

Projekt IEL

Matej Otcenas (xotcen01)

20. decembra 2018

Obsah

1	Príklad č.1	3
1.1	Zadanie	3
1.2	Postup	3
1.3	Výsledok	6
2	Príklad č.2	7
2.1	Zadanie	7
2.2	Postup	7
2.3	Výsledok	9
3	Príklad č.3	10
3.1	Zadanie	10
3.2	Postup	10
3.3	Výsledok	12
4	Príklad č.4	13
4.1	Zadanie	13
5	Príklad č.5	14
5.1	Zadanie	14
5.2	Postup diferenciálnej rovnice	15
5.3	Výsledok 1	15
5.4	Postup analytického riešenia	15
5.5	Výsledok 2	17
6	Tabuľka výsledkov	18

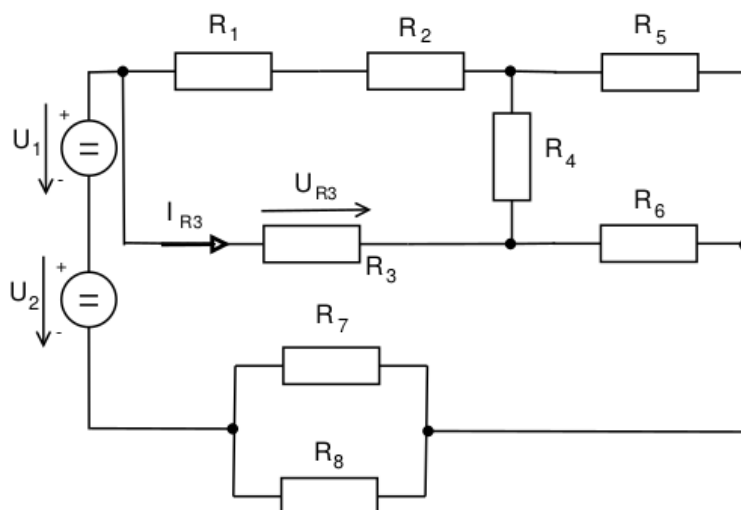
Riešené príklady 2018/19

1 Príklad č.1

1.1 Zadanie

Vypočítaj napätie U_3 a prúd I_3 . Použi metódu postupného zjednodušovania.

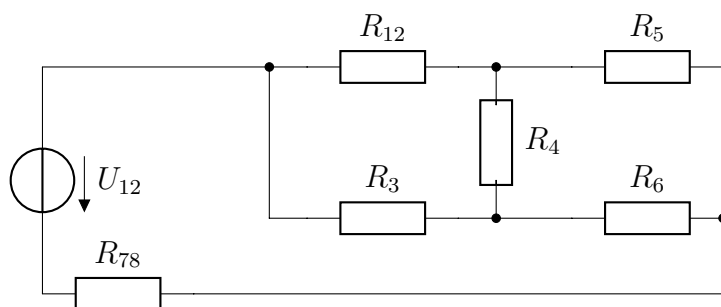
sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]	R_6 [Ω]	R_7 [Ω]	R_8 [Ω]
D	105	85	420	980	330	280	310	710	240	200



1.2 Postup

1. Obvod postupne zjednodušíme :

$$\begin{aligned}
 U &= U_1 + U_2 = 105 + 85 = 190V \\
 R_{12} &= R_1 + R_2 = 980 + 420 = 1400\Omega \\
 R_{78} &= R_7 || R_8 = \frac{R_7 * R_8}{R_7 + R_8} = \frac{240 * 200}{240 + 200} = 109.0909\Omega
 \end{aligned}$$

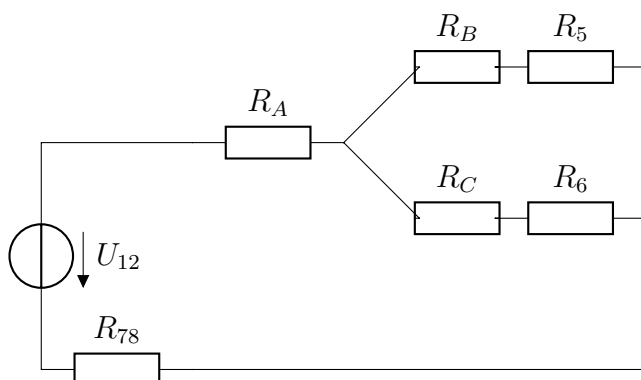


2. Následne prevedieme transfiguráciu R_{12} , R_3 , R_4 z trojuholníka na hviezdu a vzniknú nám rezistory R_A , R_B , R_C .

$$R_A = \frac{R_{12} * R_3}{R_{12} + R_3 + R_4} = \frac{1400 * 330}{1400 + 330 + 280} = 229.8507\Omega$$

$$R_B = \frac{R_{12} * R_4}{R_{12} + R_3 + R_4} = \frac{1400 * 280}{1400 + 330 + 280} = 195.0249\Omega$$

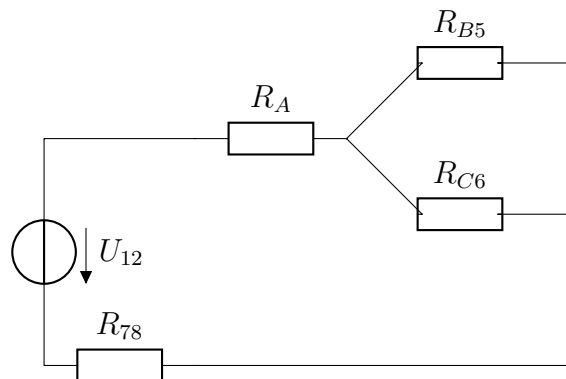
$$R_C = \frac{R_3 * R_4}{R_{12} + R_3 + R_4} = \frac{330 * 280}{1400 + 330 + 280} = 45.9701\Omega$$



3. Využijeme sériového zapojenia rezistorov $R_B + R_5$ a $R_C + R_6$.

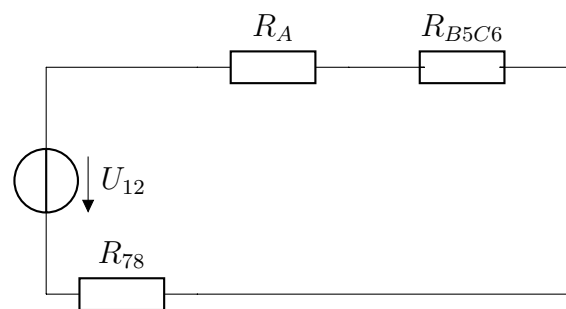
$$R_{B5} = R_B + R_5 = 195.0249 + 310 = 505.0249\Omega$$

$$R_{C6} = R_C + R_6 = 45.9701 + 710 = 755.9701\Omega$$



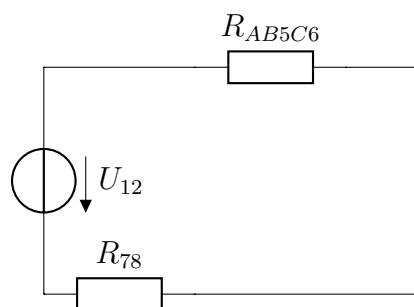
4. Tentokrát nám vzniknú dva paralelne zapojené rezistory R_{B5} a R_{C6}

$$R_{B5C6} = R_{B5} || R_{C6} = \frac{R_{B5} * R_{C6}}{R_{B5} + R_{C6}} = \frac{505.0249 * 755.9701}{505.0249 + 755.9701} = 302.7639\Omega$$



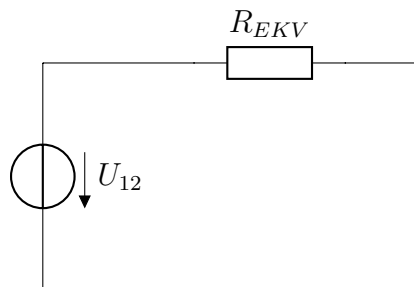
5. Znovu zjednodušíme sériovo zapojené rezistory R_{B5C6} a R_A .

$$R_{AB5C6} = R_{B5C6} + R_A = 302.7639 + 229.8507 = 532.6146\Omega$$



6. Nakoniec vypočítame R_{EKV} pomocou sériovo zapojených rezistorov R_{AB5C6} a R_{78} .

$$R_{EKV} = R_{AB5C6} + R_{EKV} = 532.6146 + 109.0909 = 641.7055\Omega$$



7. Zistíme celkový prúd $I = \frac{U_{12}}{R_{EKV}}$

$$I = \frac{190}{641.7055} = 0.2961 \text{ A}$$

8. Analogicky sa musím vrátiť naspäť aby som zistil napätie U_3 a prúd I_3 . Potrebujem zostaviť rovnicu $U_{R_3} = U_{12} - U_{R_6} - U_{R_{78}}$

$$U_{R_{B5C6}} = U_{R_{C6}} = I * R_{B5C6} = 0.2961 * 302.7639 = 89.6484V$$

$$U_{R_{78}} = I * R_{78} = 0.2961 * 109.0909 = 32.3018V$$

9. Vypočítam prúd $I_{R_{C6}} = I_{R_6}$ aby som mohol vypočítať napätie U_{R_6} .

$$I_{R_{C6}} = \frac{U_{R_{C6}}}{R_{C6}} = \frac{89.6484}{755.9701} = 0.1186A$$

$$U_{R_6} = I_{R_6} * R_6 = 0.1186 * 710 = 84.2060\Omega$$

10. Môžem zostaviť rovnicu z bodu č.8

$$U_{R_3} = U_{12} - U_{R_6} - U_{R_{78}} = 190 - 84.2060 - 32.3018 = 73.5019V$$

$$I_{R_3} = \frac{U_{R_3}}{R_3} = \frac{73.5019}{330} = 0.2227A$$

1.3 Výsledok

$$U_{R_3} = 73.5019V$$

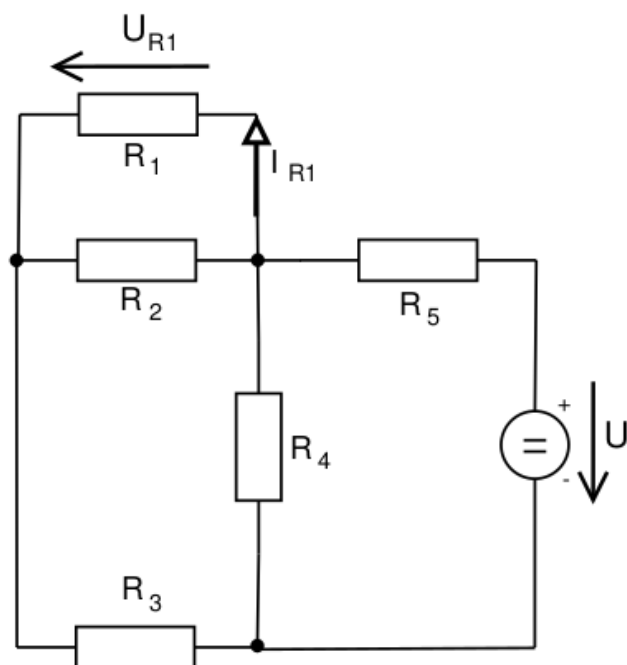
$$I_{R_3} = 0.2227A$$

2 Príklad č.2

2.1 Zadanie

Stanovte napätie U_{R_1} a prúd I_{R_1} . Použite metódu Théveninovej vety.

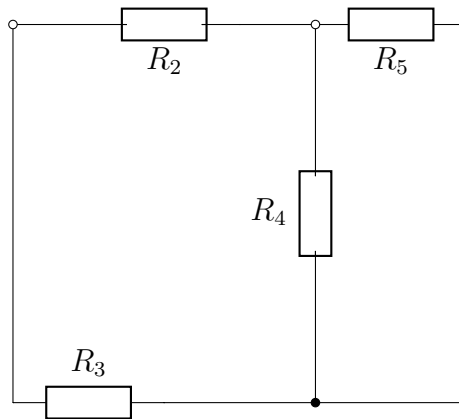
sk.	U [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
B	100	50	310	610	220	570



2.2 Postup

1. Odpojíme rezistor R_1 , zdroj U a spočítame vnútorný odpor R_i

$$\begin{aligned}
 R_{45} &= R_4 || R_5 = \frac{R_4 * R_5}{R_4 + R_5} = \frac{220 * 570}{220 + 570} = 158.7342\Omega \\
 R_{345} &= R_{45} + R_3 = 158.7342 + 610 = 768.7342\Omega \\
 R_i &= \frac{R_{345} * R_2}{R_{345} + R_2} = \frac{768.7342 * 310}{768.7342 + 310} = 220.9141\Omega
 \end{aligned}$$



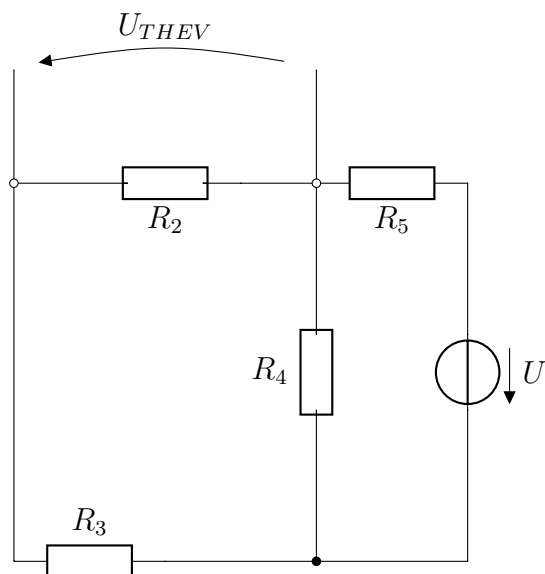
2. Vypočítame prúd I v obvode pomocou celkového odporu R_{CELK}

$$\begin{aligned}
 R_{23} &= R_2 + R_3 = 310 + 610 = 920\Omega \\
 R_{234} &= R_{23} || R_4 = \frac{R_{23} * R_4}{R_{23} + R_4} = \frac{920 * 220}{920 + 220} = 177.5439\Omega \\
 R_{CELK} &= R_{234} + R_5 = 177.5439 + 570 = 747.5439\Omega
 \end{aligned}$$

$$I = \frac{U}{R_{CELK}} = \frac{100}{747.5439} = 0.1338A$$

3. Vypočítam napätie $U_{THEV} = U_{R_2}$, ktoré je na odpore R_2 . Musíme vypočítať I_{R_2} .

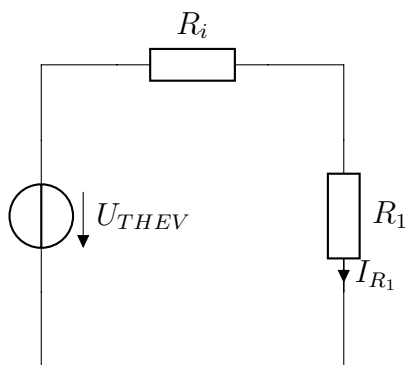
$$\begin{aligned}
 I_{R_{234}} &= I \\
 U_{R_{23}} &= U_{R_{234}} \\
 U_{R_{234}} &= I * R_{234} = 0.1338 * 177.5439 = 23.7554V \\
 I_{R_2} &= I_{R_{23}} \\
 I_{R_2} &= \frac{U_{R_{23}}}{R_{23}} = 0.0258A \\
 U_{THEV} &= I_{R_2} * R_2 = 7.998V
 \end{aligned}$$



4. Pomocou U_{THEV} , vnútorného odporu R_i a odporu R_1 je možné stanoviť hľadaný prúd I_{R_1} a napätie U_{R_1}

$$I_{R_1} = \frac{U_{THEV}}{R_i + R_1} = \frac{7.998V}{220.9141 + 50} = 0.0295A$$

$$U_{R_1} = R_1 * I_{R_1} = 50 * 0.0295 = 1.475V$$



2.3 Výsledok

$$U_{R_1} = 1.8350V$$

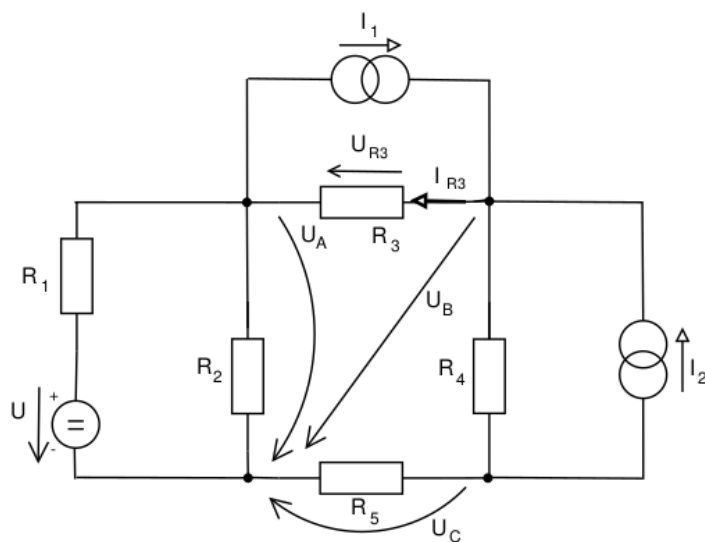
$$I_{R_1} = 0.0367A$$

3 Príklad č.3

3.1 Zadanie

Stanovte napätie U_{R_3} a prúd I_{R_3} . Použite metódu uzlových napätí (U_A , U_B , U_C).

sk.	U [V]	I_1 [A]	I_2 [A]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
G	160	0.65	0.45	46	41	53	33	29



3.2 Postup

1. Zostavíme rovnice pre 3 uzly A, B, C podľa $I.K.Z$

$$A: I_{R_1} - I_{R_2} + I_{R_3} - I_1 = 0$$

$$B: I_{R_2} - I_{R_4} - I_{R_3} + I_1 = 0$$

$$C: I_{R_4} - I_{R_5} - I_2 = 0$$

2. Jednotlivé odpory vyjadrím cez vodivosť

$$G_1 = \frac{1}{R_1} = 0.0217\Omega$$

$$G_2 = \frac{1}{R_2} = 0.0244\Omega$$

$$G_3 = \frac{1}{R_3} = 0.0189\Omega$$

$$G_4 = \frac{1}{R_4} = 0.0303\Omega$$

$$G_5 = \frac{1}{R_5} = 0.0345\Omega$$

3. Rozpíšem rovnice podľa *II.K.Z* a využijem vodivosť pre zjednodušenie výpočtu

$$A : G_1 * (U - U_A) + G_3 * (U_B - U_A) - G_2 * U_A = I_1$$

$$B : -G_4 * (U_B - U_C) - G_3 * (U_B - U_A) = -I_1 - I_2$$

$$C : G_4 * (U_B - U_C) - G_5 * U_C = I_2$$

4. Tieto rovnice môžeme upraviť tak aby sa nám z nich lepšie zostavila matica

$$A : -U_A * (G_1 + G_2 + G_3) + G_3 * U_B + G_1 * U = I_1$$

$$B : -U_B * (G_4 + G_3) + G_4 * U_C + G_3 * U_A = -I_1 - I_2$$

$$C : -U_C * (G_4 + G_5) + G_4 * U_B = I_2$$

5. Z týchto rovníc následne zostavíme maticu

$$\begin{bmatrix} -G_1 - G_2 - G_3 & G_3 & 0 \\ G_3 & -G_4 - G_3 & G_4 \\ 0 & G_4 & -G_4 - G_5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 - (G_1 * U) \\ -I_1 - I_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

6. Spočítame jej determinant D_{et} , a potom dosadíme pravú stranu rovnice za U_A a U_B a spočítame ich detrimanty D_{et_A} D_{et_B}

$$\begin{bmatrix} -0.065 & 0.0189 & 0 \\ 0.0189 & -0.0492 & 0.0303 \\ 0 & 0.0303 & -0.0648 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.822 \\ -1.1 \\ 0.45 \end{bmatrix}$$

7. D_{et} , D_{et_A} a D_{et_B} po výpočte:

$$\begin{aligned} D_{et} &= [(-0.000207) - (-0.000059 - 0.000023)] = -0.000207 + 0.000082 = -0.000125 \\ D_{et_A} &= [(-0.008996 + 0.000257) - (-0.002591 + 0.001347)] = -0.008739 + 0.00125 = -0.007489 \\ D_{et_B} &= [(-0.004633) - (-0.000886 + 0.003456)] = -0.004633 - 0.00257 = -0.007203 \end{aligned}$$

8. Z toho získame napätia U_A a U_B

$$\begin{aligned} U_A &= \frac{D_{et_A}}{D_{et}} = \frac{-0.0075}{-0.000125} = 60V \\ U_B &= \frac{D_{et_B}}{D_{et}} = \frac{-0.0072}{-0.000125} = 57.6V \end{aligned}$$

9. Aby sme zistili U_{R_3} a I_{R_3} musíme zostaviť nasledovnú rovnicu

$$\begin{aligned} U_{R_3} &= I_{R_3} * R_3 = \frac{U_A - U_B}{R_3} * R_3 = U_A - U_B = 57.6 - 60 = -2.4V \\ I_{R_3} &= \frac{U_{R_3}}{R_3} = \frac{-2.4}{53} = -0.04528A \end{aligned}$$

3.3 Výsledok

10. Výsledky nám vyšli záporné lebo sme zvolili opačný smer v smyčke čo však nevadí a my môžeme iba odstrániť znamienko

$$\begin{aligned} U_{R_3} &= 2.4V \\ I_{R_3} &= 0.04528A \end{aligned}$$

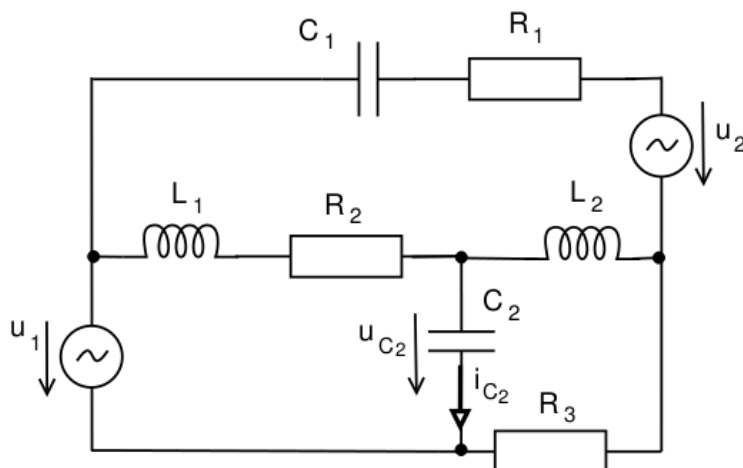
4 Príklad č.4

4.1 Zadanie

Pre napájacie napätie platí: $u_1 = U_1 * \sin(2\pi ft)$, $u_2 = U_2 * \sin(2\pi ft)$. Vo vzťahu pre napätie $u_{C_2} = U_{C_2} * \sin(2\pi ft + \varphi_{C_2})$ určte $|U_{C_2}|$ a φ_{C_2} . Použite metódu smyčkových prúdov.

Pozn: Pomocné "smery šípok napájacích zdrojov platia pre špeciálny časový okamih ($t = \frac{\pi}{2\omega}$)."

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	L_1 [mH]	L_2 [mH]	C_1 [μF]	C_2 [μF]	f [Hz]
D	45	50	13	15	13	180	90	210	75	85



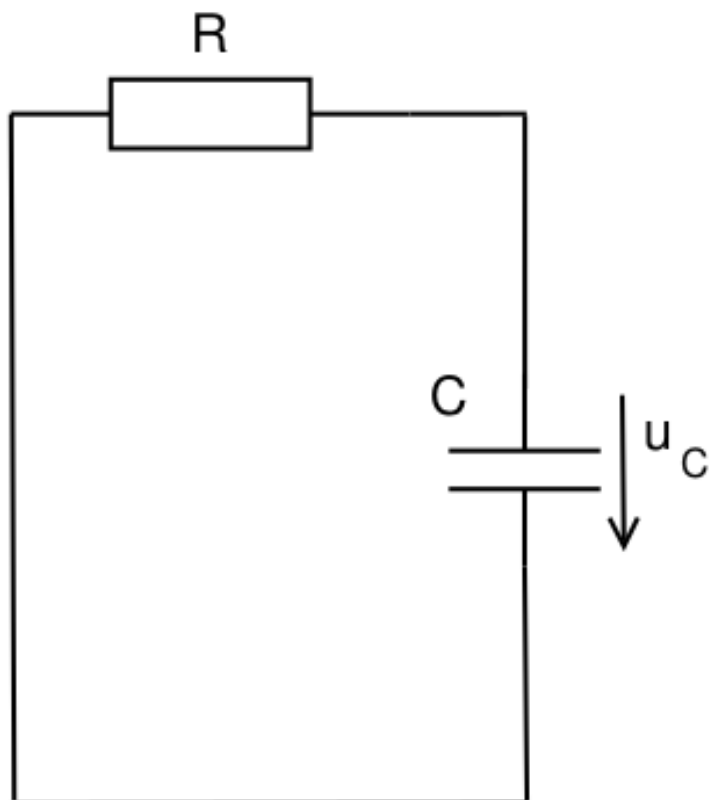
!!!TODO!!!

5 Príklad č.5

5.1 Zadanie

Zostavte diferenciálnu rovnicu popisujúcu chovanie obvodu na obrázku, ďalej ju upravte dosadením hodnôt parametrov. Vypočítajte analytické riešenie $u_C = f(t)$. Vykonajte kontrolu výpočtu dosadením do zostavenej diferenciálnej rovnice.

sk.	C [F]	R [Ω]	$u_C(0)$ [V]
B	10	20	8



5.2 Postup diferenciálnej rovnice

1. Poznáme $R, C, u_C(0)$ a vieme vyjadriť:

$$\begin{aligned} A : I &= \frac{U_R}{R} \\ I &= I_C = I_R \end{aligned}$$

$$U_R + U_C = 0 \implies U_R = -U_C$$

2. Ďalej určíme počiatočnú podmienku $U_C(0) = U_{C_p}$ a zostavíme ďalšiu rovnicu

$$B : U'_C = \frac{1}{C} * I_C$$

5.3 Výsledok 1

3. Dosadíme rovnicu A do B a určíme diferenciálnu rovnicu prvého rádu

$$\begin{aligned} U'_C &= \frac{1}{C} * \frac{U_R}{R} \\ U'_C &= \frac{U_R}{R * C} \\ U'_C &= -\frac{U_C}{R * C} = -\frac{U_C}{200} \end{aligned}$$

5.4 Postup analytického riešenia

1. Vyjadriť charakteristickú rovnicu

$$\begin{aligned} \text{Pozn. : } U'_C &\rightarrow \lambda \\ U_C &\rightarrow 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U'_C &= -\frac{U_C}{R * C} \\
\lambda &= -\frac{1}{R * C} \\
\lambda &= -\frac{1}{20 * 10} \\
\lambda &= -\frac{1}{200}
\end{aligned}$$

2.Očakávaný tvar rovnice

$$\begin{aligned}
u_C(t) &= k(t) * e^{\lambda * t} \\
u_C(t) &= k(t) * e^{-\frac{t}{200}}
\end{aligned}$$

3.Zderivujeme rovnicu

$$U'_C = k'(t) * e^{-\frac{t}{200}} + k(t) * e^{-\frac{t}{200} * (-\frac{1}{200})}$$

4.Dosadíme U'_C a U_C do rovnice $U'_C + \frac{U_C}{R * C} = 0$

$$k'(t) * e^{-\frac{t}{200}} - \frac{k(t) * e^{-\frac{t}{200}}}{200} + \frac{k(t) * e^{-\frac{t}{200}}}{200} = 0$$

5.Vyjadríme $k'(t)$

$$k'(t) * e^{-\frac{t}{200}} = 0$$

6.Zintegrujeme $k'(t)$

$$\begin{aligned}
&\int k'(t) \\
k(t) &= 0 + k
\end{aligned}$$

7.Dosadíme $k(t)$ do očakávaného riešenia (bod č.2)

$$u_C(t) = k * e^{-\frac{t}{200}}$$

8. Dosadíme počiatočnú podmienku $U_C(0) = U_{C_p}$

$$\begin{aligned}U_{C_p} &= k * e^{-\frac{t}{200}} = k * e^0 = k * 1 \\U_{C_p} &= k\end{aligned}$$

5.5 Výsledok 2

9. Výsledná rovnica pre $u_C(t)$

$$\begin{aligned}\text{Vieme : } u_C(0) &= U_{C_p} * e^{-\frac{t}{200}} \\U_{C_p} &= 8\end{aligned}$$

$$u_C(t) = 8 * e^{-\frac{t}{200}}$$

10. Urobíme skúšku správnosti dosadením U'_C a U_C do pôvodnej rovnice ($t = 0$)

$$\begin{aligned}U_C(0) &= U_{C_p} * e^{-\frac{t}{R * C}} \\U'_C &= -\frac{U_C}{R * C} \\-\frac{U_{C_p}}{R * C} * e^{-\frac{t}{R * C}} &= -\frac{U_{C_p}}{R * C} * e^{-\frac{t}{R * C}} \\-\frac{U_{C_p}}{R * C} &= -\frac{U_{C_p}}{R * C} \\-\frac{8}{20 * 10} &= -\frac{8}{20 * 10} \\-0.04 &= -0.04\end{aligned}$$

6 Tabuľka výsledkov

pr.č	sk.	výsledok
1	D	$U_{R_3} = 73.5019[V]$ $I_{R_3} = 0.2227[A]$
2	B	$U_{R_1} = 1.4750[V]$ $I_{R_1} = 0.0295[A]$
3	G	$U_{R_3} = 2.4[V]$ $I_{R_3} = 0.04528[A]$
4	D	!!!TODO!!!
5	B	$U'_C = -\frac{U_C}{200}$ $u_C(t) = 8 * e^{-\frac{t}{200}}$