Tehtäviä kompleksiluvuista

1. Määrittele lyhyesti seuraavat käsitteet:

a) kompleksiluvun argumentti ja moduli

b) ykkösen n:nnet juuret

c) De Moivren kaava.

Ratkaisu a) Kompleksiluvun $z \neq 0$ argumentti on sen suuntakulma positiiviseen x-akseliin nähden. Kompleksiluvun $z = x + iy$ moduli on sen pituus eli etäisyys origosta, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

b) Ykkösen n:nnet juuret ovat yhtälön $z^n = 1$, $n \in \mathbf{Z}_+$, ratkaisut. Ne sijaitsevat origokeskisellä yksikköympyrällä $2\pi/n$:n välein ja ne ovat samalla säännöllisen n-kulmion kärkipisteet.

c) De Moivren kaavan mukaan

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, m \quad n \in \mathbf{Z}.$$

2. Laske kompleksilukujen $z_1 = 1 - i$ ja $z_2 = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}i$ tulon ja osamäärän napakoordinaattiesitys.

Ratkaisu Napakoordinaattiesitys voidaan ilmaista kahdessa yhtäpitävässä muodossa $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$. Helpointa on laskennallista käyttää eksponenttiesitystä.

Nyt

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \theta_1 = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

ja

$$|z_2| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \theta_2 = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$$

Näin ollen

$$z_1 z_2 = \sqrt{2}e^{-i\pi/4} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\pi/6} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}e^{-i\pi/12}$$

ja

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}{\frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\pi/6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}e^{-i5\pi/12}.$$

3. Määritä epäyhtälön

$$(2 - |z - i|)\,|z| > 0$$

ratkaisujoukko. Mitä ratkaisujoukko esittää?

Ratkaisu Koska $|z| \geqslant 0$, on oltava tulon merkkisäännön nojalla, että $|z| > 0$ ja $(2 - |z - i|) > 0$. Edellinen epäyhtälöstä saadaan, että $z \neq 0$, jälkimmäisestä saadaan

$$(2 - |z - i|) > 0 \iff |z - i| < 2.$$

Tämän epäyhtälön toteuttavat kaikki kompleksiluvut, joiden etäisyys luvusta i on pienempi kuin 2, eli i-keskisen säteeltään 2 olevan ympyrän sisäpisteet. Tämä voidaan varmistaa laskemalla

$$|z - i| < 2 \iff |z - i|^2 < 2^2 \iff |x + iy - i|^2 < 2^2 \iff x^2 + (y - 1)^2 < 2^2.$$

Siis epäyhtälön

$$(2 - |z - i|)\,|z| > 0$$

toteuttavat kaikki kompleksiluvut, jotka ovat säteeltään 2 ja keskipisteeltään $(0, 1)$ olevan ympyrän sisällä, josta on poistettu origo.