EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

MÉTODO DE EULER

Métodos numéricos – Professor Henri Frederico Eberspacher
Alunos: Mariana Vieira dos Santos e Otávio Augusto Woiciekowski Colares

$$y' + 2\,xy = \ e^{x}$$

$$y = f\,(x)$$

- O que é Equação Diferencial?

São equações envolvendo derivadas cuja solução é uma função.

$$\frac{dy}{dx} + 2\,xy = \; e^{x}$$

$$y = f\,(x)$$

- O que é EDO de 1ª ordem ?

O termo Ordinária indica que as derivadas da equação são em função de uma única variável.

1ª ordem : utiliza apenas a primeira derivada

MÉTODO DE EULER

- Desenvolvido por Leonhard Euler, 1768;
- Resolver EDOs que não possuem soluções analíticas e exatas;
- PVI – Problema de Valor Inicial

Vantagens X Desvantagens

- Método simples;

- Aproximação não é precisa;
- Erro acumulado em cada interação;
- Valores mais exatos exigem maior esforço computacional (maior número de interações);

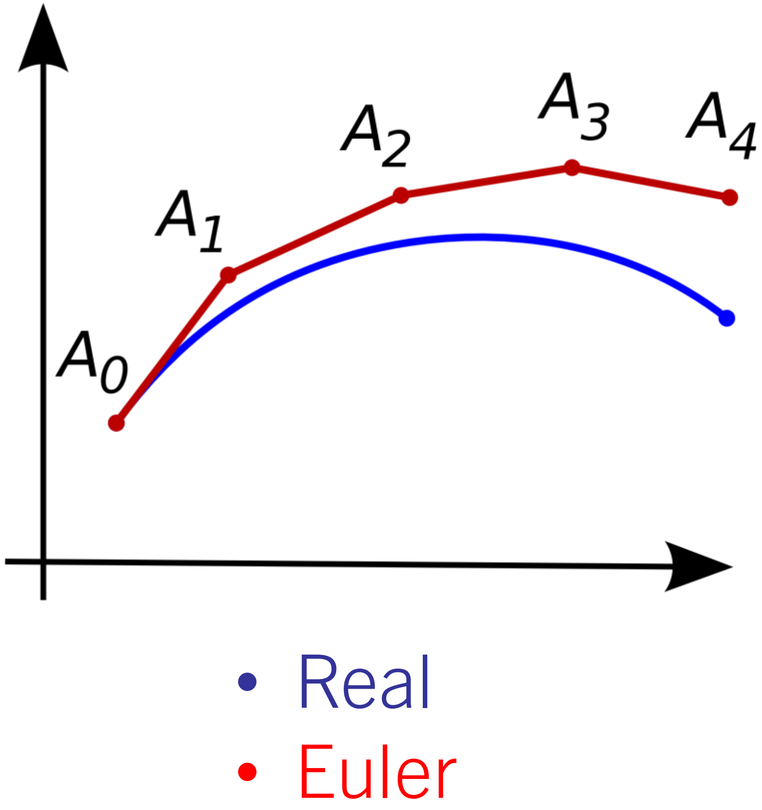
PVI: $$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Método de Euler:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

h – passo

$f(x_n, y_n)$ = inclinação da reta



Método de Euler:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Exemplo: Considere o PVI abaixo e calcule y(4), passo 1

$$y' = y$$
$$y(0) = 1$$
$$y(4) = ?$$

1. Aplicar o ponto inicial $f(x_0, y_0) = f(0, 1) = 1$

2. Multiplicar pelo passo h:

$$y_n = h \,.\, f(y_0)$$
$$y_0 = 1 * 1 = 1$$

3. Obter y_{n+1} acrescentando y_n

$$y_{n+1} = y_n + (h \,.\, f(y_0))$$
$$y_1 = 1 + (1 * 1) = 2$$

n+1	Yn	dy/dx (Inclinação)	Yn+1
Y_1	$Y_0 = 1$	1	2
Y_2	$Y_1 = 2$	2	4
Y_3	$Y_2 = 4$	4	8
Y_4	$Y_3 = 8$	8	16

Método de Euler:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Método Euler (passo 1):

$y(4) = 16$

Solução real:

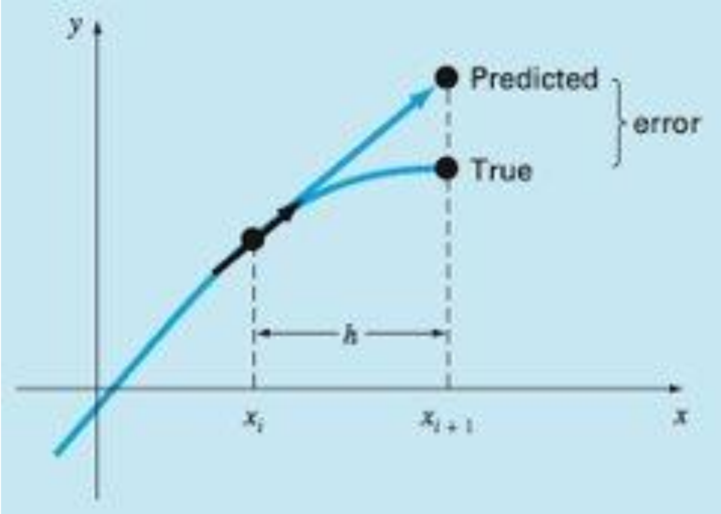
$$e^x = e^4 = 54{,}6$$

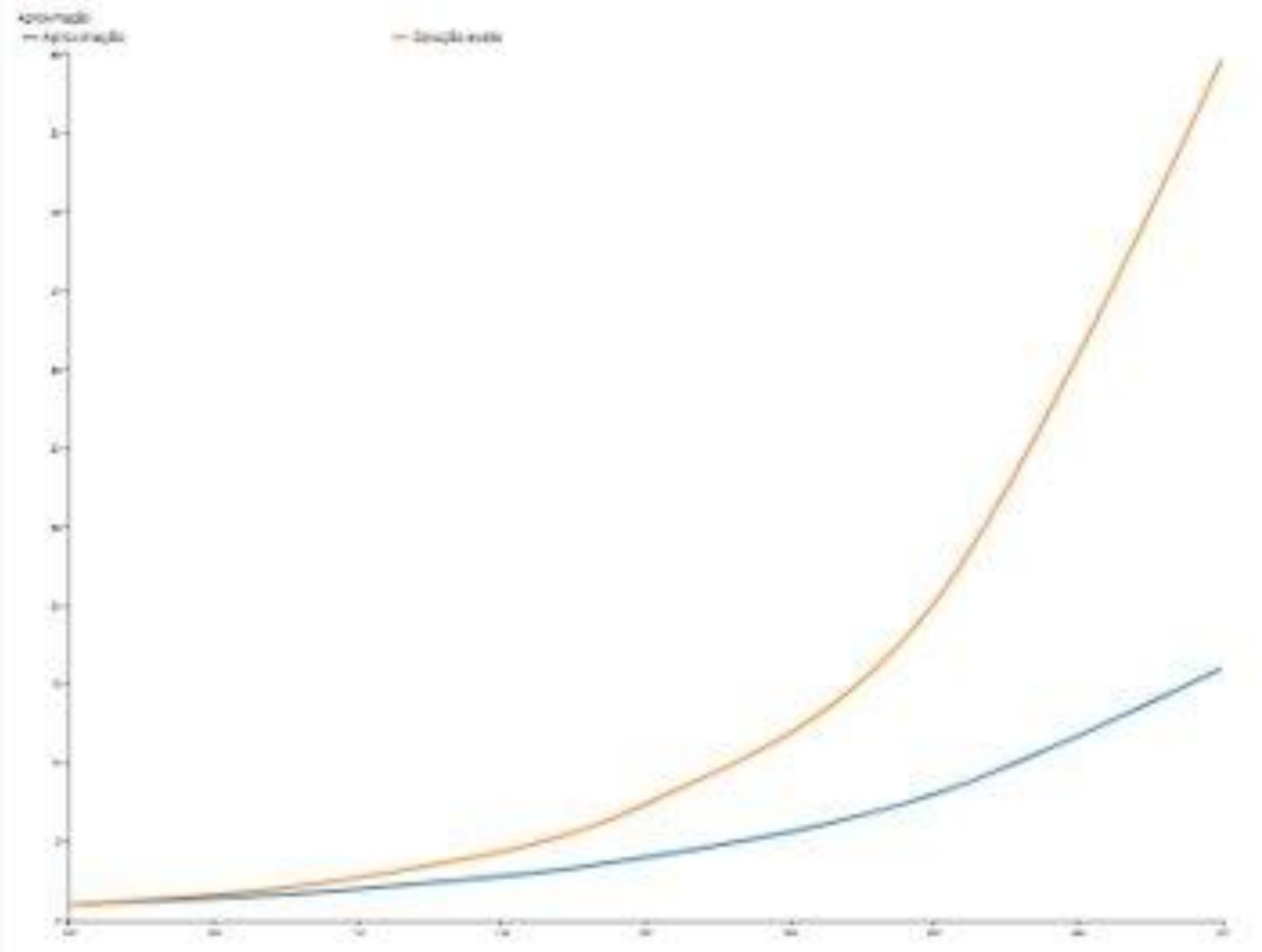
Método Euler (passo 1):

$$y(4) = 16$$

Solução real:

$$e^{x} = e^{4} = 54{,}6$$

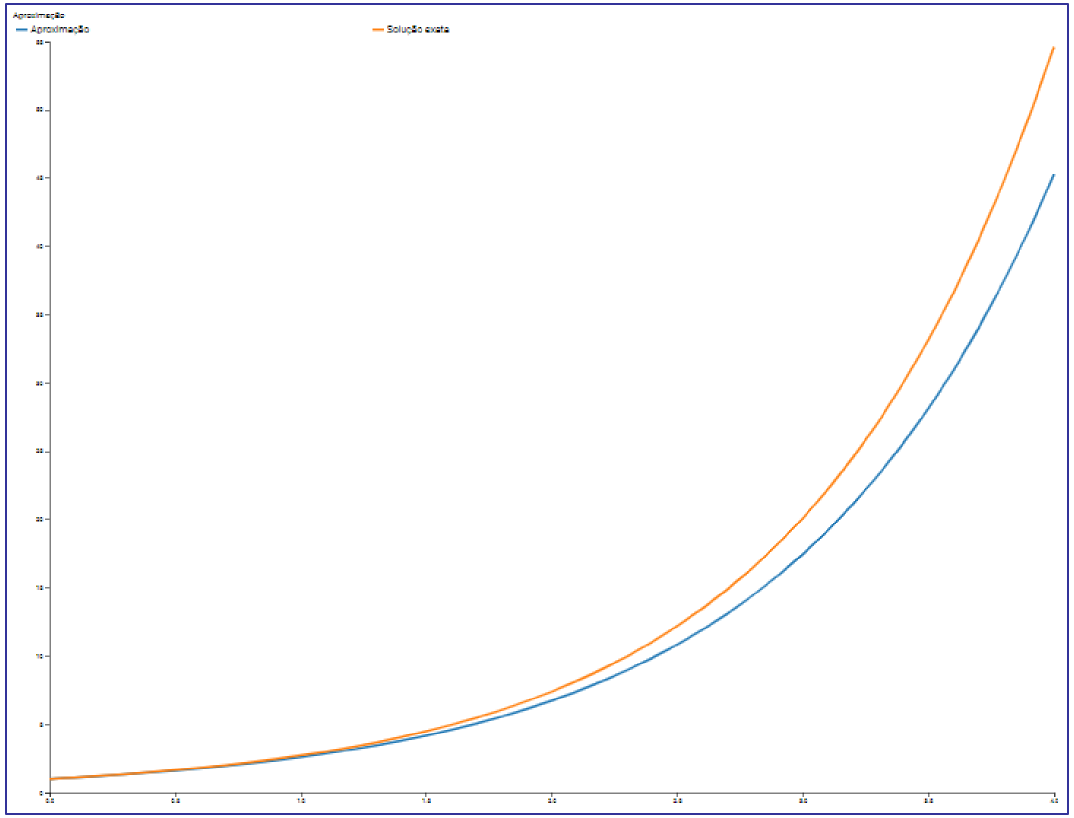




Considerando passo 0,1:

$Y(4) = 45,26$

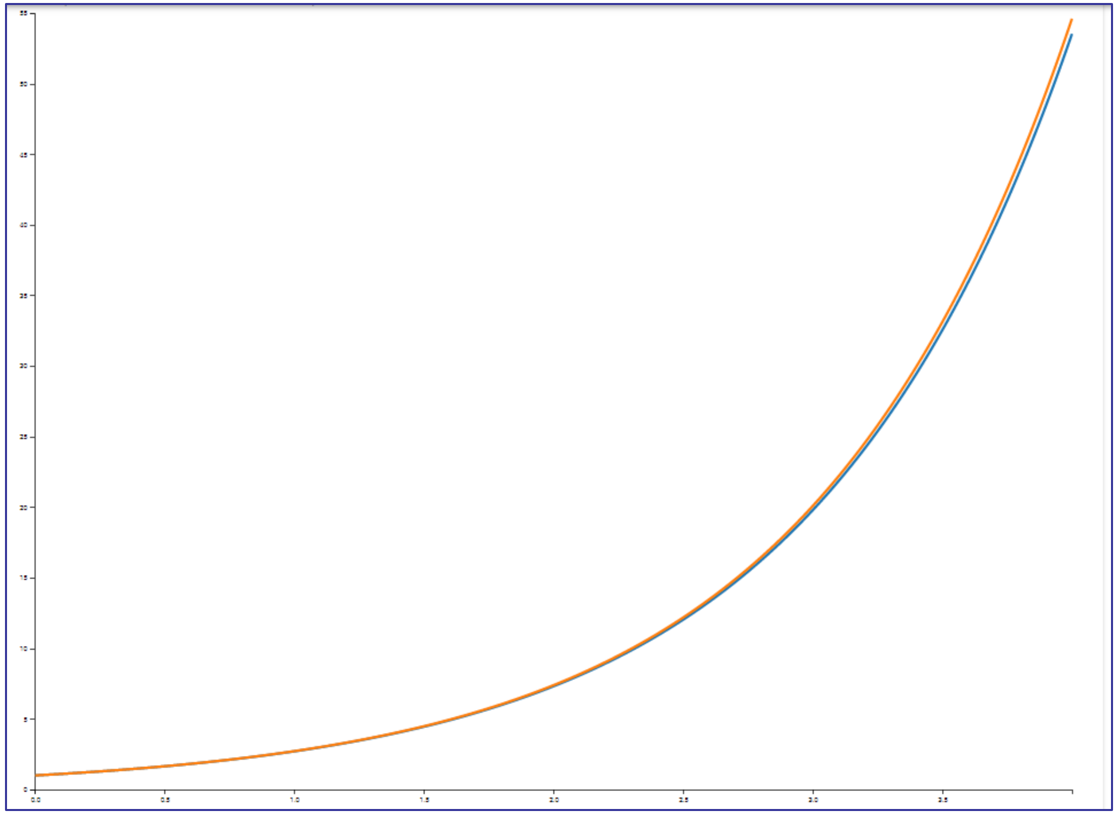
$n = 41$



Considerando passo 0,01:

$Y(4) = 53,52$

$n = 401$



planetcalc.com

Algoritmo 1: EULER

Entrada: a, b, h, y_0

Saída: x e y como pares de pontos da solução do PVI

início

  $x = a : h : b$

  $n \leftarrow tamanho(x)$

  $y(1) = y_0$

  para $i = 1$ *até* $n - 1$ **faça**

    $k = df(x(i), y(i))$

    $y(i + 1) = y(i) + k * h$

  fim

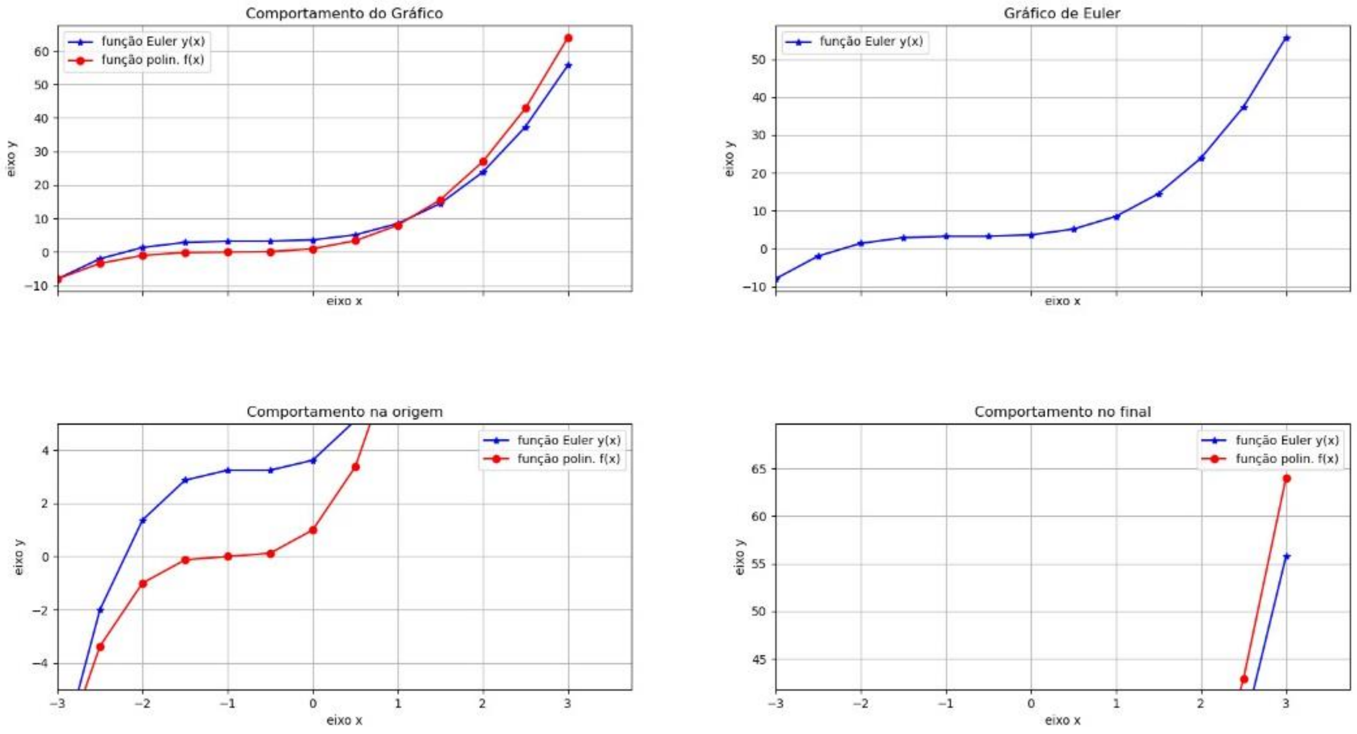
fim

retorna (x, y)

- Exemplo: $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

$y_f(3) = 55{,}75$ ~ via Método de Euler
$y_f(3) = 64{,}0$ ~ via Cálculo Hardcoded
Erro relativo: 12.891%

Aplicação do Método de Euler



GeoGebra