Tehtävä 1

Määritä vektorien $\overline{a} = (1, 2, 3)$ ja $\overline{b} = (-1, 4, -2)$ pistetulo.

Ratkaisu

Pistemerkintä ja sen paikkavektori samastetaan eli
$\overline{a} = (1, 2, 3) = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$. Matriisilaskennassa vektori kirjoitetaan pystyvektorina eli $\overline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \end{pmatrix}^T$.

Vektorien pistetulo on

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a}^T \overline{b} = \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) = 1.$$

Tehtävä 2

Laske matriisin A ja vektorin $\overline{x}$ tulo, kun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \overline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

.

Ratkaisu

Matriisi A on 3×3-matriisi, jossa ensimmäinen kolmonen viittaa rivien (vaakarivien) lukumäärään ja jälkimmäinen kolmonen sarakkeiden (pystyrivien) lukumäärään. Vektori $\overline{x}$ on 3×1-matriisi eli lyhyesti vain 3-komponenttinen vektori. Tulo $A\overline{x}$ on määritelty ja tulo on 3-komponenttinen vektori.

Ratkaisu (jatkuu)

Tulo $A\overline{x}$ lasketaan niin, että lasketaan A:n sarakevektorien ja vektorin $\overline{x}$ pistetulot ja ne tulevat tulovektorin komponenteiksi.

$$
\begin{aligned}
A\overline{x} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) \\ -1 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) - 2 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) - 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -6 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Tehtävä 3

Laske matriisitulo AB, kun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

.

Ratkaisu

Varmistetaan aluksi, että tulo voidaan laskea. Matriisi A on 3×3-matriisi ja B on 3×4-matriisi, joten AB on määritelty, koska matriisissa A on yhtä monta saraketta kuin matriisissa B on rivejä. Tulo AB on 3×4-matriisi. Tulomatriisin AB alkio, joka on i:nnellä rivillä ja j:nnellä sarakkeella, lasketaan A:n i:nnen rivivektorin ja B:n j:nnen sarakevektorin pistetulona.

Ratkaisu (jatkuu)

Lasketaan pistetulot

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix} = -6, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = 3,$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} = 9, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\\-2\end{pmatrix} = 2,$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix} = -7, \begin{pmatrix}-1 & 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = -8,$$

Ratkaisu (jatkuu)

$$\begin{pmatrix}-1 & 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} = -7, \begin{pmatrix}-1 & 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\\-2\end{pmatrix} = -8,$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} = -7, \begin{pmatrix}-1 & 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\\-2\end{pmatrix} = 8,$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix} = 2, \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = 1,$$

Ratkaisu (jatkuu aina vaan...)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 6.$$

Ikävän puurtamisen jälkeen saadaan

$$AB = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 9 & 2 \\ -7 & -8 & -7 & 8 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$