

Logika

Proste definicje

- *zdanie* to wyrażenie o wartości prawda (P) lub fałsz (F), tylko zdania twierdzące
- *wartość logiczna* to P lub F przypisana zdaniu
- *zmienna zdaniowa* to symbol oznaczający całe zdanie, P lub F po podstawieniu wartości logicznej
- *funktor zdaniotwórczy* to operacja budująca zdania (\wedge, \vee, \neg)
- Spójniki jedno- i dwuargumentowe:
 - unarne: \neg
 - binarne: $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \oplus$

Formuła logiki zdań

Definition

Niech $\text{Var} = \{p_1, p_2, \dots\}$ - przeliczalny zbiór zmiennych

Alfabet $\Sigma = \text{Var} \cup \{\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, (,)\}$

Zbiór formuł $\text{Form} \subseteq \Sigma^*$ to najmniejszy taki zbiór, że:

1. $\text{Var} \subseteq \text{Form}$
2. $\varphi \in \text{Form} \Rightarrow (\neg\varphi) \in \text{Form}$
3. $\varphi, \psi \in \text{Form} \wedge \circ \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\} \Rightarrow (\varphi \circ \psi) \in \text{Form}$

Definicja w formie CFG

$\text{Form} \rightarrow \text{Var} \mid \neg\text{Form} \mid (\text{Form} \text{ Bin } \text{Form})$

$\text{Bin} \rightarrow \vee \mid \wedge \mid \Rightarrow \mid \Leftrightarrow$

$\text{Var} \rightarrow \text{ID} \mid P \mid F$

Postać normalna formuły - DNF i CNF

- *DNF* (disjunctive normal form) - alternatywa koniunkcji literałów
- *CNF* (conjunctive normal form) - koniunkcja alternatyw literałów

Algorytm zamiany do postaci normalnej

1. usuń \Leftrightarrow i \Rightarrow :

- $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
- $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

2. *NNF* (negation normal form): wsuń negacje do literałów

3. rozdzielaj \vee , \wedge tak aby uzyskać pożądaną formę

Równoważność formuł

□ Definition

Jeśli $\varphi, \psi \in \text{Form}$, to $\varphi \equiv \psi \Leftrightarrow \forall w \in W : w(\varphi) = w(\psi)$

Specjalne formuły

- *tautologia* - formuła zawsze prawdziwa
- *sprzeczność* - formuła zawsze fałszywa
- *spełnialna* - prawdziwa dla jakiegoś wartościowania

Zbiór spójników funkcjonalnie pełny

□ Definition

Zbiór spójników jest funkcjonalnie pełny, gdy można przy jego użyciu zdefiniować dowolną funkcję prawdziwościową

Kolejność wykonywania spójników

- kolejność: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

Przemienność, łączność i rozdzielność

1. przemienne: $F, \wedge, \text{XOR}, \vee, \text{NOR}, \Leftrightarrow, \text{NAND}, T$
2. łączne: $\wedge, \vee, \Leftrightarrow, \text{XOR}$
3. łączne prawostronne: \Rightarrow
4. rozdzielne względem siebie: \wedge, \vee