

Transformada
de Fourier

Otávio Belfort
& Managed

Motivação

Introdução

A Transformada
de Fourier

Transformada
de Fourier

Caso
bidimensional

Forma polar

A Transformada
de Discreta de
Fourier 2-D

Espectro de
Fourier

Resumo das
características
da transformada
de Fourier

Transformada de Fourier

Processamento de Imagens

Otávio Belfort

Prof. Wener Sampaio
Engenharia da Computação

Universidade Federal do Maranhão
São Luís, 2021

Conteúdo

Transformada
de Fourier

Otávio Belfort
& Managed

Motivação

Introdução

A Transformada
de Fourier

Transformada
de Fourier

Caso
bidimensional

Forma polar

A Transformada
de Discreta de
Fourier 2-D

Espectro de
Fourier

Resumo das
características
da transformada
de Fourier

- 1 Motivação
- 2 Introdução
- 3 A Transformada de Fourier
- 4 Transformada de Fourier
- 5 Caso bidimensional
- 6 Forma polar
- 7 A Transformada de Discreta de Fourier 2-D
- 8 Espectro de Fourier
- 9 Resumo das características da transformada de Fourier
- 10 Referências

Table of Contents

Transformada
de Fourier

Otávio Belfort
& Managed

Motivação

Introdução

A Transformada
de Fourier

Transformada
de Fourier

Caso
bidimensional

Forma polar

A Transformada
de Discreta de
Fourier 2-D

Espectro de
Fourier

Resumo das
características
da transformada
de Fourier

1 Motivação

2 Introdução

3 A Transformada de Fourier

4 Transformada de Fourier

5 Caso bidimensional

6 Forma polar

7 A Transformada de Discreta de Fourier 2-D

8 Espectro de Fourier

9 Resumo das características da transformada de Fourier

10 Referências

Transformada de Fourier

Otávio Belfort
& Managed

Motivação

Introdução

A Transformada de Fourier

Transformada de Fourier

Caso bidimensional

Forma polar

A Transformada de Discreta de Fourier 2-D

Espectro de Fourier

Resumo das características da transformada de Fourier

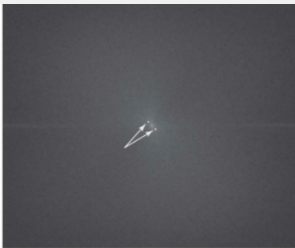


Figure: Respostas de módulo ideais: filtros

Table of Contents

Transformada
de Fourier

Otávio Belfort
& Managed

Motivação

Introdução

A Transformada
de Fourier

Transformada
de Fourier

Caso
bidimensional

Forma polar

A Transformada
de Discreta de
Fourier 2-D

Espectro de
Fourier

Resumo das
características
da transformada
de Fourier

1 Motivação

2 Introdução

3 A Transformada de Fourier

4 Transformada de Fourier

5 Caso bidimensional

6 Forma polar

7 A Transformada de Discreta de Fourier 2-D

8 Espectro de Fourier

9 Resumo das características da transformada de Fourier

10 Referências

Introdução

Transformada
de Fourier

Otávio Belfort
& Managed

.

Motivação

Introdução

A Transformada
de Fourier

Transformada
de Fourier

Caso
bidimensional

Forma polar

A Transformada
de Discreta de
Fourier 2-D

Espectro de
Fourier

Resumo das
características
da transformada
de Fourier

Table: Um nome qualquer

	Periódico	Aperiódico
Contínuo	FS	FT
Discreto	DTFS	DTFT

Introdução

Transformada
de Fourier

Otávio Belfort
& Managed

.

Motivação

Introdução

A Transformada
de Fourier

Transformada
de Fourier

Caso
bidimensional

Forma polar

A Transformada
de Discreta de
Fourier 2-D

Espectro de
Fourier

Resumo das
características
da transformada
de Fourier

Table: Um nome qualquer

- Série de fourier

	Periódico	Aperiódico
Contínuo	FS	FT
Discreto	DTFS	DTFT

Introdução

Transformada
de Fourier

Otávio Belfort
& Managed

.

Motivação

Introdução

A Transformada
de Fourier

Transformada
de Fourier

Caso
bidimensional

Forma polar

A Transformada
de Discreta de
Fourier 2-D

Espectro de
Fourier

Resumo das
características
da transformada
de Fourier

Table: Um nome qualquer

	Periódico	Aperiódico
Contínuo	FS	FT
Discreto	DTFS	DTFT

- **Série de fourier**
- **Transformada de fourier**

(Reference: <http://www>)

Exemplo: decomposição de sinal no domínio da frequência

Transformada de Fourier

Otávio Belfort & Managed

Motivação

Introdução

A Transformada de Fourier

Transformada de Fourier

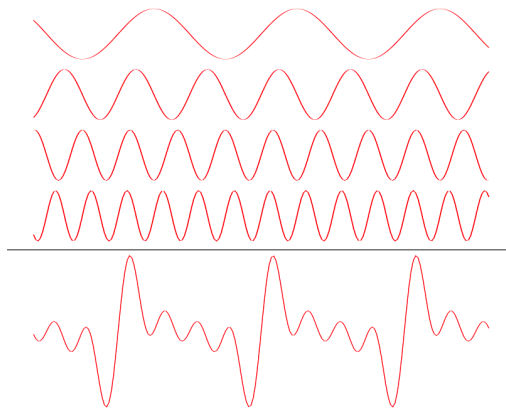
Caso bidimensional

Forma polar

A Transformada de Discreta de Fourier 2-D

Espectro de Fourier

Resumo das características da transformada de Fourier



① $\sin(x) + \theta_1$

② $\sin(2x) + \theta_2$

③ $\sin(3x) + \theta_3$

④ $\sin(4x) + \theta_4$

Figure: Decomposição de sinal

Table of Contents

Transformada
de Fourier

Otávio Belfort
& Managed

Motivação

Introdução

A Transformada
de Fourier

Transformada
de Fourier

Caso
bidimensional

Forma polar

A Transformada
de Discreta de
Fourier 2-D

Espectro de
Fourier

Resumo das
características
da transformada
de Fourier

1 Motivação

2 Introdução

3 A Transformada de Fourier

4 Transformada de Fourier

5 Caso bidimensional

6 Forma polar

7 A Transformada de Discreta de Fourier 2-D

8 Espectro de Fourier

9 Resumo das características da transformada de Fourier

10 Referências

A Transformada de Fourier

Transformada
de Fourier

Otávio Belfort
& Managed

Motivação

Introdução

A Transformada
de Fourier

Transformada
de Fourier

Caso
bidimensional

Forma polar

A Transformada
de Discreta de
Fourier 2-D

Espectro de
Fourier

Resumo das
características
da transformada
de Fourier

Definição: Transformada de Fourier.

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux} dx \quad (1)$$

Transformada de Fourier inversa

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(u)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{j2\pi ux} dx \quad (2)$$

Transformada de Fourier

Otávio Belfort
& Managed

Motivação

Introdução

A Transformada
de Fourier

Transformada
de Fourier

Caso
bidimensional

Forma polar

A Transformada
de Discreta de
Fourier 2-D

Espectro de
Fourier

Resumo das
características
da transformada
de Fourier

Table of Contents

Transformada
de Fourier

Otávio Belfort
& Managed

Motivação

Introdução

A Transformada
de Fourier

Transformada
de Fourier

Caso
bidimensional

Forma polar

A Transformada
de Discreta de
Fourier 2-D

Espectro de
Fourier

Resumo das
características
da transformada
de Fourier

1 Motivação

2 Introdução

3 A Transformada de Fourier

4 Transformada de Fourier

5 Caso bidimensional

6 Forma polar

7 A Transformada de Discreta de Fourier 2-D

8 Espectro de Fourier

9 Resumo das características da transformada de Fourier

10 Referências

Transformada de Fourier

Transformada
de Fourier

Otávio Belfort
& Managed

Motivação

Introdução

A Transformada
de Fourier

Transformada
de Fourier

Caso
bidimensional

Forma polar

A Transformada
de Discreta de
Fourier 2-D

Espectro de
Fourier

Resumo das
características
da transformada
de Fourier

Forma polar.

$$F(u) = |F(u)|e^{j\phi(u)} \quad (3)$$

Magnitude ou espectro:

$$|F(u)| = [R^2(u) + I^2(u)]^{1/2} \quad (4)$$

Fase

$$\Phi(u) = \arctan\left[\frac{I(u)}{R(u)}\right] \quad (5)$$

Transformada de Fourier

Otávio Belfort
& Managed

Motivação

Introdução

A Transformada
de Fourier

Transformada
de Fourier

Caso
bidimensional

Forma polar

A Transformada
de Discreta de
Fourier 2-D

Espectro de
Fourier

Resumo das
características
da transformada
de Fourier

Exemplo: cálculo da transformada

Transformada de Fourier

Otávio Belfort & Managed

Motivação

Introdução

A Transformada de Fourier

Transformada de Fourier

Caso bidimensional

Forma polar

A Transformada de Discreta de Fourier 2-D

Espectro de Fourier

Resumo das características da transformada de Fourier

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx$$

$$= \int_{-X/2}^{X/2} A e^{-j2\pi ux} dx$$

$$= \frac{A}{\pi u} \sin(\pi u X) e^{-j2\pi ux}$$

$$|F(u)| = AX \frac{\sin(\pi u X)}{\pi u X}$$

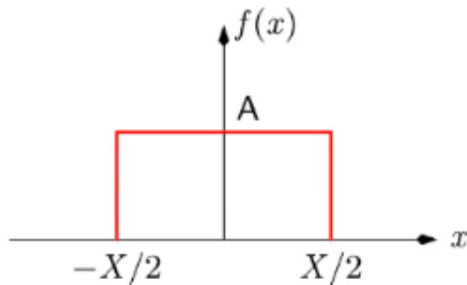


Figure: cálculo da transformada

Exemplo: cálculo da transformada

Transformada de Fourier

Otávio Belfort & Managed

Motivação

Introdução

A Transformada de Fourier

Transformada de Fourier

Caso bidimensional

Forma polar

A Transformada de Discreta de Fourier 2-D

Espectro de Fourier

Resumo das características da transformada de Fourier

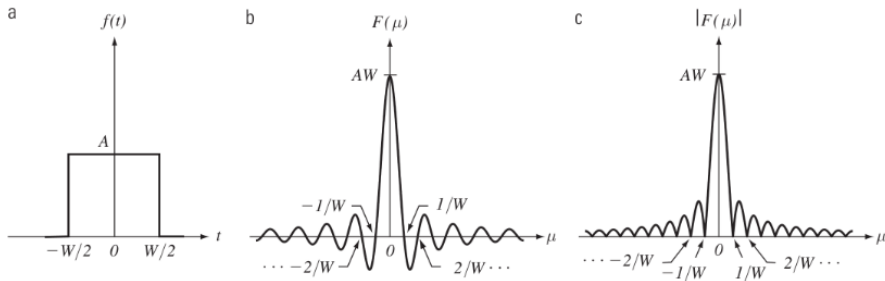


Figure: (a) Uma função simples; (b) sua transformada de Fourier; e (c) o espectro. Todas as funções se estendem ao infinito em ambas as direções

Table of Contents

Transformada
de Fourier

Otávio Belfort
& Managed

Motivação

Introdução

A Transformada
de Fourier

Transformada
de Fourier

Caso
bidimensional

Forma polar

A Transformada
de Discreta de
Fourier 2-D

Espectro de
Fourier

Resumo das
características
da transformada
de Fourier

1 Motivação

2 Introdução

3 A Transformada de Fourier

4 Transformada de Fourier

5 Caso bidimensional

6 Forma polar

7 A Transformada de Discreta de Fourier 2-D

8 Espectro de Fourier

9 Resumo das características da transformada de Fourier

10 Referências

Transformada de Fourier

Transformada
de Fourier

Otávio Belfort
& Managed

Motivação

Introdução

A Transformada
de Fourier

Transformada
de Fourier

Caso
bidimensional

Forma polar

A Transformada
de Discreta de
Fourier 2-D

Espectro de
Fourier

Resumo das
características
da transformada
de Fourier

Expansão para o caso bidimensional:

Transformada de Fourier bidimensional.

$$\mathcal{F}\{f(x, y)\} = F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (6)$$

Para $f(x, y)$ uma função contínua de duas variáveis contínuas

Transformada de Fourier inversa bidimensional

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(u, v)\} = f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv \quad (7)$$

Transformada de Fourier

Otávio Belfort
& Managed

Motivação

Introdução

A Transformada
de Fourier

Transformada
de Fourier

Caso
bidimensional

Forma polar

A Transformada
de Discreta de
Fourier 2-D

Espectro de
Fourier

Resumo das
características
da transformada
de Fourier

Table of Contents

Transformada
de Fourier

Otávio Belfort
& Managed

Motivação

Introdução

A Transformada
de Fourier

Transformada
de Fourier

Caso
bidimensional

Forma polar

A Transformada
de Discreta de
Fourier 2-D

Espectro de
Fourier

Resumo das
características
da transformada
de Fourier

- 1 Motivação
- 2 Introdução
- 3 A Transformada de Fourier
- 4 Transformada de Fourier
- 5 Caso bidimensional
- 6 Forma polar**
- 7 A Transformada de Discreta de Fourier 2-D
- 8 Espectro de Fourier
- 9 Resumo das características da transformada de Fourier
- 10 Referências

Transformada de Fourier

Transformada
de Fourier

Otávio Belfort
& Managed

Motivação

Introdução

A Transformada
de Fourier

Transformada
de Fourier

Caso
bidimensional

Forma polar

A Transformada
de Discreta de
Fourier 2-D

Espectro de
Fourier

Resumo das
características
da transformada
de Fourier

Expansão para o caso bidimensional:

Por Euler tem-se a exponencial.

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \quad (8)$$

Representação polar.

$$\begin{aligned} F(u, v) &= |F(u, v)| e^{-j\phi(u, v)} \\ |F(u, v)| &= [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{1/2} \\ \phi(u, v) &= \arctan\left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)}\right] \quad (9) \end{aligned}$$

Transformada de Fourier

Otávio Belfort
& Managed

Motivação

Introdução

A Transformada
de Fourier

Transformada
de Fourier

Caso
bidimensional

Forma polar

A Transformada
de Discreta de
Fourier 2-D

Espectro de
Fourier

Resumo das
características
da transformada
de Fourier

A mecânica do cálculo da DFT

Transformada
de Fourier

Otávio Belfort
& Managed

Motivação

Introdução

A Transformada
de Fourier

Transformada
de Fourier

Caso
bidimensional

Forma polar

A Transformada
de Discreta de
Fourier 2-D

Espectro de
Fourier

Resumo das
características
da transformada
de Fourier

$$F(0) = \sum_{x=0}^3 f(x) = [f(0) + f(1) + f(2) + f(3)]$$

$$F(1) = \sum_{x=0}^3 f(x) e^{-j2\pi(1)x/4}$$

$$= 1e^0 + 2e^{-j\pi/2} + 4e^{j\pi} + 4e^{j3\pi/2} = 3 + 2j$$

$$F(2) = (1 + 0j)$$

$$F(3) = (3 + 2j)$$

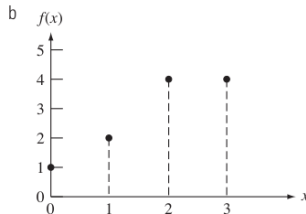
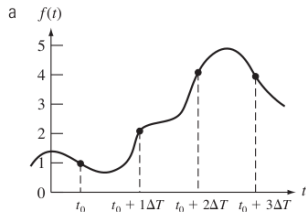


Figure: A mecânica do cálculo da DFT

Exemplo: cálculo da transformada - bidimensional

Transformada de Fourier

Otávio Belfort & Managed

Motivação

Introdução

A Transformada de Fourier

Transformada de Fourier

Caso bidimensional

Forma polar

A Transformada de Discreta de Fourier 2-D

Espectro de Fourier

Resumo das características da transformada de Fourier

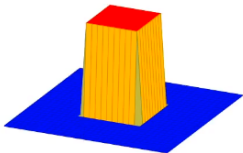


Figure: Decomposição de sinal

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

$$= \int_0^Y \int_0^X A e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

$$= A \frac{\sin(\pi u X)}{\pi u} \frac{\sin(\pi v Y)}{\pi v} e^{-j\pi(uX+vY)}$$

$$|F(u, v)| = AXY \frac{\sin(\pi u X)}{\pi u X} \frac{\sin(\pi v Y)}{\pi v Y}$$

Exemplo: cálculo da transformada - bidimensional

Transformada
de Fourier

Otávio Belfort
& Managed

Motivação

Introdução

A Transformada
de Fourier

Transformada
de Fourier

Caso
bidimensional

Forma polar

A Transformada
de Discreta de
Fourier 2-D

Espectro de
Fourier

Resumo das
características
da transformada
de Fourier

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

$$= \int_0^Y \int_0^X A e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

$$= A \frac{\sin(\pi uX)}{\pi u} \frac{\sin(\pi vY)}{\pi v} e^{-j\pi(uX+vY)}$$

$$|F(u, v)| = AXY \frac{\sin(\pi uX)}{\pi uX} \frac{\sin(\pi vY)}{\pi vY}$$

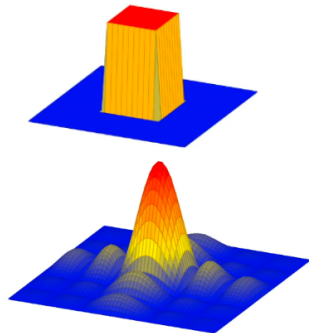


Figure: Decomposição de sinal

Table of Contents

Transformada
de Fourier

Otávio Belfort
& Managed

Motivação

Introdução

A Transformada
de Fourier

Transformada
de Fourier

Caso
bidimensional

Forma polar

A Transformada
de Discreta de
Fourier 2-D

Espectro de
Fourier

Resumo das
características
da transformada
de Fourier

1 Motivação

2 Introdução

3 A Transformada de Fourier

4 Transformada de Fourier

5 Caso bidimensional

6 Forma polar

7 A Transformada de Discreta de Fourier 2-D

8 Espectro de Fourier

9 Resumo das características da transformada de Fourier

10 Referências

A Transformada de Discreta de Fourier 2-D

Transformada
de Fourier

Otávio Belfort
& Managed

Motivação

Introdução

A Transformada
de Fourier

Transformada
de Fourier

Caso
bidimensional

Forma polar

A Transformada
de Discreta de
Fourier 2-D

Espectro de
Fourier

Resumo das
características
da transformada
de Fourier

Transformada de Discreta

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} \quad (10)$$

Transformada de Discreta inversa

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} \quad (11)$$

A notação $f(0, 0), f(0, 1), \dots, f(M-1, N-1)$, demonstra que as amostras são espaçadas igualmente.

Transformada de Fourier

Otávio Belfort
& Managed

Motivação

Introdução

A Transformada
de Fourier

Transformada
de Fourier

Caso
bidimensional

Forma polar

A Transformada
de Discreta de
Fourier 2-D

Espectro de
Fourier

Resumo das
características
da transformada
de Fourier

Relação entre intervalos no espaço e na frequência

Transformada
de Fourier

Otávio Belfort
& Managed

Motivação

Introdução

A Transformada
de Fourier

Transformada
de Fourier

Caso
bidimensional

Forma polar

A Transformada
de Discreta de
Fourier 2-D

Espectro de
Fourier

Resumo das
características
da transformada
de Fourier

é dada por:

- $\Delta u = \frac{1}{M\Delta x}$ e $\Delta v = \frac{1}{N\Delta y}$

Sendo (x_0, y_0) o ponto da primeira amostragem, o demais pontos são amostrados em intervalos fixos $(\Delta x, \Delta y)$, da forma $f(x_0 + x\Delta x, y_0 + y\Delta y)$

- $f(x, y) = f(x_0 + x\Delta x, y_0 + y\Delta y)$

Para $F(u, v)$, temos:

- $F(u, v) = F(u\Delta u, v\Delta v)$

Table of Contents

Transformada
de Fourier

Otávio Belfort
& Managed

Motivação

Introdução

A Transformada
de Fourier

Transformada
de Fourier

Caso
bidimensional

Forma polar

A Transformada
de Discreta de
Fourier 2-D

Espectro de
Fourier

Resumo das
características
da transformada
de Fourier

- 1 Motivação
- 2 Introdução
- 3 A Transformada de Fourier
- 4 Transformada de Fourier
- 5 Caso bidimensional
- 6 Forma polar
- 7 A Transformada de Discreta de Fourier 2-D
- 8 Espectro de Fourier**
- 9 Resumo das características da transformada de Fourier
- 10 Referências

Transformada de Fourier

Otávio Belfort
& Managed

Motivação

Introdução

A Transformada de Fourier

Transformada de Fourier

Caso bidimensional

Forma polar

A Transformada de Discreta de Fourier 2-D

Espectro de Fourier

Resumo das características da transformada de Fourier

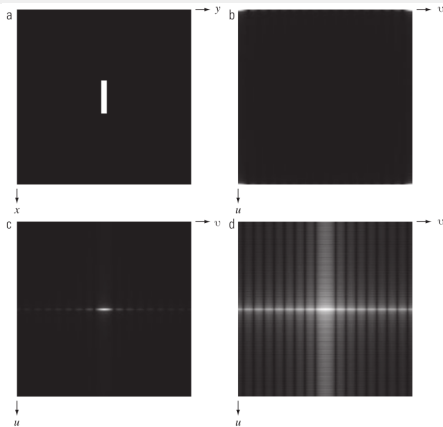


Figure: (a) Imagem. (b) Espectro mostrando regiões com pontos claros nos quatro cantos. (c) Espectro centralizado. (d) Resultado mostrando detalhes realçados após uma transformação logarítmica.

Table of Contents

Transformada
de Fourier

Otávio Belfort
& Managed

Motivação

Introdução

A Transformada
de Fourier

Transformada
de Fourier

Caso
bidimensional

Forma polar

A Transformada
de Discreta de
Fourier 2-D

Espectro de
Fourier

Resumo das
características
da transformada
de Fourier

- 1 Motivação
- 2 Introdução
- 3 A Transformada de Fourier
- 4 Transformada de Fourier
- 5 Caso bidimensional
- 6 Forma polar
- 7 A Transformada de Discreta de Fourier 2-D
- 8 Espectro de Fourier
- 9 Resumo das características da transformada de Fourier**
- 10 Referências

Transformada de Fourier

Otávio Belfort
& Managed

Motivação

Introdução

A Transformada de Fourier

Transformada de Fourier

Caso bidimensional

Forma polar

A Transformada de Discreta de Fourier 2-D

Espectro de Fourier

Resumo das características da transformada de Fourier

Nome	Expressão(ões)
1. Transformada discreta de Fourier (DFT) de $f(x, y)$	$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$
2. Transformada discreta de Fourier inversa (IDFT) de $F(u, v)$	$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$
3. Representação polar	$F(u, v) = F(u, v) e^{j\phi(u, v)}$
4. Espectro	$ F(u, v) = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{1/2}$ $R = \text{Real}\{F\}; I = \text{Im}\{F\}$
5. Ângulo de fase	$\phi(u, v) = \text{tg}^{-1} \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$
6. Espectro de potência	$P(u, v) = F(u, v) ^2$
7. Valor médio	$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) = \frac{1}{MN} F(0, 0)$
8. Periodicidade (k_1 e k_2 são inteiros)	$F(u, v) = F(u + k_1 M, v) = F(u, v + k_2 N)$ $= F(u + k_1 M, v + k_2 N)$ $f(x, y) = f(x + k_1 M, y) = f(x, y + k_2 N)$ $= f(x + k_1 M, y + k_2 N)$

Figure: Resumo das definições de DFT e expressões correspondentes

Table of Contents

Transformada
de Fourier

Otávio Belfort
& Managed

Motivação

Introdução

A Transformada
de Fourier

Transformada
de Fourier

Caso
bidimensional

Forma polar

A Transformada
de Discreta de
Fourier 2-D

Espectro de
Fourier

Resumo das
características
da transformada
de Fourier

- 1 Motivação
- 2 Introdução
- 3 A Transformada de Fourier
- 4 Transformada de Fourier
- 5 Caso bidimensional
- 6 Forma polar
- 7 A Transformada de Discreta de Fourier 2-D
- 8 Espectro de Fourier
- 9 Resumo das características da transformada de Fourier
- 10 Referências**

Transformada de Fourier

Otávio Belfort
& Managed

Motivação

Introdução

A Transformada de Fourier

Transformada de Fourier

Caso bidimensional

Forma polar

A Transformada de Discreta de Fourier 2-D

Espectro de Fourier

Resumo das características da transformada de Fourier

- 1 Gonzalez, Rafael C., and Richard E. Woods. Processamento de imagens digitais. Editora Blucher, 2000.
- 2 <https://agostinhobritojr.github.io/>
- 3 <https://www.youtube.com/watch?v=XNgXhb8gpAE&t=1818s>
- 4 <https://www.youtube.com/watch?v=6DG1qbpTF0Q>