Univerzita Karlova v Praze
Filozofická fakulta
Katedra logiky

Michal Ketner

Konstruktivní univerzum $\mathbb{L}$
The constructive universe $\mathbb{L}$
Bakalářská práce

Vedoucí práce:
Mgr. Radek Honzík, Ph.D.

2015

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité prameny a literaturu.

V Praze 14. dubna 2007

Michal Ketner

Abstrakt

Resum prce v eskm jazyce.

Abstract

Resum prce v anglickm jazyce.

Obsah

1 Konstrukce univerza

1.1 Formalizace relace splňování

V této části se budem věnovat konstrukci univerza $\mathbb{L}$ uvnitř teorie množin. Konstruktivní universum, zde bude vytvořeno pomoc formalizace logiky uvnitř teorie množin .

Nejdříve si ukažeme, že si vystačíme jen se symboly pro konjunci($\wedge$), negaci ($\neg$) a existenční kvantifikátor ($\exists$).

Věta 1. ***Logická ekvivalence***
Nechť máme formule ψ a ϕ. Pak platí následující ekvivalence:

$$a)\psi \vee \phi \;\equiv\; \neg(\neg\psi \wedge \neg\phi)$$

$$b)\psi \rightarrow \phi \;\equiv\; \neg(\psi \wedge \neg\phi)$$

$$c)\forall x\psi(x) \;\equiv\; \neg\exists\neg\psi(x)$$

Důkaz
a)

$$\psi \vee \phi \Rightarrow \neg\psi \wedge \neg\phi$$

sporem

$$\psi \vee \phi \curlywedge \neg\psi \wedge \neg\phi$$

z druhé formule

$$\neg\psi \curlywedge \neg\phi$$

což je ve sporu s tím, že musí platit aspoň jedna z formulí

$$\psi \curlyvee \phi.$$

Druhá část implikace

$$\neg(\neg\psi \wedge \neg\phi) \Rightarrow \psi \vee \phi$$

obměna

$$\neg(\psi \vee \phi) \Rightarrow \neg\psi \wedge \neg\phi$$

Nechť tedy platí předpoklad

$$\neg(\psi \vee \phi)$$

jinak je implikace triviálně splněna. Z toho dostáváme

$$\neg\psi \curlywedge \neg\phi$$

což je přesně to, co jsme chtěli.

b)

$$\psi \to \phi \Rightarrow \neg(\psi \wedge \neg\phi)$$

sporem

$$\psi \to \phi \curlywedge \psi \wedge \neg\phi$$

z

$$\psi \wedge \neg\phi$$

což je ve sporu s tím, že platí

$$\psi \to \phi$$

Druhá část implikace

$$\neg(\psi \wedge \neg\phi) \Rightarrow \psi \to \phi$$

obměna

$$\neg(\psi \to \phi) \Rightarrow (\psi \wedge \neg\phi)$$

Nechť tedy platí předpoklad

$$\neg(\psi \to \phi)$$

jinak je implikace triviálně splněna. Z toho dostáváme

$$\psi \curlywedge \neg\phi$$

c)

$$\forall x\psi(x) \Rightarrow \neg\exists\neg\psi(x)$$

sporem

$$\forall x\psi(x) \curlywedge \exists\neg\psi(x)$$

tedy existuje nejaky prvek strukutury pro který platí

$$\psi(x) \curlywedge \neg\psi(x)$$

tedy spor

$$\neg\exists\neg\psi(x) \Rightarrow \forall x\psi(x)$$

obměna

$$\neg\forall x\psi(x) \Rightarrow \exists\neg\psi(x)$$

Nechť tedy platí předpoklad

$$\neg\forall x\psi(x)$$

jinak je implikace triviálně splněna. Z toho dostáváme,že existuje prvek a struktury pro který plat

$$\neg\psi(x)$$

a z toho tedy plyne závěr. Q.E.D.

Dále si nadefinujeme a ukážeme relativizaci formulí proto abychom ji poté mohli použít pro formalizaci relace splňování.

Definice 1. ***Relativizace***
Nechť $\mathcal{M}$ je třída, pak pro nějakou formuli ϕ v definujme indukcí $\phi^{\mathcal{M}}$ jako relativizaci ϕ v $\mathcal{M}$

$$a)(x = y)^{\mathcal{M}} \quad jako \quad x = y$$
$$b)(x \in y)^{\mathcal{M}} \quad jako \quad x \in y$$
$$c)(\psi \wedge \lambda)^{\mathcal{M}} \quad jako \quad \psi^{\mathcal{M}} \wedge \lambda^{\mathcal{M}}$$
$$d)(\neg\psi)^{\mathcal{M}} \quad jako \quad \neg(\psi)^{\mathcal{M}}$$
$$e)(\exists\psi)^{\mathcal{M}} \quad jako \quad \exists x(x \in \mathcal{M} \wedge (\psi)^{\mathcal{M}})$$

Zavedeme si Quinovu rohovovou notaci a pomocí ní si obohatíme teorii.

Definice 2. ***Quinova rohovová notace***
Nechť Ob nějaký objekt v metateorii, tak $\ulcorner Ob \urcorner$ je konstanta, která značí, že jsme teorii rozšířili o formální definici Ob

Lemma 1.
Pro libovolnou formuli $\psi(x_0, .., x_{n-1})$

$$\mathrm{ZF} \vdash \forall\langle M, \in\rangle\forall x_0, .., x_{n-1}(\psi^M(x_0, .., x_{n-1}) \Leftrightarrow \langle M, \in\rangle \models \ulcorner\psi\urcorner[\langle x_0, .., x_{n-1})\rangle])$$

Důkaz
Nechť máme nějaký model $\langle M, \in\rangle$ a proměnné $x_0, .., x_{n-1}$:
Důkaz povedeme indukcí podle složitosti formule.
Ia) Tedy $\psi(x_0, .., x_{n-1})$ je atomická formule tvaru x=y
podle relativizace $(x = y)^{\mathcal{M}}$ odpovídá formule x=y,
která je všude interpretovaná všude jako relace identity, tedy i tady

$$(x = y)^M \Leftrightarrow \langle M, \in\rangle \models \ulcorner x = y\urcorner$$

Ib) Tedy $\psi(x_0, .., x_{n-1})$ je atomická formule tvaru $x \in y$ podle relativizace $(x \in y)^{\mathcal{M}}$ odpovídá formule $x \in y$, vzhledem k tomu,že model $\langle M, \in\rangle$ je uspořádán pomocí relace náležení tak určitě platí

$$x \in y^M \Leftrightarrow \langle M, \in\rangle \models \ulcorner x \in y\urcorner$$

tím máme dokázano lemma pro atomické formule.

Nechť tedy máme dokázáno pro

$$\psi^M(x_0, .., x_{n-1}) \Leftrightarrow \langle M, \in\rangle \models \ulcorner\psi\urcorner [\langle x_0, .., x_{n-1})\rangle]$$

$$\phi^M(x_0, .., x_{n-1}) \Leftrightarrow \langle M, \in\rangle \models \ulcorner\phi\urcorner [\langle x_0, .., x_{n-1})\rangle]$$

IIa)Tedy $\pi(x_0, .. x_{n-1})$ *je formule tvaru* $\psi(x_0, .. x_{n-1}) \wedge \phi(x_0, .. x_{n-1})$ *podle relativizace*

$$(\psi(x_0, .. x_{n-1}) \wedge \phi(x_0, .. x_{n-1}))^M$$

odpovídá

$$\psi(x_0, .. x_{n-1})^M \curlywedge \phi(x_0, .. x_{n-1})^M$$

z indukčního předpokladu dostáváme

$$\langle M, \in\rangle \models \ulcorner\phi\urcorner [\langle x_0, .., x_{n-1})\rangle] \curlywedge \langle M, \in\rangle \models \ulcorner\psi\urcorner [\langle x_0, .., x_{n-1})\rangle]$$

což podle Tarského definice pravdy je právě

$$\langle M, \in\rangle \models \ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner [\langle x_0, .., x_{n-1})\rangle]$$

IIb)Tedy $\pi(x_0, .., x_{n-1})$ *je formule tvaru* $\neg\psi(x_0, .., x_{n-1})$ *podle relativizace*

$$(\neg\psi(x_0, .., x_{n-1}))^M$$

odpovídá

$$\neg(\psi(x_0, .., x_{n-1})^M)$$

z indukčního předpokladu dostáváme

$$\langle M, \in\rangle \not\models \ulcorner\psi\urcorner [\langle x_0, .., x_{n-1})\rangle]$$

což podle Tarského definice pravdy je právě

$$\langle M, \in\rangle \models \ulcorner\neg\psi\urcorner [\langle x_0, .., x_{n-1}\rangle]$$

IIc)Tedy $\pi(x_0, .., x_{n-1})$ *je formule tvaru* $\exists\psi(x_0, .., x_{n-1})$ *podle relativizace*

$$(\exists\psi(x_0, .., x_{n-1}))^M$$

odpovídá

$$\exists x(x \in \mathcal{M} \wedge (\psi)^{\mathcal{M}})$$

z indukčního předpokladu dostáváme

$$\exists x(x \in \mathcal{M} \curlywedge \langle M, \in\rangle \models \ulcorner\psi\urcorner [\langle x_0, .., x_{n-1})\rangle])$$

což podle Tarského definice pravdy je právě

$$\langle M, \in\rangle \models \ulcorner\exists\psi\urcorner [\langle x_0, .., x_{n-1}\rangle]$$

Q.E.D

Dále si ukážeme formalizaci definovatelných množin.

Definice 3. ***Ohodnocení***
Pro každé n a n-tici $\langle x_0, .., x_{n-1}\rangle$ $\mathtt{s}$ *je funkce s defičním oborem n a hodnotami* $\mathtt{s}(i) = x_i$.

Definice 4.
Nechť $n \in \omega$ *a* $i,j < n$.

$$Proj(A, R, n) = \{\mathtt{s} \in A^n : \exists t \in R(t \restriction n = \mathtt{s})\}$$
$$Diag_{\in}(A, n, i, j) = \{\mathtt{s} \in A^n : \mathtt{s}(i) \in \mathtt{s}(j)\}$$
$$Diag_{=}(A, n, i, j) = \{\mathtt{s} \in A^n : \mathtt{s}(i) = \mathtt{s}(j)\}$$

Poté rekurzí přes $k \in \omega$ *defimujeme* $Df^*(k, A, n)$ *:*
a)$Df^*(0, A, n) = \{Diag_{\in}(A, n, i, j) : i, j < n\} \cup \{Diag_{=}(A, n, i, j) : i, j < n\}$
b)$Df^*(k + 1, A, n) = Df^*(k, A, n) \cup \{A^n - R : R \in Df^*(k, A, n)\} \cup$
$\{R \cap S : R, S \in Df^*(k, A, n)\} \cup \{Proj(A, R, n) : R \in Df^*(k, A, n + 1)\}$
z toho pak definujme

$$Df(A, n) = \bigcup\{Df^*(k, A, n) : k \in \omega\}$$

Lemma 2.
Když $R \in Df(A, n)$*,tak* $A^n - R \in Df(A, n)$
Když $R, S \in Df(A, n)$*,tak* $R \cap S \in Df(A, n)$
Když $R \in Df(A, n + 1)$*,tak* $Proj(A, R, n) \in Df(A, n)$
Důkaz
Nechť

$$R, S \in Df(A, n)$$

z definice Df(A,n) plyne, že existuje k_1 *a* k_2 *tak že*

$$R \in Df^*(k_2, A, n)$$

$$S \in Df^*(k_1, A, n)$$

nechť tedy $x = max\{k_1, k_2\}$ *tak*

$$R \cap S \in Df^*(x + 1, A, n)$$

a tedy pak i

$$R \cap S \in Df(A, n)$$

Nechť

$$R \in Df(A, n)$$

z definice Df(A,n) plyne, že existuje k tak že

$$R \in Df^*(k, A, n)$$

tedy z definice

$$A^n - R \in Df^*(x + 1, A, n)$$

a tedy pak i

$$A^n - R \in Df(A, n)$$

Nechť

$$R \in Df(A, n + 1)$$

z definice Df(A,n+1) plyne, že existuje k tak že

$$R \in Df^*(k, A, n + 1)$$

tedy z definice

$$Proj(A, R, n) \in Df^*(x + 1, A, n)$$

a tedy pak i

$$Proj(A, R, n) \in Df(A, n)$$

Lemma 3.
Nechť $\phi(x_0, .., x_{n-1})$*je formule s volnými proměný* $x_0, ..., x_{n-1}$ *tak*

$$\forall A[\{\mathtt{s} \in A^n : \phi^{\mathrm{A}}(\mathtt{s}(0), .., \mathtt{s}(n-1)\} \in Df(A, n)]$$

Důkaz
Indukcí podle složitosti formule s fixovanym A.
Nechť ϕ *je atomatická formule* $x_i \in x_j$ *pak z*

$$Diag_{\in}(A, n, i, j) \in Df(A, n)$$

plyne

$$[\{\mathtt{s} \in A^n : \phi^{\mathrm{A}}(\mathtt{s}(0), .., \mathtt{s}(n-1)\} \in Df(A, n)]$$

Stejně tak pro $x_i = x_j$ *pak z*

$$Diag_{=}(A, n, i, j) \in Df(A, n)$$

plyne

$$[\{\mathtt{s} \in A^n : \phi^{\mathrm{A}}(\mathtt{s}(0), .., \mathtt{s}(n-1)\} \in Df(A, n)]$$

Nechť ϕ *je* $\psi \wedge \chi$ *a víme z indukčního předpokladu , že platí*

$$[\{\mathtt{s} \in A^n : \psi^{\mathrm{A}}(\mathtt{s}(0), .., \mathtt{s}(n-1)\} \in Df(A, n)]$$

$$[\{\mathtt{s} \in A^n : \chi^{\mathrm{A}}(\mathtt{s}(0), .., \mathtt{s}(n-1)\} \in Df(A, n)]$$

a tedy podle předchozího lemmatu tedy platí

$$[\{\mathtt{s} \in A^n : \chi^{\mathrm{A}}(\mathtt{s}(0), .., \mathtt{s}(n-1)\} \cap \{\mathtt{s} \in A^n : \psi^{\mathrm{A}}(\mathtt{s}(0), .., \mathtt{s}(n-1)\} \in Df(A, n)]$$

což je přesně

$$[\{\mathtt{s} \in A^n : (\chi \wedge \psi)^{\mathrm{A}}(\mathtt{s}(0), .., \mathtt{s}(n-1)\} \in Df(A, n)]$$

Nechť ϕ *je* $\neg\psi$ *a víme z indukčního předpokladu , že platí*

$$[\{\mathtt{s} \in A^n : \psi^{\mathrm{A}}(\mathtt{s}(0), .., \mathtt{s}(n-1)\} \in Df(A, n)]$$

a tedy podle předchozího lemmatu tedy plati

$$[A - \{\mathtt{s} \in A^n : \psi^{\mathrm{A}}(\mathtt{s}(0), .., \mathtt{s}(n-1)\} \in Df(A, n)]$$

což je přesně

$$[\{\mathtt{s} \in A^n : (\neg\psi)^{\mathrm{A}}(\mathtt{s}(0), .., \mathtt{s}(n-1)\} \in Df(A, n)]$$

. Konečně nechť ϕ *je* $\exists y\ \psi$
Nechť y *není ani jedna z proměnných* $x_0, .., x_{n-1}$.
Z indukčního předpokladu

$$\{t \in A^{n-1} : \psi^{\mathrm{A}}(t(0), ...t(n))\} \in Df(A, n+1)$$

a tedy podle předchozího lemmatu tedy platí

$$Proj(A, \{t \in A^{n-1} : \psi^{\mathrm{A}}(t(0), ...t(n))\}, n) \in Df(A, n)$$

což je přesně

$$\{\mathtt{s} \in A^n : (\exists y\ \psi)^{\mathrm{A}}(\mathtt{s}(0), .., \mathtt{s}(n-1)\}$$

Q.E.D.

Definice 5.
Rekurzí přes $m \in \omega$.
En(m,A,n) je definována nasledujícími klauzulemi.:
a) Když $m = 2^i * 3^j$ *a* $i, j < n$ *tak* $En(m, A, n) = Diag_{\in}(A, n, i, j)$.
b) Když $m = 2^i * 3^j * 5$ *a* $i, j < n$ *tak* $En(m, A, n) = Diag_{=}(A, n, i, j)$.
c) Když $m = 2^i * 3^j * 5^2$ *tak* $En(m, A, n) = A^n - En(i, A, n)$.
d) Když $m = 2^i * 3^j * 5^3$ *tak* $En(m, A, n) = E(i, A, n) \cap E(j, A, n)$.
e) Když $m = 2^i * 3^j * 5^4$ *tak* $En(m, A, n) = Proj(A, E(i, A, n + 1), n)$.
f) Když m má jiný rozklad než (a)-(e), tak $En(m, A, n) = \emptyset$.

Lemma 4.
Pro libovolné n a A,

$$Df(A, n) = \{En(m, A, n) : m \in \omega\}$$

Důkaz
Nejdříve indukcí přes m pro libovolné n,

$$\forall n(En(m, A, n) \in Df(A, n))$$

Pokud je $m = 2^i * 3^j$ *a* $i, j < n$ *tak*

$$En(m, A, n) = Diag_{\in}(A, n, i, j)$$

z definice Df(A,n)

$$Diag_{\in}(A, n, i, j) \in Df(A, n)$$

a tedy

$$En(m, A, n) \in Df(A, n)$$

Pokud je $m = 2^i * 3^j * 5$ *a* $i, j < n$ *tak*

$$En(m, A, n) = Diag_{=}(A, n, i, j)$$

z definice Df(A,n)

$$Diag_{=}(A, n, i, j) \in Df(A, n)$$

a tedy

$$En(m, A, n) \in Df(A, n)$$

Nechť máme indukční předpoklad

$$En(i, A, n) \in Df(A, n)$$

$$En(j, A, n) \in Df(A, n)$$

$$En(i, A, n+1) \in Df(A, n+1)$$

Pokud je $m = 2^i * 3^j * 5^2$ *tak*

$$En(m, A, n) = A^n - En(i, A, n)$$

z indukčního předpokladu a lemmatu 4 pro komplement

$$En(m, A, n) \in Df(A, n)$$

Pokud je $m = 2^i * 3^j * 5^3$ *tak*

$$En(m, A, n) = E(i, A, n) \cap E(j, A, n)$$

z indukčního předpokladu a lemmatu 4 pro průnik

$$En(m, A, n) \in Df(A, n)$$

Pokud je $m = 2^i * 3^j * 5^4$ *tak*

$$En(m, A, n) = Proj(A, E(i, A, n+1), n)$$

z indukčního předpokladu a lemmatu 4 pro projekci

$$En(m, A, n) \in Df(A, n)$$

Pokud je m *je jiné než předchozí tak*

$$En(m, A, n) = \emptyset$$

z indukčního předpokladu a lemmatu 2 pro komplement a průnik

$$En(m, A, n) \in Df(A, n)$$

Druhý směr

$$Df^*(k, A, n) \subset \{En(m, A, n) : m \in \omega\}$$

protože všechny $Df^*(k, A, n)$ *jsou právě bud množiny*
$Diag_{\in}(A, n, i, j)$ *nebo* $Diag_{=}(A, n, i, j)$ *komplementy, průniky a projekce .*
Což jsou právě podmnožiny $\{En(m, A, n) : m \in \omega\}$ *Q.E.D.*

Lemma 5. *Nechť $\phi(x_0, ..., x_{n-1})$ je formule s volnými proměnnými mezi $x_0, ..., x_{n-1}$ pak existuje nějaké m, takové, že*

$$\forall A[\{s \in A^n : \phi^A(s(0), ..., s(n-1))\} = En(m, A, n)]$$

Důkaz
Z lemma 3 víme,že

$$\forall A[\{\mathbf{s} \in A^n : \phi^{\mathrm{A}}(\mathbf{s}(0), .., \mathbf{s}(n-1)\} \in Df(A, n)]$$

a z lemma 4 víme

$$\forall x(x \in Df(A, n) \rightarrow \exists m(x = En(m, A, n)))$$

tak musi existovat takové m že

$$\forall A[\{s \in A^n : \phi^A(s(0), ..., s(n-1))\} = En(m, A, n)]$$

jako přímý důsledek dvou předchozích lemmat

Definice 6.
Nechť s a t jsou funkce takové,že dom(s) = α a dom(t) = β tak funkce $s\hat{\ }t$ s definičím oborem $\alpha + \beta$ je definováno:
$s\hat{\ }t \restriction (\alpha) = s$
$s\hat{\ }t\ (\alpha + \epsilon) = t(\epsilon)$ *pro všechny* $\epsilon < \beta$

Definice 7.
$\mathfrak{DP}(A) = \{X \subset A : \exists n \in \omega \exists s \in A^n \exists R \in Df(A, n+1)$
$X = \{x \in A : s\hat{\ }\langle x \rangle \in R\}\}$

Lze nahlédnout, že definice nahoře je formalizace definovalnosti formule, což si i teď dokážem.

Lemma 6.
Nechť $\phi(x_0, .., x_{m-1}, y)$je formule s volnými proměný $x_0, ..., x_{m-1}, y$, tak

$$\forall A \forall x_0, .., x_{m-1}[\{y \in A : \phi^{\mathrm{A}}(x_0, .., x_{m-1}, y)\} \in \mathfrak{DP}(A)]$$

Důkaz
Nechť tedy máme A,m a $x_0, .., x_{m-1}$ fixované
z lemma 3 víme,že pro každou $\phi^{\mathrm{A}}(x_0, .., x_{m-1}, y)$ existuje $R \in Df(A, n+1)$ a vezmeme $n = m$ a $s = (x_0, .., x_{m-1})$ z definice 3 máme $X \in \mathfrak{DP}(A)$,kde $X = \{y \in A : \phi^{\mathrm{A}}(x_0, .., x_{m-1}, y)\}$.

1.2 Funkce

Definice 8. *Formule $\varphi(x_1, .., x_n)$ je Δ-0 formule teorie množin , pokud:*
a)jsou atomické formule
b)Když φ je $\varpi \wedge \varsigma$ nebo $\varpi \vee \varsigma$ nebo $\varpi \Rightarrow \varsigma$ a formule ϖ a ς jsou Δ-0 formule.
c)φ je $\exists x \in y\varpi$ nebo φ je $\forall x \in y\varpi$ a formule ϖ je Δ-0 formule.

Definice 9. ***Gödelovy operace***
$G_1(X,Y) = \{X,Y\}$
$G_2(X,Y) = X \times Y$
$G_3(X,Y) = \epsilon(X,Y) = \{\langle u,v\rangle : u \in X \wedge v \in Y \wedge u \in v\}$
$G_4(X,Y) = X - Y$
$G_5(X,Y) = X \cap Y$
$G_6(X) = \bigcup X$
$G_7(X) = dom(X)$
$G_8(X) = \{\langle u,v\rangle : \langle v,u\rangle \in X\}$
$G_9(X) = \{\langle u,v,w\rangle : \langle u,w,v\rangle \in X\}$
$G_{10}(X) = \{\langle u,v,w\rangle : \langle v,w,u\rangle \in X\}$

Lemma 7.
Godelovy operace jsou Δ-0 formule.
Důkaz
Pro $G_1(X,Y) = Z$:

$$(Z = \{X,Y\}) \Leftrightarrow (X \in Z \wedge Y \in Z \wedge (\forall a \in Z)(a = X \vee a = Y))$$

Pro $G_2(X,Y) = Z$:
Nejdříve si dokážeme,že podformule $A = \langle B,C\rangle$ je Δ-0 formule

$$A = \langle B,C\rangle) \Leftrightarrow (((\forall a \in A)(x = \{B\} \ \vee \ x = \{B,C\}))\wedge$$
$$\wedge((\exists a \in A)(\exists d \in A)(a = \{B\} \wedge d = \{B,C\})$$

Teď přejdem k důkazu samotného $Z = X \times Y$

$$(Z = X \times Y) \Leftrightarrow (((\forall z \in Z)(\exists x \in X)(\exists y \in Y)z = \langle x,y\rangle)\wedge$$
$$\wedge((\forall x \in X)(\forall y \in Y)(\exists z \in Z)z = \langle x,y\rangle))$$

Pro $G_3(X,Y) = Z$:

$$(Z = \epsilon(X,Y)) \Leftrightarrow (((\forall z \in Z)(\exists x \in X)(\exists y \in Y)(z = \langle x,y\rangle \wedge x \in y))\wedge$$

$$\wedge((\forall x \in X)(\forall y \in Y)(\exists z \in Z)(x \in y \to z = \langle x,y\rangle)))$$

Pro $G_4(X,Y) = Z$:

$(Z = X - Y) \Leftrightarrow (((\forall z \in Z)(z \in X \wedge z \notin Y)) \wedge ((\forall x \in X)(x \notin Y \rightarrow x \in Z)))$

Pro $G_5(X,Y) = Z$:

$(Z = X \cup Y) \Leftrightarrow (((\forall z \in Z)(z \in X \wedge z \in Y)) \wedge ((\forall x \in X)(x \in Y \rightarrow x \in Z)))$

Pro $G_6(X) = Z$:

$$(Z = \bigcup X) \Leftrightarrow (((\forall z \in Z)(\exists x \in X)z \in x) \wedge ((\forall x \in X)(\forall z \in x)(z \in Z)))$$

Pro $G_7(X) = Z$:
Nejdříve si dokážeme, že podformule $z \in dom(X)$ je Δ-0 formule

$$(z \in dom(X)) \Leftrightarrow ((\exists x \in X)(\exists Y \in x)(\exists y \in Y)\langle z, y\rangle = x)$$

a teď pokud ϕ je Δ-0 formule pak $((\forall y \in dom(X))\phi)$ je Δ-0 formule

$$(\forall y \in dom(X)\phi) \Leftrightarrow ((\forall x \in X)(\forall Y \in x)(\forall y \in Y)(\forall i \in Y)(\langle z, y\rangle = x \rightarrow \phi))$$

Teď si konečně dokážeme $Z = dom(X)$

$$(Z = dom(X)) \Leftrightarrow (((\forall z \in Z)z \in dom(X)) \wedge ((\forall z \in dom(X))z \in Z))$$

Pro $G_8(X) = Z$:
Nejdříve si dokážeme, že podformule $\langle y, z\rangle \in X$ je Δ-0 formule

$$(\langle y, z\rangle \in X) \Leftrightarrow ((\exists x \in X)x = \langle y, z\rangle)$$

a teď pomocí toho dokážeme $(Z = \{\langle u, v\rangle : \langle v, u\rangle \in X\})$
$(Z = \{\langle u, v\rangle : \langle v, u\rangle \in X\}) \Leftrightarrow ((\forall z \in Z)(\exists x \in X)(z = \langle u, v\rangle \rightarrow x = \langle v, u\rangle)\wedge$

$$\wedge(\forall x \in X)(\exists z \in Z)(x = \langle u, v\rangle \rightarrow z = \langle v, u\rangle))$$

Pro $G_9(X) = Z$:
Nejdříve si dokážeme, že podformule $a \in \langle x, y, z\rangle$ je Δ-0 formule

$$(a \in \langle x, y, z\rangle) \Leftrightarrow (a = \langle x, y\rangle \vee a = z)$$

To použijeme k důkazu,že $A = \langle x, y, z\rangle$ je Δ-0 formule

$$(A = \langle x, y, z\rangle) \Leftrightarrow ((\forall a \in A)(a = \langle x, y\rangle \vee a = z) \wedge \langle x, y\rangle \in A \wedge z \in A)$$

čímž dokážeme,že $\langle x, y, z\rangle \in A$ je Δ-0 formule

$$(\langle x, y, z\rangle \in A) \Leftrightarrow ((\exists a \in A)a = \langle x, y, z\rangle)$$

a konečně pomocí toho dokážeme,že $(Z = \{\langle u, v, w\rangle : \langle u, w, v\rangle \in X\})$

$$(Z = \{\langle u, v, w\rangle : \langle v, w, u\rangle \in X\}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (((\forall z \in Z)(\exists x \in X)(z = \langle u, v, w\rangle \rightarrow x = \langle v, w, u\rangle))\wedge$$
$$\wedge((\forall x \in X)(\exists z \in Z)(x = \langle v, w, u\rangle \rightarrow z = \langle u, v, w\rangle)))$$

Pro $G_{10}(X) = Z$*:*

$$(Z = \{\langle u, v, w\rangle : \langle u, w, v\rangle \in X\}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (((\forall z \in Z)(\exists x \in X)(z = \langle u, v, w\rangle \rightarrow x = \langle u, w, v\rangle))\wedge$$
$$\wedge((\forall x \in X)(\exists z \in Z)(x = \langle u, w, v\rangle \rightarrow z = \langle u, v, w\rangle)))$$

Lemma 8.
Pro každou Godelovu operaci existuje Δ-0 formule $x \in G(X_1, ..X_n)$.
Důkaz
Pro $z \in G_1(X, Y)$*:*

$$(z \in \{X, Y\}) \Leftrightarrow (z = X \vee z = Y)$$

Pro $z \in G_2(X, Y)$*:*

$$(z \in X \times Y) \Leftrightarrow (x \in X \wedge y \in Y \wedge z = (x, y))$$

Pro $z \in G_3(X, Y)$*:*

$$(z \in \epsilon(X, Y)) \Leftrightarrow (x \in X \wedge y \in Y \wedge z = (x, y) \wedge x \in y)$$

Pro $z \in G_4(X, Y)$*:*

$$(z \in X - Y) \Leftrightarrow (z \in X \wedge z \notin Y)$$

Pro $z \in G_5(X, Y)$*:*

$$(z \in X \cap Y) \Leftrightarrow (z \in X \wedge z \in Y)$$

Pro $z \in G_6(X)$*:*

$$(z \in \bigcup X \Leftrightarrow (\exists x \in X \wedge z \in x)$$

Pro $z \in G_7(X)$*:*
To jsme dokázali v předchozím lemmma.

$$(z \in dom(X)) \Leftrightarrow ((\exists x \in X)(\exists Y \in x)(\exists y \in Y)\langle z, y\rangle = x))$$

Pro $z \in G_8(X)$:

$$(z \in \{(y,x) : (x,y) \in X\}) \Leftrightarrow ((z = (y,x) \wedge (x,y) \in X))$$

Pro $z \in G_9(X)$:

$$(z \in \{(y,x,q) : (y,q,x) \in X\}) \Leftrightarrow ((z = (y,x,q) \wedge (y,q,x) \in X)$$

Pro $z \in G_{10}(X)$:

$$(z \in \{(y,x,q) : (x,q,y) \in X\}) \Leftrightarrow ((z = (y,x,q) \wedge (x,q,y) \in X)$$

Q.E.D.

Definice 10.
Říkame, že třída T je tranzitivní :

$$(\forall x \in \mathsf{T})(\forall y \in x) \rightarrow y \in \mathsf{T}$$

Definice 11.
Říkame, že model $\langle M, \in \rangle$ je tranzitivní :
Když M je tranzitivní třída .

Lemma 9.
Když M je tranzitivní třída a ϕ je Δ-0 formule, tak pro všechny $x_1, ..., x_n$:

$$(\psi^M(x_0, .., x_{n-1})) \Leftrightarrow (\psi(x_0, .., x_{n-1}))$$

Důkaz
Indukcí podle složitosti formule:
ψ je $x = y$:
podle definice 1 je

$$(x = y)^M \Leftrightarrow x = y$$

ψ je $x \in y$:
podle definice 1 je

$$(x \in y)^M \Leftrightarrow x \in y$$

Nechť $\phi^M \Leftrightarrow \phi$ a $\pi^M \Leftrightarrow \pi$
ψ je $\phi \wedge \pi$:
podle definice 1 je

$$(\phi \wedge \pi)^M \Leftrightarrow \phi^M \wedge \pi^M$$

z indukčního předpokladu

$$\phi^M \wedge \pi^M \Leftrightarrow (\phi \wedge \pi)$$

ψ je $\neg\phi$:
podle definice 1 je

$$(\neg\phi)^M \Leftrightarrow \neg(\phi^M)$$

z indukčního předpokladu

$$\neg(\phi^M) \Leftrightarrow \neg\phi$$

ψ je $(\exists u \in x)\phi(u, x, ...)$:
podle definice 1 je

$$(\exists u(u \in x \wedge \phi))^M \Leftrightarrow ((\exists u \in M)(u \in x \wedge \phi^M))$$

z indukčního předpokladu

$$(\exists u \in M)(u \in x \wedge \phi^M)) \Leftrightarrow (\exists u \in M)(u \in x \wedge \phi)) \rightarrow (\exists u(u \in x \wedge \phi))$$

Druhá strana implikace z tranzitivity M Q.E.D

Definice 12.
Formule splňující lemma 9 se nazývá absolutní vůči tranzitivnímu modelu M.

Definice 13.
Říkame, že třída T je uzavřená operaci F :
když $F(x_1, ..., x_n) \in \mathsf{T}$ kdykoliv když $x_1, ..., x_n \in \mathsf{T}$

Definice 14.
Když třída M je uzavřená na $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8, G_9, G_{10}$ tak řekneme, že M je uzavřené na Gödelovy operace

Definice 15.
Přesně tak vytvoříme uzávěr na Gödelovy operace $\mathfrak{D}(A)$ množiny A
Rekurzí přes $n \in \omega$ definujme:

$$A_1 = A$$

a pro každé $n \in \omega$:

$$A_{n+1} = A_n \cup \{x : (\exists y, z \in A_n)(x = G_1(z, y) \vee .. \vee x = G_{10}(z))\} = A_n^*$$

pak

$$\mathfrak{D}(A) = \bigcup_{j \in \omega} A_j$$

Lemma 10.
Metamatematickou indukcí sestrojíme Δ-0 formule pro X_n:

$$(X_1 = Y) \Leftrightarrow ((\forall y \in Y)(y \in X_1) \wedge (\forall y \in X_1)(y \in Y))$$

Nechť tedy máme Δ-0 formuli pro $y \in X_n$

$$(x \in X_n^*) \Leftrightarrow ((\exists y \in X_n)(\exists z \in X_n)(x = G_1(z, y) \vee .. \vee x = G_{10}(z))$$

$$x \in (X_{n+1}) \Leftrightarrow ((\exists y \in X_n)y = x) \vee ((\exists y \in X_n^*)x = y))$$

$x \in \mathfrak{D}(A)$ je Δ-0 formule

$$((x \in \mathfrak{D}(A)) \Leftrightarrow ((\exists n \in \omega)x \in (X_n))$$

Teď když se kouknem na předchozí lemmata máme materiál pro toho abychom zapsali každý prvek uzávěru jako Δ-0 formuli. Protože máme definici každého X_n a tedy a pro každé x z uzávěru jsme schopny najít nejmenší X_n které obsahuje všechny parametry vstupující do jedné z rovnic, která přidává x do uzávěru pro j od jedné od pěti a pro i od šesti do deseti.

$$x = G_j(u, v)$$

$$x = G_i(u)$$

Lemma 11.
Označme $u = (u_1, .., u_n)$,$X = X_1 \times .. \times X_n$ a $u_i \in X_i$ pro všechna i . Tak pro všechny $u \in X$ platí. Nechť máme formuli

$$\varphi(u) \Leftrightarrow (\exists x \in u_i)\psi(u, x)$$

ta je ekvivaletní formuli

$$\exists x(x \in u_i \wedge \psi(u, x) \wedge x \in \bigcup X_i)$$

což je ekvivalentní formuli

$$u \in dom\{(u, x) \in X \times \bigcup X_i : \pi(u, x)\}$$

Věta 2.
Nechť máme operace Gödelovy operace a formule $\varphi(x_1, .., x_n)$ je Δ-0 formule, tak tu je G složené z $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8, G_9, G_{10}$, takže pro všechny $X_1, ..., X_n$

$$G(X_1, ..., X_n) = \{(u_1, ..u_n) : u_1 \in X_1, ..., u_n \in X_n a\varphi(x_1, .., x_n)\}$$

Důkaz
Větu dokážeme pomocí indukce podle složitosti Δ-0 formule. Pro zjednodušení důkazu předpokládejme, že:
a)Použité logické symboly jsou pouze konjunce $\wedge$, negace $\neg$ a omezený existenční kvantifikátor $\exists$.
b)formule neobsahuje predikát rovnosti $=$
c)výskyt predikátu náležení $\in$ je pouze ve formulich tvaru $u_i \in u_j$, kde $i \neq j$
d)výskyt omezeného existenčního kvantifikátoru $\exists$ je pouze ve formuli tvaru $\exists u_{m+1} \in u_i\ \psi(u_1, ..u_{m+1})$, kde $i \leq m$
Bod a si můžeme dovolit díky větě 1.
Bod b si můžeme dovolit díky axiomu extenzionality, protože ten nám dává, že formuli x=y můžeme nahradit ekvivalentní formulí $\forall u \in xu \in y \wedge \forall u \in yu \in x$
Bod c je v pořádku, protože formuli $x \in x$ můžeme nahradit ekvivalentní formuli $\exists u \in xu = x$.
Bod d můžeme, protože můžeme všechny proměnné přejmenovat tak,že vázaná proměnná bude mít nejvyšší index.
Tak nechť formule je utvořena tak jak je popsáno výše.

Nejdříve začneme s důkazem pro atomické formule.
Nechť $\varphi(x_1, .., x_n)$ je atomická formule tvaru $u_i \in u_j$, kde $i \neq j$.
Provedeme důkazem indukí podle velikosti n.
Nechť n=2:

$$\{(u_1, u_2) : u_1 \in X_1 \wedge u_2 \in X_2 \wedge u_1 \in u_2\}$$

což když nahledneme do seznam Gödelových operací tak to odpovídá funkci

$$G_3(X, Y) = \epsilon(X, Y)$$

tedy

$$\{(u_1, u_2) : u_1 \in X_1 \wedge u_2 \in X_2 \wedge u_1 \in u_2\} = \epsilon(X_1, X_2)$$

nebo může nastat opačná situace

$$\{(u_1, u_2) : u_1 \in X_1 \wedge u_2 \in X_2 \wedge u_2 \in u_1\}$$

ale mezi Gödelovými operacemi je funkce

$$G_8(X) = \{(u, v) : (v, u) \in X\}$$

tedy můžeme množinu definovat takto

$$\{(u_1, u_2) : u_1 \in X_1 \wedge u_2 \in X_2 \wedge u_1 \in u_2\} = G_8(\epsilon(X_1, X_2))$$

Nechť $n > 2$ *a* $i \neq n$ *a* $j \neq n$*: Z indukčního předpokladu máme*

$$\{(u_1, ..., u_{n-1}) : u_1 \in X_1, ..., u_{n-1} \in X_{n-1} \wedge u_i \in u_j\} = G(X_1, ...X_{n-1})$$

lze lehce nahlédnout, že

$$\{(u_1, ..., u_n) : u_1 \in X_1, ..., u_n \in X_n \ \wedge \ u_i \in u_j\} = G(X_1, ...X_{n-1}) \times X_n$$

což odpovídá

$$G_2(X, Y) = X \times Y$$

tedy

$$\{(u_1, ..., u_n) : u_1 \in X_1, ..., u_n \in X_n \ \wedge \ u_i \in u_j\} = G_8(G(X_1, ...X_{n-1}), X_n)$$

Nechť $n > 2$ *a* $i \neq n-1$ *a* $j \neq n-1$*:*
Z indukčního předpokladu máme

$$\{(u_1, ..., u_{n-2}, u_n, u_{n-1}) : u_1 \in X_1, ..., u_n \in X_n \wedge u_i \in u_j\} = G(X_1, ...X_n)$$

Uzávorkujeme

$$(u_1, ..., u_{n-2}, u_n, u_{n-1}) = ((u_1, ..., u_{n-2}), u_n, u_{n-1})$$

lze lehce nahlédnout, že

$$\{(u_1, ..., u_n) : u_1 \in X_1, ..., u_n \in X_n \ \wedge \ u_i \in u_j\} = G_9((u_1, ..., u_{n-2}), u_n, u_{n-1})$$

tedy

$$\{(u_1, ..., u_n) : u_1 \in X_1, ..., u_n \in X_n \ \wedge \ u_i \in u_j\} = G_9(G(X_1, ...X_n))$$

Nechť $n > 2$ *a* $i = n-1$ *a* $j = n$ *:*
Z indukčního předpokladu máme

$$\{(u_{n-1}, u_n) : u_{n-1} \in X_{n-1} \wedge u_n \in X_n \wedge u_{n-1} \in u_n\} = \epsilon(X_{n-1}, X_n)$$

a opakováním operace G_2 *dostáme*

$$\{(u_1, ..., u_{n-2}) : u_1 \in X_1, ..., u_{n-2} \in X_{n-2}\} = G_2(G(X_1, .., X_{n-3}), X_{n-2})$$

a tedy

$$\{(u_1, ..., u_n) : u_1 \in X_1, ..., u_n \in X_n \wedge u_{n-1} \in u_n\} =$$

$$= G_2(G(X_1, .., X_{n-2}), \epsilon(X_{n-1}, X_n))$$

Nechť $n > 2$ a $i = n$ a $j = n - 1$:
Z indukčního předpokladu máme

$$\{(u_n, u_{n-1}) : u_{n-1} \in X_{n-1} \wedge u_n \in X_n \wedge u_n \in u_{n-1}\} = G_8(\epsilon(X_{n-1}, X_n))$$

a opakováním operace G_2 dostáme

$$\{(u_1, ..., u_{n-2}) : u_1 \in X_1, ..., u_{n-2} \in X_{n-2}\} = G_2(G(X_1, .., X_{n-3}), X_{n-2})$$

a tedy je zřejmé,že

$$\{(u_1, ..., u_n) : u_1 \in X_1, ..., u_n \in X_n \wedge u_{n-1} \in u_n\} =$$

$$= G_2(G(X_1, .., X_{n-2}), G_8(\epsilon(X_{n-1}, X_n)))$$

Máme tedy dokázáno pro atomické formule.
Nechť $\varphi(x_1, .., x_n)$ je $\neg\psi(x_1, .., x_n)$.
Z indukčního předpokladu máme

$$\{(u_n, u_{n-1}) : u_{n-1} \in X_{n-1} \wedge u_n \in X_n \wedge \psi(x_1, .., x_n)\} = G(X_1, .., X_n)$$

pomocí toho si vyjádříme $\varphi(x_1, .., x_n)$

$$\{(u_n, u_{n-1}) : u_{n-1} \in X_{n-1} \wedge u_n \in X_n \wedge \varphi(x_1, .., x_n)\} =$$

$$= (X_1 \times ... \times X_n) - G(X_1, .., X_n) =$$
$$= G_4(G(X_1, .., X_n), G(X_1, .., X_n))$$

Nechť $\varphi(x_1, .., x_n)$ je $\psi(x_1, .., x_n) \wedge \pi(x_1, .., x_n)$.
Z indukčního předpokladu máme

$$\{(u_n, u_{n-1}) : u_{n-1} \in X_{n-1} \wedge u_n \in X_n \wedge \psi(x_1, .., x_n)\} = G(X_1, .., X_n)$$

$$\{(u_n, u_{n-1}) : u_{n-1} \in X_{n-1} \wedge u_n \in X_n \wedge \pi(x_1, .., x_n)\} = G(X_1, .., X_n)$$

pomocí toho si vyjádříme $\varphi(x_1, .., x_n)$

$$\{(u_n, u_{n-1}) : u_{n-1} \in X_{n-1} \wedge u_n \in X_n \wedge \varphi(x_1, .., x_n)\} =$$

$$= G(X_1, .., X_n) \cap G(X_1, .., X_n) =$$
$$= G_5(G(X_1, .., X_n), G(X_1, .., X_n))$$

Nechť $\varphi(x_1, .., x_n)$ *je* $(\exists u_{n+1} \in u_i)\psi(x_1, .., x_{n+1})$.
Nechť tedy máme indukční předpoklad pro formuli $\pi(x_1, .., x_{n+1})$, *která je tvaru* $\psi(x_1, .., x_{n+1}) \wedge u_{n+1} \in u_i$

$$\{(u_1, .., u_{n+1}) : u_1 \in X_1, .., u_{n+1} \in X_{n+1} \wedge \pi(x_1, .., x_{n+1})\} = G(X_1, .., X_{n+1})$$

Využitím lemma 11 dostaneme

$$\{(u_1, .., u_n) : u_1 \in X_1, .., u_n \in X_n \wedge \psi(x_1, .., x_{n+1})\} =$$

$$= dom(G(X_1, .., X_n, \bigcup X_i))$$

Lemma 12.
Každá relativizovaná formule je Δ*-0 formule.*
Důkaz
Jediný tvar formule kdy $\phi(x_1, ..x_n)$ *není* Δ*-0 formule je když nějaká podformule je tvaru* $\exists y\pi$ *avšak relativizace formule* $\phi(x_1, ..x_n)$ *na* $\phi^{\mathrm{A}}(x_1, ..x_n)$ *znamená přepsání podformule na* $(\exists y \in A)\pi$ *a tedy se stane také* Δ*-0 formulí.*

Věta 3.
Nechť A je tranzitivní množina

$$\mathfrak{D}\mathfrak{P}(A) = \mathfrak{D}(A \cup \{A\}) \cap P(A)$$

Důkaz
Nechť máme nějaké

$$x \in \mathfrak{D}(A \cup \{A\}) \cap P(A)$$

podle lemma 10 máme z

$$x \in \mathfrak{D}(A \cup \{A\})$$

Δ*-0 formuli tvaru*

$$x = G(X_1, .., X_n)$$

podle lemma 8 máme Δ*-0 formuli*

$$\phi(y_1, .., y_m, z)$$

která definuje prvky x, která podle lemma 9 máme

$$\phi^{\mathrm{A}}(y_1, .., y_m, z)$$

a podle lemma 6 a předpokladu $x \in P(A)$ máme množinu

$$x = \{z \in A : \phi^{\mathrm{A}}(y_1, .., y_m, z)\} \in \mathfrak{D}\mathfrak{P}(A)$$

Tm jsme dokázali

$$\mathfrak{D}(A \cup \{A\}) \cap P(A) \subset \mathfrak{D}\mathfrak{P}(A)$$

Ted si dokážeme druhou inkluzi. Nechť máme nějaké

$$x \in \mathfrak{D}\mathfrak{P}(A)$$

z definice víme, že

$$x \in P(A)$$

ted si musíme dokázat už jen

$$x \in \mathfrak{D}(A \cup \{A\})$$

Nechť tedy máme nějaké

$$x \in \mathfrak{D}\mathfrak{P}(A)$$

kde

$$x = \{z \in A : \phi^{\mathrm{A}}(y_1, .., y_m, z)\}$$

podle lemma 12 máme Δ-0 formuli, což podle věty 2,znamená,že existuje $G(A, y_1, .., y_m)$ takové,že

$$G(A, y_1, .., y_m) = x$$

z čehož plyne, že existuje X_n takové, že

$$x \in X_n$$

a z definie $\mathfrak{D}(A \cup \{A\})$ plyne

$$x \in \mathfrak{D}(A \cup \{A\})$$

Q.E.D.

2 Universum $\mathbb{L}$

2.1 Základní vlastnosti $\mathbb{L}$

Nejdříve si transfinitní indukcí zkonstrujujem samotné universum $\mathbb{L}$

Definice 16.

$$L_0 = \varnothing$$

pro následníka:

$$L_{\alpha+1} = \mathfrak{DP}(L_\alpha)$$

pro limitní ordinál:

$$L_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta$$

$$\mathbb{L} = \bigcup_{\alpha\in On} L_\alpha$$

Lemma 13.

$$\mathfrak{DP}(A) \subset P(A)$$

Důkaz
Plyne přímo z definice $x \in \mathfrak{DP}(A)$ když x je definovatelná podmožina, tedy $x \in P(A)$

Lemma 14.

$$\mathbb{L} \subset \mathbb{WF}$$

Důkaz
Indukcí kdy pro každé α platí

$$L_\alpha \subset R_\alpha$$

a z toho tedy

$$\mathbb{L} \subset \mathbb{WF}$$

Lemma 15.
Nechť M je transitivní množina, tak $M \subset \mathfrak{DP}(M)$
Důkaz
Použijeme lemma 6 na formuli

$$\forall x \in M(\{y \in M : y \in x\} \in \mathfrak{DP}(M))$$

vzhledem k tomu,že M je transitivní je ekvivaletni s

$$\forall x \in M(x \in \mathfrak{DP}(M))$$

Lemma 16.
L_α je transitivní
Důkaz
Pro prázdnou množinu triviálně splněno a pro limitní α platí kdyǐ bude platit pro všechny menši ordinály.
Nechť tedy máme dokázáno pro $\forall\beta(\beta < \alpha)$ a $\alpha = \gamma + 1$

$$L_\alpha = \mathfrak{DP}(L_\gamma)$$

Nechť tedy

$$x \in (L_\alpha)$$

z definice $\mathfrak{DP}(L_\gamma)$

$$x \subset L_\gamma$$

L_γ je transitivní množina z indukčního předpokladu a podle lemma 15

$$L_\gamma \subset L_\alpha$$

Kombinaci těchto dvou tvrzení dostáváme

$$x \subset L_\alpha$$

Definice 17.
Definujeme množinu pro A, $x \in A$, $R \subset A \times A$

$$pred(A,x,R) = \{y \in A : yRx\}$$

Definice 18.
Relaci R nazveme extenzionální na A právě tehdy když

$$\forall x, y \in A(x \neq y \to pred(A,x,R) \neq pred(A,y,R))$$

Lemma 17.

$$pred(A, x, \in) = x$$

Důkaz
Nechť $y \in x$ podle definice $y \in pred(A, x, \in)$
Nechť $y \in pred(A, x, \in)$ z čehož plyne $y \in x$

Lemma 18.
Když M je transitivní tak relace $\in$ je extensionální na M
Důkaz
Použitím lemma 17 na obměnu definice 17 dostááme pro transitivní množiny podmínku

$$\forall x, y \in A(x = y \to x = y)$$

Lemma 19.
Když $M \subset \mathbb{WF}$ pak splňnuje axiom fundovanosti.
Důkaz
Pro každé $x \in \mathbb{WF}$ platí axiom fundovanosti tedy musí platit i pro každé $x \in M$ protože $M \subset \mathbb{WF}$.

Definice 19.
Nazveme seznam formulí $\phi_0, ..., \phi_{n-1}$je podmnožinově uzavřený právě tehdy když každá podformule libovolé formule ϕ_i je v seznamu a žádná formule neobsahuje universální kvantifikátor.

Lemma 20.
Nechť $\phi_0, ..., \phi_{n-1}$ je podmnožinově uzavřený seznam formulí a A,B jsou neprázdné třídy tak,že $A \subset B$ tak nasledujicí je ekvivaletní:
Pro každou $\phi_i(x_1, ..., x_i)$ ze seznamu platí:

$$\forall x_1, ..., x_i \in A(\phi_t^{\mathrm{A}}(x_1, ..x_n) \leftrightarrow \phi_t^{\mathrm{B}}(x_1, ..x_n))(1)$$

Pro každou existenční formuli $\phi_i(x_1, ..., x_i)$ tvaru $\exists a \phi_j(x_1, ..., x_i, a)$ ze seznamu platí:

$$\forall x_1, ..., x_i \in A(\phi_i^{\mathrm{B}}(x_1, ..x_n) \to \exists a \in A \phi_j^{\mathrm{B}}(x_1, ..x_n, a))(2)$$

Důkaz
Nechť tedy máme nějaké $x_1, ..., x_i \in A$ a nechť

$$\forall x_1, ..., x_i \in A(\phi_t^{\mathrm{A}}(x_1, ..x_n) \leftrightarrow \phi_t^{\mathrm{B}}(x_1, ..x_n))$$

a předpokládejme

$$\phi_i^{\mathrm{B}}(x_1, ..x_n)$$

z předpokladu pro ϕ_i platí

$$\phi_i^{\mathrm{A}}(x_1, ..x_n)$$

to je podle definice a relativizace

$$(\exists a \in A)(\phi_j^{\mathrm{A}}(x_1, ..x_n, a))$$

z předpokladu pro ϕ_j platí

$$(\exists a \in A)(\phi_j^{\mathrm{B}}(x_1, ..x_n, a))$$

druhou implikaci dokážeme indukcí podle složitosti formule pro všechny formule ψ_i bez kvantifikatoru platí (1) z lemma 9 Nechť tedy ψ_i je $\exists a \psi_j(x_1, ..x_n, a)$ máme nějaké $x_1, ..., x_i \in A$ z definice relativizace

$$(\phi_i^{\mathrm{A}}(x_1, ..x_n)) \Leftrightarrow \exists a \in A(\phi_j^{\mathrm{A}}(x_1, ..x_n, a))$$

z indukčního předpokladu

$$\exists a \in A(\phi_j^{\mathrm{A}}(x_1, ..x_n, a)) \Leftrightarrow \exists a \in A(\phi_j^{\mathrm{B}}(x_1, ..x_n, a))$$

z $A \subset B$ plyne

$$\exists a \in A(\phi_j^{\mathrm{B}}(x_1, ..x_n, a)) \Rightarrow \exists a \in B(\phi_j^{\mathrm{B}}(x_1, ..x_n, a))$$

z definice relativizace

$$\exists a \in B(\phi_j^{\mathrm{B}}(x_1, ..x_n, a)) \Leftrightarrow (\phi_i^{\mathrm{B}}(x_1, ..x_n))$$

implikace

$$(\phi_i^{\mathrm{B}}(x_1, ..x_n)) \Rightarrow \exists a \in A(\phi_j^{\mathrm{B}}(x_1, ..x_n, a))$$

z předpokladu.

Věta 4.
Principy reflexe Nechť $\phi_0, ..., \phi_{n-1}$ je seznam formulí a máme neprázdnou třídu $\mathbb{T}$ pro každéα T_α je množina a platí

$$\rho < \zeta \to T_\rho \subset T_\zeta$$

pro limitní ζ

$$T_\zeta = \bigcup_{\rho<\zeta} T_\rho$$

a

$$\mathbb{T} = \bigcup_{\rho \in ON} T_\rho$$

tak $\forall \alpha (\exists \beta > \alpha) \wedge \bigwedge_{i<n} (\phi_i^{\mathrm{T}_\beta} \Leftrightarrow \phi_i^{\mathbb{T}}) \wedge$ β je limitní ordinál
Důkaz
Nechť seznam formulí $\phi_0, ..., \phi_{n-1}$ je podmnožinově uzavřený,pokud není tak ho rozšíříme tak aby byl.
Pro každé i= 1,..,n-1 tak že ϕ_i je $\exists x \phi_j(x, y_1, .., y_l)$

$$G_i : \mathbb{T}^n \to ON$$

takto:
Když $\neg\exists x \in \mathbb{T}\phi_j^{\mathrm{T}}(x, y_1, .., y_l)$

$$G_i(y_1, .., y_l) = 0$$

Pro $\exists x \in \mathbb{T}\phi_j^{\mathrm{T}}(x, y_1, .., y_l)$

$$G_i(y_1, .., y_l) = \alpha$$

tak, že α *je nejmenší takové*

$$\exists x \in T_\alpha \phi_j^{\mathrm{T}}(x, y_1, .., y_l)$$

Teď definujme

$$G_i : ON \to ON$$

Když ϕ_i *neni* $\exists x \phi_j(x, y_1, .., y_l)$

$$F_i(\alpha) = 0$$

Když ϕ_i *je* $\exists x \phi_j(x, y_1, .., y_l)$

$$F_i(\alpha) = sup\{G_i(y_1, .., y_l) : y_1, .., y_l \in T_\alpha\}$$

a z toho teď definujme

$$K(\alpha) = max(\{F_i(\alpha) : i < n\} \cup (\alpha + 1))$$

Nechť tedy máme α *dané ukážeme si jak zkonstruovat* $\beta > \alpha$*, tak že*

$$T_\beta \neq \emptyset$$

a splňuje lemma 20 pro T_β *a* $\mathbb{T}$
Tak nechť γ_0 *nejmenší* $\gamma > \alpha$ *tak že* $T_\gamma \neq \emptyset$
Rekurzí pak zkonstruuem:

$$\gamma_{n+1} = K(\gamma_n)$$

z konstrukce plyne

$$\beta < \gamma_0 < \gamma_1 < .....$$

a pak definujme

$$\beta = sup\{\gamma_k : k \in \omega\}$$

Lemma 21.
Předpokládejme, že pro libovolnou formuli $\phi(x, y, A, a_1, .., a_n)$ a libovolné $A, a_1, .., a_n \in M$
Když platí

$$((\forall x \in A)(\exists! y \in M)\phi^{\mathrm{M}}(x, y, A, a_1, .., a_n)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ((\exists Y \in M)(\{y : (\exists x \in A)\phi^{\mathrm{M}}(x, y, A, a_1, .., a_n)\} \subset Y)$$

tak schéma nahražení platí v M.
Důkaz

$$(\forall x, y, z \in M)(F(x, y) \wedge F(x, z) \to z = y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ((\forall x \in A)(\exists! y \in M)\phi^{\mathrm{M}}(x, y, A, a_1, .., a_n))$$

kde $\phi^{\mathrm{M}}(x, y, A, a_1, .., a_n))$ je formule definující funkci tak, že A=dom(F) pak pro libovolné $x \in A$ existuje y tvaru y=f(x) a z předpokladu může existovat právě jedno y.

$$((\exists Y \in M)(\{y : (\exists x \in A)\phi^{\mathrm{M}}(x, y, A, a_1, .., a_n)\} \subset Y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ((\exists Y \in M)(\{y : (\exists x \in dom(F))y = F(x)\} \subset Y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ((\exists Y \in M)(\forall y \in M)((y \in Y) \leftrightarrow ((\exists x \in M)(x \in A \wedge F(x, y)))$$

Y je tedy $\{y : (\exists x \in dom(F))y = F(x)\}$

Lemma 22.

$$L_\alpha \in L_{\alpha+1}$$

Důkaz

$$L_\alpha = \{x \in L_\alpha : (x = x)^{\mathrm{L}_\alpha}\}$$

což podle lemma 6 znamená

$$L_\alpha \in \mathfrak{D}\mathfrak{P}(L_\alpha) = L_{\alpha+1}$$

Definice 20.
Když $x \in \mathbb{L}, \rho(x)$ je $\mathbb{L}$-rank roven nejmenšímu β tak,že $x \in L_{\beta+1}$

Lemma 23. *x je ordinál je Δ-0 formule*
Důkaz
x je ordinál $\Leftrightarrow$((x je transitivní množina) $\wedge$ (x je totálně uspořádaná $\in$))
(x je transitivní množina) $\Leftrightarrow (\forall v \in x \forall z \in v(z \in x))$
(x je totálně uspořádaná $\in$) $\Leftrightarrow ((\forall y \in x)(\forall z \in x)(y \in z \vee y = z \vee z \in y))$

Lemma 24.

$$(\forall \alpha \in ON)(\alpha \in L_{\alpha+1})$$

Důkaz
Transfinití indukcí:
$\underline{\alpha = \emptyset}$
Průnik dvou prázdných množin je prázdná množina.
$\underline{\alpha \text{ je limitní}}$
Pokud platí pro všechny $\beta < \alpha$ tak platí i pro α protože sjednocení ordinálů menších jak α, pro limitní ordinál α, je ordinál α.
$\underline{\alpha = \beta + 1}$
Pokud platí pro všechny $\beta < \alpha$
Vzhledem k tomu ž e L_β je transitivní množina je formule x je ordinál je absolutní a tedy definujme

$$\beta = L_\beta \cap ON = \{x \in L_\beta : (x \in ON)^{\mathrm{L}_\beta}\}$$

což podle lemma 3 je

$$\beta \in L_\alpha$$

Reference

[Mor69] Mordell, Louis Joel. *Diophantine Equations.* Academic Press, London, 1969.