Tehtävä 1

Laske Paulin spinmatriisien

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

väliset kommutaattorit $[\sigma_x, \sigma_y], [\sigma_y, \sigma_z]$ ja $[\sigma_z, \sigma_x]$. Operaattorien A ja B, kuten samankokoisten neliömatriisien, välinen kommutaattori on $[A, B] = AB - BA$.

Tehtävä 1 ratkaisu

Lasketaan tulot

$$\sigma_x\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

$$\sigma_y\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

$$\sigma_y\sigma_z = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_z\sigma_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

Tehtävä 1 ratkaisu jatkuu

$$\sigma_z\sigma_x = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

$$\sigma_x\sigma_z = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Näin ollen

$$[\sigma_x,\, \sigma_y] = \begin{pmatrix}2i & 0\\ 0 & -2i\end{pmatrix} = 2i\sigma_z, \quad [\sigma_y,\, \sigma_z] = \begin{pmatrix}0 & 2i\\ 2i & 0\end{pmatrix} = 2i\sigma_x,$$

$$[\sigma_z,\, \sigma_x] = \begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix} = 2i\sigma_y.$$

Tehtävä 2

Laske sekatilan $|\boldsymbol{a}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\mathbf{0}\rangle - i\,|\mathbf{1}\rangle\right)$, missä

$$|\mathbf{0}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{1}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

"odotusarvo" $\langle \boldsymbol{a}|\,\sigma_z\,|\boldsymbol{a}\rangle$.

Tehtävä 2 ratkaisu

Lasketaan tulot

$$\sigma_z |\mathbf{0}\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\mathbf{0}\rangle ,$$

$$\sigma_z |\mathbf{1}\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -|\mathbf{1}\rangle .$$

Lineaarisuuden perusteella

$$\sigma_z |\boldsymbol{a}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_z |\mathbf{0}\rangle - i\sigma_z |\mathbf{1}\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\mathbf{0}\rangle + i |\mathbf{1}\rangle) .$$

Lisäksi

$$\langle \boldsymbol{a}| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|\mathbf{0}\rangle - i |\mathbf{1}\rangle) \right)^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle \mathbf{0}| + i \langle \mathbf{1}|) .$$

Tehtävä 2 ratkaisu jatkuu

Tilojen $|\mathbf{0}\rangle$ ja $|\mathbf{1}\rangle$ ortonormaaliuden nojalla saadaan

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{a}|\, \sigma_z \,|\boldsymbol{a}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\langle \mathbf{0}| + i \,\langle \mathbf{1}|\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\mathbf{0}\rangle + i\,|\mathbf{1}\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\langle \mathbf{0}|\, \mathbf{0}\rangle + i^2 \,\langle \mathbf{1}|\, \mathbf{1}\rangle\Big) = \frac{1}{2}(1-1) = 0.\end{aligned}$$