Osvaldo Uriel Calderón Dorantes,
316005171
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México

Mecánica Cuántica
osvaldo13576@ciencias.unam

Tarea 1

25 de febrero de 2022

Nota: A las unidades las pondré dentro de corchetes [unidad] para no confundir entre variables y realizar el análisis dimensional fácilmente.

1. Demuestra que el espectro del cuerpo negro derivado por Planck

$$\rho(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}\frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1},$$

implica la ley de Stefan-Boltzmann $u = aT^4$, con u la densidad de energía, y determina la relación entre las constantes $\hbar$ y a.

Tomando la ecuación

$$\rho(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}\frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

Escribimos a la frecuencia angular ω como $\omega = 2\pi\nu$ y a la constante de Planck como $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$, entonces

$$\begin{aligned}\rho(\nu, T) &= \frac{\left(\dfrac{h}{2\pi}\right)(2\pi\nu)^3}{\pi^2 c^3}\frac{1}{e^{(h/2\pi)(2\pi\nu))/kT} - 1}\\ &= \frac{8h\pi}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}\end{aligned}$$

Integrándola a todas las frecuencias, entonces, considerando el intervalo $\nu \in (0, \infty)$ y dado que ahora esta función está integrada en todas las frecuencias, la densidad de energía es $u(T) = aT^4$, una función de la temperatura,

$$\begin{aligned}u(T) &= \int_0^\infty \frac{8h\pi}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}d\nu\\ &= \frac{8h\pi}{c^3}\int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}d\nu\end{aligned}$$

para realizar esta integral, realizamos el cambio de variable. Sea $w = \frac{h\nu}{kT}$, de modo que

$$\nu = \frac{kT}{h}w \implies d\nu = \frac{kT}{h}dw$$

Entonces

$$\begin{aligned}u(T) &= \int_0^\infty \frac{8h\pi}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}d\nu\\ &= \frac{8\pi h}{c^3}\int_0^\infty \frac{(\frac{kT}{h}w)^3}{\exp(w) - 1}\frac{kT}{h}dw\\ &= \frac{8\pi h}{c^3}\left(\frac{k^4T^4}{h^4}\right)\int_0^\infty \frac{w^3}{e^w - 1}dw\\ &= \frac{8\pi k^4T^4}{h^3c^3}\int_0^\infty \frac{w^3}{e^w - 1}dw, \quad \text{donde} \int_0^\infty \frac{w^3}{e^w - 1}dw = \frac{\pi^4}{15}\\ &= \frac{8\pi k^4T^4}{h^3c^3}\left(\frac{\pi^4}{15}\right)\\ &= \frac{8\pi^5k^4}{15h^3c^3}T^4\end{aligned}$$

encontrando que

$$a = \frac{8\pi^5k^4}{15h^3c^3}$$

2. La función de trabajo del oro es de $5.1[eV]$.

   a) ¿Cuántos fotoelectrones puedes arrancar de una cuchara de oro si la dejas por 1 segundo dentro de un microondas encendido? (suponiendo que el microondas trabaja con radiación de $15[cm]$ de longitud de onda y que su $600[W]$ de consumo, consigue depositar el $5\,\%$ en la cuchara.)

   b) ¿Cuántos puedes arrancar de la misma cuchara usando por un segundo un láser industrial con una potencia de $42[W]$ y $655[nm]$ de longitud de onda?

3. Partiendo de la ecuación de onda completa de Schrödinger usa el método de separación de variables para encontrar la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo y la solución general a la ecuación temporal en términos de la constante de separación.

   Considerando la ecuación de onda en una dimensión, tomamos en cuenta que parte de de la función de onda $\Psi(x,t)$ se puede escribir como producto de dos funciones, una función con la variable espacial $\phi(x)$ y la otra con la variable temporal $f(t)$, entonces
   $$\Psi(x,t) = \phi(x)f(t)$$
   escribiendo la ecuación de onda resultante como
   $$i\hbar\phi(x)\frac{\partial f(t)}{\partial t} = f(t)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\phi(x)$$
   teniendo que la ecuación diferencial parcial en $\phi(x)$ es tratada como constante sobre la diferenciación en el tiempo y $f(t)$ es constante sobre la diferenciación sobre el espacio, entonces podemos manipular ducha función para tener de un lado de la igualdad la función ϕ y de otro a la función f
   $$i\hbar\frac{1}{f(t)}\frac{\partial f(t)}{\partial t} = \frac{1}{\phi(x)}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\phi(x)$$
   entonces podemos establecer que cada lado sea igual a una constante de separación
   $$\begin{aligned} i\hbar\frac{1}{f(t)}\frac{\partial f(t)}{\partial t} &= k \\ \frac{1}{\phi(x)}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\phi(x) &= k \end{aligned}$$
   entonces, podemos resolver la parte temporal
   $$i\hbar\frac{1}{f(t)}\frac{df(t)}{dt} = k \implies \frac{df(t)}{f(t)} = \frac{k}{i\hbar}dt$$
   al integrar tenemos el caso en que
   $$\int \frac{1}{x}dx = \ln(|x|) + c$$
   entonces
   $$\int_0^t \frac{df(\tau)}{f(\tau)} = \int_0^t \frac{k}{i\hbar}d\tau \implies \ln(f(t)) - \ln(f(0)) = -i\frac{k}{\hbar}t, \quad \frac{1}{i} = -i$$
   por propiedades de la función logaritmo tenemos que
   $$\ln\left(\frac{f(t)}{f(0)}\right) = -i\frac{k}{\hbar}t$$
   aplicando exponencial tenemos que
   $$\exp\left(\ln\left(\frac{f(t)}{f(0)}\right)\right) = \exp\left(-i\frac{k}{\hbar}t\right) \implies \frac{f(t)}{f(0)} = \exp\left(-i\frac{k}{\hbar}t\right)$$
   por lo tanto, la solución temporal es
   $$f(t) = f(0)\exp\left(-i\frac{k}{\hbar}t\right)$$
   Ahora con la parte independiente del tiempo
   $$\frac{1}{\phi(x)}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\phi(x) = k$$

si consideramos que la partícula no está sujeta a ningún potencial $V(x) = 0$, entonces

$$\frac{1}{\phi(x)}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x^2}\right) = k \implies \frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}k\phi(x)$$

ahora tenemos una ecuación diferencial parcial de segundo orden, entonces hacemos una nueva constante de separación positiva

$$a^2 = \frac{2m}{\hbar^2}k$$

entonces

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = -a\phi(x)$$

4. En clase hicimos los cálculos suponiendo que el potencial tomaba valores en los reales. Escribe ahora

$$V = V_0 - i\Gamma,$$

con V_0 y Γ en los reales.

a) Muestra que en el lugar de la conservación de la probabilidad que encontramos en clase, encontramos que

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{2\Gamma}{\hbar}P.$$

b) Resuelve la ecuación diferencial para $P(t)$, y compáralo con la expresión de decaimiento de una partícula inestable, y ya que estamos en eso, expresa la vida media en términos de Γ.