Definition

Funkcja f **zbliża się do granicy** g **przy** a, oznacza że:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$$

taka że jeśli

$$\forall x,\ 0 < |x - a| < \delta$$

to wtedy

$$|f(x) - g| < \varepsilon$$

Przykład 1

Wykaż że $\forall a,\ 0 < a < 1,\ \lim_{x \to a} f(x) = 0$ dla

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ niewymierny}, 0 < x < 1 \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q},\ \text{przy czym } nwd(p,q) = 1,\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

Niech $n \in \mathbb{N}$ będzie tak duże, że $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$, wtedy jedyne liczby x dla których $|f(x) - 0| < \varepsilon$ może być nie prawdziwe to:

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \dots; \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}$$

Ponieważ ilość takich liczb jest skończona, to wiemy że istnieje taka liczba najbardziej zbliżona do a. (Jeżeli a jest taką liczbą to rozważmy tylko $\frac{p}{q} \neq a$) Możemy oznaczyć tą liczbę jako δ.

Ponieważ

$$0 < |x - a| < \delta \implies x \notin \left\{ \frac{1}{2}, \dots, \frac{n-1}{n} \right\}$$

a więc

$$|f(x) - 0| < \varepsilon$$

jest prawdziwe, co kończy dowód.

Twierdzenia

Theorem

Funkcja nie może dążyć do dwóch granic jednocześnie przy a. Innymi słowy,

$$\lim_{x \to a} f(x) = g \vee \lim_{x \to a} f(x) = l \implies g = l$$

Dowód

$$\lim_{x \to a} f(x) = g \implies \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_1 > 0$$

taka że

$$\forall x,\ 0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - g| < \varepsilon$$

analogicznie

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \implies \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_2 > 0$$

taka że

$$\forall x,\ 0 < |x - a| < \delta_2 \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

możemy teraz wywnioskować że

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$$

taka że

$$\forall x,\ 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - g| < \varepsilon\ \wedge\ |f(x) - l| < \varepsilon$$

wystarczy obrać $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

Teraz żeby dokończyć dowód musimy znaleźć taki ε dla którego otrzymamy sprzeczność w przypadku gdy $g \neq l$.
Niech $\varepsilon = \frac{|g-l|}{2}$, wtedy istnieje taka $\delta > 0$, że

$$\forall x,\ 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - g| < \frac{|g - l|}{2}\ \wedge\ |f(x) - l| < \frac{|g - l|}{2}$$

to oznacza że

$$|g - l| = |g - f(x) + f(x) - l| \leq |g - f(x)| + |f(x) - l| < \frac{|g - l|}{2} + \frac{|g - l|}{2} = |g -$$

otrzymaliśmy sprzeczność. ■

Theorem

Jeżeli $\lim_{x \to a} f(x) = l \ \wedge \ \lim_{x \to a} g(x) = m$ to:

1. $\lim_{x \to a}(f+g)(x) = l + m$
2. $\lim_{x \to a}(f \cdot g)(x) = l \cdot m$
3. oraz jeżeli $x \neq 0$ to $\lim_{x \to a} \left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{m}$