Grupy - zadania

Zadanie 1. Zbadać, czy zbiór X z działaniem $*$ jest grupą. Czy jest to grupa abelowa?

1) $X = Z, a * b = a + b + 1$

1. Sprawdźmy czy działanie jest wewnętrzne

$$\forall a, b \in Z : a + b + 1 \in Z$$
$$\text{Ponieważ } X = Z \text{ to działanie jest wewnętrzne}$$

1. Sprawdźmy czy działanie $*$ jest łączne

$$(a * b) * c = (a + b + 1) * c = a + b + 1 + c + 1 = a + b + c + 2$$
$$a * (b * c) = a * (b + c + 1) = a + b + c + 1 + 1 = a + b + c + 2$$
$$(a * b) * c = a * (b * c), \text{ a więc działanie jest łączne}$$

3. Sprawdźmy czy istnieje element neutralny e

$$a * (-1) = a + (-1) + 1 = a$$
$$\forall a \in X : a * (-1) = a, \text{ to oznacza że istinieje elemnt neutralny } e = -1$$

4. Sprawdźmy czy dla każdego elementu a odwrotny a^{-1}

$$a * (-a) = a + (-a - 2) + 1 = -1 = e$$
$$\forall a \in X : a * (-a - 2) = e \implies -a - 2 = a^{-1}$$

Zbiór X jest więc grupą

5. Sprawdźmy czy X jest grupą abelową, czyli czy $*$ jest działaniem przemiennym

$$a * b = a + b + 1$$
$$b * a = b + a + 1$$
$$a * b = b * a, \ * \text{ jest przemienne}$$

Zbiór X jest więc grupą abelową

2) $X = (1, +\infty), a * b = ab - a - b + 2$

Aby zbiór X był grupą należy wykazać:

1. Wewnętrzność działania $*$

2. Łączność działania $*$

3. Istnienie elementu neutralnego e

4. $\forall a \in X, \exists a^{-1} \in X : a * a^{-1} = e$

Po kolei to:

1. $\forall a, b \in X : a * b \in X$

$$ab - a - b + 2 = ab - a - b + 1 + 1 = (a-1)(b-1) + 1$$
$$\text{teraz mamy } (a - 1 > 0) \wedge (b - 1 > 0) \implies (a-1)(b-1) > 0$$
$$\text{a więc } (a-1)(b-1) + 1 > 1$$
$$\text{czyli } \forall a, b \in X : a * b > 1 \blacksquare$$

2. $(a * b) * c = a * (b * c)$

$$L = (a * b) * c = (ab - a - b + 2) * c =$$
$$= (ab - a - b + 2)c - (ab - a - b + 2) - c + 2 =$$
$$= abc - ac - bc + 2c - ab + a + b - c - 2 + 2 =$$
$$= abc - ac - ab - bc + a + b + c$$

$$P = a * (b * c) = a * (bc - b - c + 2) =$$
$$= a(bc - b - c + 2) - a - (bc - b - c + 2) + 2 =$$
$$= abc - ab - ac + 2a - a - bc + b + c - 2 + 2 =$$
$$= abc - ab - ac - bc + a + b + c$$

$$L = P \blacksquare$$

3. $\exists e \in X, \forall a \in X : a * e = a$

$$a * e = a$$
$$ae - a - e + 2 = a$$
$$ae - e + 2 = 2a$$
$$e(a-1) = 2(a-1)$$
$$e(a-1) - 2(a-1) = 0$$
$$(a-1)(e-2) = 0$$
$$\forall a \in X : a * 2 = a$$
$$e = 2 \blacksquare$$

4. $\forall a \in X, \exists a^{-1} \in X : a * a^{-1} = e$

$$a * a^{-1} = e$$
$$aa^{-1} - a - a^{-1} + 2 = 2$$
$$a^{-1}(a-1) - a = 0,\ a \in X \implies a \neq 1$$
$$a^{-1} = \frac{a}{a-1} \blacksquare$$

Zbiór X jest więc grupą

5. X jest grupą abelową wtedy i tylko wtedy gdy $a * b = b * a$

$$L = ab - a - b + 2$$
$$P = ba - b - a + 2 = ab - a - b + 2$$
$$L = P \blacksquare$$

Grupa X jest więc grupą abelową