Kompleksiluvuista

23.12.2020

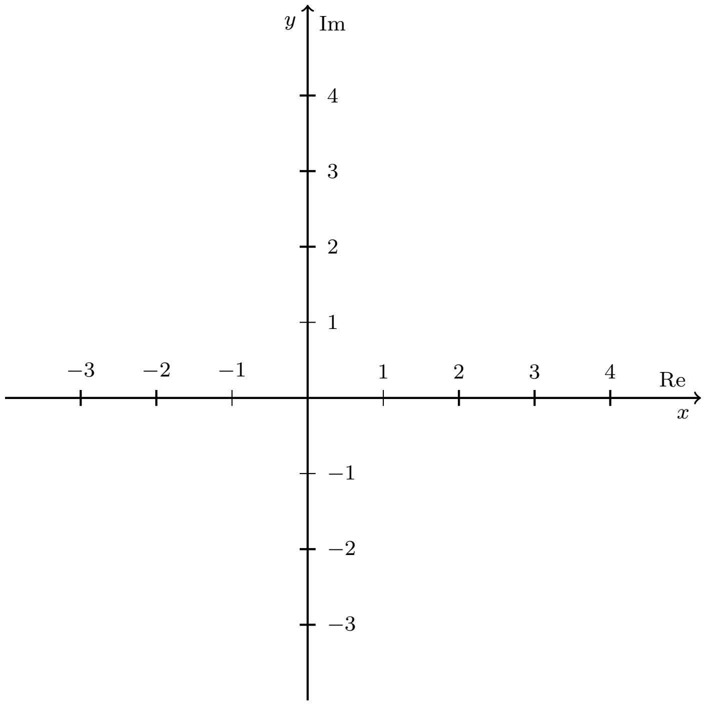
Sisältö

Merkinnät

$\mathbf{N}$	Luonnollisten lukujen $\{0, 1, 2, \ldots\}$ joukko
$\mathbf{P}$	Alkulukujen $\{2, 3, 5, \ldots\}$ joukko
$\mathbf{Q}$	Rationaalilukujen $\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbf{Z}\}$ joukko
$\mathbf{R}$	Reaalilukujen joukko, $\mathbf{R} =]-\infty, \infty[$
$\mathbf{R}_+$	Positiivisten reaalilukujen joukko, $\mathbf{R}_+ =]0, \infty[$
$\mathbf{C}$	Kompleksilukujen $\{z = x + iy : x, y \in \mathbf{R}\}$ joukko
$\in$	Kuuluu joukkoon, $a \in \mathbf{N}$ eli alkio a kuuluu luonnollisten lukujen joukkoon
$\|z\|$	Kompleksiluvun moduli eli itseisarvo
$\overline{z}$	Kompleksiluvun liittoluku eli kompleksikonjugaatti
$\arg z$	Kompleksiluvun $\neq 0$ argumentti eli vaihekulma, sopimus $\arg z \in]-\pi, \pi]$.

1 Kompleksitaso

Reaalilukua voidaan tarkastella lukusuoralla, kun taas tason pistettä (x, y) varten tarvitaan kaksi lukusuoraa. Taso $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) : \ x \in \mathbf{R}, \ y \in \mathbf{R}\}$ voidaan samastaa kompleksitason kanssa. Kompleksitason joukkomerkintä on $\mathbf{C}$, ja kompleksilukua eli tason pistettä merkitään symbolilla z eli $z = (x, y)$. Kuten vektoreillekin kompleksilukujen yhtäsuuruus määritellään komponenteittain eli jos $z = (x, y)$ ja $w = (a, b)$ ovat kompleksilukuja, niin $z = w$ täsmälleen silloin, kun $x = a$ ja $y = b$.



Miksi sitten "määritellä" taso uudellaan kompleksitasona? Osoittautuu, että kompleksilukujen tulolla on hedelmällisiä ominaisuuksia niin algebrassa, geometriassa kuin kompleksimuuttujan funktioissa.

Huomautus. Reaalilukuja voidaan vertailla eli sanoa ovatko reaaliluvut yhtäsuuria tai onko toinen pienempi kuin toinen. Näin ei ole voida tehdä vektoreille eikä myöskään kompleksiluvuille.

2 Kompleksilukujen yhteen- ja kertolasku

Kompleksilukujen summa määritellään samaan tapaan kuin vektoreilla.

Määritelmä 1. Olkoon $z_1 = (x_1, y_1)$ ja $z_2 = (x_2, y_2)$ kompleksilukuja. Tällöin $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbf{C}$.

Kompleksiluvut ja yhteenlasku muodostavat ns. Abelin ryhmän.

Lause 1. $(\mathbf{C}, +)$ on Abelin ryhmä eli

- **i)** $z_1 + (z_1 + z_2) = (z_1 + z_2) + z_3$ kaikilla $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ (yhteenlaskun liitännäisyys)
- **ii)** $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ kaikilla $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ (yhteenlaskun vaihdannaisuus)
- **iii)** $z + (0, 0) = z$ kaikilla $z \in \mathbf{C}$ (neutraalialkio)
- **iv)** jokaista $z \in \mathbf{C}$ kohti on olemassa $-z \in \mathbf{C}$ niin, että $z + (-z) = (0, 0)$ (vasta-alkio).

Tason vektoreille ei voida määritellä tuloa, ainoastaan pistetulo, joka on luku. (Myös tason vektoreille voidaan määritellä ristitulo, mutta se ei ole enää tason vektori.) Kompleksilukujen tulo oikeastaan tekee kompleksilukujen algebrasta ja geometriasta mielenkiintoisen, kuten myöhemmin huomataan.

Määritelmä 2. Kompleksilukujen $z_1 = (x_1, y_1)$ ja $z_2 = (x_2, y_2)$ tulo on

$$z_1 \cdot z_2 = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2) \in \mathbf{C}$$

Kompleksilukujen tulolle pätee seuraavat ominaisuudet.

Lause 2. Olkoon $z_j = (x_j, y_j), j = 1, 2, 3,$ kompleksilukuja. Tällöin seuraavat ehdot pätevät:

- **i)** $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$ (kertolaskun liitännäisyys)
- **ii)** $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ (kertolaskun vaihdannaisuus)
- **iii)** $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ (osittelulaki)
- **iv)** $(1, 0) \cdot z = z$ kaikilla $z \in \mathbf{C}$ (ykkösalkio)
- **v)** Jos $(a, b) \in \mathbf{C}$, $(a, b) \neq (0, 0)$, niin on olemassa täsmälleen yksi kompleksiluku (x, y), jolle $(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0)$. Merkitään lyhyesti $(x, y) = (a, b)^{-1}$ (käänteisalkio).

Tulon määritelmä saattaa tuntua hieman oudolta. Kuitenkin osoittautuu, että

$$(0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0),$$

eli x-akselin pisteen $(-1, 0)$ neliöjuuri on y-akselin piste $(0, 1)$.

3 Reaaliluvut kompleksilukujen osajoukkona

Tarkastellaan reaalilukua x kompleksitason pisteenä $(x, 0)$. Olkoon $x \overset{f}{\mapsto} (x, 0)$ eli $f(x) = (x, 0)$.

Määritelmä 3. Kuvaus h on injektio, jos eri alkioilla on eri kuvat eli

$$x \neq x' \implies h(x) \neq h(x'),$$

missä implikaatio $A \implies B$ tarkoittaa, että jos A niin B. Injektiivisyys voidaan yhtäpitävästi muotoilla seuraavasti

$$h(x) = h(x') \implies x = x',$$

tätä muotoa onkin usein mukavampi käyttää.

Lause 3. Kuvaus $x \overset{f}{\mapsto} (x, 0)$ on injektiivinen.

Todistus. Jos $f(x) = f(a)$ eli $(x, 0) = (a, 0)$, niin $x = a$. □

On helppo todistaa seuraava lause.

Lause 4. Olkoon $f(x)$ kuten edellä. Tällöin pätee

i) $f(x)f(a) = f(x + a)$
ii) $f(x)f(b) = f(xb)$.

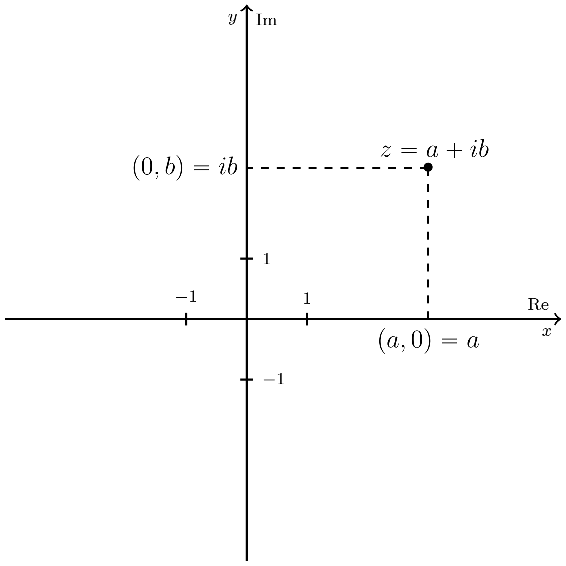
Siis voimme samastaa reaaliluvun x ja kompleksiluvun $f(x) = (x, 0)$ ilman sekaannuksen vaaraa. Lisäksi $f(0) = (0, 0) = 0$ ja $f(1) = (1, 0) = 1$, joten reaalinen nolla- ja ykkösalkio samastuvat kompleksisen nolla- ja ykkösalkion kanssa.

4 Kompleksilukujen joukko ja perusmääritelmät

Vihdoin voimme määritellä kompleksiluvut tavalliseen tapaan.

Määritelmä 4. Imaginaariyksikköä merkitään symbolillä i ja sille pätee $i = (0, 1)$, joten $i^2 = (-1, 0) = -1$. Näin ollen kompleksiluku $z = (x, y)$ voidaan esittää normaali- eli perusmuodossa $z = x + iy$ ja kompleksilukujen joukko on

$$\mathbf{C} = \{x + iy : \ x, y \in \mathbf{R}\}.$$



Kompleksilukujen $z = x + iy$ ja $w = a + ib$ tulo on sama kuin edellä määritelty tason pisteiden $z = (x, y)$ ja $w = (a, b)$ tulo, sillä

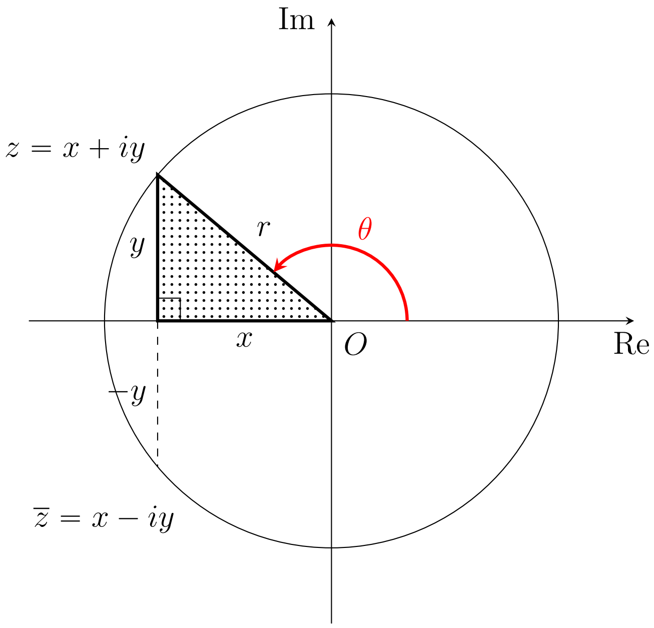
$$zw = (x + iy)(a + ib) = xa + ixb + iya + i^2yb = xa - yb + i(xb + ya).$$

Määritelmä 5. Kompleksiluvun $z = x + iy$ reaali- ja imaginaariosa ovat $\operatorname{Re} z = x$ ja $\operatorname{Im} z = y$. Sanotaan, että kompleksiluku on (puhtaasti) reaalinen, jos $\operatorname{Im} z = 0$, ja puhtaasti imaginaarinen, jos $\operatorname{Re} z = 0$. Lisäksi joskus sanotaan kompleksiluvun oleva aidosti kompleksinen, jos $\operatorname{Im} z \neq 0$.

Luvulla i siis pätee $i^2 = -1$. Näin ollen toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0, \ a, b, c \in \mathbf{R}, \ a \neq 0$, ratkaisut, jos diskriminantti $D < 0$, ovat

$$x = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}, \quad D = b^2 - 4ac.$$

5 Kompleksilukujen geometrisia ominaisuuksia ja napakoordinaattiesitys



Määritelmä 6. Kompleksiluvun $z = x + iy$ liittoluku eli kompleksikonjugaatti $\overline{z} = x + iy$ saadaan peilaamalla piste z x- eli reaaliakselin suhteen

Määritelmä 7. Kompleksiluvun $z = x + iy$ etäisyyttä origosta kutsutaan moduliksi tai pituudeksi, ja se saadaan Pythagoraan lauseella $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Seuraavassa listataan liittoluvun ja modulin ominaisuuksia.

Lause 5. Olkoot $z = x + iy$ ja $w = a + ib$ kompleksilukuja. Tällöin

i) $\overline{\overline{z}} = z$
ii) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
iii) $\overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$
iv) $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}},\ w \neq 0$
v) $\operatorname{Re} z = \dfrac{z + \overline{z}}{2},\ \operatorname{Im} z = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$
vi) $|z|^2 = z\overline{z}$.

Viimeisen kohdan nojalla saadaan kompleksinen murtolauseke, jossa nimittäjässä on aito kompleksiluku, lavennettua normaalimuotoon seuraavasti

$$^{\overline{w})}\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2}.$$

Kompleksiluvun pituudelle, kuten vektorin pituudellekin, pätee kolmioepäyhtälö, jonka mukaan kolmion pisimmän sivun pituus ei voi olla suurempi kuin kahden lyhyemmän sivun pituuden summa.

Lause 6 (Kolmioepäyhtälö)**.** Olkoot z ja w kompleksilukuja. Tällöin

$$||z| - |w|| \leqslant |z + w| \leqslant |z| + |w|.$$

Osoittautuu, että napakoordinaatti- eli polaariesitys on hyvin hedelmällinen kompleksilukujen ja -funktioiden tapauksessa. Polaarimuotoon tarvitaan kompleksiluvun etäisyys eli moduli $r = |z|$ ja vaihekulma θ eli argumentti.

Määritelmä 8. Kompleksiluvun $z \neq 0$ argumentti eli vaihekulma on pisteen $z = x + iy$ suuntakulma positiiviseen x-akseliin nähden. Tehdään sopimus, että $\theta = \arg z \in \left]-\pi, \pi\right]$. Tällä tavoin määriteltynä argumentti määräytyy ehdoista

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad \text{ja} \quad \sin\theta = \frac{y}{r}.$$

Määritelmä 9. Kompleksiluvun $z \neq 0$ napakoordinaatti- eli polaariesitykseksi kutsutaan muotoa

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad r = |z|,\ \theta = \arg z.$$

Huomautus. Kompleksiluvulle $z = 0$ ei voida määritellä suuntakulmaa yksikäsitteisesti. Funktiot sini ja kosini ovat jaksollisia, perusjaksona 2π, joten luvun z polaariesitys on myös

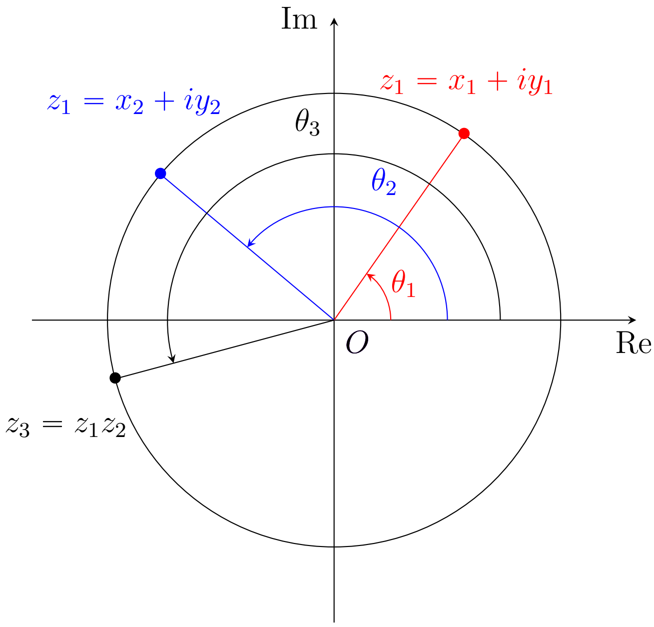
$$z = r\left(\cos(\theta + n \cdot 2\pi) + i\sin(\theta + n \cdot 2\pi)\right) \quad \text{kaikilla } n \in \mathbf{Z}.$$

Kompleksiluvun napakulmat saadaan usein määrättyä ehdosta

$$\tan\theta = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0,$$

kunhan tämän ratkaisusta osataan määrätään oikea kulma; se selviää helpoiten kompleksiluvun perusmuodosta. Napakulmalla viitataan tässä kulmaan, joka voi olla kompleksiluvun z argumentti tai siihen lisättynä 2π:n monikerta, toisin sanoen kaikki kompleksiluvun napakulmat toteuttavat ehdon $\theta = \arg z + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. Joskus argumentin päähaaralla tarkoitetaan kulmaa, joka on välillä $]-\pi, \pi]$, kun argumentti on monihaarainen.

6 De Moivren kaava



Lause 7. Kahden kompleksiluvun $z_1 = r(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ja $z_2 = r(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ tulolle z_3 pätee

$$z_3 = z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right),$$

sillä

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \quad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

Näin ollen samansäteisellä ympyrällä olevien kompleksilukujen z_1 ja z_2, $|z_1| = |z_2|$, tulo vastaa kiertoa. Tulon napakulmalle θ_3 pätee $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$.

Lause 8. Kompleksiluvun $z_1 = r(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \neq 0$ käänteisluvulle pätee

$$z_1^{-1} = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{r}\left(\cos(-\theta_1) + i\sin(-\theta_1)\right) = \frac{1}{r}\left(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1\right),$$

sillä kosini on parillinen ja sini pariton eli $\cos(-x) = \cos x$ ja $\sin(-x) = -\sin x$.

Edellisten lauseiden perusteella osamäärän $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$ napakulmalle pätee $\theta_3 = \theta_1 - \theta_2$, josta on helppo määrätä osamäärän argumentti lisäämällä tai vähentämällä 2π:n monikertoja.

Kertolaskun yleistyksenä saadaan yksikköympyrällä olevalle kompleksiluvulle $\cos\theta + i\sin\theta$ tärkeä de Moivren lause.

Lause 9 (De Moivre)**.** Olkoon $z = \cos\theta + i\sin\theta$. Tällöin

$$z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad \text{kaikilla } n \in \mathbf{Z}.$$

Yksinkertaisena yleistyksenä luvulle $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ pätee

$$z^n = r^n \left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right).$$

De Moivren kaavasta voidaan johtaa yhtälön $z^n = 1$ ratkaisut eli ykkösen n:nnet juuret.

Lause 10 (Ykkösen n:nnet juuret)**.** Yhtälön

$$z^n = 1, \quad n \in \mathbf{Z}_+,$$

ratkaisut kompleksitasossa ovat luvut

$$\omega_k = \omega_{n,k} = \cos k\frac{2\pi}{n} + i\sin k\frac{2\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Kun kompleksiluku w on polaarimuodossa, voidaan edellisen perusteella myös ratkaista yhtälö $z^n = w$.

Lause 11. Olkoon $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, jossa $r = |w|$ ja $\theta = \arg w$. Tällöin yhtälön

$$z^n = w \neq 0, \quad n \in \mathbf{Z}_+,$$

ratkaisut ovat

$$\begin{aligned} z_k = z_{n,k} &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)\omega_{n,k} \\ &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad \omega_{n,k} = \cos k\frac{2\pi}{n} + i\sin k\frac{2\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

Todistus. Olkoon $z = R(\cos\phi + i\sin\phi)$, jossa $R = |z|$ ja $\phi = \arg z$. Tällöin

$$z^n = R^n(\cos n\phi + i\sin n\phi),$$

joten yhtälöstä $z^n = w$ saadaan

$$R^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Kompleksilukujen pituuksien ja napakulmien (modulo 2π) pitää olla yhtä suuret eli

$$\begin{cases} R^n &= r \\ n\phi &= \theta + 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} R &= \sqrt[n]{r} \\ \phi &= \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}, \; k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Jotta samoja ratkaisuja ei tulisi lueteltua moneen kertaan, niin k voi saada vain n eri kokonaislukuarvoa eli $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Siis yhtälön $z^n = w \neq 0$ ratkaisut ovat

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

$\square$

Huomautus. Ykkösen n:nnettä juurta, joka saadaan juurikaavasta

$$\cos k\frac{2\pi}{n} + i\sin k\frac{2\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

indeksillä $k = 1$, merkitään usein symbolilla ω.

7 Eulerin kaava

Eulerin kaavan avulla saadaan vielä yksi esitysmuoto kompleksiluvulle, joka osoittautuu useimmissa tapauksissa hyödyllisimmäksi. Sitä ennen ilman todistusta esitellään eksponentti- ja trigonometristen funktioiden sarjakehitelmät.

Lause 12. Kaikilla reaaliluvuilla x pätee

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots, \\ \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \\ \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \end{aligned}$$

jossa luonnollisen luvun k kertoma on $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k$ ja $0! = 1$.

Sarjakehitelmien avulla saadaan yksi keskeisimmistä kompleksialgebran teoreemoista, joka yhdistää mielenkiitoisella tavalla trigonometriset funktiot ja eksponenttifunktion.

Lause 13 (Eulerin kaava)**.** Jokaisella $x \in \mathbf{R}$ pätee

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Seuraus. Eulerin kaavasta melko suoraviivaisesti saadaan, että

- kompleksiluku $z \neq 0$ voidaan esittää muodossa $z = re^{i\theta}$, $r = |z|$ ja $\arg z = \theta$,
- $\overline{e^{ix}} = \overline{\cos x + i \sin x} = \cos x - i \sin x = e^{-ix}$
- ja $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$

Lisäksi selvästi reaaliluvulle x pätee, että $|e^{ix}| = 1$, ja koska $e^{i(x+n\cdot 2\pi)} = e^{ix}$, niin $\arg e^{ix} = x$ mahdollista 2π:n monikertaa vailla.

Kompleksiluvun eksponenttiesityksen $z = re^{i\theta}$ avulla kompleksilukujen tulo ja osamäärä on helppo laskea, lisäksi tulolla ja osamäärällä on geometrinen tulkinta kiertona ja skaalauksena.

Lause 14. Olkoon $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ja $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ kaksi kompleksilukua ($\neq 0$). Tällöin

$$z_1 z_2 = r_1 r_1 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad \text{ja} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Kompleksilukujen tulo ja osamäärä ovatkin monissa tapauksissa yksinkertaisinta laskea käyttäen kompleksiluvun eksponenttiesitystä. Yllä olevien eksponenttiesityksen tulon ja osamäärän perusteella

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad \arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 \ (+n \cdot 2\pi),$$

ja

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 \ (+n \cdot 2\pi).$$

8 Polynomiyhtälöt

Tarkastellaan tässä astetta n olevaa polynomia P eli

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad a_n \neq 0,$$

missä kertoimet $a_k, k = 1, 2, \ldots, n$, ovat kompleksilukuja. Koska reaaliluvut ovat osa kompleksilukuja, niin nämä kompleksikertoimiset polynomit sisältävät tutut reaalikertoimiset polynomit. Osoittautuu, että polynomin juurille eli yhtälön $P(z) = 0$ ratkaisuille on olemassa ratkaisukaava ainoastaan tapauksissa $n = 1, 2, 3, 4$. Jos asteluku $n = 5$ tai sitä suurempi, ei juuria voi saada selville äärellisellä määrällä peruslaskutoimituksia ja juurenottoja polynomin kertoimista.

Lause 15. Jos polynomilla $P(z)$ on juuri z_0, niin $P(z)$ on jaollinen binomilla $z - z_0$ eli P:llä on tekijä $z - z_0$, toisin sanoen $P(z) = (z - z_0)Q(z)$ kaikilla $z \in \mathbf{C}$. Polynomin Q asteluku on yhtä pienempi kuin P:n asteluku.

Määritelmä 10. Jos polynomin P juuren z_0 kertaluku on $k \leqslant n$, niin z_0 on k-kertainen juuri. Tällöin $P(z) = (z - z_0)^n Q(z)$.

Seuraava lause on tärkeä.

Lause 16 (Algebran peruslause)**.** Jokaisella kompleksikertoimisella polynomilla, joka ei ole vakio, on nollakohta z_0.

Kun algebran peruslausetta sovelletaan jatkuvasti tekijähajotelmaan $P(z) = (z - z_0)Q(z)$, saadaan tärkeä tulos.

Lause 17. Jokainen astetta $n \geqslant 1$ oleva polynomi voidaan jakaa ensimmäisen asteen tekijöihin, joita on yhteensä n kappaletta ja osa tekijöistä voi olla samoja. Siis

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_n (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \ldots (z - z_m)^{k_m},$$

missä $z_1, z_2, \ldots z_m$ ovat eri kompleksilukuja ja nollakohdan $z_j, j = 1, 2, \ldots, m$, kertaluku on k_j. Koska polynomin P aste on n, niin kertaluvuille pätee $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$.

Erityisesti algebran peruslauseen nojalla myös reaalikertoimisella polynomilla, jonka aste on n, on n juurta kompleksitasossa.

Lause 18. Olkoon P astetta $n \geqslant 1$ oleva reaalikertoiminen polynomi. Jos $z = a + ib$ on polynomin P juuri, niin $\bar{z} = a - ib$ on myös sitä.

Tämän perusteella voidaan johtaa reaalikertoimisen polynomin tekijähajotelma.

Lause 19. Olkoon P reaalikertoiminen polynomi. P on joko vakio (aste 0) tai se voidaan jakaa reaalisiin ensimmäisen ja toisen asteen tekijöihin.

Todistus. Tapaus, jossa kaikki nollakohdat tekijähajotelmassa

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_n (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \ldots (z - z_m)^{k_m}$$

ovat reaalisia, on selvä.

Voidaan siis olettaa, että polynomilla on ainakin yksi aidosti kompleksinen nollakohta $z = a + ib, b \neq 0$. Lauseen 18 nojalla myös sen kompleksikonjugaatti $\overline{z} = a - ib$ on polynomin nollakohta. Myös kompleksijuuren $a + ib$ kertaluvun on oltava sama kuin sen liittoluvun $a - ib$ kertaluku. Siis tekijähajotelma voidaan kirjoittaa muodossa

$$
\begin{aligned}
P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k &= a_n (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_l)^{k_l} \\
&\quad [(z - z_{n_1})(z - \overline{z_{n_1}})]^{n_1} [(z - z_{n_2})(z - \overline{n_2})]^{n_2} \dots [(z - z_{n_m})(z - \overline{z_{n_m}})]^{n_m}
\end{aligned}
$$

□

missä reaaliset nollakohdat ovat $z_1, z_2, \dots, z_l$ ja niitä vastaavat kertaluvut $k_1, k_2, \dots k_l$. Vastaavasti kompleksiluvut $z_{n_k} = a_{n_k} + ib_{n_k}$ ja niiden kompleksikonjugaatit $\overline{z_{n_k}}, k = 1, 2, \dots, m$, ovat kertalukua n_k olevia juuria. Koska

$$
(z - (a + ib))(z - \overline{a + ib}) = (z - a + ib)(z - a + ib) = (z - a)^2 - (ib)^2 = (z - a)^2 + b^2,
$$

niin tekijähajotelmaksi saadaan

$$
\begin{aligned}
P(z) &= a_n (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_l)^{k_l} \\
&\quad \left[(z - a_{n_1})^2 + b_{n_1}^2\right]^{n_1} \left[(z - a_{n_2})^2 + b_{n_2}^2\right]^{n_1} \dots \left[(z - a_{n_m})^2 + b_{n_m}^2\right]^{n_m}.
\end{aligned}
$$

Usein termi $(z - a_{n_j})^2 + b_{n_j}^2$ kirjoitetaan muodossa

$$
z^2 + 2p_j x + q_j,
$$

ja tällä ei saa olla reaalisia nollakohtia, joten $p_j^2 - q_j < 0$. Lisäksi reaalimuuttujaa merkitään x:llä, joten reaalikertoimisen reaalimuuttujan polynomin tekijähajotelma on

$$
\begin{aligned}
P(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\
&= a_n (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_l)^{k_l} (x^2 + 2p_1 x + q_1)^{n_1} (x^2 + 2p_2 x + q_2)^{n_2} \dots (x^2 + 2p_m x + q_m)^{n_m},
\end{aligned}
$$

missä siis $a_k \in \mathbf{R}$, $a_n \neq 0$ ja $p_j^2 - q_j < 0$, $j = 1, 2, \dots, m$.

9 Eksponentti- ja logaritmifunktio

Määritellään kompleksimuuttujan eksponenttifunktio. Koska reaaliselle eksponenttifunktiolla pätee $\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1)\exp(x_2)$, $\exp(x) = e^x$, niin vaaditaan myös tämä ominaisuus kompleksiselta eksponenttifunktiolta.

Määritelmä 11. Olkoon $z = x + iy$ kompleksiluku. Tällöin

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Välittömästi tästä määritelmästä saadaan, että

$$|z| = e^x \quad \text{ja} \quad \arg e^z = y, -\pi < y \leqslant \pi.$$

Jaksollisuuden nojalla kaikki kompleksiluvun e^z napakulmat θ toteuttavat ehdon

$$\theta = \operatorname{Im} z + n \cdot 2\pi = y + n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Kahden kompleksiluvun z_1 ja z_2 tulo ja osamäärä on monesti helpointa laskea eksponenttimuodosta. Jos $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ja $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, niin

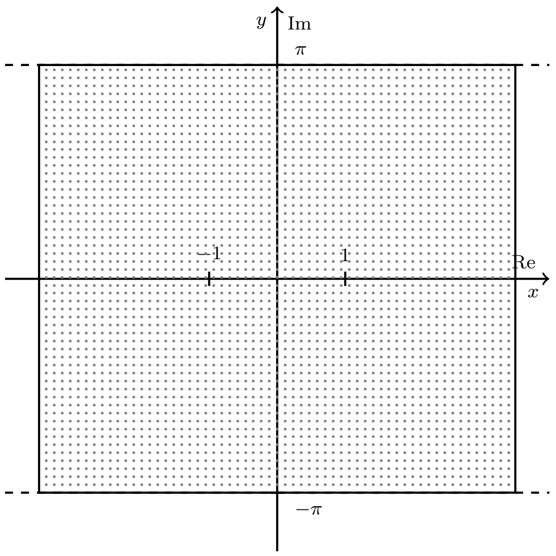
$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Kompleksinen eksponenttifunktio on – hämmästyttävää kyllä – jaksollinen.

Lause 20. Eksponenttifunktiolla on jaksona $2\pi i$, eli kaikilla $z \in \mathbf{C}$ on voimassa $e^{z+2\pi i} = e^z$. Jos lisäksi α on jokin toinen jakso, niin $\alpha = n \cdot 2\pi i$ jollain kokonaisluvulla n.

Tiedetään, että sini ja kosini saavat kaikki arvonsa jollakin perusjakson 2π pituisella reaalilukuvälillä, kuten välillä $]-\pi, \pi]$, joten sovelletaan tätä eksponenttifunktioon.

Lause 21. Eksponenttifunktio e^z saa kaikki arvonsa jaksovyössä
$S = \{z \in \mathbf{C} : \ -\pi < \operatorname{Im} z \leqslant \pi\}$. Itse asiassa tämän jaksovyön valinta on mielivaltainen; jaksovyöksi kelpaa mikä hyvänsä tyyppiä $S' = \{z \in \mathbf{C} : \ y_0 < \operatorname{Im} z \leqslant y_0 + 2\pi\}$ oleva joukko.



Osoittautuu, että jossakin jaksovyössä S' eksponenttifunktio on bijektio eli sekä injektio ja surjektio.

Lause 22. Kuvaus $z \mapsto e^z$ on bijektio jaksovyöltä $S = \{z \in \mathbf{C} : \ -\pi < \operatorname{Im} z \leqslant \pi\}$ joukolle $\mathbf{C}\backslash\{0\}$.

Tämän eksponenttifunktion haaran käänteisfunktiota kutsutaan logaritmin pääarvoksi. Kuten eksponenttifunktiokin, on logaritmi yleisesti "moniarvoinen" funktio. Tämän tulkinnan tarkka määrittely vaatisi Riemannin pintojen teoriaa, joka sivuutetaan.

Määritelmä 12. Kompleksiluvun $w \neq 0$ logaritmi on on sellainen kompleksiluku z, jolle $e^z = w$.

Määritelmä 13. Jos $w = re^{i\phi}$, $r > 0, \ \phi \in]-\pi, \pi]$, niin luvun w logaritmin päähaara on

$$\ln w = \ln r + i\phi.$$

Kaikki luvun w logaritmit saadaan lisäämällä pääarvoon $2\pi i$:n monikertoja

$$\ln w = \ln r + i\phi + n \cdot 2\pi i, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Huomautus. Usein ϕ:lle sallitaan arvoja vain jollakin korkeintaan 2π:n pituisella avoimella välillä. Silloin edellä olevat yhtälöt määräävät yksikäsitteisen funktion. Erityisesti logaritmin päähaara $\ln w = \ln r + i\phi, \ \phi \in]-\pi, \pi[$, kuvaa pitkin negatiivista reaaliakselia aukileikatun kompleksitason, siis joukon $\mathbf{C}\backslash]-\infty, 0]$, bijektiivisesti nauhalla $\{z : \ -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$. Muiden logaritmin haarojen, $\ln w = \ln r + i\phi + n \cdot 2\pi i, \ n \in \mathbf{Z}$, kuvat ovat jaksovyöt $\{z : \ -\pi + n \cdot 2\pi < \operatorname{Im} z < \pi + n \cdot 2\pi\}$.

Tehtäviä

Tehtävä 1. Osoita, että kompleksilukujen yhteenlaskun neutraalialkio $(0, 0)$ ja luvun z vasta-alkio $-z$ ovat yksikäsitteisiä.

Tehtävä 2. Määrää luvun $(a, b) \in \mathbf{C} \backslash \{(0, 0)\}$ käänteisalkio.

Tehtävä 3. Olkoon $(a, b) \in \mathbf{C}$ sellainen kompleksiluku, jonka pituus eli etäisyys origosta on 1. Missä sijaitsee tämän luvun käänteisluku?

Tehtävä 4. Olkoot $z = 1 + i$ ja $w = -1 + i$. Määrää näiden lukujen

i) tulo

ii) tulon ja summan liittoluku

iii) osamäärä.

Tehtävä 5. Laske i^n, kun $n \in \mathbf{N}$.

Tehtävä 6. Määritä luvun $\dfrac{1}{2-i} + \dfrac{i}{1+i}$ reaali- ja imaginaariosa.

Tehtävä 7. Millä parametrin $t \in \mathbf{R}$ arvolla pätee, että

$$|z + itw| = 1, \quad \text{jossa} \quad z = \sqrt{2} - 3i, \ w = -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}i?$$

Tehtävä 8. Millä x:n ja y:n reaaliarvoilla kompleksiluku $z^2 - i$, $z = x + iy$, on reaalinen? Entä puhtaasti imaginaarinen?

Tehtävä 9. Ratkaise kompleksiluvut z ja w yhtälöstä $\begin{cases} 2iz - 3w &= 1 - i \\ 2w - 3iw &= \dfrac{1}{\sqrt{2}i}. \end{cases}$

Tehtävä 10. Määrää ne $z \in \mathbf{C}$, joille $\operatorname{Im}\left(z - \frac{1}{z}\right) = 0$.

Tehtävä 11. Todista lauseen 5 kohdat iv-vi.

Tehtävä 12. Ratkaise yhtälö $z^2 + 2i - 4 = 0$.

Tehtävä 13. Todista, että kolmioepäyhtälön oikea puoli $|z+w| \leqslant |z| + |w|$ pätee kaikilla $z,\, w \in \mathbf{C}$.

Tehtävä 14. Kirjoita kompleksimuodossa z:n $\overline{z}$:n avulla paraabelin $y = x^2$ yhtälö.

Tehtävä 15. Missä kompleksitasossa sijaitsevat pisteet, joissa $\dfrac{z^2+1}{z}$ on puhtaasti imaginaarinen?

Tehtävä 16. Olkoot a ja b reaalilukukuja ja $1+2i$ on polynomin $z^2 + (p+5i)z + (2-i)q$ juuri. Määrää vakiot a ja b sekä polynomin muut juuret.

Tehtävä 17. Määrää yhtälön $z^3 = i$ juuret.

Tehtävä 18. Määrää seuraavien kompleksilukujen polaariesitys

i) $-3i$

ii) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

iii) $\dfrac{-3+i}{\sqrt{10}}$

iv) $(1+i)\left(1-\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})\right)$

v) $\dfrac{1-i}{1+i}$.

Tehtävä 19. Etsi funktion $|z^2 - 2iz|$ suurin ja pienin arvo yksikköympyrässä $\mathbf{S} = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$.

Tehtävä 20. Määrää w, jotta luku $\dfrac{2i-(1-i)w}{w-i}$ olisi puhtaasti reaalinen.

Tehtävä 21. Määritä imaginaariyksikön potenssit i^n.

Tehtävä 22. Laske

i) $(1+i)^6$

ii) $(1-i)^{-3}$

iii) $(-\sqrt{3}+i)^{12}$.

Tehtävä 23. Olkoon $|z| = 2$ ja $|w| = 3$ sekä $\arg z = -\frac{2\pi}{3}$ ja $\arg w = \frac{\pi}{6}$. Määritä lukujen

a) $\dfrac{z}{w}$

b) $\overline{z}^3$

c) $\dfrac{z}{\overline{w}^2}$

itseisarvo ja vaihekulma. Piirrä luvut koordinaatistoon.

Tehtävä 24. Todista induktiolla de Moivren kaava luonnollisille luvuille n eli että

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad \text{kaikilla } n \in \mathbf{N}.$$

Tehtävä 25. Johda kolminkertaisen kulman kaavat $\sin 3x$ ja $\cos 3x$.

Tehtävä 26. Todista identiteetit

a) $\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$, b) $\dfrac{\sin 5\theta}{\sin\theta} = 16\cos^4\theta - 12\cos^2\theta + 1, \theta \neq n\pi$.

Tehtävä 27. Ratkaise yhtälö $z^4 = -32$.

Tehtävä 28. Ratkaise yhtälö $z^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$.

Tehtävä 29. Olkoon ω ykkösen n. juuri, joka saadaan juurikaavasta indeksillä $k = 1$.

a) Osoita, että kaikki ykkösen n:nnet juuret ovat

$$1, \omega, \omega^2, \ldots \omega^{n-1}.$$

b) Laske geometrisen summakaavan avulla

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k.$$

Tulkitse tulos geometrisesti.

Tehtävä 30. Osoita, että yhtälön $z^n = w = r(\cos\theta + i\sin\theta) \neq 0$ ratkaisuille

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

pätee

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)\omega_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

jossa $\omega_k = \omega_{n,k}$ on $z^n = 1$ ratkaisu.

Tehtävä 31. Ratkaise Eulerin kaavan avulla yhtälö $z^6 - i = 0$.

Tehtävä 32. Määritä lausekkeen i^i kaikki arvot.

Tehtävä 33. * Osoita, että

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{3\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}, \quad n \geqslant 2, n \in \mathbf{Z}.$$

Tehtävä 34. Kirjoita lausekkeet sinien ja kosinien summana

a) $\sin 3x \cos 5x$, b) $\cos^4 x$.

Tehtävä 35. Osoita, että Eulerin kaavan mukaiselle eksponenttifunktiolle pätee $e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}$ kaikilla reaaliluvuilla x, y.

Tehtävä 36. Määritä

$$1 + \sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin N\theta.$$

Vinkki: Laske $1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \cdots e^{iN\theta}$.

Tehtävä 37. Todista polynomin tekijää koskeva lause 15.

Tehtävä 38. Todista lause 18.

Tehtävä 39. Todista lause 19 tekijähajotelman (lause 17) avulla.

Tehtävä 40. Ratkaise yhtälö $\overline{e^{iz}} = e^{i\overline{z}}$.

Tehtävä 41. Kirjoita kompleksiluku e^{z^2} perusmuodossa. Määrää myös luvun e^{z^2} kaikki vaihekulmat.

Tehtävä 42. Määritä, miten eksponenttifunktio $\exp(z)$ kuvaa koordinaattiakselien suuntaiset suorat.

Tehtävä 43. Ratkaise yhtälöt

a) $e^z = -3$, b) $e^z = 0$ ja c) $e^z = 1 - i$.

Tehtävä 44. Määritä lukujen

a) -4, b) $\dfrac{1-i}{1+i}$ ja c) $\dfrac{i}{4-4i}$

logaritmit (kaikki arvot).

Tehtävä 45. Missä kompleksitason osajoukossa pätee $|e^{-z}| < 1$?

Vastauksia ja vinkkejä tehtäviin

Tehtävä 1.

Tehtävä 2.

Tehtävä 3.

Tehtävä 4.

Tehtävä 5.

Tehtävä 6.

Tehtävä 7.

Tehtävä 8.

Tehtävä 9.

Tehtävä 10.

Tehtävä 11.

Tehtävä 12.

Tehtävä 13.

Tehtävä 14.

Tehtävä 15.

Tehtävä 16.

Tehtävä 17.

Tehtävä 18.

Tehtävä 19.

Tehtävä 20.

Tehtävä 21.

Tehtävä 22. **i)** $-8i$

ii) $\frac{1}{4}(-1+i)$

iii) 4096

Tehtävä 23. **a)** $\frac{2}{3}, -\frac{5\pi}{6}$

b) $8, 0$

c) $\frac{2}{9}, -\frac{\pi}{3}$

Tehtävä 24.

Tehtävä 25.

Tehtävä 26.

Tehtävä 27.

Tehtävä 28.

Tehtävä 29.

Tehtävä 30.

Tehtävä 31.

Tehtävä 32.

Tehtävä 33.

Tehtävä 34.

Tehtävä 35.

Tehtävä 36.

Tehtävä 37.

Tehtävä 38.

Tehtävä 39.

Tehtävä 40.

Tehtävä 41.

Tehtävä 42.

Tehtävä 43.

Tehtävä 44.

Tehtävä 45.