Tehtävä 1

a) Määritä kompleksiluku $z = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ perusmuodossa.

Tehtävä 1

a) Määritä kompleksiluku $z = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ perusmuodossa.

Ratkaisu

Eulerin kaavasta saadaan
$(\sin(-x) = -\sin x,\ \cos(-x) = \cos x)$

$$
\begin{aligned}
z = \sqrt{2}e^{-i\pi/4} &= \sqrt{2}\left(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\cos(\pi/4) - i\sin(\pi/4)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= 1 - i.
\end{aligned}
$$

Tehtävä 1

b) Määrää kompleksiluvun $z = 1 - \sqrt{3}i$ eksponenttiesitys.

Tehtävä 1

b) Määrää kompleksiluvun $z = 1 - \sqrt{3}i$ eksponenttiesitys.

Ratkaisu

Lasketaan kompleksiluvun pituus $|z|$ ja vaihekulma θ.

Tehtävä 1

b) Määrää kompleksiluvun $z = 1 - \sqrt{3}i$ eksponenttiesitys.

Ratkaisu

Lasketaan kompleksiluvun pituus $|z|$ ja vaihekulma θ.
Kompleksiluvun pituus on
$|z| = |1 - \sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2.$

Tehtävä 1

b) Määrää kompleksiluvun $z = 1 - \sqrt{3}i$ eksponenttiesitys.

Ratkaisu

Lasketaan kompleksiluvun pituus $|z|$ ja vaihekulma θ.
Kompleksiluvun pituus on
$|z| = |1 - \sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2.$
Kompleksiluvun $z \neq 0$ vaihekulma θ voidaan laskea tangentin avulla

$$\begin{aligned}
\tan\theta &= \frac{y}{x} \\
\tan\theta &= -\sqrt{3} \\
\theta &= \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Tehtävä 1

b) Määrää kompleksiluvun $z = 1 - \sqrt{3}i$ eksponenttiesitys.

Ratkaisu

Lasketaan kompleksiluvun pituus $|z|$ ja vaihekulma θ.
Kompleksiluvun pituus on
$|z| = |1 - \sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2.$
Kompleksiluvun $z \neq 0$ vaihekulma θ voidaan laskea tangentin avulla

$$\begin{aligned}
\tan\theta &= \frac{y}{x} \\
\tan\theta &= -\sqrt{3} \\
\theta &= \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Kompleksiluvun eksponenttiesitys on $z = |z|e^{i\theta} = 2e^{-i\pi/3}$.

Tehtävä 2

Määrää tilojen

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad |\phi\rangle = \begin{pmatrix} -i \\ 2 \end{pmatrix}$$

välinen sisätulo $\langle\psi|\,\phi\rangle$.

Tehtävä 2

Määrää tilojen

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad |\phi\rangle = \begin{pmatrix} -i \\ 2 \end{pmatrix}$$

välinen sisätulo $\langle\psi|\,\phi\rangle$.

Ratkaisu

Sisätulo on

$$\begin{aligned} \langle\psi|\,\phi\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}^{\dagger} \begin{pmatrix} -i \\ 2 \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -i \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot (-i) + i \cdot 2 = i. \end{aligned}$$

Tehtävä 3

Määrää matriisin $Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ominaisarvot ja toinen ominaisvektori.

Tehtävä 3

Määrää matriisin $Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ominaisarvot ja toinen ominaisvektori.

Ratkaisu

Ominaisarvot saadaan yhtälöstä $\det(Q - \lambda I) = 0$, jossa I on yksikkömatriisi. Määritetään

$$Q - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Ratkaistaan ominaisarvot

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

Tehtävä 3

Ratkaisu (jatkuu)

Ominaisarvoiksi saadaan $\lambda^2 = -1$ eli $\lambda = \pm i$.

Tehtävä 3

Ratkaisu (jatkuu)

Ominaisarvoiksi saadaan $\lambda^2 = -1$ eli $\lambda = \pm i$.
Määritetään ominaisarvoa $\lambda = i$ vastaava ominaisvektori $\overline{v} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^T$. Ratkaistaan yhtälö $Q\overline{v} = \lambda\overline{v}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ix \\ iy \end{pmatrix} \quad \text{eli} \quad \begin{cases} -y = ix \\ x = iy, \end{cases}$$

joten $y = -ix$. Ominaisvektoriksi sopii

$$\overline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$