Vladimír Osvald, du1

1.1

Vybudujte teóriu výrokovej logiky používajúcej iba túto spojku: zadefinujte pojem formuly, vytvárajúcej postupnosti a stromu pre formulu, boolovského ohodnotenia.

Nech P = { p,q,r,...) je množina elementárnych výrokov (výrokových premenných). Výrokové konštanty {0,1} sú pravdivostné hodnoty.

Formula:

Výroková formula nad množinou P výrokových premenných je zostrojená opakovaným použitím týchto dvoch pravidiel:

(1) Každá výroková premenná p∈P alebo výroková konštanta je výroková formula.
(2) Ak výrazy φ a ψ sú výrokové formuly, potom aj výrazy (↑φ) , (φ↑ψ) , (ψ ↑ψ) sú výrokové formuly.

Formuly môžeme chápať ako slová, ktoré sú zostrojené nad abecedou P výrokových premenných a logických spojok (a taktiež pomocných zátvoriek).

Vytvárajúca postupnosť:

Konštrukcia formuly φ nad množinou P je tvorená postupnosťou formúl $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, pričom posledný prvok φ_n je totožný s formulou φ , pre každé i = 1,2,..n platí jedna s týchto možností:

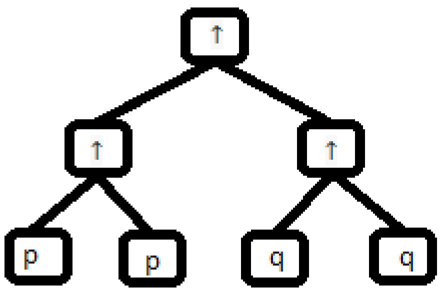
(1) φ_i je výroková premenná z P alebo výroková konštanta.

(2) φ_i vznikla z niektorého z prvkov množiny $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}\}$ aplikáciou logickej spojky ↑

Prvky postupnosti $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sa nazývajú podformuly formuly.

Strom pre formulu:

Syntaktický strom pre formulu grafická repreznetácia formuly, kde koncové vrcholy stromu reprezentujú výrokové premenné a vrcholy z nasledujúcich vrstiev sú priradené spojkám ↑. Vyhodnocovanie tohto stromu prebieha postupne zdola nahor.



Príklad: (p↑p) ↑ (q↑q)

Boolovské ohodnotenie:

Ohodnotenie(sémantika) špecifikuje význam danej vety (ktorá ma tiež aj svoju syntax). Vo výrokovej logike, ktorá sa zaoberá len pravdivostnými hodnotami premenných a ich formúl. Sémantika výrokovej formuly je vlastne tabuľka pravdivostných hodnôt formuly pre rôzne hodnoty jej výrokov. Tak napríklad: pre formulu (p↑p) ↑ (q↑q) ktorá má korektnú syntax (napr. reprezentovanú syntaktickým stromom), je jej sémantika plne určená ďalej uvedenou tabuľkou jej pravdivostných hodnôt pre všetky štyri kombinácie výrokov p a q.

Jednoducho povedané, boolovské ohodnotenie priradí každému výroku 0 alebo 1.

Vladimír Osvald, du1

1.2

Dokážte, že: **a) ↑ je definovateľná zo spojok ¬, ∧ a ∨;**
b) ¬, ∧, ∨, → sú definovateľné z ↑.

a) Z úlohy 1.1 vieme, že A ↑ B je pravdivé vtt keď aspoň jedno z A alebo B je nepravdivé.
A teda tabuľka hodnôt vypadá následovne:

A	B	A ↑ B
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Shefferov symbol vieme definovať následovne: ¬(a ∧ b)

Po rozdelení negácie sa konjunkcia vymení za disjunkciu a dostávame: ¬a ∨ ¬b

Tvrdenie dokážem pravdivostnou tabuľkou.

a	b	**a ↑ b**	¬a	¬b	a ∧ b	**¬(a ∧ b)**	**¬a ∨ ¬b**
0	0	**1**	1	1	0	**1**	**1**
0	1	**1**	1	0	0	**1**	**1**
1	0	**1**	0	1	0	**1**	**1**
1	1	**0**	0	0	1	**0**	**0**

Ako je vidieť v tabuľke, tieto formuly sú ekvivalentné a teda ↑ je definovateľná zo spojok ¬, ∧ a ∨;

b) ¬a je definovateľná ako ↑a == a↑a

A	**¬A**	**A ↑ A**
0	**1**	**1**
1	**0**	**0**

Vyplýva z tabuľky hodnôt pre Sheffervu spojku v úlohe 1.2 a)

a ∧ b je definovateľná ako (a↑b) ↑ (a↑b)

A	B	A ↑ B	**a ∧ b**	**(a↑b) ↑ (a↑b)**
0	0	1	**0**	**0**
0	1	1	**0**	**0**
1	0	1	**0**	**0**
1	1	0	**1**	**1**

a ∨ b je definovateľná ako (a↑a) ↑ (b↑b)

A	B	**a ∨ b**	A ↑ A	B ↑ B	**(a↑a) ↑ (b↑b)**
0	0	**0**	1	1	**0**
0	1	**1**	1	0	**1**
1	0	**1**	0	1	**1**
1	1	**1**	0	0	**1**

a → b je definovateľná ako a ↑ (b↑b) alebo b ↑ (a↑a)

A	B	**a → b**	A ↑ B	B ↑ B	**a ↑ (b↑b)**	**a ↑ (a↑b)**
0	0	**1**	1	1	**1**	**1**
0	1	**1**	1	0	**1**	**1**
1	0	**0**	1	1	**0**	**0**
1	1	**1**	0	0	**1**	**1**

Z tabuliek vyplýva, že ¬, ∧, ∨, → sú definovateľné z ↑.

1.3 X

Zdroje: http://www.fiit.stuba.sk/docs/edicna_cinnost/ucebne_texty/ML_uvod-str.pdf