

# Praca domowa 2 - IY3S1A Olbryś Maksymilian

3/52

$$\frac{p \Rightarrow q; r \Rightarrow s}{(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)}$$

Założmy że podany ciąg formuł nie jest regułą dowodzenia, wtedy wiemy że:

$w((p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)) = \perp$  oraz  $w(p \Rightarrow q \wedge r \Rightarrow s) = \top$ . W takim razie:

$$\begin{aligned}w(q \vee s) &= \perp \\w(p \vee r) &= \top \\w(p \Rightarrow q) &= \top \\w(r \Rightarrow s) &= \top\end{aligned}$$

$$w(q \vee s) = \perp \implies w(q) = \perp \wedge w(s) = \perp$$

$$\begin{aligned}w(q) = \perp \wedge w(p \Rightarrow q) = \top &\implies w(p) = \perp \\w(s) = \perp \wedge w(r \Rightarrow s) = \top &\implies w(r) = \perp\end{aligned}$$

ale to oznacza że  $w(p \vee r) = \perp$  co jest niezgodne z naszymi założeniami. Otrzymaliśmy więc sprzeczność, dowodząc tym samym że ciąg formuł jest regułą dowodzenia.

Przesłanki:

- $p \Rightarrow q$
- $r \Rightarrow s$

Wnioski:

- $(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)$

2/64

Udowodnić  $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 10 : 3^k \leq k!$

Zauważmy że dla  $k = 10$  nierówność jest spełniona gdyż

$$3^{10} = 59049 \leq 3628800 = 10!$$

Niech  $S$  oznacza zbiór liczb naturalnych dla których analizowana nierówność jest nieprawdziwa:

$$S = \{n \in \mathbb{N}, n \geq 10 : 3^n > n!\}$$

Zastosujemy schemat dowodu apagogenicznego  $\frac{\neg\varphi \Rightarrow (\psi \wedge \neg\psi)}{\varphi}$ . Niech  $\varphi : S = \emptyset$ , oraz

$\psi(n), n \geq 10 : 3^n \leq n!$ . Założmy że  $\neg\varphi$ , wtedy  $S \neq \emptyset$ . Zasada Minimum stanowi że skoro  $\mathbb{N} \supseteq S \neq \emptyset$ , to istnieje element najmniejszy  $m \in S, m > 10$ . Z opisanych warunków otrzymujemy następujące dwie nierówności:

$$\neg\psi(m), m \geq 10 : 3^m > m!$$

$$3^{m-1} \leq (m-1)!$$

Przekształćmy drugą nierówność mnożąc obie strony przez 3:

$$3^{m-1} \cdot 3 \leq 3(m-1)!$$

$$3^m \leq 3(m-1)!$$

Zauważmy że

$$3(m-1)! \leq m!$$

$$3 \leq m$$

Ponieważ dla  $m \geq 10$  prawdziwym jest że  $3(m-1)! \leq m!$  to wnioskujemy

$$\psi(m), m \geq 10 : 3^m \leq m!$$

Tym samym otrzymaliśmy sprzeczność, jako że założyliśmy  $\neg\psi$ , a otrzymaliśmy  $\psi$ .  
 Udowodniliśmy więc prawdziwość przesłanki, więc prawdziwy jest również wniosek, co kończy dowód.