Kolokwium 1 - Wzory

Grupy

Definicje

Grupa

Zbiór G, w którym określone jest działanie $\circ$, nazywamy **grupą**, jeśli spełnione są warunki:

1. działanie $\circ$ jest **łączne**
2. istnieje **element neutralny**
3. dla każdego elementu, istnieje element do niego **odwrotny**

Działanie

Działaniem w zbiorze niepustym A nazywamy każde odwzorowanie f iloczyn kartezjańskiego $A \times A$ w zbiór A:

$$f : A \times A \rightarrow A$$

Działanie $\circ$ określone w zbiorze A nazywamy:

1. **przemiennym**, jeśli

$$\forall a, b \in A;\ (a \circ b = b \circ a)$$

2. **łącznym**, jeśli

$$\forall a, b \in A;\ [(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)]$$

3. **rozdzielnym**, jeśli:

$$\forall a, b, c \in A : a \otimes (b + c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$$

Element neutralny

Element $e \in A$ nazywamy **elementem neutralnym** jeśli:

$$\exists e \in G\ \forall a \in G, (e \circ a = a \circ e = a)$$

Element odwrotny

Element a^{-1} nazywamy **elementem odwrotnym** jeśli:

$$\forall a \in G\ \exists a^{-1} \in G,\ (a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e)$$

gdzie e jest elementem neutralnym

Rodzaje grup

grupa addytywna - zbiór z działaniem dodawania
grupa multiplikatywna - zbiór $Q - \{0\},\ R - \{0\}$ z działaniem mnożenia

Modulo

Zbiór $\mathbb{Z}_n$ jest grupą wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczba pierwszą

Liczby zespolone

Podstawowe wzory

$$
\begin{aligned}
z &= a + bi \\
z &= \cos\varphi + i\sin\varphi \\
\bar{z} &= a - bi \\
\mathrm{Re}(z) &= a \\
\mathrm{Im}(z) &= b \\
|z| &= \sqrt{a^2 + b^2} \\
\sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\tfrac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\tfrac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right) \text{ dla } k = 0, 1, \ldots, n-1 \\
z^n &= |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \\
|z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2| \\
\arg(z_1 \cdot z_2) &= \arg(z_1) + \arg(z_2) \\
\arg\left(\tfrac{z_1}{z_2}\right) &= \arg(z_1) - \arg(z_2) \\
e^{i\varphi} &= \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)
\end{aligned}
$$

Schemat rozwiązywania równań kwadratowych

Zaczynamy od policzenia Δ:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Niech $w = a + bi$, $z = x + yi$ oraz $w^2 = z$, wtedy otrzymujemy następujący układ równań:

$$
\begin{cases}
a^2 - b^2 &= x \\
2ab &= y \\
a^2 + b^2 &= \sqrt{x^2 + y^2}
\end{cases}
$$

Korzystając z powyższego układu równań znajdujemy $\sqrt{\Delta}$ i podstawiamy pod x_1, x_2:

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Schemat rozwiazywania równań n-tego stopnia

Naszym celem będzie rozłożenie równania na wielomiany pierwszego i drugiego stopnia np. przy pomocy schematu Hornera. Warto przy tym pamiętać że jeżeli z jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach rzeczywistych to $\bar{z}$, również nim jest.

Trygonometria (raczej nie potrzebne)

$$\begin{aligned}
\sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) \\
\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\
\sin(a \pm b) &= \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b) \\
\cos(a \pm b) &= \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)
\end{aligned}$$

Pierścienie (raczej nie potrzebne)

Definicja

Niepusty zbiór P, w którym określone są dwa działania $\oplus$ i $\otimes$, nazywamy **pierścieniem**, jeśli spełnione są warunki:

1. P jest grupa abelowa względem działania $\oplus$
2. Działanie $\otimes$ jest rozdzielne względem $\oplus$
3. Działanie $\otimes$ jest łączne

Jeśli w pierścieniu istnieje element neutralny mnożenia, to element taki nazywamy **jednościa** pierścienia.

Element $a \in P$ różny od elementu neutralnego $\oplus$ nazywamy **lewym dzielnikiem zera**, gdy istnieje element $b \in P$ różny od elementu neutralnego $\oplus$ taki, że $a \otimes b = \theta (b \otimes a = \theta)$, gdzie θ oznacza element neutralny grupy addytywnej z działaniem $\oplus$.

Element pierścienia P nazywamy **dzielnikiem zera**, gdy jest on lewym lub prawym dzielnikiem zera. Pierścień P nazywamy pierścieniem **bez dzielników zera**, gdy żaden jego element nie jest dzielnikiem zera.

Pierścień przemienny z jednością bez dzielników zera, nazywamy **pierścieniem całkowitym**

Ciało (raczej nie potrzebne)

Definicja

Pierścień K nazywamy **ciałem**, jeśli spełnia następujące warunki:

1. K zawiera więcej niż jeden element
2. $K - \{0\}$ jest grupą względem mnożenia w K

Jednością grupy $K - \{0\}$ względem mnożenia nazywamy jednością ciała K, oznaczamy ją przez e.

Pierścień K z jednością, nazywamy ciałem wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall a \neq 0 \; \exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = e$