

Diagonalisation du Laplacien — Cours et Exercices

2 septembre 2025

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Prérequis	1
1.2	Indications	1
1.3	Notations	1
2	Diagonalisation d'une Matrice	1
2.1	Rappels	1
2.1.1	Bases	1
2.1.2	Matrice et application linéaire	2
2.2	Diagonalisation	3
2.2.1	Motivation	3
2.2.2	Valeurs propres et vecteurs propres	3
3	Diagonalisation du Laplacien	4
3.1	Espaces de fonctions	4
3.1.1	Espaces des polynômes	4
3.1.2	Espace des fonctions continues	5
3.1.3	Espace des fonctions de carré intégrable $L^2(\Omega)$	5
3.2	Diagonalisation du Laplacien	6
3.2.1	Laplacien	6
3.2.2	Diagonalisation	6
3.3	Application : diffusion périodique en 1D	8
4	Annexes	8
4.1	Algèbre linéaire	8

1 Introduction

Objectif : Comprendre ce que signifie la diagonalisation du Laplacien.

Le format de ce document est le suivant : un petit peu de cours suivi d'une application.

1.1 Prérequis

Pour aborder ce cours, il est recommandé d'avoir des connaissances de base en algèbre linéaire (espaces vectoriels, bases, matrices), les nombres complexes (notamment la notion de complexe conjugué) et en analyse (intégration, dérivée, périodicité).

1.2 Indications

1.3 Notations

- \mathbb{R}^n : espace euclidien de dimension n .
- $M_{n \times m}(\mathbb{R})$: ensemble des matrices de taille $n \times m$ à coefficients réels.

2 Diagonalisation d'une Matrice

Dans cette partie, on se placera dans un espace euclidien de dimension finie \mathbb{R}^n et on considérera des matrices réelles $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

2.1 Rappels

2.1.1 Bases

Définition 2.1 (Base). Une famille de vecteurs $(e_i)_{i \in I}$ dans un espace vectoriel E est une base de E si elle est libre et si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de ces vecteurs (génératrice).

Remarque. La notion de base est fondamentale en algèbre linéaire, car elle permet de décrire tout vecteur d'un espace vectoriel comme une combinaison linéaire de vecteurs de cette base.

Remarque. Le nombre d'éléments d'une base d'un espace vectoriel indique la dimension de cet espace.

Cette famille de vecteurs peut être orthogonale, orthonormée, ou aucune de ces formes. Pour le savoir, on utilise le produit scalaire.

Définition 2.2 (Produit scalaire). Un produit scalaire est une application bilinéaire symétrique définie sur un espace vectoriel, qui associe à chaque paire de vecteurs un scalaire. Dans un espace euclidien, il est souvent noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et vérifie les propriétés suivantes :

- $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ (symétrie)
- $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ (linéarité)
- $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ (linéarité)
- $\langle u, u \rangle \geq 0$ avec égalité si et seulement si $u = 0$ (définie positive)

Remarque. Le produit scalaire dans un espace euclidien est souvent défini par la formule

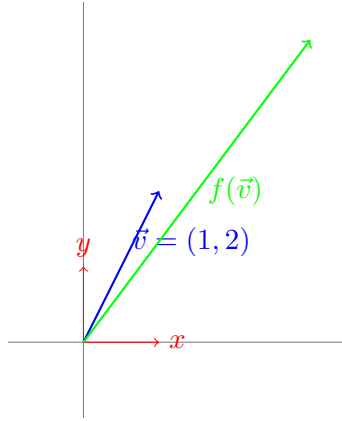
$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

où $u = (u_1, \dots, u_n)$ et $v = (v_1, \dots, v_n)$ sont des vecteurs de \mathbb{R}^n .

Définition 2.3 (Norme). La norme d'un vecteur u dans un espace vectoriel avec produit scalaire est définie par $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.

La définition formelle du produit scalaire n'est pas si important à comprendre mais elle permet de définir la notion d'orthogonalité entre deux vecteurs.

FIGURE 1 – Représentation géométrique de l'application linéaire $f(x, y) = (x + y, 2y)$



2.1.2 Matrice et application linéaire

Définition 2.4 (Application linéaire). Soit E et F deux espaces vectoriels. Une application $T : E \rightarrow F$ est dite linéaire si pour tout $u, v \in E$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$T(u + v) = T(u) + T(v) \quad \text{et} \quad T(\alpha u) = \alpha T(u).$$

Définition 2.5 (Matrice associée). Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. On appelle matrice associée à f la matrice $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, on a

$$f(v) = Av.$$

Remarque. On peut voir une application linéaire comme une transformation géométrique qui s'applique à un autre objet géométrique (le vecteur). En d'autres termes, le comportement de l'application linéaire est indépendant de la base choisie. La matrice associée à l'application linéaire quant à elle, dépend de la base choisie où v est exprimé et où $f(v)$ est exprimé également.

Exemple 2.6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, 2y)$. Montrons que f est linéaire.

Démonstration. Soit $u, v \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On note $u = (u_x, u_y)$ et $v = (v_x, v_y)$. On a

$$f(u+v) = f(u_x+v_x, u_y+v_y) = (u_x+v_x+u_y+v_y, 2(u_y+v_y)) = (u_x+u_y, 2u_y) + (v_x+v_y, 2v_y) = f(u) + f(v).$$

De même,

$$f(\alpha u) = f(\alpha u_x, \alpha u_y) = (\alpha u_x + \alpha u_y, 2\alpha u_y) = \alpha(u_x + u_y, 2u_y) = \alpha f(u).$$

Donc f est linéaire. □

Remarque. La matrice associée à f est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier en calculant $f(v)$ pour $v = (v_x, v_y)$ et en utilisant le produit matriciel Av .

Exercice 2.7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x * y, x + y)$. Montrer que f n'est pas linéaire.

2.2 Diagonalisation

2.2.1 Motivation

La puissance d'une matrice peut être très coûteuse à calculer, en particulier pour des matrices de grande taille. La diagonalisation d'une matrice permet de simplifier ce calcul en réduisant le problème à celui de la puissance de matrices diagonales, qui est beaucoup plus simple.

L'objectif de la diagonalisation, peut être vu comme changer la base de l'espace vectoriel afin que la matrice associée à l'application linéaire devienne diagonale.

C'est-à-dire :

$$A = PDP^{-1}$$

où D est une matrice diagonale et P est la matrice de changement de base de l'application linéaire.

2.2.2 Valeurs propres et vecteurs propres

L'objectif est donc de trouver les coefficients de la matrice diagonale D (que l'on appellera valeurs propres) et la matrice P composée des vecteurs propres associés.

En clair, si on exprime les vecteurs dans la base P , l'application linéaire associée à la matrice A devient une application diagonale : une simple multiplication des coefficients des vecteurs par les valeurs propres.

Il faut donc trouver des vecteurs v tels que $Av = \lambda v$, où λ est la valeur propre associée. v est alors un vecteur propre de A .

Si on trouve n vecteurs propres **linéairement indépendants**, on peut former la matrice P avec ces vecteurs comme colonnes, et la matrice D sera une matrice diagonale avec les valeurs propres correspondantes sur la diagonale.

Définition 2.8 (Valeur propre et vecteur propre). Soit A une matrice carrée de taille n . On dit qu'un scalaire λ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur non nul $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $Av = \lambda v$. Dans ce cas, v est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ .

Remarque. Il est important de noter que les valeurs propres peuvent être complexes, même si la matrice A est réelle. Dans ce cas, les vecteurs propres associés seront également complexes.

Exemple 2.9. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On cherche les valeurs propres de A . On part de $Av = \lambda v$. Un vecteur propre trivial est $v = (1, 0)$. En effet,

$$A(1, 0) = (1, 0) = 1(1, 0).$$

Donc $\lambda = 1$ est une valeur propre de A . On sait que l'autre vecteur propre aura une composante non nulle en y (car les 2 vecteurs propres doivent être linéairement indépendants). Prenons $v = (1, 1)$. On a :

$$A(1, 1) = (1 + 1, 2) = (2, 2) = 2(1, 1).$$

Donc $\lambda = 2$ est une valeur propre de A . On a donc trouvé les valeurs propres $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$ avec les vecteurs propres associés $v_1 = (1, 0)$ et $v_2 = (1, 1)$. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Remarque. Toutes les applications ne peuvent pas être diagonalisées.

Exercice 2.10. Soit A une matrice 2×2 :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice correspond à l'application linéaire $f(x, y) = (3x, x + 2y)$. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de A .

Juste avant de passer à la suite il est très important de comprendre que diagonaliser une application linéaire signifie que l'on applique l'application à des vecteurs décomposés dans la base des vecteurs propres.

3 Diagonalisation du Laplacien

Avant de s'intéresser à la diagonalisation du Laplacien, étudions ce que sont les espaces de fonctions.

3.1 Espaces de fonctions

3.1.1 Espaces des polynômes

Commençons par un espace de fonctions simple : l'espace des polynômes.

On note $\mathcal{P}_n(\Omega)$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n sur un intervalle Ω .

On remarque que si on prend 2 polynômes p et q dans $\mathcal{P}_n(\Omega)$ et un nombre c , alors leur somme $p + q$ et le produit cp sont également dans $\mathcal{P}_n(\Omega)$. L'espace $\mathcal{P}_n(\Omega)$ remplit également les autres conditions d'un espace vectoriel (voir annexe).

Ici, les vecteurs ne sont plus des flèches dans un espace euclidien, mais des polynômes.

La base canonique de l'espace des polynômes de degré au plus n est donnée par la famille $(1, x, x^2, \dots, x^n)$.

Cette famille génère bien l'ensemble des polynômes de degré au plus n . Et elle est libre, car les polynômes $1, x, x^2, \dots, x^n$ sont linéairement indépendants (à partir de l'addition et de la multiplication par un scalaire, on ne peut obtenir x grâce aux autres).

Remarque. La base canonique est constituée de $n + 1$ éléments, ce qui indique que la dimension de cet espace vectoriel est $n + 1$.

Exemple 3.1. Soit $p(x) = x^2 + 2x + 1$ un polynôme de degré 2. On peut l'écrire comme combinaison linéaire de la base canonique :

$$p(x) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot x + 1 \cdot x^2.$$

p a pour coordonnée $(1, 2, 1)$ dans la base canonique.

Exercice 3.2. Soit $p(x) = 3x^4 + 0.5x + 2$. Trouver ses coordonnées dans la base canonique.

Exercice 3.3. Soit $p(x) = x^2 + 2$. Trouver ses coordonnées dans la base $B = \{(x+1)^2, (x+1), 1\}$.

3.1.2 Espace des fonctions continues

On note $\mathcal{C}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle Ω .

Cet espace est, à l'inverse de tous les espaces que nous avons vus jusqu'à présent, de dimension infinie.

Chaque vecteur de cet espace représente une fonction définie sur Ω .

Exemple 3.4. Soit $\Omega = [0, 1]$.

- la fonction $f(x) = x^2$ est un élément de $\mathcal{C}(\Omega)$.
- la fonction $g(x) = \sin(2\pi x)$ est un élément de $\mathcal{C}(\Omega)$.
- la fonction $h(x) = e^x$ est un élément de $\mathcal{C}(\Omega)$.
- la fonction $k(x) = 0$ est un élément de $\mathcal{C}(\Omega)$ (c'est l'élément neutre de l'addition).

3.1.3 Espace des fonctions de carré intégrable $L^2(\Omega)$

"de carré intégrable", qu'est ce que cela veut dire ?

Cela signifie que les fonctions f de cet espace vérifient

$$\int_{\Omega} |f|^2 dx < \infty.$$

où Ω est l'ensemble de définition de la fonction f .

Pourquoi cela nous intéresse-t-il ?

Revenons à la définition du produit scalaire dans l'espace euclidien (2.2, 2.1.1).

On avait défini le produit scalaire de deux vecteurs u et v comme la somme des produits de leurs composantes.

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

On va définir de manière similaire le produit scalaire dans l'espace $L^2(\Omega)$, où Ω est l'ensemble de définition, ici un intervalle de \mathbb{C} car il sera utile de travailler avec des complexes plus tard.

Définition 3.5. Soit $f, g \in L^2(\Omega)$. On définit le produit scalaire par

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Où $\overline{g(x)}$ désigne le complexe conjugué de $g(x)$.

Exercice 3.6. Soit $f, g \in L^2(\Omega)$. Montrer que le produit scalaire défini ci-dessus vérifie les propriétés du produit scalaire hermitien, quasi identique à celui défini plus haut (c.f. 2.2) :

— **Linéarité en premier argument :** Pour tout $h \in L^2(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, on a

$$\langle \alpha f + h, g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle + \langle h, g \rangle.$$

— **Semi-linéarité en second argument :** Pour tout $h \in L^2(\Omega)$ et $\beta \in \mathbb{C}$, on a

$$\langle f, \beta g + h \rangle = \overline{\beta} \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle.$$

— **Conjugaison :** On a

$$\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}.$$

— **Positivité :** On a

$$\langle f, f \rangle \geq 0,$$

avec égalité si et seulement si $f = 0$ presque partout.

Maintenant que nous avons défini le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$, nous pouvons définir la norme.

Définition 3.7 (Norme dans $L^2(\Omega)$). Pour tout $f \in L^2(\Omega)$, on définit la norme de f par

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx}.$$

Nous avons défini tout ce qu'il faut pour parler de diagonalisation du Laplacien.

3.2 Diagonalisation du Laplacien

Dans cette partie, nous nous plaçons dans l'espace des fonctions T -périodiques et de carré intégrable, que nous noterons $L_T^2(\Omega)$.

3.2.1 Laplacien

Le laplacien est un opérateur différentiel très utilisé en physique. Il permet de décrire des phénomènes tels que la diffusion.

Définition 3.8. Soit $u \in L_T^2(\Omega)$. On définit le Laplacien de u par

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Exercice 3.9. Montrer que le Laplacien est un opérateur linéaire. C'est à dire que pour tout $u, v \in L_T^2(\Omega)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a

$$\Delta(\alpha u + \beta v) = \alpha \Delta u + \beta \Delta v.$$

Indication. Utiliser la linéarité des dérivées partielles : pour une variable x_i , puis dériver une seconde fois et sommer sur i . La périodicité n'intervient pas ici.

3.2.2 Diagonalisation

Nous allons diagonaliser l'opérateur Δ dans l'espace $L_T^2(\Omega)$. Le processus est le même que pour les applications linéaires (cf. 2.9). Nous cherchons des fonctions $u \in L_T^2(\Omega)$ et des scalaires $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\Delta u = \lambda u.$$

avec $u \in L_T^2(\Omega)$, c'est à dire une fonction T -périodique.

Exercice 3.10. Trouver l'ensemble des fonctions propres associées à l'opérateur Δ , c'est à dire l'ensemble des fonctions qui vérifient l'équation (3.2.2). On prendra les fonctions à valeurs dans \mathbb{C} et le cas 1D (c'est à dire $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$).

Indication. Chercher des solutions sous la forme $u(x) = e^{ikx}$. La T -périodicité impose $k = \frac{2\pi n}{T}$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Cela signifie que si on exprime une fonction $f \in L_T^2(\Omega)$ dans la base des fonctions propres de Δ , l'opérateur Δ devient diagonal. Si on applique Δ à une fonction \hat{f} exprimée dans cette base, on obtient :

$$\Delta \hat{f} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n c_n,$$

où c_n sont les coefficients de la fonction \hat{f} dans la base des fonctions propres.

Cette équation différentielle, s'est transformée en une simple multiplication par les valeurs propres.

Maintenant regardons comment passer de f à \hat{f} .

Exercice 3.11. La base des fonctions propres u du Δ est elle : orthonormée ? orthogonale ? ou ni l'un ni l'autre ? Pour cela on utilisera le produit scalaire défini plus haut (3.5).

Indication. Calculer $\langle u_n, u_m \rangle = \int_0^T e^{i\frac{2\pi n}{T}x} e^{-i\frac{2\pi m}{T}x} dx$. Quand le produit scalaire est 0, cela signifie que u_n et u_m sont orthogonaux.

On peut donc normaliser ces vecteurs u en les divisant par leur norme, ce qui donne une nouvelle famille orthonormée $\{v_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ avec $v_n = \frac{u_n}{\sqrt{T}}$.

Remarque. Ces vecteurs v_n forment une base orthonormée de $L^2(0, T)$ et sont des vecteurs propres de l'opérateur Δ .

Pour trouver les composantes d_n d'une fonction $f \in L_T^2(\Omega)$ dans la base des fonctions propres v_n , on utilise le produit scalaire (comme pour un espace vectoriel de \mathbb{R}^2). On a alors :

$$d_n = \langle f, v_n \rangle = \int_0^T f(x) \overline{v_n(x)} dx = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f(x) \overline{u_n(x)} dx.$$

Remarque. Les coefficients d_n peuvent être interprétés comme les projections de la fonction f sur les fonctions propres v_n .

On a donc :

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n v_n.$$

Usuellement, on préfère travailler dans la base des fonctions propres u_n .

On a donc :

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n u_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \sqrt{T} v_n.$$

avec $c_n = \frac{1}{\sqrt{T}} d_n$, par identification des composantes.

Finalement, on a :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \overline{u_n(x)} dx.$$

et

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n u_n \tag{3.1}$$

On appelle c_n les coefficients de Fourier.

Sans même s'en rendre compte, nous venons de définir la notion de série de Fourier.

Remarque. La série de Fourier permet de représenter une fonction périodique comme une somme infinie de fonctions trigonométriques (ici des exponentielles complexes). Cette représentation est très utile en analyse, en physique et en ingénierie, car elle permet de décomposer des signaux complexes en leurs composantes fréquentielles.

3.3 Application : diffusion périodique en 1D

On considère l'équation de diffusion (chaleur) sur $[0, T]$ avec conditions périodiques :

$$\frac{\partial \Theta(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \Theta(x, t)}{\partial x^2} = \Delta \Theta(x, t), \quad x \in [0, T], \quad t \geq 0,$$

avec $\Theta(\cdot, t)$ T -périodique pour tout t , et une condition initiale $\Theta(x, 0) = f(x) \in L_T^2(0, T)$ qui s'annule aux bords.

Exercice 3.12. En utilisant la diagonalisation de Δ sur la base propre $u_n(x) = e^{i \frac{2\pi n}{T} x}$:

- Rappeler le développement de f en série de Fourier (3.1), u_n et rappeler la formule de c_n .
- Décomposer $\Theta(x, t)$ en série de Fourier également. On notera ces coefficients $d_n(t)$. Et calculer son laplacien.
- A partir de la décomposition, récrire l'équation de la chaleur en fonction des coefficients $d_n(t)$.
- Projeter sur la base des fonctions propres u_n , puis résoudre cette equation différentielle et exprimer $d_n(t)$ en fonction de c_n .
- En déduire l'expression de la solution $\Theta(x, t)$ en fonction des c_n , et en déduire la limite quand $t \rightarrow \infty$.

- f) Qu'est ce que vous pouvez dire sur l'importance des coefficients de Fourier avec des grandes valeurs de $|n|$?

Indication.

- a) il y a juste à recopier
- b) le calcul du laplacien est immédiat dans la base u_n .
- c) reprenez le resultat de la question précédente, on devrait obtenir une égalité entre 2 sommes sur $n \in \mathbb{Z}$.
- d) Pour le projection c'est comme les vecteurs classique : quand on projet sur u_n , on obtient uniquement la composante devant u_n . On rappelle que les solutions d'une equation du première ordre sont des exponentielles multiples par une constante qui correspond à la condition initiale.

4 Annexes

4.1 Algèbre linéaire

Définition 4.1 (Espace vectoriel). Un espace vectoriel V sur un corps K est un ensemble muni de deux opérations :

- une addition $+$ qui associe à chaque paire $(u, v) \in V \times V$ un élément $u + v \in V$,
- une multiplication par un scalaire \cdot qui associe à chaque paire $(\alpha, v) \in K \times V$ un élément $\alpha \cdot v \in V$,

telles que les axiomes suivants soient satisfaits pour tous $u, v, w \in V$ et tous $\alpha, \beta \in K$:

1. $u + v = v + u$ (commutativité de l'addition)
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$ (associativité de l'addition)
3. Il existe un élément neutre pour l'addition noté $0 \in V$ tel que $u + 0 = u$ pour tout $u \in V$.
4. Pour tout $u \in V$, il existe un élément inverse noté $-u \in V$ tel que $u + (-u) = 0$.
5. $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ (distributivité de la multiplication par un scalaire)
6. $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$ (distributivité de la multiplication par un scalaire)
7. $(\alpha \cdot \beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$ (associativité de la multiplication par un scalaire)
8. $1 \cdot u = u$ (élément neutre de la multiplication par un scalaire)