Univerzita Karlova v Praze
Filozofická fakulta
Katedra logiky

Michal Ketner

Konstruktivní univerzum $\mathbb{L}$
The constructive universe $\mathbb{L}$

Bakalářská práce

Vedoucí práce:
Mgr. Radek Honzík, Ph.D.

2015

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité prameny a literaturu.

V Praze 14. dubna 2007

Michal Ketner

Abstrakt

Resum prce v eskm jazyce.

Abstract

Resum prce v anglickm jazyce.

Obsah

1 Konstrukce univerza

1.1 Formalizace relace splňování

V této části se budem věnovat konstrukci univerza $\mathbb{L}$ uvnitř teorie množin. Konstruktivní universum, zde bude vytvořeno pomoc formalizace logiky uvnitř teorie množin .

Nejdříve si ukažeme, že si vystačíme jen se symboly pro konjunci($\wedge$), negaci ($\neg$) a existenční kvantifikátor ($\exists$).

Věta 1. ***Logická ekvivalence***
Nechť máme formule ψ a ϕ. Pak platí následující ekvivalence:

$$a)\psi \vee \phi \equiv \neg(\neg\psi \wedge \neg\phi)$$

$$b)\psi \rightarrow \phi \equiv \neg(\psi \wedge \neg\phi)$$

$$c)\forall x \psi(x) \equiv \neg\exists\neg\psi(x)$$

Důkaz
a)

$$\psi \vee \phi \Rightarrow \neg\psi \wedge \neg\phi$$

sporem

$$\psi \vee \phi \curlywedge \neg\psi \wedge \neg\phi$$

z druhé formule

$$\neg\psi \curlywedge \neg\phi$$

což je ve sporu s tím, že musí platit aspoň jedna z formulí

$$\psi \curlyvee \phi.$$

Druhá část implikace

$$\neg(\neg\psi \wedge \neg\phi) \Rightarrow \psi \vee \phi$$

obměna

$$\neg(\psi \vee \phi) \Rightarrow \neg\psi \wedge \neg\phi$$

Nechť tedy platí předpoklad

$$\neg(\psi \vee \phi)$$

jinak je implikace triviálně splněna. Z toho dostáváme

$$\neg\psi \curlywedge \neg\phi$$

což je přesně to, co jsme chtěli.

b)

$$\psi \to \phi \Rightarrow \neg(\psi \wedge \neg\phi)$$

sporem

$$\psi \to \phi \curlywedge \psi \wedge \neg\phi$$

z

$$\psi \wedge \neg\phi$$

což je ve sporu s tím, že platí

$$\psi \to \phi$$

Druhá část implikace

$$\neg(\psi \wedge \neg\phi) \Rightarrow \psi \to \phi$$

obměna

$$\neg(\psi \to \phi) \Rightarrow (\psi \wedge \neg\phi)$$

Nechť tedy platí předpoklad

$$\neg(\psi \to \phi)$$

jinak je implikace triviálně splněna. Z toho dostáváme

$$\psi \curlywedge \neg\phi$$

c)

$$\forall x\psi(x) \Rightarrow \neg\exists\neg\psi(x)$$

sporem

$$\forall x\psi(x) \curlywedge \exists\neg\psi(x)$$

tedy existuje nejaky prvek strukutury pro který platí

$$\psi(x) \curlywedge \neg\psi(x)$$

tedy spor

$$\neg\exists\neg\psi(x) \Rightarrow \forall x\psi(x)$$

obměna

$$\neg\forall x\psi(x) \Rightarrow \exists\neg\psi(x)$$

Nechť tedy platí předpoklad

$$\neg\forall x\psi(x)$$

jinak je implikace triviálně splněna. Z toho dostáváme,že existuje prvek a struktury pro který plat

$$\neg\psi(x)$$

a z toho tedy plyne závěr. Q.E.D.

Dále si nadefinujeme a ukážeme relativizaci formulí proto abychom ji poté mohli použít pro formalizaci relace splňování.

Definice 1. ***Relativizace*** *Nechť $\mathcal{M}$ je třída, pak pro nějakou formuli ϕ v definujme indukcí $\phi^{\mathcal{M}}$ jako relativizaci ϕ v $\mathcal{M}$*

$$a)(x = y)^{\mathcal{M}} \quad jako \quad x = y$$
$$b)(x \in y)^{\mathcal{M}} \quad jako \quad x \in y$$
$$c)(\psi \wedge \lambda)^{\mathcal{M}} \quad jako \quad \psi^{\mathcal{M}} \wedge \lambda^{\mathcal{M}}$$
$$d)(\neg\psi)^{\mathcal{M}} \quad jako \quad \neg(\psi)^{\mathcal{M}}$$
$$e)(\exists\psi)^{\mathcal{M}} \quad jako \quad \exists x(x \in \mathcal{M} \wedge (\psi)^{\mathcal{M}})$$

Zavedeme si Quinovu rohovovou notaci a pomocí ní si obohatíme teorii.

Definice 2. ***Quinova rohovová notace***
Nechť Ob nějaký objekt v metateorii, tak $\ulcorner Ob \urcorner$ je konstanta, která značí, že jsme teorii rozšířili o formální definici Ob

Lemma 1. *Pro libovolnou formuli $\psi(x_0, .., x_{n-1})$*

$$\text{ZF} \vdash \forall\langle M, \in\rangle \forall x_0, .., x_{n-1}(\psi^M(x_0, .., x_{n-1}) \Leftrightarrow \langle M, \in\rangle \models \ulcorner\psi\urcorner [\langle x_0, .., x_{n-1})\rangle])$$

Důkaz
Nechť máme nějaký model $\langle M, \in\rangle$ a proměnné $x_0, .., x_{n-1}$:
Důkaz povedeme indukcí podle složitosti formule.
Ia)Tedy $\psi(x_0, .., x_{n-1})$ je atomická formule tvaru x=y
podle relativizace $(x = y)^{\mathcal{M}}$ odpovídá formule x=y,
která je všude interpretovaná všude jako relace identity, tedy i tady

$$(x = y)^M \Leftrightarrow \langle M, \in\rangle \models \ulcorner x = y\urcorner$$

Ib)Tedy $\psi(x_0, .., x_{n-1})$ je atomická formule tvaru $x \in y$ podle relativizace $(x \in y)^{\mathcal{M}}$ odpovídá formule $x \in y$, vzhledem k tomu,že model $\langle M, \in\rangle$ je uspořádán pomocí relace náležení tak určitě platí

$$x \in y^M \Leftrightarrow \langle M, \in\rangle \models \ulcorner x \in y\urcorner$$

tím máme dokázano lemma pro atomické formule.

Tedy máme dokázáno pro

$$\psi^M(x_0,..,x_{n-1}) \Leftrightarrow \langle M,\in\rangle \vDash \ulcorner\psi\urcorner[\langle x_0,..,x_{n-1})\rangle]$$

$$\phi^M(x_0,..,x_{n-1}) \Leftrightarrow \langle M,\in\rangle \vDash \ulcorner\phi\urcorner[\langle x_0,..,x_{n-1})\rangle]$$

IIa)Tedy $\pi(x_0,..x_{n-1})$ je formule tvaru $\psi(x_0,..x_{n-1}) \wedge \phi(x_0,..x_{n-1})$ podle relativizace

$$(\psi(x_0,..x_{n-1}) \wedge \phi(x_0,..x_{n-1}))^M$$

odpovídá

$$\psi(x_0,..x_{n-1})^M \curlywedge \phi(x_0,..x_{n-1})^M$$

z indukčního předpokladu dostáváme

$$\langle M,\in\rangle \vDash \ulcorner\phi\urcorner[\langle x_0,..,x_{n-1})\rangle] \curlywedge \langle M,\in\rangle \vDash \ulcorner\psi\urcorner[\langle x_0,..,x_{n-1})\rangle]$$

což podle Tarského definice pravdy je právě

$$\langle M,\in\rangle \vDash \ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner[\langle x_0,..,x_{n-1})\rangle]$$

IIb)Tedy $\pi(x_0,..,x_{n-1})$ je formule tvaru $\neg\psi(x_0,..,x_{n-1})$ podle relativizace

$$(\neg\psi(x_0,..,x_{n-1}))^M$$

odpovídá

$$\neg(\psi(x_0,..,x_{n-1})^M)$$

z indukčního předpokladu dostáváme

$$\langle M,\in\rangle \nvDash \ulcorner\psi\urcorner[\langle x_0,..,x_{n-1})\rangle]$$

což podle Tarského definice pravdy je právě

$$\langle M,\in\rangle \vDash \ulcorner\neg\psi\urcorner[\langle x_0,..,x_{n-1}\rangle]$$

IIc)Tedy $\pi(x_0,..,x_{n-1})$ je formule tvaru $\exists\psi(x_0,..,x_{n-1})$ podle relativizace

$$(\exists\psi(x_0,..,x_{n-1}))^M$$

odpovídá

$$\exists x(x \in \mathcal{M} \wedge (\psi)^{\mathcal{M}})$$

z indukčního předpokladu dostáváme

$$\exists x(x \in \mathcal{M} \curlywedge \langle M,\in\rangle \vDash \ulcorner\psi\urcorner[\langle x_0,..,x_{n-1})\rangle])$$

což podle Tarského definice pravdy je právě

$$\langle M,\in\rangle \vDash \ulcorner\exists\psi\urcorner[\langle x_0,..,x_{n-1}\rangle]$$

Q.E.D

Dále si ukážeme formalizaci definovatelných množin.

Definice 3. ***Ohodnocení***
Pro každé n a n-tici $\langle x_0, .., x_{n-1}\rangle$ $\mathtt{s}$ je funkce s defičním oborem n a hodnotami $\mathtt{s}(i) = x_i$.

Definice 4. *Nechť $n \in \omega$ a $i,j < n$.*

$$Proj(A, R, n) = \{\mathtt{s} \in A^n : \exists t \in R(t \restriction n = \mathtt{s})\}$$
$$Diag_{\in}(A, n, i, j) = \{\mathtt{s} \in A^n : \mathtt{s}(i) \in \mathtt{s}(j)\}$$
$$Diag_{=}(A, n, i, j) = \{\mathtt{s} \in A^n : \mathtt{s}(i) = \mathtt{s}(j)\}$$

Poté rekurzí přes $k \in \omega$ defimujeme $Df^*(k, A, n)$:
a)$Df^*(0, A, n) = \{Diag_{\in}(A, n, i, j) : i, j < n\} \cup \{Diag_{=}(A, n, i, j) : i, j < n\}$
b)$Df^*(k + 1, A, n) = Df^*(k, A, n) \cup \{A^n - R : R \in Df^*(k, A, n)\} \cup \{R \cap S : R, S \in Df^*(k, A, n)\} \cup \{Proj(A, R, n) : R \in Df^*(k, A, n + 1)\}$ z toho pak definujme

$$Df(A, n) = \bigcup\{Df^*(k, A, n) : k \in \omega\}$$

Lemma 2.
Když $R \in Df(A, n)$,tak $A^n - R \in Df(A, n)$
Když $R, S \in Df(A, n)$,tak $R \cap S \in Df(A, n)$
Když $R \in Df(A, n + 1)$,tak $Proj(A, R, n) \in Df(A, n)$
Důkaz
Nechť

$$R, S \in Df(A, n)$$

z definice Df(A,n) plyne, že existuje k_1 a k_2 tak že

$$R \in Df^*(k_2, A, n)$$
$$S \in Df^*(k_1, A, n)$$

nechť tedy $x = max\{k_1, k_2\}$ tak

$$R \cap S \in Df^*(x + 1, A, n)$$

a tedy pak i

$$R \cap S \in Df(A, n)$$

Nechť

$$R \in Df(A, n)$$

z definice Df(A,n) plyne, že existuje k tak že

$$R \in Df^*(k, A, n)$$

tedy z definice

$$A^n - R \in Df^*(x + 1, A, n)$$

a tedy pak i

$$A^n - R \in Df(A, n)$$

Nechť

$$R \in Df(A, n + 1)$$

z definice Df(A,n+1) plyne, že existuje k tak že

$$R \in Df^*(k, A, n + 1)$$

tedy z definice

$$Proj(A, R, n) \in Df^*(x + 1, A, n)$$

a tedy pak i

$$Proj(A, R, n) \in Df(A, n)$$

Lemma 3.
Nechť $\phi(x_0, .., x_{n-1})$*je formule s volnými proměný* $x_0, ..., x_{n-1}$ *tak*

$$\forall A[\{\mathtt{s} \in A^n : \phi^{\mathrm{A}}(\mathtt{s}(0), .., \mathtt{s}(n-1)\} \in Df(A, n)](*)$$

Důkaz
Indukcí podle složitosti formule s fixovanym A.
Nechť ϕ *je atomatická formule* $x_i \in x_j$ *pak z*

$$Diag_{\in}(A, n, i, j) \in Df(A, n)$$

plyne

$$[\{\mathtt{s} \in A^n : \phi^{\mathrm{A}}(\mathtt{s}(0), .., \mathtt{s}(n-1)\} \in Df(A, n)]$$

Stejně tak pro $x_i = x_j$ *pak z*

$$Diag_{=}(A, n, i, j) \in Df(A, n)$$

plyne

$$[\{\mathtt{s} \in A^n : \phi^{\mathrm{A}}(\mathtt{s}(0), .., \mathtt{s}(n-1)\} \in Df(A, n)]$$

Nechť ϕ *je* $\psi \wedge \chi$ *a víme z indukčního předpokladu , že platí*

$$[\{\mathtt{s} \in A^n : \psi^{\mathrm{A}}(\mathtt{s}(0), .., \mathtt{s}(n-1)\} \in Df(A, n)]$$

$$[\{\mathtt{s} \in A^n : \chi^{\mathrm{A}}(\mathtt{s}(0), .., \mathtt{s}(n-1)\} \in Df(A, n)]$$

a tedy podle předchozího lemmatu tedy platí

$$[\{\mathtt{s} \in A^n : \chi^{\mathrm{A}}(\mathtt{s}(0), .., \mathtt{s}(n-1)\} \cap \{\mathtt{s} \in A^n : \psi^{\mathrm{A}}(\mathtt{s}(0), .., \mathtt{s}(n-1)\} \in Df(A, n)]$$

což je přesně

$$[\{\mathtt{s} \in A^n : (\chi \wedge \psi)^{\mathrm{A}}(\mathtt{s}(0), .., \mathtt{s}(n-1)\} \in Df(A, n)]$$

Nechť ϕ *je* $\neg\psi$ *a víme z indukčního předpokladu , že platí*

$$[\{\mathtt{s} \in A^n : \psi^{\mathrm{A}}(\mathtt{s}(0), .., \mathtt{s}(n-1)\} \in Df(A, n)]$$

a tedy podle předchozího lemmatu tedy plati

$$[A - \{\mathtt{s} \in A^n : \psi^{\mathrm{A}}(\mathtt{s}(0), .., \mathtt{s}(n-1)\} \in Df(A, n)]$$

což je přesně

$$[\{\mathtt{s} \in A^n : (\neg\psi)^{\mathrm{A}}(\mathtt{s}(0), .., \mathtt{s}(n-1)\} \in Df(A, n)]$$

. Konečně nechť ϕ *je* $\exists y\ \psi$
Nechť y *není ani jedna z proměnných* $x_0, .., x_{n-1}$.
Z indukčního předpokladu

$$\{t \in A^{n-1} : \psi^{\mathrm{A}}(t(0), ...t(n))\} \in Df(A, n+1)$$

a tedy podle předchozího lemmatu tedy platí

$$Proj(A, \{t \in A^{n-1} : \psi^{\mathrm{A}}(t(0), ...t(n))\}, n) \in Df(A, n)$$

což je přesně

$$\{\mathtt{s} \in A^n : (\exists y\ \psi)^{\mathrm{A}}(\mathtt{s}(0), .., \mathtt{s}(n-1)\}$$

Q.E.D.

Definice 5. *Rekurzí přes $m \in \omega$.*
En(m,A,n) je definována nasledujícími klauzulemi.:
a) Když $m = 2^i * 3^j$ a $i, j < n$ tak $En(m, A, n) = Diag_{\in}(A, n, i, j)$.
b) Když $m = 2^i * 3^j * 5$ a $i, j < n$ tak $En(m, A, n) = Diag_{=}(A, n, i, j)$.
c) Když $m = 2^i * 3^j * 5^2$ tak $En(m, A, n) = A^n - En(i, A, n)$.
d) Když $m = 2^i * 3^j * 5^3$ tak $En(m, A, n) = E(i, A, n) \cap E(j, A, n)$.
e) Když $m = 2^i * 3^j * 5^4$ tak $En(m, A, n) = Proj(A, E(i, A, n + 1), n)$.
f) Když m má jiný rozklad než (a)-(e), tak $En(m, A, n) = \emptyset$.

Lemma 4. *Pro libovolné n a A,*

$$Df(A, n) = \{En(m, A, n) : m \in \omega\}$$

. ***Důkaz***
Nejdříve indukcí přes m pro libovolné n,

$$\forall n(En(m, A, n) \in Df(A, n))$$

Pokud je $m = 2^i * 3^j$ a $i, j < n$ tak

$$En(m, A, n) = Diag_{\in}(A, n, i, j)$$

z definice Df(A,n)

$$Diag_{\in}(A, n, i, j) \in Df(A, n)$$

a tedy

$$En(m, A, n) \in Df(A, n)$$

Pokud je $m = 2^i * 3^j * 5$ a $i, j < n$ tak

$$En(m, A, n) = Diag_{=}(A, n, i, j)$$

z definice Df(A,n)

$$Diag_{=}(A, n, i, j) \in Df(A, n)$$

a tedy

$$En(m, A, n) \in Df(A, n)$$

Nechť máme indukční předpoklad

$$En(i, A, n) \in Df(A, n)$$

$$En(j, A, n) \in Df(A, n)$$

$$En(i, A, n + 1) \in Df(A, n + 1)$$

Pokud je $m = 2^i * 3^j * 5^2$ *tak*

$$En(m, A, n) = A^n - En(i, A, n)$$

z indukčního předpokladu a lemmatu 4 pro komplement

$$En(m, A, n) \in Df(A, n)$$

Pokud je $m = 2^i * 3^j * 5^3$ *tak*

$$En(m, A, n) = E(i, A, n) \cap E(j, A, n)$$

z indukčního předpokladu a lemmatu 4 pro průnik

$$En(m, A, n) \in Df(A, n)$$

Pokud je $m = 2^i * 3^j * 5^4$ *tak*

$$En(m, A, n) = Proj(A, E(i, A, n + 1), n)$$

z indukčního předpokladu a lemmatu 4 pro projekci

$$En(m, A, n) \in Df(A, n)$$

Pokud je m *je jiné než předchozí tak*

$$En(m, A, n) = \emptyset$$

z indukčního předpokladu a lemmatu 4 pro komplement a průnik

$$En(m, A, n) \in Df(A, n)$$

Druhý směr

$$Df^*(k, A, n) \subset \{En(m, A, n) : m \in \omega\}$$

protože všechny $Df^*(k, A, n)$ *jsou právě bud množiny*
$Diag_{\in}(A, n, i, j)$ *nebo* $Diag_{=}(A, n, i, j)$ *komplementy, průniky a projekce .*
Což jsou právě podmnožiny $\{En(m, A, n) : m \in \omega\}$ *Q.E.D.*

Lemma 5. *Nechť* $\phi(x_0, ..., x_{n-1})$ *je formule s volnými proměnnými mezi* $x_0, ..., x_{n-1}$ *pak existuje nějaké* m*, takové, že*
$\forall A[\{s \in A^n : \phi^A(s(0), ..., s(n-1))\} = En(m, A, n)]$.

Definice 6. *Nechť* s *a* t *jsou funkce takové,že* $dom(s) = \alpha$ *a* $dom(t) = \beta$ *tak funkce* $s\hat{\ }t$ *s definičím oborem* $\alpha + \beta$ *je definováno:*
$s\hat{\ }t \restriction (\alpha) = s$
$s\hat{\ }t\ (\alpha + \epsilon) = t(\epsilon)$ *pro všechny* $\epsilon < \beta$

1.2 Funkce

Definice 7. *Formule $\varphi(x_1,..,x_n)$ je Δ-0 formule teorie množin , pokud:*
a)formule nemá kvantifikátory
b)Když φ je $\varpi \wedge \varsigma$ nebo $\varpi \vee \varsigma$ nebo $\varpi \Rightarrow \varsigma$ a formule ϖ a ς jsou Δ-0 formule.
c)φ je $\exists x \in y\varpi$ nebo φ je $\forall x \in y\varpi$ a formule ϖ je Δ-0 formule.

Definice 8. ***Gödelovy operace***
$G_1(X,Y) = \{X,Y\}$
$G_2(X,Y) = X \times Y$
$G_3(X,Y) = \epsilon(X,Y) = \{(u,v) : u \in X \wedge v \in Y \wedge u \in v\}$
$G_4(X,Y) = X - Y$
$G_5(X,Y) = X \cap Y$
$G_6(X) = \bigcup X$
$G_7(X) = dom(X)$
$G_8(X) = \{(u,v) : (v,u) \in X\}$
$G_9(X) = \{(u,v,w) : (u,w,v) \in X\}$
$G_{10}(X) = \{(u,v,w) : (v,w,u) \in X\}$

Definice 9. *Třída T je uzavřená operaci F když $F(x_1,...,x_n) \in \mathsf{T}$ kdykoliv když $x_1,...,x_n \in \mathsf{T}$*

Když třída M je uzavřená na $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8, G_9, G_{10}$ tak řekneme, že M je uzavřené na Gödelovy operace

Gödelova normální forma

Věta 2. *Nechť máme operace Gödelovy operace a formule $\varphi(x_1,..,x_n)$ je Δ-0 formule, tak tu je G složené z $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8, G_9, G_{10}$, takže pro všechny $X_1,...,X_n$*

$$G(X_1,...,X_n) = \{(u_1,..u_n) : u_1 \in X_1,...,u_n \in X_n a\varphi(x_1,..,x_n)\}$$

Důkaz
Větu dokážeme pomocí indukce podle složitosti Δ-0 formule. Pro zjednodušení důkazu předpokládejme, že:
a)Použité logické symboly jsou pouze konjunce $\wedge$, negace $\neg$ a omezený existenční kvantifikátor $\exists$.
b)formule neobsahuje predikát rovnosti =
c)výskyt predikátu náležení $\in$ je pouze ve formulich tvaru $u_i \in u_j$, kde $i \neq j$
d)výskyt omezeného existenčního kvantifikátoru $\exists$ je pouze ve formuli tvaru $\exists u_{m+1} \in u_i\ \psi(u_1,..u_{m+1})$, kde $i \leq m$
Bod a si můžeme dovolit díky větě 1.

Bod b si můžeme dovolit díky axiomu extenzionality, protože ten nám dává, že formuli x=y můžeme nahradit ekvivalentní formulí $\forall u \in xu \in y \wedge \forall u \in yu \in x$
Bod c je v pořádku, protože formuli $x \in x$ *můžeme nahradit ekvivalentní formuli* $\exists u \in xu = x$.
Bod d můžeme, protože můžeme všechny proměnné přejmenovat tak,že vázaná proměnná bude mít nejvyšší index.
Tak nechť formule je utvořena tak jak je popsáno výše.

Nejdříve začneme s důkazem pro atomické formule.
Nechť $\varphi(x_1, .., x_n)$ *je atomická formule tvaru* $u_i \in u_j$, *kde* $i \neq j$.
Provedeme důkazem indukí podle velikosti n.
Nechť n=2:

$$\{(u_1, u_2) : u_1 \in X_1 \wedge u_2 \in X_2 \wedge u_1 \in u_2\}$$

což když nahledneme do seznam Gödelových operací tak to odpovídá funkci

$$G_3(X, Y) = \epsilon(X, Y)$$

tedy

$$\{(u_1, u_2) : u_1 \in X_1 \wedge u_2 \in X_2 \wedge u_1 \in u_2\} = \epsilon(X_1, X_2)$$

nebo může nastat opačná situace

$$\{(u_1, u_2) : u_1 \in X_1 \wedge u_2 \in X_2 \wedge u_2 \in u_1\}$$

ale mezi Gödelovými operacemi je funkce

$$G_8(X) = \{(u, v) : (v, u) \in X\}$$

tedy můžeme množinu definovat takto

$$\{(u_1, u_2) : u_1 \in X_1 \wedge u_2 \in X_2 \wedge u_1 \in u_2\} = G_8(\epsilon(X_1, X_2))$$

Nechť $n > 2$ *a* $i \neq n$ *a* $j \neq n$: *Z indukčního předpokladu máme*

$$\{(u_1, ..., u_{n-1}) : u_1 \in X_1, ..., u_{n-1} \in X_{n-1} \wedge u_i \in u_j\} = G(X_1, ...X_{n-1})$$

lze lehce nahlédnout, že

$$\{(u_1, ..., u_n) : u_1 \in X_1, ..., u_n \in X_n \ \wedge \ u_i \in u_j\} = G(X_1, ...X_{n-1}) \times X_n$$

což odpovídá

$$G_2(X, Y) = X \times Y$$

tedy

$$\{(u_1, ..., u_n) : u_1 \in X_1, ..., u_n \in X_n \ \wedge \ u_i \in u_j\} = G_8(G(X_1, ...X_{n-1}), X_n)$$

Nechť $n > 2$ *a* $i \neq n-1$ *a* $j \neq n-1$*:*
Z indukčního předpokladu máme

$$\{(u_1, ..., u_{n-2}, u_n, u_{n-1}) : u_1 \in X_1, ..., u_n \in X_n \wedge u_i \in u_j\} = G(X_1, ...X_n)$$

Uzávorkujeme

$$(u_1, ..., u_{n-2}, u_n, u_{n-1}) = ((u_1, ..., u_{n-2}), u_n, u_{n-1})$$

lze lehce nahlédnout, že

$$\{(u_1, ..., u_n) : u_1 \in X_1, ..., u_n \in X_n \ \wedge \ u_i \in u_j\} = G_9((u_1, ..., u_{n-2}), u_n, u_{n-1})$$

tedy

$$\{(u_1, ..., u_n) : u_1 \in X_1, ..., u_n \in X_n \ \wedge \ u_i \in u_j\} = G_9(G(X_1, ...X_n))$$

Nechť $n > 2$ *a* $i = n-1$ *a* $j = n$ *:*
Z indukčního předpokladu máme

$$\{(u_{n-1}, u_n) : u_{n-1} \in X_{n-1} \wedge u_n \in X_n \wedge u_{n-1} \in u_n\} = \epsilon(X_{n-1}, X_n)$$

a opakováním operace G_2 *dostáme*

$$\{(u_1, ..., u_{n-2}) : u_1 \in X_1, ..., u_{n-2} \in X_{n-2}\} = G_2(G(X_1, .., X_{n-3}), X_{n-2})$$

a tedy

$$\{(u_1, ..., u_n) : u_1 \in X_1, ..., u_n \in X_n \wedge u_{n-1} \in u_n\} = G_2(G(X_1, .., X_{n-2}), \epsilon(X_{n-1}, X_n)) \blacksquare$$

Nechť $n > 2$ *a* $i = n$ *a* $j = n-1$ *:*
Z indukčního předpokladu máme

$$\{(u_n, u_{n-1}) : u_{n-1} \in X_{n-1} \wedge u_n \in X_n \wedge u_n \in u_{n-1}\} = G_8(\epsilon(X_{n-1}, X_n))$$

a opakováním operace G_2 *dostáme*

$$\{(u_1, ..., u_{n-2}) : u_1 \in X_1, ..., u_{n-2} \in X_{n-2}\} = G_2(G(X_1, .., X_{n-3}), X_{n-2})$$

a tedy

$$\{(u_1, ..., u_n) : u_1 \in X_1, ..., u_n \in X_n \wedge u_{n-1} \in u_n\} = G_2(G(X_1, .., X_{n-2}), G(X_{n-1}, X_n)) \blacksquare$$

Nechť $\varphi(x_1, .., x_n)$ *je formule* $\neg\psi(x_1, .., x_n)$
Z indukčního předpokladu máme

$$\{(u_1, ..., u_n) : u_1 \in X_1, ..., u_n \in X_n \ \wedge \ \psi(x_1, .., x_n)\} = G(X_1, .., X_n) = Z$$

z předchozí části víme,že Kartezský součin je Gödelova operace

$$X_1 \times, .., \times X_n = G(X_1, .., X_n) = Y$$

je zřejmé

$$\{(u_1, ..., u_n) : u_1 \in X_1, ..., u_n \in X_n \ \wedge \ \varphi(x_1, .., x_n)\} = G_4(Y, Z)$$

Definice 10. $\mathfrak{D}(A) = \{X \subset A : \exists n \in \omega \exists s \in A^n \exists R \in Df(A, n+1)$
$(X = \{x \in A : s\hat{\ }\langle x \rangle \in R\})\}$

Definice. Charakteristická funkce.
Funkci χ nazveme charakteristickou, pokud pro nějakou $A \subseteq X$
$\chi_A : X \to \{0, 1\}$
$\chi_A(x) = 1$ pro $x \in A$
$\chi_A(x) = 0$ pro $x \notin A$

Definice. Rekurzivn i mno z ina

Definice. Pod pojmem *Eigenvariable* rozumme volnou promnnou, pes n probh kvantifikace pi uit pravidla generalizace.

Reference

[Mor69] Mordell, Louis Joel. *Diophantine Equations.* Academic Press, London, 1969.