MOwNiT – laboratorium
Rozwiązywanie równań różniczkowych

1. Dane jest równanie różniczkowe (zagadnienie początkowe):

$$y' - kmy\sin(mx) = k^2 m\sin(mx)\cos(mx), \quad y(x_0) = a$$

x_0, x_k, m, k – parametry zadawane, a – wyliczane z rozwiązania dokładnego (*poniżej*).

Znaleźć rozwiązanie tego zagadnienia $y(x)$ w przedziale $[x_0, x_k]$ metodą Eulera oraz metodą Rungego-Kutty. Eksperymenty przeprowadzić dla różnych kroków.

Porównać otrzymane rozwiązanie z rozwiązaniem dokładnym: $y(x) = e^{-k\cos(mx)} - k\cos(mx) + 1$.

Zilustrować wybrane rozwiązania.

2. Dane jest zagadnienie brzegowe:

a) $y'' + m^2 y = m^2 kx \qquad y(0) = 0, \quad y(\frac{2\pi + k}{m}) = b$

rozwiązanie dokładne: $y(x) = -k\sin(mx) + kx$

b wyznaczyć z podanego rozwiązania dokładnego, m, k – parametry zadawane.

b) $y'' + m^2 y = -2m\cos(mx) \qquad y(0) = 1, \quad y(\frac{2\pi + 2}{m}) = b$

rozwiązanie dokładne: $y(x) = \cos(mx) - x\sin(mx)$

b wyznaczyć z podanego rozwiązania dokładnego, m – parametr zadawany.

Znaleźć rozwiązanie $y(x)$ metodą różnic skończonych. Opisać, jakie ilorazy różnicowe były stosowane i jaka z tego wynikła postać zagadnienia algebraicznego do rozwiązania. Porównać otrzymane rozwiązania z rozwiązaniem dokładnym. Zilustrować wybrane rozwiązania.

3. Dane jest zagadnienie:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad dla \quad t \in (0, t_c), \quad x \in (0, l)$$

z warunkami początkowymi: $u(x,0) = \varphi(x) \quad dla\ x \in [0, l]$

i warunkami brzegowymi: $u(0,t) = \psi_1(t) \quad dla\ t > 0$, $u(l,t) = \psi_2(t) \quad dla\ t > 0$ gdzie: a, t_c, l – zadawane.

a) $\varphi(x) = 0, \quad \psi_1(t) = At, \quad \psi_2(t) = \sin(\omega t)$ A, ω - zadawane

b) $\varphi(x) = 0, \quad \psi_1(t) = At, \quad \psi_2(t) = e^{-t}\sin(\omega t)$ A, ω - zadawane

c) $\varphi(x) = A\sin(\alpha x), \quad \psi_1(t) = 0, \quad \psi_2(t) = B$ A, B, α – zadawane

d) $\varphi(x) = x^2\sin(\alpha x), \quad \psi_1(t) = 0, \quad \psi_2(t) = B$ B, α – zadawane

e) $\varphi(x) = Ae^{-x}\sin(\alpha x), \quad \psi_1(t) = 0, \quad \psi_2(t) = B$ A, B, α – zadawane

Znaleźć rozwiązanie $u(x, t)$ metodą różnic skończonych. Zastosować schemat jawny i niejawny (przybliżając odpowiednio pochodną po czasie ilorazem różnicowym przednim, a następnie wstecznym). Eksperymenty przeprowadzić dla różnego doboru kroków po x i t. Sprawdzić stabilność schematu. Zilustrować wybrane rozwiązania.