonctions propres u_n, puis résoudre cette equation différentielle et exprimer $d_n(t)$ en fonction de c_n.

e) En déduire l'expression de la solution $\Theta(x, t)$ en fonction des c_n, et en déduire la limite quand $t \to \infty$.

f) Qu'est ce que vous pouvez dire sur l'importance des coefficients de Fourier avec des grandes valeurs de $|n|$?

Indication.

a) il y a juste à recopier

b) le calcul du laplacien est immédiat dans la base u_n.

c) reprenez le resultat de la question précédente, on devrait obtenir une égalité entre 2 sommes sur $n \in \mathbb{Z}$.

d) Pour le projection c'est comme les vecteurs classique : quand on projet sur u_n, on obtient uniquepment la composabte devant u_n. On rappelle que les solutions d'une equation du première ordre sont des exponentielles multiples par une constante qui correspond à la condition initiale.

Solution. **a)** On a $f = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, u_n$ avec

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\overline{u_n(x)}\,dx = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,e^{-i\frac{2\pi n}{T}x}\,dx.$$

b) On décompose $\Theta(x,t)$ en série de Fourier :

$$\Theta(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n(t)u_n(x),$$

avec

$$d_n(t) = \frac{1}{T}\int_0^T \Theta(x,t)\,\overline{u_n(x)}\,dx = \frac{1}{T}\int_0^T \Theta(x,t)\,e^{-i\frac{2\pi n}{T}x}\,dx.$$

Le laplacien de $\Theta(x,t)$ est :

$$\Delta\Theta(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n(t)\Delta u_n(x) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n(t)\Big(\frac{2\pi n}{T}\Big)^2 u_n(x).$$

c) En substituant la décomposition dans l'équation de la chaleur, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n(t)u_n(x) = D\,\Delta\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n(t)u_n(x).$$

Ce qui donne :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n'(t)u_n(x) = -D\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n(t)\Big(\frac{2\pi n}{T}\Big)^2 u_n(x).$$

d) En projetant sur la base des fonctions propres u_n, on obtient :

$$d_n'(t) = -D\left(\tfrac{2\pi n}{T}\right)^2 d_n(t), \qquad n\in\mathbb{Z}.$$

car les fonctions propres u_n sont orthogonales. Les solutions de cette équation différentielle sont de la forme :

$$d_n(t) = c_n\,e^{-D\left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2 t}, \qquad n\in\mathbb{Z}.$$

En substituant dans la série de Fourier, on obtient la solution :

$$\Theta(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n(t)u_n(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\,e^{-D\left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2 t}u_n(x).$$

e) Lorsque $t\to\infty$, les termes avec $|n|>0$ s'annulent exponentiellement, et on obtient :

$$\Theta(x,t)\to c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx.$$

On remarque que quand $t\to\infty$, la solution $\Theta(x,t)$ tend vers la moyenne de la condition initiale $f(x)$ sur l'intervalle $[0,T]$.

f) Les coefficients de Fourier pour les grandes valeurs de $|n|$ correspondent à des oscillations rapides dans l'espace. Dans le contexte de la diffusion, ces modes sont rapidement atténués, ce qui signifie que les contributions des hautes fréquences deviennent négligeables par rapport aux basses fréquences. Cela illustre le principe de la diffusion, où les variations rapides s'estompent au profit des variations lentes. □

4 Annexes

4.1 Algébre linéaire

Définition 4.1 (Espace vectoriel)**.** Un espace vectoriel V sur un corps K est un ensemble muni de deux opérations :

- une addition $+$ qui associe à chaque paire $(u, v) \in V \times V$ un élément $u + v \in V$,
- une multiplication par un scalaire $\cdot$ qui associe à chaque paire $(\alpha, v) \in K \times V$ un élément $\alpha \cdot v \in V$,

telles que les axiomes suivants soient satisfaits pour tous $u, v, w \in V$ et tous $\alpha, \beta \in K$:

1. $u + v = v + u$ (commutativité de l'addition)
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$ (associativité de l'addition)
3. Il existe un élément neutre pour l'addition noté $0 \in V$ tel que $u + 0 = u$ pour tout $u \in V$.
4. Pour tout $u \in V$, il existe un élément inverse noté $-u \in V$ tel que $u + (-u) = 0$.
5. $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ (distributivité de la multiplication par un scalaire)
6. $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$ (distributivité de la multiplication par un scalaire)
7. $(\alpha \cdot \beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$ (associativité de la multiplication par un scalaire)
8. $1 \cdot u = u$ (élément neutre de la multiplication par un scalaire)

4.2 Un peu de physique

4.2.1 Laplacien et diffusion

Le Laplacien est un opérateur différentiel qui joue un rôle crucial dans de nombreux domaines de la physique, notamment dans la description des phénomènes de diffusion. Il est défini comme la divergence du gradient d'une fonction scalaire. En clair, pour une fonction f définie dans un espace à 3 dimensions (attention, ici on ne parle pas de L^2 mais bien d'un espace qu'on peut experimenter), le laplacien de f indique à quel point f est homogène localement. Si $\Delta f = 0$ en un point, cela signifie que f est localement homogène autour de ce point c'est à dire que la valeur de f en ce point est égale à la moyenne des valeurs de f dans un voisinage autour de ce point.

On remarque que pour l'équation de diffusion, le Laplacien agit comme un opérateur de lissage (car la variation temporelle de la température est proportionnelle au Laplacien de la température). Cela signifie que pour un régime stationnaire (quand la température ne varie plus dans le temps càd. $\frac{\partial \Theta}{\partial t} = 0$), on a $\Delta\Theta = 0$ c'est à dire que la température est homogène. Autour d'un point la température est égale à la moyenne des températures dans un voisinage autour de ce point.