Kolokwium 1 - Wzory

Granica ciągu

Wzory na sumę ciągu

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \qquad \text{(ciag arytmetyczny)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \qquad \text{(ciag geometryczny)}$$

Iloraz wielomianów

$$(1.1) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{P}_n(\mathbf{R})}{\mathcal{P}_{n+k}(\mathbf{R})} = \begin{cases} 0, \text{ if } k > 0 \\ c, \text{ if } k = 0 \\ \infty, \text{ if } k < 0 \end{cases}$$

Definicja liczby e

$$(1.2) \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

Twierdzenie o trzech ciągach

(1.3) Jeżeli $a_n \le u_n \le b_n$, oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = g$, to $\lim_{n\to\infty} u_n = g$

Szeregi

Szereg geometryczny

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q} \quad (|q| \le 1)$$

Harmoniczny

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, jest zbieżny dla $\alpha > 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha > 1$

Kryterium konieczne zbieżności szeregu

(2.1) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Szeregi o wyrazach nieujemnych

Kryterium porównawcze zbieżności szeregów

(2.2) Jeżeli dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, gdzie $u_n \ge 0$, można wskazać taki szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, że począwszy od pewnego miejsca N (tzn. dla każdego $n \ge N$), zachodzi nierówność $u_n \le v_n$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest również zbieżny.

Kryterium porównawcze rozbieżności szeregów

(2.3) Jeżeli dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, można wskazać taki szereg rozbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, gdzie $v_n \geq 0$, że począwszy od pewnego miejsca N (tzn. dla każdego $n \geq N$), zachodzi nierówność $u_{n \geq v_n}$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest również rozbieżny.

Kryteria d'Alemberta zbieżności szeregów

(2.4) Z kryteriów d'Alamberta wynikają następujące wnioski:

1. Jeżeli $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = r < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny.
2. Jeżeli $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = s > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest rozbieżny.
3. Jeżeli $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, to przypadek jest wątpliwy.

Kryteria Cauchy'ego zbieżności szeregów

(2.5) Z kryteriów Cauchy'ego wynikają następujące wnioski:

1. Jeżeli $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = r < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny.
2. Jeżeli $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = s > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest rozbieżny.
3. Jeżeli $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$, to przypadek jest wątpliwy.

Szeregi przemienne

Kryterium Leibniza zbieżności szeregów

(2.6) Jeżeli $|u_{n+1}| \leq |u_n| \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} u_n = 0$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny.

Kryterium bezwzględnej zbieżności szeregów

(2.7) Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, którego wyrazy są równe wartościom bezwzględnym wyrazów szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, jest zbieżny, to i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny.

Nierówności i równości trygonometryczne

Założenie: $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$
\begin{aligned}
(3.1) \quad & \sin x < x < \tan x \\
(3.2) \quad & \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \\
(3.3) \quad & \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1
\end{aligned}
$$