

Oswaldo Uriel Calderón Dorantes,
316005171
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México

Imagenología Biomédica
osvaldo13576@ciencias.unam



TAREA 1 MÓDULO RESONANCIA MAGNÉTICA

5 de mayo de 2022

A partir del modelo de la distribución de Boltzmann visto en clase, obtenga la relación entre los **protones** que se encontrarían en un estado de Alta Energía con respecto a los que se encontrarían en un estado de Baja Energía considerando las siguientes condiciones:

- (a) Campo magnético de 1.5 [T], temperatura de 36 [°C].
- (b) Campo magnético de 3 [T], temperatura de 36 [°C]
- (c) Campo magnético de 7 [T], temperatura de 36 [°C]

Para todos los casos, considere que se tiene un volumen en el que se tienen 3×10^6 **protones** orientados de manera paralela y mencione entonces cuántos protones se encontrarían orientados de manera antiparalela.

La distribución de Boltzmann está dada por la siguiente relación:

$$\frac{N_{\uparrow}}{N_{\downarrow}} = \exp \left(-\frac{\Delta E}{kT} \right) \quad (1)$$

donde N_{\uparrow} y N_{\downarrow} son el número de protones en el estado de Alta Energía y Baja Energía respectivamente, ΔE es la diferencia de energía entre los dos estados, k es la constante de Boltzmann y T es la temperatura en escala absoluta; observemos que para todos los casos se tiene la misma temperatura, entonces tenemos que

$$36 [^\circ\text{C}] = 309.15 [\text{K}]$$

además:

$$\Delta E = \gamma \hbar B_0 \quad (2)$$

para este caso $\gamma = \gamma_H = 42.57 [\text{MHz} \cdot \text{T}^{-1}]$ la constante giromagnética del hidrógeno, \hbar es la constante de Planck radial y B_0 es la intensidad del campo magnético.

Entonces tenemos los valores de las constantes

$$\begin{cases} \gamma_H = 42.57 [\text{MHz} \cdot \text{T}^{-1}] \\ \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.055 \times 10^{-34} [\text{J} \cdot \text{s}] \\ T = 309.15 [\text{K}] \\ k = 1.381 \times 10^{-23} [\text{J} \cdot \text{K}^{-1}] \end{cases}$$

observemos que en la expresión $\frac{\Delta E}{kT} = \frac{\gamma_H \hbar}{kT} B_0$, $\frac{\gamma_H \hbar}{kT}$ permanece constante en los tres casos, calculando

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_H \hbar}{kT} &= \frac{(42.57 [\text{MHz} \cdot \text{T}^{-1}])(1.055 \times 10^{-34} [\text{J} \cdot \text{s}])}{(309.15 [\text{K}])(1.381 \times 10^{-23} [\text{J} \cdot \text{K}^{-1}])} \\ &= \frac{(42.57 \times 10^6 [\text{s}^{-1} \cdot \text{T}^{-1}])(1.055 \times 10^{-34} [\text{J} \cdot \text{s}])}{(309.15 [\text{K}])(1.381 \times 10^{-23} [\text{J} \cdot \text{K}^{-1}])} \\ &= \frac{(42.57 \times 10^6 [\cancel{\text{s}^{-1}}])(1.055 \times 10^{-34} [\cancel{\text{J}} \cdot \cancel{\text{s}}])}{(309.15 [\cancel{\text{K}}])(1.381 \times 10^{-23} [\cancel{\text{J}} \cdot \cancel{\text{K}^{-1}}])} [\text{T}^{-1}] \\ &= \frac{(42.57 \times 10^6)(1.055 \times 10^{-34})}{(309.15)(1.381 \times 10^{-23})} [\text{T}^{-1}] \\ &= \frac{(42.57)(1.055)}{(309.15)(1.381)} \times 10^{-5} [\text{T}^{-1}] \\ &= 1.052 \times 10^{-6} [\text{T}^{-1}] \end{aligned}$$

■ **Campo magnético de 1.5 [T], temperatura de 36 [°C]:**

Para este casos tenemos que la intensidad del campo magnético es $B_0 = 1.5 [T]$, por lo que la relación entre el número de protones en el estado de Alta Energía y el de Baja Energía es

$$\begin{aligned}\frac{N_{\uparrow}}{N_{\downarrow}} &= \exp \left(-\frac{\gamma_H \hbar}{kT} \cdot B_0 \right) \\ &= \exp \left(-\frac{(42.57)(1.055)}{(309.15)(1.381)} \times 10^{-5} [T^{-1}] \cdot 1.5 [T] \right) \\ &= \exp \left(-\frac{(42.57)(1.055)}{(309.15)(1.381)} \times 10^{-5} \cdot 1.5 \right) \\ &= 0.99999842208\end{aligned}$$

tenemos 3×10^6 orientados de manera paralela, es decir, $N_{\downarrow} = 3 \times 10^6$ protones de baja energía, por lo tanto tenemos que el número de protones orientados de manera antiparalela son

$$\begin{aligned}\frac{N_{\uparrow}}{N_{\downarrow}} = 0.99999842208 &\implies N_{\uparrow} = 0.99999842208 \times N_{\downarrow} \\ &= 0.99999842208 \cdot 3 \times 10^6 \\ &= 2,999,995.26625\end{aligned}$$

■ **Campo magnético de 3 [T], temperatura de 36 [°C]:**

Para este casos tenemos que la intensidad del campo magnético es $B_0 = 3 [T]$, por lo que la relación entre el número de protones en el estado de Alta Energía y el de Baja Energía es

$$\begin{aligned}\frac{N_{\uparrow}}{N_{\downarrow}} &= \exp \left(-\frac{\gamma_H \hbar}{kT} \cdot B_0 \right) \\ &= \exp \left(-\frac{(42.57)(1.055)}{(309.15)(1.381)} \times 10^{-5} [T^{-1}] \cdot 3 [T] \right) \\ &= \exp \left(-\frac{(42.57)(1.055)}{(309.15)(1.381)} \times 10^{-5} \cdot 3 \right) \\ &= 0.9999968442\end{aligned}$$

tenemos 3×10^6 orientados de manera paralela, es decir, $N_{\downarrow} = 3 \times 10^6$ protones de baja energía, por lo tanto tenemos que el número de protones orientados de manera antiparalela son

$$\begin{aligned}\frac{N_{\uparrow}}{N_{\downarrow}} = 0.9999968442 &\implies N_{\uparrow} = 0.9999968442 \times N_{\downarrow} \\ &= 0.9999968442 \cdot 3 \times 10^6 \\ &= 2,999,990.53251\end{aligned}$$

■ **Campo magnético de 7 [T], temperatura de 36 [°C]:** Para este casos tenemos que la intensidad del campo magnético es $B_0 = 7 [T]$, por lo que la relación entre el número de protones en el estado de Alta Energía y el de Baja Energía es

$$\begin{aligned}\frac{N_{\uparrow}}{N_{\downarrow}} &= \exp \left(-\frac{\gamma_H \hbar}{kT} \cdot B_0 \right) \\ &= \exp \left(-\frac{(42.57)(1.055)}{(309.15)(1.381)} \times 10^{-5} [T^{-1}] \cdot 7 [T] \right) \\ &= \exp \left(-\frac{(42.57)(1.055)}{(309.15)(1.381)} \times 10^{-5} \cdot 7 \right) \\ &= 0.9999926364\end{aligned}$$

tenemos 3×10^6 orientados de manera paralela, es decir, $N_{\downarrow} = 3 \times 10^6$ protones de baja energía, por lo tanto tenemos que el número de protones orientados de manera antiparalela son

$$\begin{aligned}\frac{N_{\uparrow}}{N_{\downarrow}} = 0.9999926364 &\implies N_{\uparrow} = 0.9999926364 \times N_{\downarrow} \\ &= 0.9999926364 \cdot 3 \times 10^6 \\ &= 2,999,977.90923\end{aligned}$$

- Comparativa:

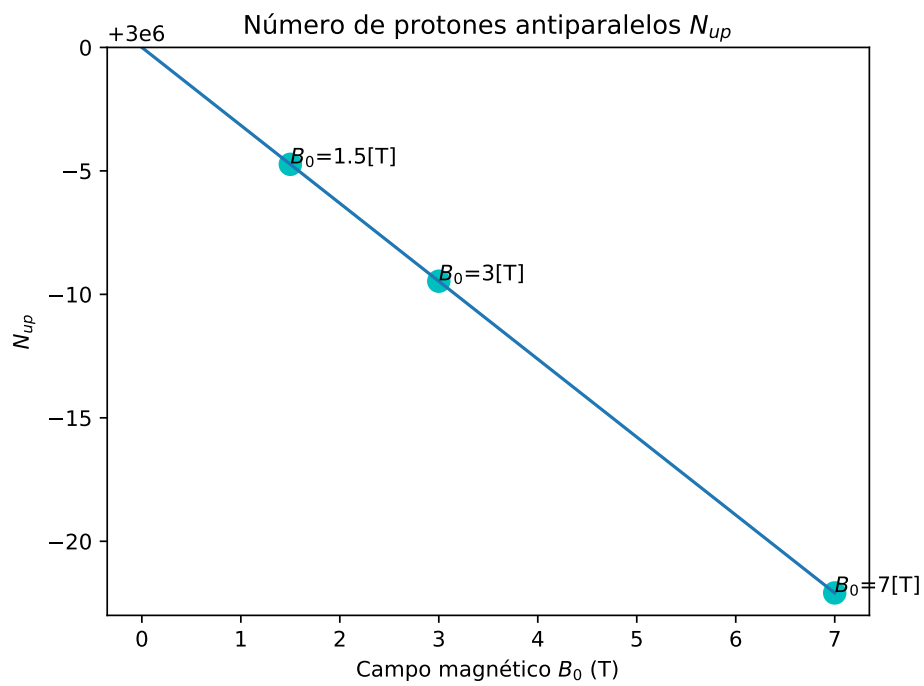


Figura 1: Observamos cómo disminuye los protones alineados de manera antiparalela conforme se aumenta la intensidad del campo magnético.