Kolokwium 2

Pochodne

$$
\begin{aligned}
&(1) && \frac{d}{dx}(uv) &&= \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} \\
&(2) && \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) &&= \frac{\frac{du}{dx}v - u\frac{dv}{dx}}{v^2} \\
&(3) && \frac{dy}{dx} &&= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \\
&(4) && \frac{d}{dx}x^n &&= nx^{n-1} \\
&(5) && \frac{d}{dx}a^x &&= a^x \ln a \\
&(6) && \frac{d}{dx}e^x &&= e^x \\
&(7) && \frac{d}{dx}\log_a x &&= \frac{1}{x \ln a} \\
&(8) && \frac{d}{dx}\ln x &&= \frac{1}{x} \\
&(9) && \frac{d}{dx}\sin x &&= \cos x \\
&(10) && \frac{d}{dx}\cos x &&= -\sin x \\
&(11) && \frac{d}{dx}\tan x &&= \sec^2 x \\
&(12) && \frac{d}{dx}\cot x &&= -\csc^2 x \\
&(13) && \frac{d}{dx}\sec x &&= \sec x \tan x \\
&(14) && \frac{d}{dx}\csc x &&= -\csc x \cot x \\
&(15) && \frac{d}{dx}\sin^{-1} x &&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
&(16) && \frac{d}{dx}\tan^{-1} x &&= \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}
$$

Symbole nieoznaczone

$[\infty - \infty], [0 \cdot \infty], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [\frac{0}{0}], 0^0, \infty^0, 0^\infty$

Asymptoty

1. Prosta $x = c$ jest asymptotą pionową krzywej gdy, jest jej asymptotą lewostronną i prawostronną, czyli:

$$
\begin{aligned}
& (\lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty \lor \lim_{x\to c^+} f(x) = +\infty) \\
\land \quad & (\lim_{x\to c^-} f(x) = \infty \lor \lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty)
\end{aligned}
$$

2. Prosta o równaniu $y = mx + n$ jest asymptotą ukośną gdy $m \neq 0$, gdy następujące granice są istnieją i są skończone:
    1. $m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$
    2. $n = \lim_{x\to\pm\infty} = (f(x) - mx)$
3. Prosta jest asymptotą poziomą gdy spełnia warunki asymptoty poziomej ale $m = 0$

Wklęsłość i wypukłość funkcji

Założmy że funkcja $f(x)$ ma pochodną na przedziale $(a; b)$ mówimy że krzywa $y = f(x)$ jest:

1. Wypukła na przedziale $(a;b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x_0 \in (a;b)$ styczna poprowadzona do tej krzywej w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest położona pod tą krzywą.
2. Wklęsła na przedziale $(a;b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x_0 \in (a;b)$ styczna poprowadzona do tej krzywej w punkcie $(x_0; f(x_0))$ jest położona nad tą krzywą.

Jeżeli $f(x)$ dla każdego $x \in (a;b)$:

- $f''(x) < 0$, to krzywa $y = f(x)$ jest wklęsła na przedziale $(a;b)$
- $f''(x) > 0$, to krzywa $y = f(x)$ jest wypukła na przedziale $(a;b)$

Szereg Taylora

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

Dla $a = 0$ otrzymujemy szereg Maclaurina

Dziedzina

Dla $\log_a b$

- $a > 0$
- $b > 0$
- $a \neq 1$