

Praca domowa 2 - IY3S1A Olbryś Maksymilian

3/52

$$\frac{p \Rightarrow q; r \Rightarrow s}{(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)}$$

Załóżmy że podany ciąg formuł nie jest regułą dowodzenia, wtedy wiemy że:

$w((p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)) = \perp$ oraz $w(p \Rightarrow q \wedge r \Rightarrow s) = \top$. W takim razie:

$$\begin{aligned} w(q \vee s) &= \perp \\ w(p \vee r) &= \top \\ w(p \Rightarrow q) &= \top \\ w(r \Rightarrow s) &= \top \end{aligned}$$

$$w(q \vee s) = \perp \implies w(q) = \perp \wedge w(s) = \perp$$

$$\begin{aligned} w(q) &= \perp \wedge w(p \Rightarrow q) = \top \implies w(p) = \perp \\ w(s) &= \perp \wedge w(r \Rightarrow s) = \top \implies w(r) = \perp \end{aligned}$$

ale to oznacza że $w(p \vee r) = \perp$ co jest niezgodne z naszymi założeniami. Otrzymaliśmy więc sprzeczność, dowodząc tym samym że ciąg formuł jest regułą dowodzenia.

Przesłanki:

- $p \Rightarrow q$
- $r \Rightarrow s$

Wnioski:

- $(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)$

2/64

Udowodnić $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 10 : 3^k \leq k!$

Zauważmy że dla $k = 10$ nierówność jest spełniona gdyż

$$3^{10} = 59049 \leq 3628800 = 10!$$

Niech S oznacza zbiór liczb naturalnych dla których analizowana nierówność jest nieprawdziwa:

$$S = \{n \in \mathbb{N}, n \geq 10 : 3^n > n!\}$$

Zastosujemy schemat dowodu apagogicznego $\frac{\neg\varphi \Rightarrow (\psi \wedge \neg\psi)}{\varphi}$. Niech $\varphi : S = \emptyset$, oraz $\psi(n), n \geq 10 : 3^n \leq n!$. Założmy że $\neg\varphi$, wtedy $S \neq \emptyset$. Zasada Minimum stanowi że skoro $\mathbb{N} \supseteq S \neq \emptyset$, to istnieje element najmniejszy $m \in S, m > 10$. Z opisanych warunków otrzymujemy następujące dwie nierówności:

$$\neg\psi(m), m \geq 10 : 3^m > m! \\ 3^{m-1} \leq (m-1)!$$

Przekształćmy drugą nierówność mnożąc obie strony przez 3:

$$3^{m-1} \cdot 3 \leq 3(m-1)! \\ 3^m \leq 3(m-1)!$$

Zauważmy że

$$3(m-1)! \leq m! \\ 3 \leq m$$

Ponieważ dla $m \geq 10$ prawdziwym jest że $3(m-1)! \leq m!$ to wnioskujemy

$$\psi(m), m \geq 10 : 3^m \leq m!$$

Tym samym otrzymaliśmy sprzeczność, jako że założyliśmy $\neg\psi$, a otrzymaliśmy ψ . Udowodniliśmy więc prawdziwość przesłanki, więc prawdziwy jest również wniosek, co kończy dowód.