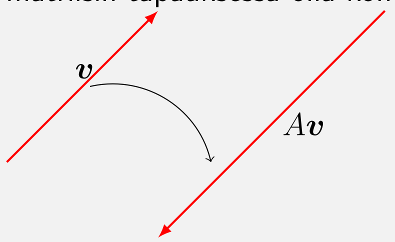
Ominaisarvoteoriaa

Määritelmä. n-ulotteista vektoria $\boldsymbol{v} \neq 0$ sanotaan lineaarikuvauksen $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *ominaisvektoriksi*, jos

$$A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$$

jollakin luvulla λ. Lukua λ sanotaan matriisin ominaisarvoksi, ja se voi reaalisenkin matriisin tapauksessa olla kompleksiluku.



Huomautus. Vektori $\boldsymbol{v}$ on siis yhdensuuntainen vektorin $A\boldsymbol{v}$ kanssa.

Lause. Ominaisvektori $\boldsymbol{v}$ ei ole yksikäsitteinen, ainoastaans sen suunta on.

Tehtävä 1. *Onko vektori* $\boldsymbol{x} = [1, 2]^T$ *matriisin*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

ominaisvektori? Myönteisessä tapauksessa määrää myös vastaava ominaisarvo.

Miten määrätään neliömatriisin ominaisarvot ja vektorit? Vastauksen antaa seuraava lause.

Käänteiskuvauslause

Olkoon A $n \times n$-matriisi. Matriisi on säännöllinen – eli sillä on käänteismatriisi – täsmälleen silloin, kun $\det A \neq 0$.

Käänteiskuvauslauseesta seuraa, että homogeeniyhtälöllä $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ on nollavektorista poikkeava ratkaisu täsmälleen silloin, kun A on epäsäännöllinen, eli $\det A = 0$.

Palataan ominaisvektoriyhtälöön $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. Tästä saadaan yhtäpitävästi

$$A\boldsymbol{x} - \lambda\boldsymbol{x} = 0$$
$$(A - \lambda I)\,\boldsymbol{x} = 0.$$

Koska ominaisvektori ei voi olla nollavektori, voimme muotoilla lauseen.

Lause. Neliömatriisin A ominaisarvot saadaan yhtälöstä

$$\det (A - \lambda I) = 0.$$

Vasen puoli on λ:n suhteen polynomi astetta n, jonka juuret ovat ominaisvot. Lauseketta

$$p_A(\lambda) = \det (A - \lambda I)$$

kutsutaankin matriisin A karakteristiseksi polynomiksi.

Ominaisparien laskeminen

Ominaisarvoa ja sitä vastaavaa ominaisvektoria kutsutaan ominaispariksi. Ominaisarvot ja -vektorit lasketaan seuraavasti

1. Ominaisarvot saadaan yhtälöstä $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$.
2. Ominaisarvoa λ_i vastaava ominaisvektori $\boldsymbol{v}_i$ ratkaistaan yhtälöstä

$$(A - \lambda_i I)\,\boldsymbol{v}_i = 0$$

   esimerkiksi Gaussin eliminointimenetelmällä.

Tehtävä 2. *Määrää matriisin A ominaisparit, kun*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tehtävä 3. *Onko matriisilla*

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

reaalisia ominaisarvoja? Mitä matriisi Q esittää?

Tehtävä 4. *Osoita, että symmetrisen matriisin ominaisarvot ovat aina reaalisia.*