

# Logika

## Proste definicje

- *zdanie* to wyrażenie o wartości prawda (P) lub fałsz (F), tylko zdania twierdzące
- *wartość logiczna* to P lub F przypisana zdaniu
- *zmienna zdaniowa* to symbol oznaczający całe zdanie, P lub F po podstawieniu wartości logicznej
- *funktor zdaniotwórczy* to operacja budująca zdania ( $\wedge, \vee, \neg$ )
- Spójniki jedno- i dwuargumentowe:
  - unarne:  $\neg$
  - binarne:  $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \oplus$

## Formuła logiki zdań

### Definition

Niech  $\text{Var} = \{p_1, p_2, \dots\}$  - przeliczalny zbiór zmiennych

Alfabet  $\Sigma = \text{Var} \cup \{\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, (, )\}$

Zbiór formuł  $\text{Form} \subseteq \Sigma^*$  to najmniejszy taki zbiór, że:

1.  $\text{Var} \subseteq \text{Form}$
2.  $\varphi \in \text{Form} \Rightarrow (\neg\varphi) \in \text{Form}$
3.  $\varphi, \psi \in \text{Form} \wedge \circ \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\} \Rightarrow (\varphi \circ \psi) \in \text{Form}$

## Definicja w formie CFG

$\text{Form} \rightarrow \text{Var} \mid \neg\text{Form} \mid ( \text{Form Bin Form} )$

$\text{Bin} \rightarrow \vee \mid \wedge \mid \Rightarrow \mid \Leftrightarrow$

$\text{Var} \rightarrow \text{ID} \mid P \mid F$

## Postać normalna formuły - DNF i CNF

- *DNF* (disjunctive normal form) - alternatywa koniunkcji literalów
- *CNF* (conjunctive normal form) - koniunkcja alternatyw literalów

## Algorytm zamiany do postaci normalnej

1. usuń  $\Leftrightarrow$  i  $\Rightarrow$ :
  - $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
  - $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
2. *NNF* (negation normal form): wsuń negacje do literalów

3. rozdzielaj  $\vee, \wedge$  tak aby uzyskać pożądaną formę

## Równoważność formuł

### Definition

Jeśli  $\varphi, \psi \in \text{Form}$ , to  $\varphi \equiv \psi \Leftrightarrow \forall w \in W : w(\varphi) = w(\psi)$

## Specjalne formuły

- *tautologia* - formuła zawsze prawdziwa
- *sprzeczność* - formuła zawsze fałszywa
- *spełnialna* - prawdziwa dla jakiegoś wartościowania

## Zbiór spójników funkcjonalnie pełny

### Definition

Zbiór spójników jest funkcjonalnie pełny, gdy można przy jego użyciu zdefiniować dowolną funkcję prawdziwościową

## Kolejność wykonywania spójników

- kolejność:  $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

## Przemienność, łączność i rozdzielność

1. przemienne:  $F, \wedge, \text{XOR}, \vee, \text{NOR}, \Leftrightarrow, \text{NAND}, T$
2. łączne:  $\wedge, \vee, \Leftrightarrow, \text{XOR}$
3. łączne prawostronnie:  $\Rightarrow$
4. rozdzielne względem siebie:  $\wedge, \vee$