

Logika

Proste definicje

- **zdanie** to wyrażenie o wartości prawda (P) lub fałsz (F), tylko zdania twierdzące
- **wartość logiczna** to P lub F przypisana zdaniu
- **zmienna zdaniowa** to symbol oznaczający całe zdanie, P lub F po podstawieniu wartości logicznej
- **funktor zdaniotwórczy** to operacja budująca zdania (\wedge, \vee, \neg)
- Spójniki jedno- i dwuargumentowe:
 - unarne: \neg
 - binarne: $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \oplus$

Formuła logiki zdań

Definition

Niech $\text{Var} = \{p_1, p_2, \dots\}$ - przeliczalny zbiór zmiennych

Alfabet $\Sigma = \text{Var} \cup \{\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, (,)\}$

Zbiór formuł $\text{Form} \subseteq \Sigma^*$ to najmniejszy taki zbiór, że:

1. $\text{Var} \subseteq \text{Form}$
2. $\varphi \in \text{Form} \Rightarrow (\neg\varphi) \in \text{Form}$
3. $\varphi, \psi \in \text{Form} \wedge \circ \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\} \Rightarrow (\varphi \circ \psi) \in \text{Form}$

Definicja w formie CFG

$\text{Form} \rightarrow \text{Var} \mid \neg\text{Form} \mid (\text{Form Bin Form})$

$\text{Bin} \rightarrow \vee \mid \wedge \mid \Rightarrow \mid \Leftrightarrow$

$\text{Var} \rightarrow \text{ID} \mid P \mid F$

Postać normalna formuły - DNF i CNF

- **DNF** (disjunctive normal form) - alternatywa koniunkcji literalów
- **CNF** (conjunctive normal form) - koniunkcja alternatyw literalów

Algorytm zamiany do postaci normalnej

1. $\left\{ \begin{array}{l} \text{usuń } \Leftrightarrow \text{ i } \Rightarrow: \\ \bullet \left\{ \begin{array}{l} p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \\ p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q \end{array} \right. \end{array} \right.$
2. $\left\{ \begin{array}{l} NNF \text{ (negation normal form): wsuń negacje do literałów} \end{array} \right.$
3. $\left\{ \begin{array}{l} \text{rozdzielaj } \vee, \wedge \text{ tak aby uzyskać pożądaną formę} \end{array} \right.$

Równoważność formuł

Definition

Jeśli $p, q \in \text{Form}$, to $p \equiv q \Leftrightarrow \forall w \in W : w(p) = w(q)$

Specjalne formuły

- $\left\{ \begin{array}{l} \text{tautologia - formuła zawsze prawdziwa} \end{array} \right.$
- $\left\{ \begin{array}{l} \text{sprzeczność - formuła zawsze fałszywa} \end{array} \right.$
- $\left\{ \begin{array}{l} \text{spełnialna - prawdziwa dla jakiegoś wartościowania} \end{array} \right.$
- $\left\{ \begin{array}{l} \text{wynikanie - } \Gamma \models p \Leftrightarrow (\forall \Gamma \Rightarrow p) \end{array} \right.$

Zbiór spójników funkcjonalnie pełny

Definition

Zbiór spójników jest funkcjonalnie pełny, gdy można przy jego użyciu zdefiniować dowolną funkcję prawdziwościową

Przemienność, łączność i rozdzielność

- $\left\{ \begin{array}{l} \text{przemienność: } \wedge, \vee, \Leftrightarrow \end{array} \right.$
- $\left\{ \begin{array}{l} \text{łączność } \wedge, \vee, \Leftrightarrow \end{array} \right.$
- $\left\{ \begin{array}{l} \text{rozdzielność lewo i prawo stronna: } \wedge, \vee \end{array} \right.$

Kolejność wykonywania spójników

- $\left\{ \begin{array}{l} \text{kolejność: } \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow \end{array} \right.$
- $\left\{ \begin{array}{l} \text{łączność: } \Rightarrow \text{ łączny prawostronnie} \end{array} \right.$

Najważniejsze twierdzenia

☐ Zamiana implikacji alternatywą

$$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

☐ Prawa de Morgana

1. $\neg(p \wedge r) \equiv \neg p \vee \neg r$

2. $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

☐ Schemat dowodu nie wprost

$$\Gamma, \neg p \vdash F \Rightarrow \Gamma \vdash p$$